

17.10.88

3.48  
1988



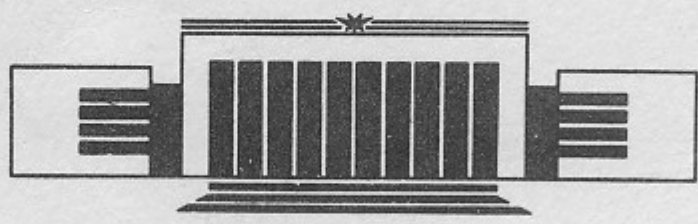
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

В.Г. Зелевинский, В.В. Соколов

ДИНАМИКА И СТАТИСТИКА  
НЕСТАБИЛЬНЫХ КВАНТОВЫХ СОСТОЯНИЙ



ПРЕПРИНТ 88-79



НОВОСИБИРСК

2



### АННОТАЦИЯ

Статистическая теория спектров, формулируемая в терминах случайных матриц, обобщается на нестабильные состояния. В простейших статистических предположениях исследуется статистика энергий и ширин как собственных значений эффективного неэрмитова гамильтониана. При слабом смешивании состояний через общие каналы распада статистика описывается формулами Вигнера для расстояний между уровнями и Портера—Томаса для ширин. Однако расталкивание уровней исчезает на расстояниях, меньших ширин. В то же время расталкивание комплексных собственных значений оказывается квадратичным. При сильном смешивании формируется  $k$  быстро распадающихся состояний ( $k$ —число открытых каналов распада), аккумулирующих почти всю полную ширину. Остальные состояния являются долгоживущими. Такая перестройка отвечает выделению прямых процессов (ядерный аналог когерентного сверхизлучения Дикке). Появление эриксоновских флуктуаций сечений оказывается невозможным при малом числе каналов.

Полностью проанализирован случай одноканального рассеяния. При произвольной силе внешнего смешивания найдено совместное распределение энергий и ширин; получена средняя плотность нестабильных состояний.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Статистические методы все более глубоко проникают в физику реальных квантовых систем. Это связано как с неопределенностями структуры системы (неупорядоченное твердое тело или атом в случайном внешнем поле), так и со сложностью волновых функций, которая может возникать не только в системах многих тел, но при определенных условиях и в случае малого числа степеней свободы. Выявилась глубокая связь между статистическими свойствами квантовой системы и динамической устойчивостью (или ее отсутствием) траекторий в фазовом пространстве соответствующей классической системы.

Существующие статистические подходы [1] можно условно разделить на глобальные и локальные. В теориях первого типа речь идет о широких энергетических интервалах. Уровни характеризуются энергией  $E$  и точными интегралами движения  $I$ , а основной статистической величиной является плотность уровней  $\rho_l(E)$  с данными значениями квантовых чисел. Это ведет к предельно сокращенному описанию, использующему обычно термодинамические понятия. Фактически происходит усреднение по волновым функциям, являющимся типичными представителями собственных состояний данного гамильтониана в определенной области энергий возбуждения. Примером теорий такого рода может служить боровская концепция составного ядра [2].

В подходах локального типа [3] рассматриваются последовательности близких уровней системы, так что регулярная зависи-



мость их свойств от энергии возбуждения не столь существенна, а главным объектом изучения становятся корреляции и флуктуации величин, относящихся к конкретным состояниям. Эту область исследований естественно назвать статистической спектроскопией [4]. Бурное ее развитие было инициировано глубокими работами Вигнера [5] и Дайсона [6], хотя эмпирические исследования «локальных» закономерностей были начаты задолго до них [7]. Обычно изучается статистика положений уровней и матричных элементов простых операторов [8]. Именно здесь выяснилось различие «регулярных» и «нерегулярных» квантовых систем и связь с квазипериодическим или эргодическим поведением их классических аналогов [9—11].

Адекватным математическим аппаратом для изучения локальной статистики квантовых состояний является теория случайных матриц [3, 6, 12]. При этом происходит переход к еще более высокой степени абстракции, чем ансамбль Гиббса в термодинамике. Усреднение по случайным гамильтонианам позволяет выявить наиболее глубокие свойства квантового движения, определяемые не деталями динамики, а в первую очередь общим ее характером (эрмитовость гамильтониана, T-инвариантность). Нерегулярность движения влечет за собой гипотезу эквивалентности различных базисов для описания сложных состояний, что на языке случайных матриц означает инвариантность функций распределения матричных элементов относительно ортогональных преобразований. Полученный таким образом гауссов ортогональный ансамбль (ГОА) случайных симметричных матриц хорошо описывает область нерегулярного движения как в модельных расчетах, так и в реальных системах (например, изолированные нейтронные резонансы в ядрах). При отсутствии T-инвариантности возникает гауссов унитарный ансамбль (ГУА) комплексных эрмитовых матриц. Хорошо известно, что ГОА и ГУА предсказывают, соответственно, линейное и квадратичное расталкивание соседних уровней на малых расстояниях, что отражает возможность пересечения термов лишь на множестве меры нуль в пространстве случайных матричных элементов.

В действительности все возбужденные состояния физических систем имеют конечное время жизни. Их свойства изучаются с помощью внешних полей, которые возбуждают эти состояния, распадающиеся затем по тому или другому каналу. Гауссовы ансамбли, о которых шла речь, применимы, строго говоря, лишь к дискретным стационарным уровням. Если считать, что распад состоя-

ния  $m$  по каналу  $a$  осуществляет анализ сложной волновой функции, определяя квадрат модуля  $|A_m^a|^2$  одной из ее компонент, связанной с данным каналом, то ГОА предсказывает и распределение вероятностей распадов. В частности, при наличии одного канала получается распределение Портера—Томаса [13], хорошо согласующееся с экспериментальными данными [1] для нейтронных ширин изолированных резонансов. Однако в общем случае статистическое описание реакций требует добавочных гипотез, касающихся функций распределения амплитуд различных процессов. Поэтому статистическая теория реакций развивалась в течение многих лет по существу независимо от статистической спектроскопии и лишь сравнительно недавно были сделаны шаги к единому описанию как уровней открытой квантовой системы, так и амплитуд и сечений реакций [14—16].

Недостаточно исследованным остается, однако, вопрос о влиянии связи с континуумом на свойства самих нестабильных состояний. Фактически это влияние рассматривалось лишь в некоторых численных расчетах (см., например, [17]) конкретных ядерных процессов. Ясно, что даже в случае изолированных резонансов ( $\Gamma/D \ll 1$ ) распадность должна модифицировать результаты статистической теории. Так, нет оснований ожидать, что расталкивание уровней сохранится на расстояниях, сравнимых с их ширинами. Отдаленным классическим аналогом этого является возможность пересечения «коридоров», возникающих в результате диссипативных процессов из непересекающихся фазовых траекторий консервативного движения. В случае же перекрывающихся резонансов ( $\Gamma/D \gtrsim 1$ ) открытость системы становится определяющей. В динамике системы начинает доминировать связь перекрывающихся уровней с общими каналами распада («внешнее» смешивание через континуум [18]). Эта связь существенно влияет и на статистические свойства нестабильных состояний.

Перечисленный круг вопросов приводит к проблеме спектральных свойств ансамблей неэрмитовых случайных матриц. Эти ансамбли, описывающие нестабильные квантовые системы, являются обобщениями гауссовых ансамблей эрмитовых гамильтонианов. В данной работе мы будем исходить из общей теории резонансных ядерных реакций [19], в которой амплитуда реакции в хорошем приближении представляется в виде суммы по полюсам

$$\mathcal{E}_n = E_n - \frac{i}{2} \Gamma_n$$
 в комплексной плоскости энергии. Эти полюсы отвечают нестабильным промежуточным состояниям с энергиями



$E_n$  и ширинами  $\Gamma_n$ . В простейших статистических предположениях мы получим совместную функцию распределения  $E_n$  и  $\Gamma_n$  в процессах одноканального упругого рассеяния. В этом случае вычеты в полюсах амплитуды вследствие условия унитарности выражаются через комплексные энергии  $\mathcal{E}_n$  и их статистические свойства следуют из свойств последних. При наличии открытых неупругих каналов возникает новый вопрос о распределении этих вычетов.

Если связь промежуточной системы с непрерывным спектром является слабой и резонансы не перекрываются ( $\Gamma/D \ll 1$ ), наши гипотезы приводят к тем же результатам, что и теория Вигнера—Дайсона [3, 5, 6]. Лишь на самых малых расстояниях  $|E_m - E_n| < \max\{\Gamma_m, \Gamma_n\}$  исчезает характерное для этой теории расталкивание уровней. Однако в случае сильного внешнего смешивания главную роль начинает играть алгебраическая структура антиэрмитовой части гамильтониана. Эта структура диктуется, по существу, лишь условием унитарности, и ее следствия носят весьма общий характер. Благодаря ей происходит резкое перераспределение («коллективизация») ширин и формируются быстро распадающиеся состояния, число которых равно числу открытых каналов реакций. В результате выделяются быстрые «прямые» процессы, а оставшиеся промежуточные состояния с большим временем жизни имеют малые сечения возбуждения. Такое разделение находится в соответствии с представлением [20] о двухстадийном характере протекания ядерных процессов в области перекрытия резонансов. Аналогичное явление — образование в системе с группой вырожденных уровней короткоживущего когерентно распадающегося состояния — известно в квантовой оптике под названием сверхизлучения Дикке [21]. Такое состояние системы  $N$  одинаковых двухуровневых атомов имеет ширину  $\Gamma = N\gamma$ , где  $\gamma$  — ширина возбужденного уровня одиночного атома.

В разделе 2 мы обсудим вытекающую из общей теории реакций связь элементов матрицы рассеяния  $\hat{S}$  с феноменологическим эффективным гамильтонианом, а также свойства этого гамильтониана. Здесь показано, в частности, что число ненулевых собственных значений его антиэрмитовой части не может превышать числа открытых каналов. В разделе 3 рассмотрены различные формы секулярного уравнения, определяющего энергии и ширины нестабильных состояний. На примере одноканального рассеяния демонстрируется явление аккумуляции ширин на одном состоянии при сильной связи с континуумом. Вводится феноменологическая  $R$ -матрица и сравниваются разные представления матрицы рассея-

ния. Разделы 4 и 5 посвящены обсуждению статистических гипотез. Рассмотрены распределения матричных элементов и собственных значений эрмитовой и антиэрмитовой частей эффективного гамильтониана. В разделах 4 и 6 получены средние по ансамблю значения  $R$ - и  $S$ -матриц, а также средние сечения рассеяния и поглощения. В разделе 7 найдено распределение энергий и ширин нестабильных промежуточных состояний в упругом рассеянии и проанализированы свойства этого распределения. Наконец, в разделе 8 получена средняя плотность нестабильных состояний в комплексной плоскости энергии. Рассмотрены случаи слабого и сильного внешнего смешивания.

## 2. ЭФФЕКТИВНЫЙ ГАМИЛЬТониАН И МАТРИЦА РАССЕЯНИЯ

Рассмотрим сложную квантовую систему (например, сильно возбужденное атомное ядро) в области энергии  $E$ , содержащей  $N$  резонансных состояний, изучаемых с помощью реакции  $a \rightarrow b$  ( $a, b = 1, 2, \dots, k$  — открытые при этой энергии каналы). Согласно [19], матрица рассеяния

$$S^{ba}(E) = \delta^{ba} - iT^{ba}(E) \quad (2.1)$$

выражается через амплитуды  $A_n^a$  связи внутренних базисных состояний  $n = 1, 2, \dots, N$  с каналами посредством общего соотношения<sup>1)</sup>

$$T^{ba}(E) = \sum_{m,n=1}^N A_m^{b*} \left( \frac{1}{E - \mathcal{H}} \right)_{mn} A_n^a, \quad (2.2)$$

где  $N \times N$  — матрица в пространстве состояний

$$\mathcal{H} = H - \frac{i}{2} W. \quad (2.3)$$

Матрицы  $H$  и  $W$  эрмитовы, причем

$$W_{mn} = \sum_{a=1}^k A_m^a A_n^{a*} \quad (2.4)$$

(суммирование ведется по  $k$  открытым каналам).

<sup>1)</sup> Для простоты мы полагаем, что отсутствует вклад чисто потенциальной части рассеяния. Его учет не представляет принципиальных трудностей.



Равенство (2.4) обеспечивает унитарность  $S$ -матрицы (2.1) [18]. Что касается матрицы  $H$ , то она выражается как через амплитуды связи внутренних состояний со всеми (открытыми и закрытыми) каналами, так и непосредственно через матричные элементы межнуклонного взаимодействия. И амплитуды  $A_n^a$ , и элементы матрицы  $\mathcal{H}$  являются, вообще говоря, плавными функциями энергии. Считая, однако, что плотность уровней велика, так что интервал исследуемых энергий мал по сравнению с размерами области заметного изменения этих величин (для этого, в частности, следует предположить, что пороги реакций удалены от интересующего нас интервала), можно ограничиться лишь учетом явной зависимости амплитуд реакций (2.2) от энергии. Это приводит к феноменологической теории [18] с неэрмитовым гамильтонианом (2.3), описывающим нестабильную промежуточную  $N$ -уровневую систему. Динамические и статистические свойства такой системы являются предметом настоящей статьи.

