



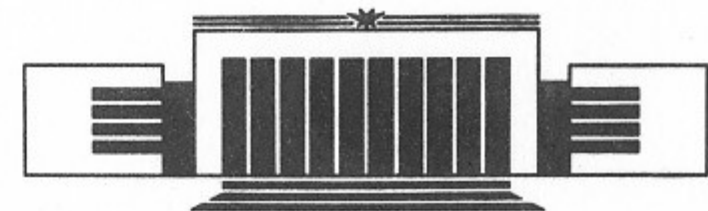
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

34

Э.А. Кураев, З.К. Силагадзе, А. Чешель,
А. Шиллер

**ТЕНЗОР РАССЕЯНИЯ СВЕТА НА СВЕТЕ И
АНОМАЛЬНЫЙ МАГНИТНЫЙ
МОМЕНТ МЮОНА**

ПРЕПРИНТ 88-152



НОВОСИБИРСК

Тензор рассеяния света на свете
и аномальный магнитный момент мюона

Э.А. Кураев, З.К. Силагадзе, А. Чешель, А. Шиллер

Институт ядерной физики
630090, Новосибирск 90, СССР

АННОТАЦИЯ

При использовании калибровочной инвариантности и бозе-симметрии построено общее выражение для тензора, описывающего переход фотона с нулевым 4-импульсом в три виртуальных фотона, необходимого для нахождения вклада в аномальный магнитный момент электрона и мюона от диаграмм, содержащих блок рассеяния света светом. Коэффициенты при тензорных структурах, выраженных в терминах напряженностей полей вычислены в низшем порядке теории возмущений. В качестве контроля рассмотрен низкоэнергетический предел и вычислен коэффициент при логарифме отношений масс мюона и электрона во вкладе в аномальный момент мюона от этого класса диаграмм. Приведено общее выражение для этого вклада в виде многократного интеграла. Рассмотрен вопрос о вкладе радиационных поправок и некоторые классы диаграмм в высших порядках теории возмущений.

1. ВВЕДЕНИЕ

Эксперименты по измерению аномальных магнитных моментов электрона и мюона $(a)_{\mu,e} = \left(\frac{g-2}{2}\right)_{\mu,e}$, планируемые на ближайшее время будут иметь точность лучше 10^{-9} [1], что ставит теоретическую проблему вычисления этих величин с точностью примерно 10^{-10} . В круг связанных с этим задач входит более точный учет сильных и слабых взаимодействий в $(a)_{\mu}$, а также продолжение вычислений вкладов электромагнитного происхождения в высших порядках теории возмущений (ТВ). В частности представляет интерес вычисление β -функции Гелл—Мона—Лоу в $(\alpha/\pi)^4$ порядке ТВ для восстановления с нужной точностью вклада в аномальный момент мюона поляризации вакуума за счет электронов с помощью аппарата ренорм-группы. Другим направлением является точный учет диаграмм Фейнмана содержащих в качестве составной части блок рассеяния света на свете. Здесь мы будем рассматривать такие диаграммы в низших порядках ТВ (см. рис. 1).

Известно, что численный вклад диаграмм, содержащих блок рассеяния света светом, в a_{μ} и a_e , велик, причем для a_e нет сейчас однозначного ответа [3]. Вычислению его, исходя на основе диаграммной техники Фейнмана посвящен ряд работ, начиная с работы Алдинса и др (1970 г.) [2], в

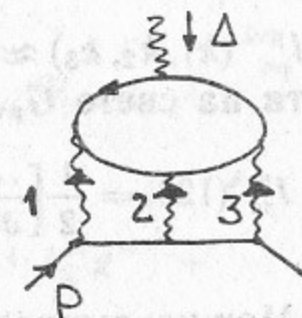


Рис. 1.

частности [3, 5]. В недавней работе Елховского [6] был вычислен аналитически коэффициент при логарифме отношения квадратов масс мюона и электрона $L = \ln \frac{M_\mu^2}{m_e^2}$ в a_μ исходя из статической интерпретации поля мюона и классических уравнений движения электрона в нем.