Выражение (2.2) соответствует вкладу резонансной диаграммы

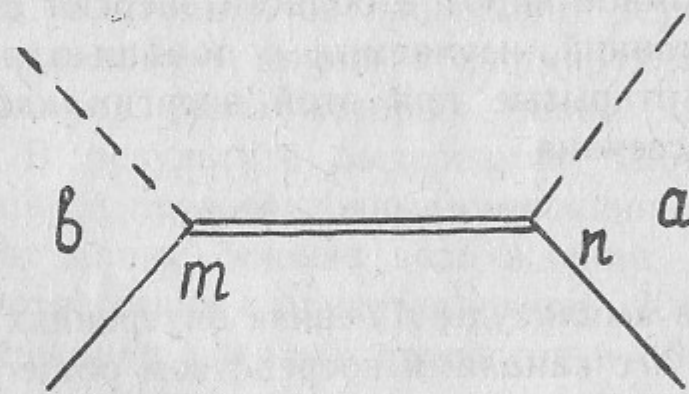


Рис. 1.

в которой внутренняя линия отвечает точной функции Грина  $G_{mn}$  промежуточной системы. Даже в базисе собственных состояний эрмитовой части  $H$  матрица  $G$  остается недиагональной из-за связи этих состояний через общие каналы распада, описываемой массовым оператором  $\Sigma$  вида

$$\Sigma_{mn} = \frac{\text{---} \text{---} \text{---}}{m \quad n}$$

Рис. 2.

Реальные распады с сохранением энергии описываются  $\delta$ -функционными вкладами  $\Sigma$ , что и приводит к антиэрмитовой части (2.4) эффективного гамильтониана. Вклады же главных значений, отвечающие виртуальным распадам, перенормируют эрмитову часть

$\mathcal{H}$ . Если связь состояний через континуум достаточно сильна, пренебрежение недиагональными элементами массового оператора приводит к нарушению унитарности и становится недопустимым. Между тем такое диагональное приближение часто используется как в теории эриксоновских флуктуаций, так и при описании, например, резонансного рассеяния света квантовыми системами.

Удобно ввести операторные обозначения в пространстве каналов, используя прямоугольные  $N \times k$  матрицы  $\mathbf{A} = \{A_n^a\}$ , в которых равенства (2.2) и (2.4) принимают компактный вид

$$\hat{T}(E) = \mathbf{A}^+ \frac{1}{E - \mathcal{H}} \mathbf{A}, \quad \mathbf{W} = \mathbf{A} \mathbf{A}^+. \quad (2.5)$$

Сепарабельная форма (2.4), (2.5) антиэрмитовой части  $\mathbf{W}$  приводит к важному следствию: если число каналов  $k < N$ , то матрица  $\mathbf{W}$  может иметь лишь  $k$  отличных от нуля собственных значений. Действительно, столбцы матрицы  $\mathbf{A}$  являются  $N$ -мерными векторами в пространстве состояний. При  $k < N$  они определяют  $k$ -мерное подпространство в полном  $N$ -мерном пространстве. Поэтому базис в последнем можно выбрать так, чтобы  $N - k$  базисных векторов были ортогональны столбцам матрицы  $\mathbf{A}$ . Тогда только  $k$  элементов этих столбцов будут отличны от нуля, откуда ясно, что ранг матрицы  $\mathbf{W}$  равен  $k$ . Легко показать также, что ненулевые собственные значения  $\mathbf{W}$  совпадают с собственными значениями  $k \times k$ -матрицы в пространстве каналов

$$\hat{X} = \mathbf{A}^+ \mathbf{A}, \quad X^{ba} = \sum_n A_n^{b*} A_n^a, \quad (2.6)$$

образованной из скалярных произведений  $k$   $N$ -мерных векторов  $\mathbf{A}^a$ .

В дальнейшем для определенности мы будем рассматривать  $T$ -инвариантную теорию. Тогда, как известно, возможен выбор каналовых состояний, при котором  $S$ -матрица симметрична; все такие базисы в пространстве каналов связаны ортогональными преобразованиями. В этом случае  $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^T$ , т. е. амплитуды  $A_n^a$  вещественны, а матрица эффективного гамильтониана симметрична,  $\mathcal{H}^T = \mathcal{H}$ .

$N$  собственных векторов ( $N$ -компонентные столбцы  $\psi^{(n)}$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ ) неэрмитова гамильтониана  $\mathcal{H}$  описывают нестабильные состояния распадной системы, а комплексные собственные значения



$$\mathcal{E}_n = E_n - \frac{i}{2} \Gamma_n \quad (2.7)$$

дают их энергии и ширины. В силу наличия общих каналов распада нестабильные состояния  $\psi^{(n)}$  неортогональны. Обозначая через  $\Psi$  матрицу  $N \times N$ , столбцы которой совпадают с  $\psi^{(n)}$ , можно преобразование диагонализации  $\mathcal{H}$  записать в виде

$$\mathcal{H} = \Psi \mathcal{H}_d \Psi^{-1}, \quad (2.8)$$

где  $(\mathcal{H}_d)_{mn} = \delta_{mn} \mathcal{E}_n$ . Вследствие симметричности  $\mathcal{H}$  имеем  $\Psi^{-1} = \Psi^T$ , т. е.

$$\Psi^T \Psi = 1 = \Psi \Psi^T, \quad (2.9)$$

где левое равенство является условием ортонормировки, а правое выражает полноту системы собственных векторов. В то же время из-за неэрмитовости  $\mathcal{H}$   $\Psi^+ \Psi \neq 1$ . Умножая уравнение для собственных функций  $\mathcal{H} \Psi = \Psi \mathcal{H}_d$  слева на  $\Psi^+$ , а эрмитово сопряженное уравнение — справа на  $\Psi$ , найдем

$$\Psi^+ \Psi \mathcal{H}_d - \mathcal{H}_d^+ \Psi^+ \Psi = \Psi^+ (\mathcal{H} - \mathcal{H}^+) \Psi = -i \Psi^+ W \Psi = -i \tilde{A}^* \tilde{A}^T, \quad (2.10)$$

где введены комплексные (в отличие от  $A$ ) амплитуды

$$\tilde{A} = \Psi^T A, \quad \tilde{A}_m^a = \sum_n A_n^a \psi_n^{(m)} \quad (2.11)$$

распада нестабильного состояния  $m$  по каналу  $a$ . Равенство (2.10) является матричной формой записи соотношения Белла — Штейнберга [22]. В компонентах оно имеет вид

$$\langle \psi^m | \psi^{(n)} \rangle = i \left( \sum_a \tilde{A}_m^{a*} \tilde{A}_n^a \right) (\mathcal{E}_m^* - \mathcal{E}_n)^{-1}. \quad (2.12)$$

Матрица рассеяния (2.2) представляется теперь суммой резонансных вкладов

$$T^{ba}(E) = \left( \tilde{A}^T \frac{1}{E - \mathcal{H}_d} \tilde{A} \right)^{ba} = \sum_n \frac{\tilde{A}_n^b \tilde{A}_n^a}{E - \mathcal{E}_n}. \quad (2.13)$$

Таким образом, феноменологические амплитуды являются мероморфными функциями в комплексной плоскости энергии, имеющими полюсы в точках, совпадающих с собственными значениями  $\mathcal{H}$ . Вычеты в этих полюсах комплексны, что существенно при интерференции близких резонансов [23, 24].

### 3. СЕКУЛЯРНОЕ УРАВНЕНИЕ И $R$ -МАТРИЦА. «КОЛЛЕКТИВИЗАЦИЯ» ШИРИН

Комплексные энергии промежуточных состояний (2.7) являются корнями секулярного уравнения

$$\text{Det}(\mathcal{E} - \mathcal{H}) = 0. \quad (3.1)$$

Неотрицательность ширин  $\Gamma_n$  автоматически обеспечивается структурой (2.4) оператора  $W$ .

Введем резольвенты  $G^0(\mathcal{E})$  и  $G(\mathcal{E})$  эрмитовой части  $H$  и полного гамильтониана  $\mathcal{H}$

$$G^0(\mathcal{E}) = (\mathcal{E} - H)^{-1}, \quad G(\mathcal{E}) = (\mathcal{E} - \mathcal{H})^{-1}, \quad \mathcal{E} = E - \frac{i}{2} \Gamma, \quad (3.2)$$

а также  $k \times k$  матрицу в пространстве каналов

$$\hat{R}(\mathcal{E}) = A^T G^0(\mathcal{E}) A, \quad (3.3)$$

которая аналогична  $R$ -матрице, используемой в теории ядерных реакций [25].

В практически интересном случае  $k < N$  уравнение (3.1) можно упростить с помощью следующих преобразований:

$$\begin{aligned} \text{Det}(\mathcal{E} - \mathcal{H}) &= \text{Det}(\mathcal{E} - H) \text{Det} \left( 1 + \frac{i}{2} G^0(\mathcal{E}) W \right) = \\ &= \text{Det}(\mathcal{E} - H) \exp \left\{ \text{Tr} \ln \left( 1 + \frac{i}{2} G^0(\mathcal{E}) A A^T \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Легко убедиться, что под знаком  $\ln$  в (3.4) множитель  $A^T$  можно циклически переставить, что позволяет свести секулярное уравнение (3.1) к детерминанту уже в пространстве каналов, имеющем меньшую размерность:

$$\det \left[ 1 + \frac{i}{2} \hat{R}(\mathcal{E}) \right] = 0. \quad (3.5)$$

Используя сепарабельность  $W$ , нетрудно получить с помощью разложения в ряд связь функций Грина стабильной и нестабильной систем:



$$G(\mathcal{E}) = G^0(\mathcal{E}) - \frac{i}{2} G^0(\mathcal{E}) \mathbf{A} \left[ 1 + \frac{i}{2} \hat{R}(\mathcal{E}) \right]^{-1} \mathbf{A}^T G^0(\mathcal{E}). \quad (3.6)$$

Подстановка (3.6) в (2.5) и (2.1) дает

$$\hat{T}(E) = \mathbf{A}^T G(E) \mathbf{A} = \frac{\hat{R}(E)}{1 + \frac{i}{2} \hat{R}(E)}, \quad (3.7)$$

$$\hat{S}(E) = \frac{1 - \frac{i}{2} \hat{R}(E)}{1 + \frac{i}{2} \hat{R}(E)}. \quad (3.8)$$

Отметим также вытекающее из (3.6) полезное соотношение для следа функции Грина:

$$\text{Tr } G(\mathcal{E}) = \text{Tr } G_0(\mathcal{E}) + \frac{i}{2} K(\mathcal{E}), \quad (3.9)$$

где функция  $K(\mathcal{E})$  определяется следом только в пространстве каналов:

$$K(\mathcal{E}) = \text{tr} \left\{ \frac{d\hat{R}(\mathcal{E})}{d\mathcal{E}} \frac{1}{1 + \frac{i}{2} \hat{R}(\mathcal{E})} \right\}. \quad (3.10)$$

Как и должно быть, комплексные полюсы в формулах (3.6) — (3.10) совпадают с корнями уравнения (3.5), в то время как вклады вещественных полюсов в точках собственных значений  $\varepsilon_n$  эрмитовой части  $H$  компенсируются.

Особенно простые выражения возникают в одноканальном случае ( $k=1$ ), когда матрица (3.3) становится мероморфной функцией с положительными вычетами ( $R$  — функция Вигнера), а секулярное уравнение (3.5) имеет вид

$$1 + \frac{i}{2} R(\mathcal{E}) = 1 + \frac{i}{2} \text{Tr} \{ G^0(\mathcal{E}) W \} = 0. \quad (3.11)$$

Если  $\mathcal{E}_n = E_n - \frac{i}{2} \Gamma_n$  — корень уравнения (3.11), то

$1 - \frac{i}{2} R(\mathcal{E}_n^*) = 0$ , т. е.  $\mathcal{E}_n^*$  является нулем  $S$ -матрицы (3.8). Поскольку в асимптотике ( $E \rightarrow \infty$ )  $S(E) \rightarrow 1$ , мы получаем факторизо-

ванное представление

$$S(E) = \prod_n \frac{E - \mathcal{E}_n^*}{E - \mathcal{E}_n} = \prod_n \left( 1 - i \frac{\Gamma_n}{E - E_n + \frac{i}{2} \Gamma_n} \right), \quad (3.12)$$

неоднократно использовавшееся в литературе (см., например, [26, 27]). Пока комплексные параметры  $\mathcal{E}_n$  в (3.12) удовлетворяют секулярному уравнению (3.11), представление в виде произведения (3.12) эквивалентно сумме по резонансам (2.13). Однако форма (3.12) остается унитарной и при произвольных  $\mathcal{E}_n$ . Если энергии  $E_n$  и ширины  $\Gamma_n$  считаются произвольными параметрами, как это, в частности, делалось в [26, 27], то рассматриваемые представления перестают быть эквивалентными — обстоятельство, на которое не было обращено внимание. В частности, параметризация (3.12) может оказаться несовместимой с отмеченной в разделе 2 алгебраической структурой  $W$ .

Указанная неэквивалентность особенно существенна в случае сильно перекрывающихся резонансов, когда неэрмитова часть начинает играть определяющую роль. Подставляя в секулярное уравнение (3.11) явный вид

$$R(\mathcal{E}) = \sum_n \frac{\gamma_n}{\mathcal{E} - \varepsilon_n}, \quad \gamma_n \equiv A_n^2, \quad (3.13)$$

полученный из (3.3) в базисе собственных векторов  $H$ , запишем (3.11) в виде двух вещественных уравнений

$$\frac{1}{4} \Gamma \sum_n \frac{\gamma_n}{(E - \varepsilon_n)^2 + \frac{1}{4} \Gamma^2} = 1, \quad \frac{1}{4} \Gamma \sum_n \frac{\gamma_n \varepsilon_n}{(E - \varepsilon_n)^2 + \frac{1}{4} \Gamma^2} = E. \quad (3.14)$$

В гипотетическом случае полностью вырожденного оператора  $H = \varepsilon \cdot 1$  отсюда сразу следует, что лишь одно собственное состояние полного гамильтониана имеет ненулевую ширину, аккумулирующую все индивидуальные ширины  $\gamma_n$ ,

$$\Gamma = \sum_n \gamma_n = \text{Tr } W \equiv \omega, \quad (3.15)$$

в то время как остальные  $N-1$  состояний остаются стабильными. Сходная ситуация, исключая возможность произвольного выбора ширин  $\Gamma_n$ , всегда имеет место при достаточно сильном



внешнем смешивании. Действительно, если суммарная ширина  $\omega$  превышает интервал  $\Delta E$ , где расположены уровни, то, как видно из (3.14), выделяется один широкий уровень с  $\Gamma_1 \sim \omega$ , в то время как остальные ширины оказываются малыми. В пределе  $\omega/\Delta E \gg 1$  и  $N \gg 1$ , считая распределение  $\varepsilon_n$  однородным и симметричным около  $\varepsilon = 0$ , легко получить для широкого уровня  $E_1 = \frac{1}{\omega} \sum_n \gamma_n \varepsilon_n \approx 0$ ,  $\Gamma_1 = \omega \left[ 1 - O\left(\left(\frac{\Delta E}{\omega}\right)^2\right) \right]$ . Узкие же уровни ( $n = v = 2, 3, \dots, N$ ) имеют энергии  $E_n$ , расположенные между соседними  $\varepsilon_n$ , и ширины  $\Gamma_n \sim \left(\frac{\Delta E}{\omega}\right)^2 \frac{\omega}{N}$ , дополняющие  $\Gamma_1$  до суммарной величины  $\omega$ .

Более удобная при сильном внешнем смешивании форма секулярного уравнения получается, если диагонализировать ортогональным преобразованием антиэрмитову часть  $W$ . Поскольку в одноканальном случае матрица  $W$  имеет  $N-1$  вырожденных нулевых собственных значений, дополнительным ортогональным поворотом  $(N-1)$ -мерного подпространства можно еще диагонализировать и  $(N-1) \times (N-1)$ -субматрицу эрмитовой части  $H$ . После этого (3.11) принимает вид

$$\mathcal{E} - h - \tilde{R}(\mathcal{E}) + \frac{i}{2} \omega = 0, \quad (3.16)$$

где введены обозначения

$$\tilde{R}(\mathcal{E}) = \sum_{v=2}^N \frac{h_v^2}{\mathcal{E} - \varepsilon_v}, \quad h = H_{11}, \quad h_v = H_{1v} = H_{v1}. \quad (3.17)$$

В выбранном базисе при  $h_v = 0$  лишь один уровень нестабилен и имеет ширину  $\omega$ . Остальные уровни с энергиями  $\varepsilon_v$  приобретают ширину только вследствие смешивания с нестабильным уровнем. Это смешивание описывается вигнеровской функцией  $\tilde{R}$ , подобно тому как  $R$ -функция (3.13) описывает смешивание с уровнями непрерывного спектра.

Амплитуда рассеяния имеет в рассматриваемом базисе вид

$$T(E) = \text{Tr} \{ G(E) W \} = \frac{\omega}{E - h - \tilde{R}(E) + \frac{i}{2} \omega}. \quad (3.18)$$

Поскольку при  $E \rightarrow \varepsilon_v$  функция  $\tilde{R}(E) \rightarrow \infty$ , амплитуда  $T(E)$  и, сле-

довательно, сечение рассеяния имеет  $N-1$  нулей, совпадающих с энергиями  $\varepsilon_v$ . С другой стороны, получаемое из (3.18) сечение имеет  $N$  максимумов при энергиях, удовлетворяющих уравнению

$$E - h - \tilde{R}(E) = 0, \quad (3.19)$$

т. е. в точках, совпадающих с собственными значениями эрмитовой части  $H$  эффективного гамильтониана. Последние являются полюсами  $R$ -функции (3.13)<sup>2)</sup>. Таким образом, независимо от степени внешнего смешивания, сечение одноканального рассеяния имеет (в пренебрежении потенциальным вкладом)  $N$  максимумов, разделенных  $N-1$  нулями<sup>3)</sup>. Однако только при слабой связи с континуумом максимумы сечения приходятся в соответствии с (3.14) и (2.13) на энергии  $E_n = \varepsilon_n$  нестабильных промежуточных состояний, а сечение в их окрестности имеет брейт-вигнеровскую форму, отвечающую ширинам  $\Gamma_n = \gamma_n$ . В обратном пределе сильной связи  $E_v \approx \varepsilon_v$  ( $v = 2, 3, \dots, N$ ) (см. формулу (7.36)), так что на энергии нестабильных состояний приходятся минимумы сечений. Вклады широкого и узких резонансов оказываются в противофазе друг к другу и компенсируются. Вне интервала энергий, где лежат узкие резонансы, амплитуда (3.18) имеет брейт-вигнеровскую форму с шириной  $\omega$ .

Сказанное выше означает, что для параметризации энергетической зависимости одноканальной  $S$ -матрицы переменные  $h$ ,  $\varepsilon_v$ ,  $h_v$ ,  $\omega$  более естественны, чем энергии  $E_n$  и ширины  $\Gamma_n$  промежуточных нестабильных состояний. Последние оказываются адекватными при анализе протекания процесса во времени. Два эти описания взаимно дополнительные. Следует все же отметить, что полюсная параметризация (2.13) является универсальной, сохраняя свою форму при любом количестве открытых каналов. В то же время простые свойства выражения (3.18) не имеют аналогов в многоканальном случае.

Таким образом, сильная связь с континуумом приводит к резкому перераспределению ширин и возникновению быстро распада-

<sup>2)</sup> Напомним во избежание недоразумений, что возникающие в общей теории ядерных реакций энергетические сдвиги включены в  $H$ .

<sup>3)</sup> Такое поведение сечения характерно лишь для одноканального рассеяния. Если кроме упругого канала открыт хотя бы один неупругий, упругое сечение не может обратиться в нуль ни при каких энергиях. При  $k \geq 3$  нигде не обращаются в нуль и сечения неупругих реакций [28]. Максимумы сечения также не будут уже совпадать с полюсами  $R$ -матрицы. Эти результаты нетрудно получить из многоканального аналога формулы (3.18).



ющегося состояния. Аналогичным образом, при наличии  $k$  сравнимых по вероятности каналов распада образуется  $k$  широких уровней, практически поглощающих суммарную ширину всех резонансов. Это явление, наблюдавшееся и в реалистических расчетах конкретных процессов в сложных ядрах [17], означает преобладание прямого процесса над релаксацией, ведущей к образованию составного ядра. При  $N \gg 1$  вблизи  $\omega/\Delta E \sim 1$  или  $\langle \gamma \rangle = \omega/N \sim D = \Delta E/N$  происходит весьма резкий «фазовый переход» от картины эквивалентных изолированных резонансов к выделению широких когерентно распадающихся уровней.

Термин «прямой процесс» употребляется здесь в широком смысле для описания любого процесса, происходящего за малое время  $\hbar/\omega$ , существенно меньшее не только времени образования составного ядра  $\hbar/D$ , но и времени  $\hbar/\Delta E$  фрагментации входного состояния на более сложные конфигурации. В принятых в теории ядерных реакций обозначениях это означает, что  $\Gamma^+ \sim \omega \gg \Gamma^+ \sim \Delta E$ . С другой стороны, как мы убедились выше, время жизни долгоживущих состояний  $\tau \sim \frac{\omega}{\Delta E} \frac{\hbar}{D} \gg \hbar/D$ . Величина  $\tau$  в  $\omega/\Delta E$  раз больше, чем время задержки, полученное в [29]. Расхождение обусловлено различием исходных допущений. Мы исходили из представления матрицы рассеяния (2.1), (2.2), следующего из общей теории ядерных реакций. Параметром, характеризующим нестабильность промежуточных состояний, является в этом случае  $\text{Tr} W = \omega$ . Напротив, в [29] использовалось явно унитарное представление (3.12), в котором все ширины считались независимыми. Неэквивалентность этих представлений уже подчеркивалась нами выше. Большое по сравнению с временем возврата  $\hbar/D$  время жизни состояний составного ядра означает, что в нем заведомо успевает устанавливаться термодинамическое равновесие.

Конкретным примером описанной ситуации может служить упругое рассеяние с образованием одночастичного резонанса, связанного с морем стабильных многочастичных уровней [30]. Одночастичный резонанс формируется оптико-оболочечным потенциалом. Полученная в [30] амплитуда рассеяния совпадает с (3.18), причем  $\omega$  является шириной одночастичного резонанса. В общем случае короткоживущие состояния генерируются антиэрмитовой частью эффективного гамильтониана, которая выделяет суперпозиции внутренних состояний, сшивающиеся с волновыми функциями каналов.

Как уже говорилось во Введении, явление коллективизации

ширин при сильной связи состояний через общие каналы распада («самоорганизация», обнаруженная в численных расчетах [17]) может рассматриваться как ядерный аналог когерентного сверхизлучения Дикке [21]. Сходные эффекты наблюдались в численном моделировании [31] диссипативной спиновой системы.

#### 4. СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЭРМИТОВОЙ ЧАСТИ ГАМИЛЬТониАНА. УСРЕДНЕНИЕ ПО ОРТОГОНАЛЬНОМУ АНСАМБЛЮ

В предыдущих разделах рассматривались динамические свойства феноменологического гамильтониана  $\mathcal{H}$  распадной системы. Будем теперь считать  $\mathcal{H}$  представителем статистического ансамбля случайных матриц. Мы примем простейшие статистические гипотезы, совместимые с общими принципами.

Эрмитова  $H$  и антиэрмитова  $W$  части эффективного гамильтониана будут рассматриваться как статистически независимые. Мы предположим, что вещественная и симметричная матрица  $H$  принадлежит гауссову ортогональному ансамблю (ГОА), т. е. матричные элементы  $H_{mn}$  не коррелированы между собой и функция их распределения инвариантна относительно ортогональных преобразований. Хорошо известно [1], что это с необходимостью приводит к гауссовой функции распределения для элементов матрицы  $H$ ,

$$\mathcal{P}(H) = 2^{\frac{N(N-1)}{4}} \left( \frac{N}{\pi a^2} \right)^{\frac{N(N+1)}{4}} \exp\left( -\frac{N}{a^2} \text{Tr} H^2 \right), \quad (4.1)$$

(центр энергетического интервала совмещен с началом отсчета энергий). Из (4.1) вытекает функция распределения  $N$  собственных значений  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N$

$$\mathcal{P}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N) = C_N \prod_{m < n} |\varepsilon_m - \varepsilon_n| \exp\left( -\frac{N}{a^2} \sum_n \varepsilon_n^2 \right). \quad (4.2)$$

В формуле (4.2) константа нормировки равна [32]

$$C_N = 2^{\frac{N(N-1)}{4}} \left( \frac{N}{a^2} \right)^{\frac{N(N+1)}{4}} \frac{1}{N!} \left[ \prod_n \Gamma\left( \frac{n}{2} \right) \right]^{-1}. \quad (4.3)$$

Отметим, что, подобно [16], в показатель экспоненты в (4.1) мы



ввели множитель  $N$ , благодаря чему в пределе большой размерности уровни  $\varepsilon_n$  лежат внутри не зависящего от  $N$  интервала  $(-a, a)$ , так что среднее расстояние между ними  $D = 2a/N$ .