В этой работе мы приводим явное выражение для тензора рассеяния света на свете, проверяем его на низкоэнергетическом пределе и вычисляем часть вклада в a_μ в 6-м порядке ТВ, пропорциональную L . Полученные результаты могут быть применены к вычислению a_e . Анализируется вопрос о вкладе радиационных поправок. Основные результаты приведены в формулах (21), (26), (28), (37) и приложениях 1, 3.

2. ОБЩАЯ СТРУКТУРА ТЕНЗОРА

Вклад в аномальный магнитный момент $a = \frac{g-2}{2}$ диаграмм Фейнмана, содержащих блок рассеяния света на свете (рис. 1) имеет вид [2]:

$$\Delta a = \frac{1}{48M} \text{Sp}(\hat{p} + M)[\gamma^\rho \cdot \gamma^\sigma](\hat{p} + M)M_{\rho\sigma}, \quad (1)$$

где

$$M_{\rho\sigma} = -\frac{4\pi\alpha}{(2\pi)^8} \int \frac{d^4k_1 d^4k_2 d^4k_3}{k_1^2 k_2^2 k_3^2} \delta^{(4)}(k_1 + k_2 + k_3) \times \\ \times J_{\rho\sigma}^{\mu\nu\lambda}(k_1, k_2, k_3) \gamma_\lambda(\hat{p} + \hat{k}_3 - M)^{-1} \gamma_\nu(\hat{p} - \hat{k}_1 - M)^{-1} \gamma_\mu, \quad (2)$$

и $J_{\rho\sigma}^{\mu\nu\lambda}(k_1, k_2, k_3) \approx J_{\rho\sigma}^{\mu\nu\lambda}(123)$ выражается через тензор рассеяния света на свете $G_{\mu\nu\lambda\sigma}$

$$J_{\rho\sigma}^{\mu\nu\lambda}(123) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial k_4^\rho} G_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4) - \frac{\partial}{\partial k_4^\sigma} G_{\mu\nu\lambda\rho}(k_1, k_2, k_3, k_4) \right] \Big|_{k_4=0}. \quad (3)$$

Можно вычислить $J_{\mu\nu\lambda\rho\sigma}$, используя явное выражение для тензора G , полученное в работе [4]. Для случая $k_4=0$ удобнее провести прямое вычисление. Придерживаясь логической схемы работы [4], исследуем общий вид тензора

$$J_{\mu\nu\lambda\rho\sigma}(123) = \sum_{i,j,l} A_{\rho\sigma}^{ijl}(123) k_\mu^i k_\nu^j k_\lambda^l + \sum_i B_{\rho\sigma}^{(1)i}(123) k_\mu^i g_{\nu\lambda} + \\ + \sum_i C^{(1)i}(123) (\bar{k}_\mu^i) g_{\nu\lambda} + \sum_{i,j,l} d_{(1)}^{ijl}(123) (\bar{k}_\mu^i)_{\rho\sigma} k_\nu^j k_\lambda^l + \\ + \sum_i E^{(1)i}(123) k_\mu^i [v\lambda]_{\rho\sigma} + \dots, \quad (4)$$

где приняты следующие соглашения об индексах суммирования [4]:

$$i=2,3; \quad j=1,3; \quad l=1,2; \quad (5)$$

а также обозначения

$$(\bar{k}_\mu)_{\rho\sigma} = k_\rho g_{\mu\sigma} - k_\sigma g_{\mu\rho}; \quad [v, \lambda]_{\rho\sigma} = g_{\nu\rho} g_{\lambda\sigma} - g_{\nu\sigma} g_{\lambda\rho}. \quad (6)$$

Единственная возможность реализовать антисимметрию тензоров $A_{\rho\sigma}^{ijl}$, $B_{\rho\sigma}^{(n)i}$ относительно индексов ρ, σ , такова:

$$A_{\rho\sigma}^{ijl} = (k_{1\rho} k_{2\sigma} - k_{1\sigma} k_{2\rho}) A^{ijl} \equiv [12]_{\rho\sigma} A^{ijl}, \quad B_{\rho\sigma}^{(n)i} = [12]_{\rho\sigma} B^{(n)i}, \quad (7)$$