Важной качественной чертой ГОА является корреляция положений уровней (4.2): вероятность совпадения двух энергий обращается в нуль линейно по расстоянию между ними — близкие уровни расталкиваются. В двумерном случае из (4.2) следует формула Вигнера для распределения расстояний  $s = |E_1 - E_2|/D$  между уровнями

$$\mathcal{P}_W(s) = \frac{\pi}{2} s \exp\left(-\frac{\pi}{4} s^2\right). \quad (4.4)$$

Эта же формула с достаточной практической точностью описывает распределение расстояний между соседними уровнями [1] и при произвольной размерности, когда точные результаты можно получить только численно. Физический смысл ее очевиден: совпадение уровней возможно лишь при одновременном обращении в нуль как недиагональных матричных элементов  $H_{12}$ , так и разности диагональных  $H_{11} - H_{22}$ , т. е. на множестве меры нуль в пространстве случайных параметров. Формула (4.4) есть распределение Рэля для длины случайного двумерного вектора с нормально распределенными некоррелированными компонентами. Аналогичным образом, при отсутствии Т-инвариантности  $\text{Re } H_{12}$  и  $\text{Im } H_{12}$  независимы и расталкивание уровней становится квадратичным [6],

$$\mathcal{P}(s) \sim s^2, \quad s \rightarrow 0. \quad (4.5)$$

В то же время наложение большого числа спектров с разными значениями точных интегралов движения [8] устраняет корреляции и распределение ближайших расстояний становится пуассоновским

$$\mathcal{P}_P(s) = e^{-s}, \quad (4.6)$$

так что расталкивание исчезает. Наконец, при добавлении к регулярному гамильтониану хаотизирующего возмущения, разрушающего часть интегралов движения, возникает область расталкивания уровней на расстояниях, меньших характерной величины возмущения [33].

Вследствие ортогональной инвариантности волновые функции  $\varphi^{(n)}$  стационарных состояний в ГОА могут быть представлены  $N$ -компонентными векторами единичной длины  $\{\varphi_m^{(n)}\}$ , изотропно

размазанными по многомерной сфере  $\sum_m (\varphi_m^{(n)})^2 = 1$ . В пределе больших  $N$  это эквивалентно гауссову распределению компонент  $\varphi_m^{(n)}$  с нулевыми средними и с дисперсией  $\langle (\varphi_m^{(n)})^2 \rangle = 1/N$ . Считая, что амплитуда распада  $A_n^a$  по каналу  $a$  имеет те же статистические свойства, что и компоненты  $\varphi_m^{(n)}$ , легко получить для ширин  $\chi_k$ -квадрат-распределение с числом степеней свободы, равным числу каналов (распределение Портера — Томаса при  $k=1$ ). Эта процедура, однако, не имеет серьезного обоснования и мы будем выводить распределение ширин с помощью независимых статистических гипотез для антиэрмитовой части  $W$  (см. раздел 5).

Вычисление средних значений различных величин по ГОА облегчается в пределе больших  $N$ . В частности, простейший способ вычисления средней функции Грина  $G^0$  состоит в ее разложении в степенной ряд по  $H$  в области, не содержащей полюсов, и почленном выделении парных сверток матричных элементов с помощью равенства

$$\langle H_{mm'} H_{nn'} \rangle = \frac{a^2}{4N} (\delta_{mn} \delta_{m'n'} + \delta_{m'n} \delta_{m'n'}). \quad (4.7)$$

При  $N \rightarrow \infty$  выживают [14] лишь концентрические свертки, где пропорциональный  $N$  след внутренней функции Грина компенсирует малость (4.7). Суммирование главных членов дает<sup>4)</sup>

$$\langle G^0(\mathcal{E}) \rangle = \frac{1}{\mathcal{E} - \frac{a^2}{4N} \text{Tr} \langle G^0(\mathcal{E}) \rangle}, \quad (4.8)$$

откуда для среднего следа функции Грина найдем [34]

$$g^0(\mathcal{E}) \equiv \frac{1}{N} \langle \text{Tr} G^0(\mathcal{E}) \rangle = \frac{2}{a^2} [\mathcal{E} - \sqrt{\mathcal{E}^2 - a^2}] \quad (4.9)$$

(выбор знака перед корнем диктуется асимптотикой  $g^0(\mathcal{E}) = 1/\mathcal{E}$  при  $\mathcal{E} \rightarrow \infty$ ).

С помощью выражения (4.9) определяется средняя плотность уровней стабильной системы

$$\rho^0(E) = \langle \sum_n \delta(E - \varepsilon_n) \rangle = \frac{1}{\pi} \text{Im} \langle \text{Tr} G^0(E - i0) \rangle =$$

<sup>4)</sup> Указанный метод пригоден и для гамильтониана  $H$ , содержащего, кроме случайной, еще и регулярную эрмитову часть.



$$= N \frac{2}{\pi a^2} \sqrt{a^2 - E^2} \theta(a^2 - E^2) \quad (4.10)$$

(полукруговой закон Вигнера [5]).

Аналогичным образом усреднение по ГОА  $R$ -матрицы (3.3) дает в пределе  $N \rightarrow \infty$

$$\langle \hat{R}(\mathcal{E}) \rangle_{\text{ГОА}} = \langle G^0(\mathcal{E}) \rangle \hat{X} \rightarrow g^0(\mathcal{E}) \hat{X}. \quad (4.11)$$

В частности, при наличии только упругого канала

$$\langle R(\mathcal{E}) \rangle_{\text{ГОА}} = g^0(\mathcal{E}) \omega. \quad (4.12)$$

Точно так же для функции  $\tilde{R}(\mathcal{E})$  (3.17) получаем

$$\langle \tilde{R}(\mathcal{E}) \rangle = \sum_{\nu} \langle h_{\nu}^2 \rangle \langle \frac{1}{\mathcal{E} - \varepsilon_{\nu}} \rangle \rightarrow \frac{a^2}{4} g^0(\mathcal{E}). \quad (4.13)$$

Для усреднения по ГОА  $S$ -матрицы, связанной с  $R$ -матрицей нелинейным соотношением (3.8), заметим, что при  $N \rightarrow \infty$  свертки (4.7) случайных гамильтонианов, содержащихся в разных  $R$ -матрицах, уменьшают число независимых следов и приводят к вкладам высшего порядка по  $1/N$ . Если число каналов  $k \ll N$ , то малость  $1/N$  не может быть скомпенсирована следом в пространстве каналов, возникающим при сворачивании гамильтонианов из двух соседних  $R$ -матриц. Поэтому с точностью до членов  $\sim k/N$

$$\langle \hat{S}(E) \rangle_{\text{ГОА}} = \frac{1 - \frac{i}{2} g^0(E) \hat{X}}{1 + \frac{i}{2} g^0(E) \hat{X}}. \quad (4.14)$$

При усреднении по ансамблю эрмитовых частей вклады компанд-состояний с малыми ширинами сгладились, а результат зависит только от матрицы  $\hat{X}$ . Усредненная  $S$ -матрица (4.14) описывает поэтому быстрые «прямые» процессы.

## 5. СТАТИСТИКА АНТИЭРМИТОВОЙ ЧАСТИ ГАМИЛЬТониАНА

Антиэрмитова часть  $W$  эффективного гамильтониана задается в  $T$ -инвариантной теории набором  $Nk$  вещественных амплитуд  $A_n^a$ ,

которые мы будем считать статистически независимыми гауссовыми случайными величинами, полагая<sup>5)</sup>

$$\langle A_n^a \rangle = 0, \quad \langle A_n^a A_m^b \rangle = \frac{1}{N} \eta^a \delta^{ab} \delta_{mn}. \quad (5.1)$$

Подобно (4.7), здесь также введен масштабный фактор  $1/N$ , вследствие чего средний след

$$\langle \omega \rangle = \langle \text{Tr } W \rangle = \sum_a \eta^a \quad (5.2)$$

не зависит от  $N$ , являясь поэтому абсолютной характеристикой рассматриваемых каналов распада. Гауссово распределение амплитуд, как и (4.1), практически однозначно определяется требованиями статистической независимости и ортогональной инвариантности.

Рассмотрим для простоты случай с равновероятными каналами распада ( $\eta^a = \eta$ ,  $\langle \omega \rangle = k\eta$ ), когда возникает добавочная ортогональная инвариантность в пространстве каналов. Совместная функция распределения всех амплитуд зависит тогда лишь от  $\omega = \text{Tr } W = \sum_{a,n} (A_n^a)^2$ :

$$\mathcal{P}(A_1^1, \dots, A_N^k) = \left( \frac{N}{2\pi\eta} \right)^{Nk/2} \exp\left( -\frac{N}{2\eta} \omega \right). \quad (5.3)$$

Эта функция позволяет определить статистические свойства матричных элементов  $W_{mn}$  (2.4). Диагональные элементы  $W_{nn} = \sum_a (A_n^a)^2 \equiv \gamma_n$  положительны, статистически независимы и распределены по закону  $\chi_k^2$ ,

$$\mathcal{P}_k(\gamma_n) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}k\right)} \left( \frac{N}{2\eta} \right)^{k/2} \gamma_n^{k/2-1} \exp\left( -\frac{N}{2\eta} \gamma_n \right). \quad (5.4)$$

При этом не требуется идентификации распадных амплитуд с компонентами волновых функций (раздел 4). С ростом числа каналов (5.4) переходит в гауссово распределение

<sup>5)</sup> В работе Вейденмюллера [16] предполагается, что амплитуды являются случайными только в базисе, где эрмитова часть диагональна. Такое предположение трудно, однако, совместить с ортогональной инвариантностью ансамбля эрмитовых частей.



$$\mathcal{P}_k(\gamma_n) = \frac{N}{2\eta\sqrt{\pi k}} \exp\left\{-\frac{N^2}{4k\eta^2}\left(\gamma_n - \frac{k}{N}\eta\right)^2\right\}. \quad (5.5)$$

со средним значением и дисперсией

$$\langle \gamma_n \rangle = \frac{k}{N}\eta, \quad \langle \gamma_n^2 \rangle - \langle \gamma_n \rangle^2 = \frac{2k}{N^2}\eta^2 = \frac{2}{k}\langle \gamma_n \rangle^2. \quad (5.6)$$

Равенство (5.6) часто используется в анализе экспериментальных данных для определения эффективного числа  $k$  открытых каналов [35]. Конечно, это может иметь смысл только, если ширины невелики и резонансы не перекрываются: тогда матрица  $W$  является малым возмущением и величины  $\gamma_n$  играют роль ширин резонансов.

След  $w$  матрицы  $W$  является суммой независимых величин  $\gamma_n$ . Его функция распределения

$$\mathcal{P}_k(w) = \frac{N/2\eta}{\Gamma\left(\frac{1}{2}Nk\right)} \left(\frac{N}{2\eta}w\right)^{Nk/2-1} \exp\left(-\frac{N}{2\eta}w\right) \quad (5.7)$$

при  $Nk \gg 1$  переходит в гауссову

$$\mathcal{P}_k(w) = \frac{1}{2\eta} \sqrt{\frac{N}{\pi k}} \exp\left\{-\frac{N}{4k\eta^2}(w - k\eta)^2\right\}, \quad (5.8)$$

имеющую, как очевидно и из (5.6), среднее значение  $\langle w \rangle = k\eta$  и малую дисперсию

$$\langle w^2 \rangle - \langle w \rangle^2 = \frac{2k}{N}\eta^2 = \frac{2}{Nk}\langle w \rangle^2. \quad (5.9)$$

Распределение недиагональных матричных элементов  $W_{mn}$ ,  $m \neq n$ , зависит лишь от  $|W_{mn}|$  и выражается через функцию Макдональда  $K_\mu(z)$ :

$$\mathcal{P}_k(W_{mn}) = \frac{N/\eta\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}k\right)} \left(\frac{N}{2\eta}|W_{mn}|\right)^{(k-1)/2} K_{(k-1)/2}\left(\frac{N}{\eta}|W_{mn}|\right), \quad (5.10)$$

$$\langle W_{mn} \rangle = 0, \quad \langle W_{mn}^2 \rangle = \frac{k}{N^2}\eta^2 = \frac{1}{N^2k}\langle w \rangle^2. \quad (5.11)$$

Аналогичная функция распределения для матричных элементов перехода между сложными состояниями рассматривалась в [8].

В отличие от исходных амплитуд  $A_n^a$  элементы данной строки

(или столбца) матрицы  $W$  не являются статистически независимыми. Независимы между собой (и с диагональными элементами  $\gamma_n$ ) углы  $\theta_{mn}$  между  $N$   $k$ -мерными векторами  $\mathbf{A}_n$  с компонентами  $A_n^a$ . В этом представлении

$$W_{mn} = (\mathbf{A}_m \cdot \mathbf{A}_n) = \sqrt{\gamma_m \gamma_n} \cos \theta_{mn}, \quad (5.12)$$

причем распределение всех углов одинаково и описывается формулой ( $k \geq 2$ )

$$\mathcal{P}_k(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)} \sin^{k-2}\theta, \quad (5.13)$$

следующей из выражения для телесного угла в  $k$ -мерном пространстве. Так как вращения в пространстве каналов не меняют скалярных произведений (5.12), то полное число случайных параметров, задающих матрицу  $W$ , равно  $Nk - \frac{1}{2}k(k-1)$  для  $k \leq N$  (для  $k > N$  сюда надо еще добавить число поворотов дополнительного  $(k-N)$ -мерного пространства, что дает  $\frac{1}{2}N(N+1)$  независимо от  $k$ ).

Особый интерес представляет распределение  $k$  нетривиальных собственных значений матрицы  $W$  ( $k < N$ ). Как указано в разделе 2, они совпадают с  $k$  собственными значениями  $\hat{\chi}$  матрицы  $\hat{\chi} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$  (2.6) в пространстве каналов.

Искомое распределение можно получить методом стохастических уравнений [36, 37]. Строится случайный процесс, описывающий эволюцию матрицы амплитуд  $\mathbf{A}$  во «времени»  $\tau$ ,

$$d\mathbf{A}(\tau) = -\mathbf{A}(\tau)d\tau + d\mathbf{a}(\tau), \quad (5.14)$$

где случайная сила определяется условиями

$$\overline{da_n^a} = 0, \quad \overline{da_n^a da_m^b} = \frac{2}{N}\eta^a \delta^{ab} \delta_{mn} d\tau. \quad (5.15)$$

Тогда при  $\tau \rightarrow \infty$  распределение амплитуд  $A_n^a$  независимо от начальных условий стремится к (5.3). Процесс (5.14) определяет и эволюцию собственных значений  $\chi^a(\tau)$ . Диагонализуя матрицу  $\hat{\chi}(\tau + d\tau)$  с помощью теории возмущений по  $(d\tau)^{1/2}$ , можно найти



коэффициенты дрейфа и диффузии и выписать уравнение Фоккера—Планда для функции распределения собственных значений. Его стационарное решение имеет вид (напомним, что все  $\gamma^a > 0$ )

$$\mathcal{P}(\gamma^1, \dots, \gamma^k) = C_{kN} \left( \prod_{a < b} |\gamma^a - \gamma^b| \right) \left( \prod_c \gamma^c \right)^{\frac{N-k-1}{2}} \exp \left( -\frac{N}{2\eta} \sum_a \gamma^a \right), \quad (5.16)$$

где  $\sum_a \gamma^a = \text{tr } \hat{X} = \text{Tr } W = \omega$ . Нормировочная константа  $C_{kN}$  вычисляется с помощью методов, предложенных в [32], и равна

$$C_{kN} = \left( \frac{N}{2\eta} \right)^{\frac{Nk}{2}} \pi^{k/2} \left[ \Gamma(k+1) \prod_a \Gamma\left(\frac{a}{2}\right) \Gamma\left(\frac{N-a+1}{2}\right) \right]^{-1}. \quad (5.17)$$

Из (5.16) видно, что среднее значение  $\langle \gamma^a \rangle = \eta$ .

Методика стохастических уравнений, примененная к эрмитовой части  $H$ , дает, естественно, формулу (4.2). Отличие (5.16) от (4.2) вызвано специальным видом матрицы  $\hat{X}$ , элементы которой являются конечными суммами произведений нормально распределенных случайных величин. При  $N \rightarrow \infty$  это различие становится несущественным и (5.16) переходит в распределение

$$\mathcal{P}(\gamma^1, \dots, \gamma^k) = \left[ 2^{k/2} \Gamma(k+1) \prod_a \Gamma\left(\frac{a}{2}\right) \right]^{-1} \left( \frac{N}{\eta^2} \right)^{\frac{k(k+1)}{4}} \times \\ \times \prod_{a < b} |\gamma^a - \gamma^b| \exp \left\{ -\frac{N}{2\eta^2} \sum_c (\gamma^c - \eta)^2 \right\}, \quad (5.18)$$

подобное (4.2). Отметим, что формулы (5.16) и (5.18) демонстрируют линейное расталкивание близких по величине ширин  $\gamma^a$ .

## 6. СРЕДНЯЯ S-МАТРИЦА И СЕЧЕНИЯ

Вернемся к начатому в разделе 4 вычислению средних по ансамблю эффективных гамильтонианов. В соответствии с (5.1) при усреднении по ансамблю антиэрмитовых частей  $\langle X^{ab} \rangle = \eta^a \delta^{ab}$  и не зависит от  $N$ . Поэтому и средняя  $R$ -матрица (4.11) диагональна

$$\langle R^{ab}(E) \rangle = g^0(E) \eta^a \delta^{ab}. \quad (6.1)$$

При усреднении выражения (4.14) из-за множителя  $1/N$  в (5.1) снова невыгодно (при условии  $k \ll N$ ) свертывать амплитуды из разных матриц  $\hat{X}$ , разрывая следы в пространстве состояний. Поэтому полное среднее равно

$$\langle S^{ia}(E) \rangle = \frac{1 - \frac{i}{2} \eta^a g^0(E)}{1 + \frac{i}{2} \eta^a g^0(E)} \delta^{ab} \equiv \langle S^a(E) \rangle \delta^{ab}, \quad (6.2)$$

что совпадает с полученным другим методом результатом работы [16].

Согласно (6.2), при наших статистических гипотезах усреднение приводит к диагональной  $S$ -матрице. Мы будем считать, как это обычно делается, что усреднение по ансамблю эквивалентно усреднению по энергии. В теории ядерных реакций средняя по энергии  $S$ -матрица связывается с  $S$ -матрицей оптической модели [20]. Выражение (6.2) позволяет найти среднее полное сечение  $\sigma_t(E)$  и сечение  $\sigma_{se}(E)$  «собственно упругого» рассеяния, которое происходит за малое время, минуя стадию образования равновесного составного ядра. В области энергий  $|E| > a$ , где нет уровней составного ядра, оба сечения совпадают и в единицах  $\frac{\pi}{k^2} (2J+1)$  ( $J$ —момент,  $k$ —волновое число относительного движения в начальном состоянии) равны

$$\sigma_t(E) = \sigma_{se}(E) = \frac{\eta^2}{\left[ \frac{1}{2} E + \sqrt{E^2 - a^2} \right]^2 + \frac{1}{4} \eta^2} = \frac{\kappa^2}{\left[ \frac{1}{2} \left( \frac{E}{a} + \sqrt{\frac{E^2}{a^2} - 1} \right) \right]^2 + \frac{1}{4} \kappa^2}, \quad (6.3)$$

что при  $|E| \gg a$  совпадает с формулой Брейта—Вигнера для резонанса с большой шириной  $\eta$ . Введенный здесь параметр  $\kappa = \eta/a$  характеризует степень внешнего смешивания и перекрытия резонансов (для простоты мы опустили индекс канала).

В области компаунд-резонансов ( $|E| < a$ ) возможно «прилипание» рассеиваемой частицы с образованием равновесной составной системы. Поэтому полное

$$\sigma_t(E) = 2(1 - \text{Re} \langle S(E) \rangle) = \frac{\kappa^2 + \kappa \sqrt{1 - \frac{E^2}{a^2}}}{\frac{1}{2} \kappa \sqrt{1 - \frac{E^2}{a^2}} + \frac{1}{4} (\kappa^2 + 1)} \quad (6.4)$$

и «собственно упругое»



$$\sigma_{se}(E) = |\langle S(E) \rangle - 1|^2 = \frac{\kappa^2}{\frac{1}{2}\kappa\sqrt{1-\frac{E^2}{a^2}} + \frac{1}{4}(\kappa^2+1)} \quad (6.5)$$

сечения различны, а их разность — сечение «прилипания»

$$\sigma_{abs}(E) = 1 - |\langle S(E) \rangle|^2 = \frac{\kappa\sqrt{1-\frac{E^2}{a^2}}}{\frac{1}{2}\kappa\sqrt{1-\frac{E^2}{a^2}} + \frac{1}{4}(\kappa^2+1)} \quad (6.6)$$

обусловлена процессами с образованием составного ядра. Из (6.6) видно, что в соответствии с качественными соображениями [20] абсорбционное сечение падает с ростом степени перекрытия резонансов.

Энергетическая зависимость сечений (6.4) — (6.6) представлена на рис. 3. «Собственно упругое» и полное сечения имеют симметричный относительно центра двугорбый вид с максимумами на краях резонансного спектра  $E = \pm a$ . В центре имеются минимумы с перепадами

$$\frac{\sigma_i(0)}{\sigma_i(a)} = \frac{\kappa^2+1}{\kappa(\kappa+1)} \approx 1 - \frac{1}{\kappa}, \quad \frac{\sigma_{se}(0)}{\sigma_{se}(a)} = \frac{\kappa^2+1}{(\kappa+1)^2} \approx 1 - \frac{2}{\kappa}. \quad (6.7)$$

Последние равенства относятся к случаю сильного перекрытия. Средние части резонансных кривых становятся в этом пределе плоскими.

### 7. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЭНЕРГИЙ $N$ -УРОВНЕВОЙ НЕСТАБИЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Как упоминалось в разделе 5, при  $k < N$  матрица  $W$  характеризуется  $Nk - \frac{1}{2}k(k-1)$  случайными параметрами. Учитывая еще  $N$  собственных значений эрмитовой части  $H$ , получим всего  $l = N(k+1) - \frac{1}{2}k(k-1)$  параметров, от которых могут зависеть  $N$  комплексных энергий  $\mathcal{E}_n$ . Поэтому, если нас интересует функция распределения энергий и ширин промежуточных состояний, нужно проинтегрировать по  $l - 2N = (k-1)\left(N - \frac{1}{2}k\right)$  «лишним» перемен-

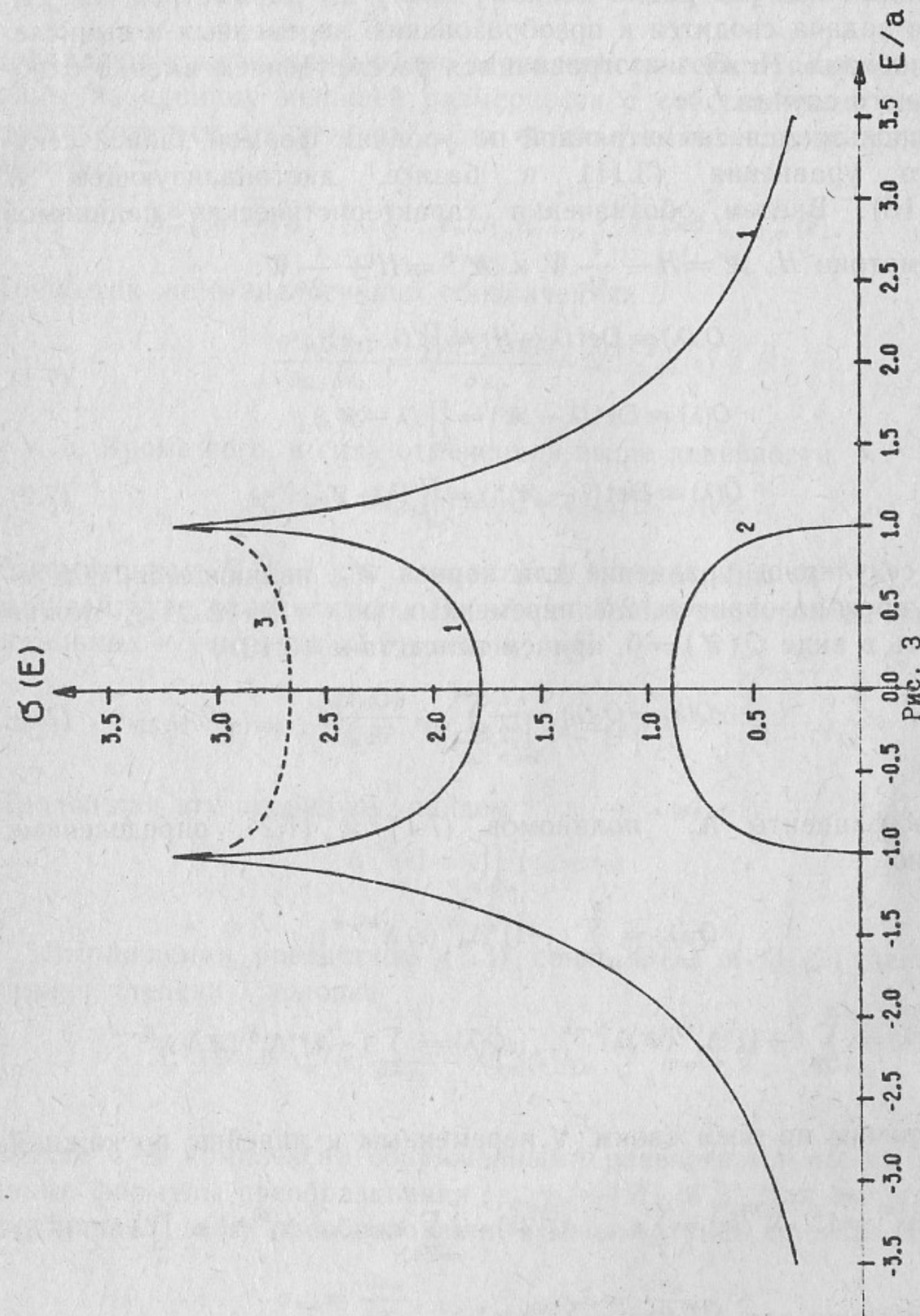


Рис. 3. Энергетическая зависимость усредненных сечений: 1 — собственно упругое, 2 — абсорбционное, 3 — полное сечение.



ным. Исключение составляет случай  $k=1$ , когда число  $l$  исходных переменных как раз равно полному числу  $2N$  параметров  $\{E_n, \Gamma_n\}$ , так что задача сводится к преобразованию переменных и вычислению якобиана. Ниже мы ограничимся рассмотрением именно одноканального случая.