где

$$[12]_{\rho\sigma} = k_{1\rho} k_{2\sigma} - k_{1\sigma} k_{2\rho}.$$

Бозе-статистика фотонов накладывает на тензор J условия симметрии: он не должен меняться при одновременной перестановке своих аргументов k_1, k_2, k_3 и Лоренц-индексов μ, ν, λ :

$$J_{\rho\sigma}^{\mu\nu\lambda}(123) = J_{\rho\sigma}^{\mu\lambda\nu}(231) = J_{\rho\sigma}^{\lambda\mu\nu}(312) = \dots \quad (8)$$

При этом можно ограничиться двумя структурами A , четырьмя d и B, C, E :

$$A^{211} = A_1, \quad A^{231} = A_2, \quad d_{(1)}^{211} = d_1, \quad d_{(1)}^{212} = d_2, \quad d_{(1)}^{232} = d_3, \\ d_{(1)}^{231} = d_4, \quad B^{(1)2} = B, \quad C^{(1)2} = C, \quad E^{(1)2} = E,$$

$$J_{\rho\sigma}^{\mu\nu\lambda}(123) = \sum_{\text{перест.} \left\{ \begin{smallmatrix} \mu \nu \lambda \\ 123 \end{smallmatrix} \right\}} \{ [12]_{\rho\sigma} (A_1(123) k_2^\mu k_1^\nu k_1^\lambda + B(123) k_2^\mu g^{\nu\lambda}) + \\ + C(123) (\bar{k}_2^\mu)_{\rho\sigma} g_{\nu\lambda} + E(123) k_2^\mu [v\lambda]_{\rho\sigma} + d_1(123) (\bar{k}_2^\mu)_{\rho\sigma} k_1^\nu k_1^\lambda + \\ + d_2(123) (\bar{k}_2^\mu)_{\rho\sigma} k_1^\nu k_2^\lambda + d_3(123) (\bar{k}_2^\mu)_{\rho\sigma} k_3^\nu k_2^\lambda + d_4(123) (\bar{k}_2^\mu)_{\rho\sigma} k_3^\nu k_1^\lambda \} + \\ + a(123) [12]_{\rho\sigma} (k_2^\mu k_3^\nu k_1^\lambda - k_3^\mu k_1^\nu k_2^\lambda) + \bar{a}(123) [12]_{\rho\sigma} (k_2^\mu k_3^\nu k_1^\lambda + k_3^\mu k_1^\nu k_2^\lambda), \quad (9)$$

$$a(123) = \frac{1}{2}[A_2(123) + A_2(132)], \quad \bar{a}(123) = \frac{1}{2}[A_2(123) - A_2(132)],$$

$$A_2(123) = A_2(231) = A_2(312) \equiv A^{231}(123).$$

Суммирование проводится по одновременным перестановкам 1, 2, 3 и Лоренц-индексов μ, ν, λ .

Требование калибровочной инвариантности (достаточно потребовать $k_\mu^1 J_{\rho\sigma}^{\mu\nu\lambda}(123) = 0$) приводит к следующим соотношениям между функциями $A-E$:

$$-d_1(123) + k_1 k_2 A_1(123) - k_1 k_3 A_1(132) - B(213) + B(312) + d_1(132) = 0, \quad (10a)$$

$$d_2(132) - d_4(123) + k_1 k_3 A_1(312) + k_1 k_2 [\bar{a}(123) + a(123)] + B(231) = 0, \quad (10б)$$