Воспользуемся симметричной по уровням формой записи секулярного уравнения (3.11) в базисе, диагонализующем  $H$  (см. 3.13). Введем обозначения характеристических полиномов  $N \times N$ -матриц  $H$ ,  $\mathcal{H} = H - \frac{i}{2} W$  и  $\mathcal{H}^+ = H + \frac{i}{2} W$ :

$$Q_0(\lambda) \equiv \text{Det}(\lambda - H) = \prod_n (\lambda - \varepsilon_n), \quad (7.1)$$

$$Q(\lambda) \equiv \text{Det}(\lambda - \mathcal{H}) = \prod_n (\lambda - \mathcal{E}_n),$$

$$\bar{Q}(\lambda) \equiv \text{Det}(\lambda - \mathcal{H}^+) = \prod_n (\lambda - \mathcal{E}_n^*). \quad (7.2)$$

Тогда секулярное уравнение для корней  $\mathcal{E}_n$ , являющееся, фактически, преобразованием  $2N$  переменных  $\{\varepsilon_n, \gamma_n\} \rightarrow \{E_n, \Gamma_n\}$ , можно записать в виде  $Q(\mathcal{E}) = 0$ , причем вследствие (3.13)

$$Q(\lambda) = Q_0(\lambda) - \frac{i}{2} \sum_m \gamma_m \frac{\partial Q_0(\lambda)}{\partial \varepsilon_m}. \quad (7.3)$$

Коэффициенты  $\Lambda_n^{(N)}$  полиномов (7.1) и (7.2), определенные согласно

$$Q_0(\lambda) = \sum_{n=0}^N (-1)^n \Lambda_n^{(N)}(\varepsilon) \lambda^{N-n}, \quad (7.4)$$

$$Q(\lambda) = \sum_{n=0}^N (-1)^n \Lambda_n^{(N)}(\mathcal{E}) \lambda^{N-n}, \quad \bar{Q}(\lambda) = \sum_{n=0}^N (-1)^n \Lambda_n^{(N)}(\mathcal{E}^*) \lambda^{N-n},$$

симметричны по всем своим  $N$  переменным и линейны по каждой из них:

$$\Lambda_0^{(N)} = 1, \quad \Lambda_1^{(N)}(\varepsilon) = \sum_n \varepsilon_n, \quad \Lambda_2^{(N)}(\varepsilon) = \sum_{m < n} \varepsilon_m \varepsilon_n, \dots, \Lambda_N^{(N)}(\varepsilon) = \prod_n \varepsilon_n \quad (7.5)$$

(и аналогично для  $\Lambda_n^{(N)}(\mathcal{E})$  и  $\Lambda_n^{(N)}(\mathcal{E}^*)$ ).

Производные этих коэффициентов

$$M_{nm}^{(N)}(\varepsilon) = \frac{\partial \Lambda_n^{(N)}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)}{\partial \varepsilon_m}, \quad n, m = 1, 2, \dots, N, \quad (7.6)$$

совпадают с коэффициентами характеристического полинома матрицы на единицу меньшей размерности с собственными числами, среди которых отсутствует  $\varepsilon_m$ , а остальные оставлены прежними. Поэтому

$$M_{nm}^{(N)}(\varepsilon) = \Lambda_{n-1}^{(N-1)}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m-1}, \varepsilon_{m+1}, \dots, \varepsilon_N) \equiv \Lambda_{n-1;m}^{(N-1)}(\varepsilon). \quad (7.7)$$

Точно так же в аналогичных обозначениях

$$\frac{\partial^2 \Lambda_n^{(N)}(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_m \partial \varepsilon_l} = \frac{\partial \Lambda_{n-1;m}^{(N-1)}(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_l} = \Lambda_{n-2;ml}^{(N-2)}(\varepsilon) \quad (7.8)$$

и т. д. Кроме того, в силу отмеченной выше линейности

$$M_{nl}^{(N)}(\varepsilon) - M_{nm}^{(N)}(\varepsilon) = (\varepsilon_m - \varepsilon_l) \Lambda_{n-2;ml}^{(N-2)}(\varepsilon). \quad (7.9)$$

Рассматривая  $M_{nm}^{(N)}(\varepsilon)$  как элементы  $N \times N$ -матрицы  $M^{(N)}(\varepsilon)$ , легко вычислить ее определитель. Вычитая первый его столбец из всех остальных и учитывая (7.9), видим, что

$$\text{Det} M^{(N)}(\varepsilon) \equiv \Delta^{(N)}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N) = \prod_{n=2}^N (\varepsilon_1 - \varepsilon_n) \Delta^{(N-1)}(\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N). \quad (7.10)$$

Продолжая эту процедуру, найдем

$$\Delta^{(N)}(\varepsilon) = \prod_{m < n} (\varepsilon_m - \varepsilon_n). \quad (7.11)$$

Выражаемая равенством (7.3) связь  $Q(\lambda)$  и  $Q_0(\lambda)$  дает при каждой степени  $\lambda$  условие

$$\Lambda_n^{(N)}(\mathcal{E}) = \Lambda_n^{(N)}(\varepsilon) - \frac{i}{2} \sum_m M_{nm}^{(N)}(\varepsilon) \gamma_m, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (7.12)$$

Вместе с  $N$  комплексно сопряженными равенствами мы получили явные формулы преобразования  $\{\varepsilon_n, \gamma_n\} \rightarrow \{\mathcal{E}_n, \mathcal{E}_n^*\}$ . Для вычисления якобиана  $\Delta$  этого преобразования нужны матрицы производных

$$\sigma_{mn} = \frac{\partial \varepsilon_m}{\partial \mathcal{E}_n}, \quad \tau_{mn} = \frac{\partial \gamma_m}{\partial \mathcal{E}_n}. \quad (7.13)$$

Дифференцируя по  $\mathcal{E}$  равенства (7.12), (7.6) и сопряженные к



ним, получаем (в матричной записи)

$$M(\varepsilon)\sigma = \frac{1}{2}M(\mathcal{E}), \quad (7.14)$$

$$M(\varepsilon)\tau = iM(\mathcal{E}) - L(\varepsilon, \gamma)\sigma; \quad L_{nm}(\varepsilon, \gamma) \equiv \sum_l \frac{\partial M_{nl}^{(N)}(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_m} \gamma_l. \quad (7.15)$$

Так как матрицы  $M(\varepsilon)$  и  $L(\varepsilon, \gamma)$  вещественны, из (7.14) и (7.15) следует, что

$$\tau = 2i\sigma - M^{-1}(\varepsilon)L(\varepsilon, \gamma)\sigma, \quad \tau^* = -2i\sigma^* - M^{-1}(\varepsilon)L(\varepsilon, \gamma)\sigma^*. \quad (7.16)$$

Искомый якобиан преобразования  $\{\varepsilon, \gamma\} \rightarrow \{\mathcal{E}, \mathcal{E}^*\}$  равен

$$\Delta_J = \begin{vmatrix} \sigma & \sigma^* \\ \tau & \tau^* \end{vmatrix}. \quad (7.17)$$

В силу свойств определителей вторые слагаемые в равенствах (7.16) вклада не дают, и

$$\Delta_J = (-4i)^N |\text{Det } \sigma|^2. \quad (7.18)$$

С другой стороны, из (7.14)

$$\text{Det } \sigma = \frac{1}{2^N} \frac{\Delta^{(N)}(\mathcal{E})}{\Delta^{(N)}(\varepsilon)}. \quad (7.19)$$

Таким образом, окончательно

$$\Delta_J = (-i)^N \left| \frac{\Delta^{(N)}(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_N)}{\Delta^{(N)}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)} \right|^2 \quad (7.20)$$

Для перехода в функции распределения к новым переменным нам понадобится еще преобразовать к ним комбинацию  $F \equiv [\Delta^{(N)}(\varepsilon)]^2 \prod_n \gamma_n$ . Возвращаясь к связи (7.3) полиномов  $Q(\mathcal{E})$  и

$Q_0(\mathcal{E})$ , полагая там  $\mathcal{E} = \varepsilon_n$  и учитывая, что  $Q_0(\varepsilon_n) = 0$ , а  $\frac{\partial Q_0(\lambda)}{\partial \varepsilon_m} \Big|_{\lambda=\varepsilon_n} = -\delta_{mn} \prod_{l \neq n} (\varepsilon_n - \varepsilon_l)$ , получим

$$\gamma_n = -2i \frac{Q(\varepsilon_n)}{\prod_{l \neq n} (\varepsilon_n - \varepsilon_l)}, \quad (7.21)$$

откуда, используя (7.11), (7.1) и (7.2),

$$F = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} (-2i)^N \prod_n Q(\varepsilon_n) = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} (-2i)^N \prod_n (-1)^N Q_0(\mathcal{E}_n). \quad (7.22)$$

Поскольку  $Q(\mathcal{E}_n) = 0$ , из (7.12) совместно с комплексно-сопряженным уравнением и равенствами (7.5)

$$Q_0(\mathcal{E}_n) = \frac{1}{2} \bar{Q}(\mathcal{E}_n) = \frac{1}{2} \prod_m (\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_m^*), \quad (7.23)$$

так что комбинация (7.22) равна

$$F = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} (-i)^N \prod_{m,n} (\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_m^*) = \prod_n |\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_n^*| \prod_{m < n} |\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_n^*|^2. \quad (7.24)$$

В соответствии с (4.2) и (5.16) распределение исходных переменных  $\{\varepsilon_n, \gamma_n\}$  дается при  $k=1$  выражением

$$\mathcal{P}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N; \gamma_1, \dots, \gamma_N) = C_N C_{1N} |\Delta^{(N)}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)| \times \\ \times \prod_n \frac{1}{\sqrt{\gamma_n}} \exp\left(-\frac{N}{a^2} \sum_n \varepsilon_n^2 - \frac{N}{2\eta} \sum_n \gamma_n\right). \quad (7.25)$$

Для преобразования к новым переменным экспоненты в (7.25) заметим, что

$$\text{Tr } \mathcal{H}^2 = \sum_n \mathcal{E}_n^2 = \text{Tr} \left( H^2 - iHW - \frac{1}{4} W^2 \right) = \sum_n (\varepsilon_n^2 - i\varepsilon_n \gamma_n) - \frac{1}{4} \text{Tr } W^2. \quad (7.26)$$

Так как в одноканальном случае матрица  $W$  имеет лишь одно ненулевое собственное значение, то

$$\text{Tr } W^2 = (\text{Tr } W)^2 = \left( \sum_n \Gamma_n \right)^2 \quad (7.27)$$

и действительная часть (7.26) дает

$$\sum_n \varepsilon_n^2 = \sum_n E_n^2 - \frac{1}{4} \left[ \sum_n \Gamma_n^2 - \left( \sum_n \Gamma_n \right)^2 \right] = \sum_n E_n^2 + \frac{1}{2} \sum_{m < n} \Gamma_m \Gamma_n. \quad (7.28)$$

Собирая полученные результаты, найдем искомое совместное распределение энергий и ширин промежуточных состояний:

$$\mathcal{P}(E_1, \dots, E_N; \Gamma_1, \dots, \Gamma_N) = C_N C_{1N} \prod_{m < n} \frac{(E_m - E_n)^2 + \frac{1}{4}(\Gamma_m - \Gamma_n)^2}{\sqrt{(E_m - E_n)^2 + \frac{1}{4}(\Gamma_m + \Gamma_n)^2}} \times$$



$$\times \prod_n \frac{1}{\sqrt{\Gamma_n}} \exp \left\{ -N \left[ \frac{1}{a^2} \sum_n E_n^2 + \frac{1}{2a^2} \sum_{m < n} \Gamma_m \Gamma_n + \frac{1}{2\eta} \sum_n \Gamma_n \right] \right\}. \quad (7.29)$$

Произведение в предэкспоненциальном факторе описывает корреляции между энергиями и ширинами нестабильных уровней. Как и следовало ожидать из качественных соображений (см. Введение), в отличие от (4.2), вероятность совпадения энергий таких уровней не равна нулю, если только  $\Gamma_m \neq \Gamma_n$ . В то же время комплексные энергии  $\mathcal{E} = E - \frac{i}{2} \Gamma$  расталкиваются пропорционально квадрату расстояния между ними в комплексной плоскости. Последнее отражает Т-неинвариантный характер распадной системы.

Свойства распределения (7.29) при фиксированном  $N$  зависят от параметра  $\kappa = \eta/a$ . Среднее расстояние между уровнями  $D \sim a/N$ . В области слабого перекрытия типичные ширины  $\Gamma \sim \eta/N$  (см. (5.6)) и  $\Gamma/D \sim \kappa \ll 1$ . Тогда билинейные по  $\Gamma$  члены в экспоненте (7.29) несущественны и на расстояниях  $s_{mn} = \frac{|E_m - E_n|}{D} \gg \kappa$

распределение (7.29) распадается на произведение независимых распределений для энергий (4.2) и ширин (5.4). На таких расстояниях расталкивание энергий линейно. В то же время при  $s_{mn} \ll \kappa$  корреляции не такие, как в стабильной системе, а расталкивание энергий исчезает.

В обратном предельном случае  $\kappa \gg 1$ , как мы установили ранее (раздел 3), ширины аккумулируются в одном большом собственном значении  $\sim \eta$ . В соответствии с этим, как видно из (7.28), плотность вероятности (7.29) не мала, только если  $(\sum_n \Gamma_n)^2 \approx \sum_n \Gamma_n^2$ , т. е. когда велика лишь одна из ширин, например,  $\Gamma_1 \approx \eta$ , а остальные  $\Gamma_{n \geq 2}$  малы. Поскольку в этом случае  $|E_1 - E_n| \leq a \ll \eta$ , то

$$\prod_{n=2}^N \frac{(E_1 - E_n)^2 + \frac{1}{4}(\Gamma_1 - \Gamma_n)^2}{\sqrt{(E_1 - E_n)^2 + \frac{1}{4}(\Gamma_1 + \Gamma_n)^2}} \approx \left( \frac{1}{2} \Gamma_1 \right)^{N-1}, \quad (7.30)$$

$$\left( \sum_n \Gamma_n \right)^2 - \sum_n \Gamma_n^2 = 2\Gamma_1 \sum_{n=2}^N \Gamma_n + \left[ \left( \sum_{n=2}^N \Gamma_n \right)^2 - \sum_{n=2}^N \Gamma_n^2 \right]. \quad (7.31)$$

Интегрируя по  $E_1$  и  $\Gamma_1$ , мы получим распределение долгоживущих

резонансов ( $m, n = 2, 3, \dots, N$ )

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(E_2, \dots, E_N; \Gamma_2, \dots, \Gamma_N) &= C_N C_{1N} 2^{1-N} \sqrt{\frac{\pi a^2}{N}} \left( \frac{2\eta}{N} \right)^{N-1/2} \frac{\Gamma(N - \frac{1}{2})}{\left( 1 + \frac{\kappa^2}{\eta} \sum_n \Gamma_n \right)^{N-1/2}} \times \\ &\times \prod_{m < n} \frac{(E_m - E_n)^2 + \frac{1}{4}(\Gamma_m - \Gamma_n)^2}{\sqrt{(E_m - E_n)^2 + \frac{1}{4}(\Gamma_m + \Gamma_n)^2}} \prod_n \frac{1}{\sqrt{\Gamma_n}} \exp \left\{ -N \left[ \frac{1}{a^2} \sum_n E_n^2 + \right. \right. \\ &\left. \left. \frac{1}{2a^2} \sum_{m < n} \Gamma_m \Gamma_n + \frac{1}{2\eta} \sum_n \Gamma_n \right] \right\}. \quad (7.32) \end{aligned}$$

Для оценки величин типичных малых ширин перейдем к амплитудам  $\beta_n = \sqrt{\Gamma_n}$ , распространяя область их изменения и на отрицательные значения. Тогда

$$\prod_n \frac{d\Gamma_n}{\sqrt{\Gamma_n}} \rightarrow \prod_n d\beta_n = \tilde{\omega}^{(N-3)/2} d\tilde{\omega} dO_{N-1}, \quad (7.33)$$

где  $\tilde{\omega} = \sum_{n=2}^N \Gamma_n$ , а  $dO_{N-1}$  — элемент телесного угла  $(N-1)$ -мерного пространства с координатами  $\beta_n$ . Теперь легко видеть, что плотность вероятности (7.32) имеет максимум при

$$\tilde{\omega} = \frac{\eta}{\kappa^2} \ll \Gamma_1 \approx \eta, \quad (7.34)$$

в то время как распределение по углам в пространстве  $\beta_n$  близко к изотропному. Поэтому характерные значения индивидуальных малых ширин  $\Gamma_{n \geq 2} \sim \tilde{\omega}/(N-1)$ , т. е. при больших  $N$   $\Gamma_{n \geq 2} \sim \eta/\kappa^2 N$ , а параметр перекрытия  $\Gamma/D \sim \frac{\eta}{\kappa^2 N} \frac{N}{a} = \frac{1}{\kappa} \ll 1$ . Таким образом, долгоживущие резонансы возвращаются в режим слабого перекрытия, и на расстояниях  $|E_m - E_n| \gg D/\kappa$  распределение энергий совпадает с (4.2).

Динамическое (а не статистическое) происхождение этих резонансов позволяет получить их непосредственно из секулярного уравнения (см. раздел 3). При  $\kappa \gg 1$  удобна форма (3.16), где заранее диагонализирована антиэрмитова часть  $W$ . Поскольку в



силу (4.7)  $\langle h_v^2 \rangle = \frac{a^2}{4N} = \frac{\eta^2}{4N\kappa^2}$  в этом пределе мало, можно использовать формулы теории возмущений:

$$\mathcal{E}_1 = h - \frac{i}{2}\omega + \sum_{v=2}^N \frac{h_v^2}{h - \varepsilon_v - \frac{i}{2}\omega} = h - \frac{i}{2}\omega + \tilde{R}\left(h - \frac{i}{2}\omega\right), \quad (7.35)$$

$$\mathcal{E}_v = \varepsilon_v + \frac{h_v^2}{\varepsilon_v - h + \frac{i}{2}\omega}, \quad v \geq 2. \quad (7.36)$$

Отсюда, пренебрегая  $(h - \varepsilon_v)^2 \ll a^2$  по сравнению с  $\omega^2 \approx \eta^2$ , находим из (7.35), (7.36) большую

$$\Gamma_1 = \omega - \omega \sum_{v=2}^N \frac{h_v^2}{(h - \varepsilon_v)^2 + \frac{1}{4}\omega^2} \approx \left(1 - \frac{1}{\kappa^2}\right)\omega \quad (7.37)$$

и малые ширины

$$\Gamma_v = \Gamma_1 \frac{h_v^2}{(h - \varepsilon_v)^2 + \frac{1}{4}\Gamma_1^2} \approx \frac{\omega}{N\kappa^2}. \quad (7.38)$$

В отличие от работы [27], где из других соображений получен результат, аналогичный (7.38), нам не понадобилось специального предположения о наличии узких резонансов на фоне широкого. Разделение масштабов ширин происходит автоматически в силу структуры матрицы  $W$ , диктуемой в конечном счете условием унитарности.

Отметим, что в одноканальном случае перераспределение ширин не оставляет места для проявления эриксоновских флуктуаций [38], поскольку при  $N \gg 1$  не существует условий, при которых осуществлялось бы сильное перекрытие резонансов. Для появления таких флуктуаций необходимо наличие  $k \gg 1$  открытых каналов, когда возникает  $k$  быстро распадающихся состояний со сравнимыми ширинами и слабо коррелированными амплитудами распада. Строгая трактовка флуктуаций сечений в рамках развиваемого подхода требует выяснения распределения амплитуд распадов (2.11).

## 8. СРЕДНЯЯ ПЛОТНОСТЬ НЕСТАБИЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ

$N$ -уровневую нестабильную систему можно охарактеризовать средней плотностью комплексных энергий  $\mathcal{E}_n = E_n - \frac{i}{2}\Gamma_n$  (ср. (4.10))

$$\rho(E, \Gamma) = \left\langle \frac{1}{2} \sum_n \delta^{(2)}(\mathcal{E} - \mathcal{E}_n) \right\rangle = \left\langle \sum_n \delta(E - E_n) \delta(\Gamma - \Gamma_n) \right\rangle, \quad (8.1)$$

нормированной согласно

$$\int_{-\infty}^{\infty} dE \int_0^{\infty} d\Gamma \rho(E, \Gamma) = N. \quad (8.2)$$

Прямое вычисление  $\rho(E, \Gamma)$  посредством  $(N-1)$ -кратного интегрирования совместной функции распределения энергий и ширин (7.29) чрезвычайно сложно. Удобнее аналогично (4.10) найти сначала средний след функции Грина  $G(\mathcal{E})$  (3.2),

$$g(E, \Gamma) = \frac{1}{N} \langle \text{Tr } G(\mathcal{E}) \rangle = \frac{1}{N} \left\langle \sum_n \frac{1}{\mathcal{E} - \mathcal{E}_n} \right\rangle. \quad (8.3)$$

Связь  $g$  и  $\rho$  в комплексной плоскости  $\mathcal{E} = E - \frac{i}{2}\Gamma$  можно установить с помощью электростатической аналогии. В этой интерпретации функция (8.1) дает плотность двумерного распределения зарядов в плоскости  $\mathcal{E}$ . Тогда  $Ng(E, \Gamma)$  имеет смысл двумерного электростатического поля, создаваемого распределением (8.1). Во всех точках, где заряды отсутствуют, эта функция аналитична и уравнения электростатики совпадают с условиями Коши—Римана. Наличие зарядов приводит к неаналитичности  $g(E, \Gamma)$  в соответствующих точках плоскости, а уравнения поля принимают в наших обозначениях вид

$$N \left[ \frac{\partial g(E, \Gamma)}{\partial E} - 2i \frac{\partial g(E, \Gamma)}{\partial \Gamma} \right] = 4\pi \rho(E, \Gamma). \quad (8.4)$$

В полуплоскости  $\Gamma < 0$  функция  $g$  аналитична, а  $\rho = 0$ , так как все  $\Gamma_n > 0$ .

Для вычисления  $g(E, \Gamma)$  используем соотношение (3.9). При  $\Gamma > 0$  вклад в (8.4) дает лишь функция  $K(\mathcal{E})$ , которую можно



представить в виде

$$K(\mathcal{E}) = -\theta\left(\operatorname{Im}\left[1 + \frac{i}{2}R(\mathcal{E})\right]\right) K_+(\mathcal{E}) - \theta\left(-\operatorname{Im}\left[1 + \frac{i}{2}R(\mathcal{E})\right]\right) K_-(\mathcal{E}), \quad (8.5)$$

где введены функции

$$K_{\pm}(\mathcal{E}) = \frac{d}{d\mathcal{E}} \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda} \left\{ \exp\left[\pm i\lambda\left(1 + \frac{i}{2}R(\mathcal{E})\right)\right] - 1 \right\}, \quad (8.6)$$

каждая из которых аналитична в той части комплексной плоскости  $\mathcal{E}$ , которая выделяется соответствующей ступенчатой  $\theta$ -функцией. В этих областях функции (8.6) удовлетворяют условиям Коши—Римана

$$\frac{\partial}{\partial E} K_{\pm}(\mathcal{E}) - 2i \frac{\partial}{\partial \Gamma} K_{\pm}(\mathcal{E}) = 0. \quad (8.7)$$

Так как  $R(\mathcal{E})$  аналитична везде, кроме вещественной оси, при  $\Gamma > 0$

$$\left(\frac{\partial}{\partial E} - 2i \frac{\partial}{\partial \Gamma}\right) \operatorname{Im}\left[1 + \frac{i}{2}R(\mathcal{E})\right] = \frac{1}{2} \frac{\partial R(\mathcal{E}^*)}{\partial \mathcal{E}^*}. \quad (8.8)$$

Учитывая (8.7) и (8.8), нетрудно получить

$$\left(\frac{\partial}{\partial E} - 2i \frac{\partial}{\partial \Gamma}\right) K(\mathcal{E}) = \frac{\pi}{2} \left|\frac{\partial R(\mathcal{E})}{\partial \mathcal{E}}\right|^2 \delta^{(2)}\left[1 + \frac{i}{2}R(\mathcal{E})\right] \quad (8.9)$$

и, окончательно,

$$\rho(E, \Gamma) = \frac{1}{8} \left\langle \left|\frac{\partial R(\mathcal{E})}{\partial \mathcal{E}}\right|^2 \delta^{(2)}\left[1 + \frac{i}{2}R(\mathcal{E})\right] \right\rangle. \quad (8.10)$$

Эта формула справедлива независимо от конкретных статистических гипотез.

Используя функцию распределения (5.4) вычетов  $\gamma_n$  функции  $R$  и интегральное представление двумерной  $\delta$ -функции, можно выполнить в (8.10) усреднение по  $\gamma_n$ :

$$\rho(E, \Gamma) = -\frac{1}{2\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{E} \partial \mathcal{E}^*} \int \frac{d^2\lambda}{|\lambda|^2} e^{-2i \operatorname{Im}\lambda} \times \\ \times \left( \left\langle \exp\left\{-\frac{1}{2} \operatorname{Tr} \ln\left(1 - i \frac{\eta}{N} [\lambda^* G^0(\mathcal{E}) + \lambda G^0(\mathcal{E}^*)]\right)\right\} \right\rangle_{\varepsilon} - 1 \right), \quad (8.11)$$

где осталось провести усреднение только по функции распределения (4.2) энергий  $\varepsilon_n$  в ГОА;  $G^0(\mathcal{E})$  — функция Грина (3.2).

Рассмотрим асимптотический предел большого числа  $N$  резонансов, когда в ГОА справедливы формулы (4.9) и (4.10). При  $\kappa \ll 1$  антиэрмитова часть  $W$  играет роль малого возмущения и из секулярного уравнения в форме (3.11) в низшем порядке следует, что  $\mathcal{E}_n = \varepsilon_n - \frac{i}{2} \gamma_n$ . Тогда плотность состояний факторизуется,

$$\rho(E, \Gamma) = \rho^0(E) \mathcal{P}_1(\Gamma), \quad (8.12)$$

где  $\rho^0(E)$  — полукруговой закон (4.10), а  $\mathcal{P}_1(\Gamma)$  — распределение Портера—Томаса (5.4) со средним значением  $\langle \Gamma \rangle = \eta/N$ .