$$k_1 k_2 A_1(231) - k_1 k_3 A_1(321) - d_3(123) + d_3(132) = 0, \quad (10в)$$

$$B(123) k_1 k_2 - B(132) k_1 k_3 - C(123) + C(132) = 0, \quad (10г)$$

$$k_1 k_2 E(123) - k_1 k_3 E(132) = 0, \quad (10д)$$

$$k_1 k_3 d_3(213) + C(213) + E(312) + k_1 k_2 d_2(213) = 0, \quad (10е)$$

$$k_1 k_2 d_1(213) + k_1 k_3 d_4(213) - E(321) = 0, \quad (10ж)$$

$$k_1 k_2 d_4(231) + k_1 k_3 d_3(231) + C(231) = 0, \quad (10з)$$

$$k_1 k_2 d_1(231) + k_1 k_3 d_2(231) = 0. \quad (10и)$$

С помощью соотношений (10и), (10з), (10ж) и (10б) можно исключить из (9) функции d_1, B, E, C и, кроме того, получить функциональные связи:

$$k_1 k_3 d_2(213) - k_2 k_3 d_2(123) = \frac{k_1 k_3 k_2 k_3}{k_1 k_2} [d_4(213) - d_4(123)], \quad (11a)$$

$$k_1 k_2 A_1(231) - k_1 k_3 A_1(321) = d_3(123) - d_3(132), \quad (11б)$$

$$\frac{1}{2k_2 k_3} [d_4(231) - d_4(321)] + \frac{1}{2k_1 k_3} [d_4(312) - d_4(132)] +$$

$$+ \frac{1}{2k_1 k_2} [d_4(123) - d_4(213)] = \bar{a}(123). \quad (11в)$$

В результате тензор J преобразуется к виду:

$$J_{\rho\sigma}^{\mu\nu\lambda}(123) = a(123) [12]_{\rho\sigma} \{k_2^\mu k_3^\nu k_1^\lambda - k_3^\mu k_1^\nu k_2^\lambda + g^{\nu\lambda} (k_1 k_2 k_3^\mu - k_1 k_3 k_2^\mu) +$$

$$+ g^{\mu\lambda} (k_2 k_3 k_1^\nu - k_1 k_2 k_3^\nu) + g^{\mu\nu} (k_1 k_3 k_2^\lambda - k_3 k_2 k_1^\lambda)\} +$$

$$+ \bar{a}(123) [12]_{\rho\sigma} \{k_2^\mu k_3^\nu k_1^\lambda + k_3^\mu k_1^\nu k_2^\lambda - g^{\nu\lambda} (k_1 k_3 k_2^\mu + k_1 k_2 k_3^\mu) -$$

$$-g^{\mu\lambda} (k_2 k_3 k_1^\nu + k_1 k_2 k_3^\nu) - g^{\mu\nu} (k_2 k_3 k_1^\lambda + k_1 k_3 k_2^\lambda)] +$$

$$+ \sum_{\substack{\mu, \nu, \lambda \\ 123}} \{ (k_3^\nu k_2^\lambda - k_2 k_3 g^{\nu\lambda}) [d_3(123) (\bar{k}_2^\mu)_{\rho\sigma} + [12]_{\rho\sigma} A_1(231) k_2^\mu] +$$

$$+ d_2(123) T_{\rho\sigma}^{\mu\nu\lambda}(123) + d_4(123) R_{\rho\sigma}^{\mu\nu\lambda}(123) \}, \quad (12)$$

где

$$T_{\rho\sigma}^{\mu\nu\lambda}(123) = (\bar{k}_2^\mu)_{\rho\sigma} k_1^\nu \left(k_2^\lambda - \frac{k_2 k_3}{k_1 k_3} k_1^\lambda \right) + g^{\mu\nu} k_2^\lambda [12]_{\rho\sigma} - \frac{k_1 k_2 k_2 k_3}{k_1 k_3} k_1^\lambda [\mu\nu]_{\rho\sigma},$$

$$R_{\rho\sigma}^{\mu\nu\lambda}(123) = (\bar{k}_2^\mu)_{\rho\sigma} k_3^\nu k_1^\lambda + k_3^\nu g^{\mu\lambda} [12]_{\rho\sigma} - (\bar{k}_2^\mu)_{\rho\sigma} g^{\nu\lambda} k_1 k_3 + k_2 k_3 k_1^\lambda [\mu\nu]_{\rho\sigma}. \quad (12a)$$

Запишем (12) в явно калибровочно-инвариантной форме, в терминах тензоров $F_{\alpha\beta}^\mu(k_1), F_{\alpha\beta}^\nu(k_2), F_{\alpha\beta}^\lambda(k_3)$, связанных с тензорами напряженности электромагнитных полей $F_{\lambda\nu}(k, A)$:

$$F_{\alpha\beta}(k, A) = k_\alpha A_\beta - k_\beta A_\alpha = A_\mu F_{\alpha\beta}^\mu(k),$$

$$F_{\alpha\beta}^\mu(k) = k_\alpha \delta_\beta^\mu - k_\beta \delta_\alpha^\mu, \quad k_\mu F_{\alpha\beta}^\mu(k) = 0. \quad (13)$$

Первое слагаемое в (12) можно переписать в требуемом виде благодаря соотношению

$$k_2^\mu k_3^\nu k_1^\lambda - k_3^\mu k_1^\nu k_2^\lambda + k_1 k_3 (k_2^\lambda g^{\mu\nu} - k_2^\mu g^{\nu\lambda}) + k_1 k_2 (k_3^\mu g^{\nu\lambda} - k_3^\nu g^{\mu\lambda}) +$$

$$+ k_2 k_3 (k_1^\nu g^{\mu\lambda} - k_1^\lambda g^{\mu\nu}) = F_\beta^{\mu\alpha}(k_1) F_\gamma^{\nu\beta}(k_2) F_\alpha^{\lambda\gamma}(k_3). \quad (14)$$

Вклады в (12), содержащие d_3 и A_1 также могут быть записаны в терминах $F_{\alpha\beta}^\mu(k)$ благодаря соотношению (11б), а также

$$k_3^\nu k_2^\lambda - k_2 k_3 g^{\nu\lambda} = \frac{1}{2} F_\beta^{\nu\alpha}(k_2) F_\alpha^{\lambda\beta}(k_3).$$

В результате для этих слагаемых имеем

$$\sum (k_3^\nu k_2^\lambda - k_2 k_3 g^{\nu\lambda}) [d_3(123) (\bar{k}_2^\mu)_{\rho\sigma} + [12]_{\rho\sigma} A_1(231) k_2^\mu] = \frac{1}{2} \sum F_\beta^{\nu\alpha}(k_2) F_\alpha^{\lambda\beta}(k_3) \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{2} F_{\rho\sigma}^\mu(k_1) [-d_3(132) + k_1 k_3 A_1(321)] - A_1(231) (\bar{k}_2^\alpha)_{\rho\sigma} F_{\alpha\beta}^\mu(k_1) k_2^\beta \right\}. \quad (15)$$

Оставшиеся слагаемые в (12), содержащие d_2, d_4 , пользуясь (11a) и тождеством

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = (a_1 - a_2) \frac{b_1 - b_2}{2} + (a_1 + a_2) \frac{b_1 + b_2}{2},$$

преобразуем к виду (лоренцевы индексы опущены):

$$\begin{aligned}
 & d_2(123) T(123) + d_2(213) T(213) + d_4(123) R(123) + d_4(213) R(213) = \\
 & = \frac{1}{2} [d_4(123) + d_4(213)] [R(123) + R(213)] + \\
 & + \frac{1}{2} d_2(123) \left[T(123) + \frac{k_2 k_3}{k_1 k_3} T(213) \right] + \\
 & + \frac{1}{2} d_2(213) \left[T(213) + \frac{k_1 k_3}{k_2 k_3} T(123) \right] + \frac{1}{2} [d_4(213) - d_4(123)] \times \\
 & \times \left[\frac{k_2 k_3}{k_1 k_2} T(213) - \frac{k_1 k_3}{k_1 k_2} T(123) + R(213) - R(123) \right]. \quad (16)
 \end{aligned}$$