В обратном случае  $\kappa \gg 1$  удобнее исходить из альтернативной формы (3.16). Собственные значения  $\mathcal{H}$  даются формулами теории возмущений (7.35) — (7.36). Разделяя долгоживущие  $n = \nu = 2, 3, \dots, N$  и короткоживущие  $n = 1$  состояния, запишем

$$\rho(E, \Gamma) = \frac{1}{2} \langle \delta^{(2)}(\mathcal{E} - \mathcal{E}_1) \rangle + \frac{1}{2} \sum_{\nu} \langle \delta^{(2)}(\mathcal{E} - \mathcal{E}_{\nu}) \rangle. \quad (8.13)$$

В первом слагаемом (8.13) (обозначим его  $\rho_1(E, \Gamma)$ ) усреднение по  $h_{\nu}$  и  $\varepsilon_{\nu}$  при  $N \rightarrow \infty$  проводится согласно (4.13) и приводит к

$$\rho_1(E, \Gamma) = \frac{1}{2} \langle \delta^{(2)}\left[\mathcal{E} - h + \frac{i}{2}w - \frac{a^2}{4}g^0\left(h - \frac{i}{2}w\right)\right] \rangle_{h,w}. \quad (8.14)$$

Так как  $h$  и  $w$  распределены по гауссовым законам со средними значениями  $\langle h \rangle = 0$ ,  $\langle w \rangle = \eta$  и дисперсиями  $\langle h^2 \rangle = \eta^2/2N\kappa^2$ ,  $\langle (w - \eta)^2 \rangle = 2\eta^2/N$ , можно разложить аргумент  $\delta$ -функции в (8.14) по  $h/w$ . При этом поправки к действительной части  $\mathcal{E}$  сокращаются вплоть до второго порядка включительно, а в мнимой части результат совпадает с (7.37):

$$\rho_1(E, \Gamma) = \left\langle \delta(E - h) \delta\left(\Gamma - w + \frac{w}{\kappa^2}\right) \right\rangle_{h,w}. \quad (8.15)$$

Окончательное усреднение по  $h$  и  $w$  теперь тривиально:

$$\rho_1(E, \Gamma) = -\sqrt{\frac{N}{\pi a^2}} \exp\left(-\frac{N}{a^2} E^2\right) \frac{\sqrt{N/\pi}}{2\eta(1-\kappa^{-2})} \times \\ \times \exp\left\{-\frac{N}{4} \frac{[\Gamma - \eta(1-\kappa^{-2})]^2}{\eta^2(1-\kappa^{-2})^2}\right\}. \quad (8.16)$$



С принятой точностью энергия и ширина короткоживущего резонанса не скоррелированы, он находится в центре, а его ширина покрывает всю область рассматриваемых уровней, связанных с данным каналом; флуктуации  $E$  и  $\Gamma$  малы ( $\sim 1/\sqrt{N}$ ).

Второе слагаемое (8.13), которое мы назовем  $\rho_2(E, \Gamma)$ , содержит  $N-1$  одинаковых слагаемых, равных

$$\frac{1}{2} \langle \delta^{(2)}(\mathcal{E} - \mathcal{E}_v) \rangle = \left\langle \frac{\omega \bar{f}}{\Gamma(\omega + \Gamma)} \delta(\varepsilon_v - \bar{\varepsilon}) \delta(h_v^2 - \bar{f}) \right\rangle, \quad (8.17)$$

где обозначено

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\omega E + h\Gamma}{\omega + \Gamma}, \quad \bar{f} = \omega \Gamma \left[ \frac{1}{4} + \left( \frac{E - h}{\omega + \Gamma} \right)^2 \right]. \quad (8.18)$$

Теперь очевидно, что (см. (4.11))

$$\langle \delta(\varepsilon_v - \bar{\varepsilon}) \rangle_{\varepsilon_v} = \frac{1}{N-1} \rho^0(\bar{\varepsilon}) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi a^2} \sqrt{a^2 - \bar{\varepsilon}^2} \theta(a^2 - \bar{\varepsilon}^2), \quad (8.19)$$

$$\langle \delta(h_v^2 - \bar{f}) \rangle_{h_v} = \sqrt{2N/\pi a^2 \bar{f}} \exp\left(-\frac{2N}{a^2} \bar{f}\right). \quad (8.20)$$

Оставшееся усреднение по  $h$  и  $\omega$  проводится методом перевала, что дает

$$\rho_2(E, \Gamma) = (N-1) \frac{2}{\pi a^2} \sqrt{a^2 - E^2} \theta(a^2 - E^2) \sqrt{\frac{N\kappa^2}{2\pi\eta\Gamma}} \exp\left(-\frac{N\kappa^2}{2\eta} \Gamma\right). \quad (8.21)$$

Здесь в коэффициенте сохранена единица рядом с  $N$ , чтобы обеспечить правильную нормировку (8.2) суммы (8.13). Таким образом, для  $N-1$  долгоживущих состояний восстановились полукруговой закон ГОА (4.11) и распределение Портера—Томаса, но с малой шириной (7.38)  $\langle \Gamma \rangle = \eta/N\kappa^2$ . Поскольку среднее расстояние между резонансами  $D \sim a/N$ , параметр их взаимного перекрытия, как уже отмечалось выше,  $\langle \Gamma \rangle/D \sim 1/\kappa$ , вновь оказывается малым.

## 9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе сделана попытка рассмотреть статистическую спектроскопию нестабильных квантовых состояний посредством обобщения подходов, используемых в статистической спектроскопии дискретных уровней. Распадные системы описываются ансамблем слу-

чайных неэрмитовых гамильтонианов, комплексные собственные значения которых определяют энергии  $E_n$  и ширины  $\Gamma_n$ . Распределение собственных значений в комплексной плоскости ( $E, \Gamma$ ) найдено в простых статистических предположениях относительно элементов случайного гамильтониана. Полностью рассмотрен одноканальный случай.

Нестабильность состояний существенно меняет статистику их энергий, устраняя расталкивание уровней на расстояниях меньших, чем ширины. Комплексные же энергии  $\mathcal{E}_n = E_n - \frac{i}{2}\Gamma_n$  расталкиваются пропорционально квадрату расстояния между соответствующими комплексными точками. При усилении связи с континуумом система динамически перестраивается, и в ситуации, когда матричные элементы антиэрмитовой части гамильтониана становятся сравнимыми с расстояниями между собственными значениями эрмитовой части, происходит переход к новому режиму, определяемому не деталями статистических гипотез, а алгебраической структурой антиэрмитовой части. Последняя, в свою очередь, диктуется общими принципами унитарности. В результате вероятности распадов перераспределяются так, что выделяются быстро распадающиеся состояния (число их равно числу каналов реакции), почти исчерпывающие суммарную ширину всех уровней. Оставшиеся долгоживущие состояния хорошо изолированы и описываются статистикой, близкой к исходной. Такая картина сосуществования прямых и компаунд-процессов приводит к нетривиальной gross-структуре в энергетической зависимости сечений. Промежуточная структура с несколькими короткоживущими уровнями была обнаружена в численных расчетах ядерного фотоэффекта [17], где процесс ее выделения по мере роста перекрытия исходных состояний был назван «самоорганизацией». Мы видим, что ее механизм, аналогичный когерентному сверхизлучению Дикке в квантовой оптике, имеет весьма общий характер.

В одноканальном случае рассмотренная картина режимов слабой и сильной связи с континуумом не оставляет места для проявления эриксоновских флуктуаций. Они могут в принципе возникнуть в многоканальной ситуации при наличии нескольких резонансов промежуточной структуры. Задача с многими каналами требует специального исследования.

Основные результаты данной работы были опубликованы в [39].



Авторы благодарны И. Роттер за стимулирующие дискуссии и предоставление информации о результатах своих расчетов до их публикации, а также М.Г. Урину за полезное обсуждение взаимосвязи различных подходов; они признательны Ф.М. Израйлеву за постоянный интерес и участие в обсуждениях и Л.Ф. Хайло за помощь в проведении численных расчетов. Кроме того, один из нас (В.З.) хотел бы отметить полезные дискуссии с И.В. Кривошеем, а другой (В.С.) — с В.Л. Любошицем.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Bohr A., Mottelson B. Nuclear Structure. V.1, Benjamin, 1969. Пер.: О. Бор и Б. Моттelson. Структура атомного ядра. Т.1. Мир (1971).
2. Bohr N. Nature 137 (1936) 344.
3. Statistical Theories of Spectra: Fluctuations. N.Y. Ac. Pr. (1965).
4. Беляев С.Т., Зелевинский В.Г. УФН, 147 (1985) 210.
5. Wigner E.P. Ann. Math. 53 (1951) 36; 62 (1955) 248.
6. Dyson F.J. J. Math. Phys. 3 (1962) 140, 157, 166. Пер.: Ф. Дайсон. Статистическая теория энергетических уровней сложных систем. ИЛ (1963).
7. Гуревич И.И. ЖЭТФ 9 (1939) 1283.
8. Brody T.A. et al. Rev. Mod. Phys. 53 (1981) 385.
9. Chirikov B.V. Phys. Rep. 52 (1979) 263.
10. Berry M.V. Ann. Phys. 131 (1981) 163.
11. Pechukas P. Phys. Rev. Lett. 52 (1984) 1.
12. Mehta M.L. Random Matrices & the Statistical Theory of Energy Levels. N.Y. Acad. Press (1967).
13. Porter C.E., Thomas R.G. Phys. Rev. 104 (1956) 483.
14. Agassi D., Weidenmüller H.A., Mantzouranis G. Phys. Rep. C22 (1975) 145.
15. Verbaarschot J.J.M. et al. Phys. Rep. Lett. 52 (1984) 1597.
16. Weidenmüller H.A., Ann. Phys. 158 (1984) 120.
17. Kleinwächter P., Rotter I. J. Phys. G12 (1986) 821.
18. Кобзарев И.Ю., Николаев Н.Н., Окунь Л.Б. ЯФ 10 (1969) 864; Кобзарев И.Ю. Материалы VIII Зимней школы ЛИЯФ, 1 (1972) 298.
19. Bloch C. Nucl. Phys. 4 (1957) 503; Feshbach H. Ann. Phys. 5 (1958) 357.
20. Friedman F.L., Weisskopf V.F. In: Niels Bohr & Development of Physics. London (1955) 134; Пер.: Нильс Бор и развитие физики. ИЛ (1958) 177.
21. Dicke R.H. Phys. Rev. 93 (1954) 99.
22. Bell J.S., Steinberger J. Proc. Int. Conf. on Elementary Particles. Oxford (1965).
23. Барышевский В.Г., Любошиц В.Л., Подгорецкий М.И. ЖЭТФ 57 (1969) 157.
24. Кирилюк В.Д., Николаев Н.Н., Окунь Л.Б. ЯФ 10 (1969) 1081.
25. Wigner E.P., Eisenbud L. Phys. Rev. 72 (1947) 29.
26. Любошиц В.Л. Сообщения ОИЯИ. P2-5328, Дубна (1970).
27. Шапиро И.С. Проблемы современной ядерной физики. Новосибирск: Наука (1971) 273.
28. Wigner E.P. Proc. Natl. Acad. Sci. (USA) 32 (1946) 302.
29. Любошиц В.Л. Материалы XIX зимней школы ЛИЯФ. Ленинград (1984) 33.
30. Урин М.Г. ЭЧАЯ 8 (1977) 817.

31. Grobe R., Haake F. Zeitschr. Phys. B68 (1987) 512.
32. Mehta M.L. Nucl. Phys. 18 (1960) 395.
33. Robnik M. J. Phys. A20 (1987) L495.
34. Пастур Л.А. ТМФ 10 (1972) 102.
35. Willets L. Theories of Nuclear Fission. Clar. Press. Oxford (1964). Пер.: Л. Уилетс Теория и ядерного деления Атомиздат (1967).
36. Dyson F.J. J. Math. Phys. 3 (1962) 1191.
37. Tanaka S., Sugano S. Phys. Rev. B34 (1986) 6880.
38. Ericson T.E.O. Ann. of Phys. 23 (1963) 390.
39. Sokolov V.V., Zelevinsky V.G. Phys. Lett. B202, (1988) 10.



*В.Г. Зелевинский, В.В. Соколов*

**Динамика и статистика  
нестабильных квантовых состояний**

Ответственный за выпуск С.Г.Попов

---

Работа поступила 18 мая 1988 г.  
Подписано в печать 31.05. 1988 г. МН 08315  
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 2,9 печ.л., 2,4 уч.-изд.л.  
Тираж 250 экз. Бесплатно. Заказ № 79

---

*Набрано в автоматизированной системе на базе фото-  
наборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и  
отпечатано на ротапинтере Института ядерной физики  
СО АН СССР,  
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.*