На основании (12а) легко убедиться, что тензорные структуры первых трех слагаемых в правой части (16) выражаются в терминах $F_{\alpha\beta}^{\mu}(k)$:

$$\begin{aligned}
 R(123) + R(213) &= (\bar{k}_2^{\mu})_{\rho\sigma} k_3^{\nu} k_1^{\lambda} + k_3^{\mu} (\bar{k}_1^{\nu})_{\rho\sigma} k_2^{\lambda} + [12]_{\rho\sigma} (k_3^{\nu} g^{\mu\lambda} - k_3^{\mu} g^{\nu\lambda}) - \\
 &- (\bar{k}_2^{\mu})_{\rho\sigma} k_1 k_2 g^{\nu\lambda} - (\bar{k}_1^{\nu})_{\rho\sigma} k_2 k_3 g^{\mu\lambda} + [\mu\nu]_{\rho\sigma} (k_2 k_3 k_1^{\lambda} - k_1 k_3 k_2^{\lambda}) = \\
 &= F_{\rho\beta}^{\mu}(k_1) F_{\delta}^{\lambda\beta}(k_3) F_{\sigma}^{\nu\delta}(k_2) - F_{\sigma\mu}^{\nu}(k_1) F_{\delta}^{\lambda\beta}(k_3) F_{\rho}^{\nu\delta}(k_2), \quad (17a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T(123) + \frac{k_2 k_3}{k_1 k_3} T(213) &= (\bar{k}_2^{\mu})_{\rho\sigma} k_1^{\nu} k_2^{\lambda} - k_2^{\mu} (\bar{k}_1^{\nu})_{\rho\sigma} k_2^{\lambda} + \frac{k_2 k_3}{k_1 k_3} \times \\
 &\times [k_2^{\mu} (\bar{k}_1^{\nu})_{\rho\sigma} k_1^{\lambda} - (\bar{k}_2^{\mu})_{\rho\sigma} k_1^{\nu} k_1^{\lambda}] + \left[k_2^{\lambda} - \frac{k_2 k_3}{k_1 k_3} k_1^{\lambda} \right] [k_1 k_2 [\mu\nu]_{\rho\sigma} + [12]_{\rho\sigma} g^{\mu\nu}] = \\
 &= \frac{1}{k_1 k_3} k_1^{\alpha} F_{\alpha\beta}^{\lambda}(k_3) k_2^{\beta} [F_{\sigma\eta}^{\mu}(k_1) F_{\rho}^{\nu\eta}(k_2) - F_{\rho\eta}^{\mu}(k_1) F_{\sigma}^{\nu\eta}(k_2)]. \quad (17б)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T(213) + \frac{k_1 k_3}{k_2 k_3} T(123) &= \\
 &= \frac{1}{k_2 k_3} k_2^{\alpha} F_{\alpha\beta}^{\lambda}(k_3) k_1^{\beta} [F_{\sigma\eta}^{\nu}(k_2) F_{\rho}^{\mu\eta}(k_1) - F_{\rho\eta}^{\nu}(k_2) F_{\sigma}^{\mu\eta}(k_1)]. \quad (17в)
 \end{aligned}$$

Последнее слагаемое в правой части (16) не калибровочно-инвариантно:

$$\begin{aligned}
 R(213) - R(123) + \frac{k_2 k_3}{k_1 k_2} T(213) - \frac{k_1 k_3}{k_1 k_2} T(123) &= \frac{1}{k_1 k_2} \times \\
 &\times \{ k_1 k_2 k_3^{\mu} (\bar{k}_1^{\nu})_{\rho\sigma} k_2^{\lambda} - k_1 k_3 k_2^{\mu} (\bar{k}_1^{\nu})_{\rho\sigma} k_2^{\lambda} - k_1 k_2 (\bar{k}_2^{\mu})_{\rho\sigma} k_3^{\nu} k_1^{\lambda} + k_2 k_3 (\bar{k}_2^{\mu})_{\rho\sigma} k_1^{\nu} k_1^{\lambda} + \\
 &+ k_2 k_3 k_2^{\mu} (\bar{k}_1^{\nu})_{\rho\sigma} k_1^{\lambda} - k_1 k_3 (\bar{k}_2^{\mu})_{\rho\sigma} k_1^{\nu} k_2^{\lambda} - [12]_{\rho\sigma} (k_1 k_2 k_3^{\mu} g^{\nu\lambda} + k_1 k_2 k_3^{\nu} g^{\mu\lambda}) +
 \end{aligned}$$

$$+ k_2 k_3 k_1^{\lambda} g^{\mu\nu} + k_1 k_3 k_2^{\lambda} g^{\mu\nu}) + k_1 k_2 k_1 k_3 (\bar{k}_2^{\mu})_{\rho\sigma} g^{\nu\lambda} - k_1 k_2 k_2 k_3 (\bar{k}_1^{\nu})_{\rho\sigma} g^{\mu\lambda}. \quad (18a)$$

Также не является калибровочно-инвариантным и второе слагаемое в правой части (12), пропорциональное $\bar{a}(123)$. Исключая \bar{a} с помощью (11в), получим добавку к тензорной структуре (18а):

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{k_1 k_2} (k_2^{\mu} k_3^{\nu} k_1^{\lambda} + k_3^{\mu} k_1^{\nu} k_2^{\lambda} - g^{\nu\lambda} (k_1 k_3 k_2^{\mu} + k_1 k_2 k_3^{\mu}) - g^{\mu\lambda} (k_2 k_3 k_1^{\nu} + k_1 k_2 k_3^{\nu}) - \\
 & - g^{\mu\nu} (k_2 k_3 k_1^{\lambda} + k_1 k_3 k_2^{\lambda})) [12]_{\rho\sigma}. \quad (18б)
 \end{aligned}$$

Можно убедиться, что сумма правой части (18а) и (18б) есть калибровочно-инвариантный тензор

$$\begin{aligned}
 \tau_{\rho\sigma}^{\mu\nu\lambda}(123) &= \frac{1}{k_1 k_2} \times \\
 &\times [(\bar{k}_2^{\alpha})_{\rho\sigma} F_{\alpha\beta}^{\mu}(k_1) F_{\gamma}^{\nu\beta}(k_2) F_{\delta}^{\lambda\gamma}(k_3) k_1^{\delta} - (\bar{k}_1^{\alpha})_{\rho\sigma} F_{\alpha\beta}^{\nu}(k_2) F_{\gamma}^{\mu\beta}(k_1) F_{\delta}^{\lambda\gamma}(k_3) k_2^{\delta}]. \quad (19)
 \end{aligned}$$

В результате, вклад слагаемых из (12), содержащих \bar{a} , d_2 , d_4 запишем в виде

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} [d_4(213) - d_4(123)] \tau_{\rho\sigma}^{\mu\nu\lambda}(123) + \frac{1}{2} [d_4(321) - d_4(231)] \tau_{\rho\sigma}^{\nu\lambda\mu}(231) + \\
 & + \frac{1}{2} [d_4(132) - d_4(312)] \tau_{\rho\sigma}^{\lambda\mu\nu}(312). \quad (20)
 \end{aligned}$$

Приведем, наконец, полное выражение для тензора $J_{\rho\sigma}^{\mu\nu\lambda}(123)$, удовлетворяющее условиям бозе-статистики и явной калибровочной инвариантности:

$$\begin{aligned}
 J_{\rho\sigma}^{\mu\nu\lambda}(123) &= a(123) [12]_{\rho\sigma} F_{\beta}^{\mu\alpha}(k_1) F_{\gamma}^{\nu\beta}(k_2) F_{\alpha}^{\lambda\gamma}(k_3) + \\
 &+ \sum_{\{\mu\nu\lambda\}} \left\{ F_{\beta}^{\nu\alpha}(k_2) F_{\alpha}^{\lambda\beta}(k_3) \left[\frac{1}{4} F_{\rho\sigma}^{\mu}(k_1) [-d_3(132) + k_1 k_3 A_1(321)] - \right. \right. \\
 &- \frac{1}{2} A_1(231) (\bar{k}_2^{\delta})_{\rho\sigma} F_{\delta\eta}^{\mu}(k_1) k_2^{\eta} \left. \right] - \frac{d_2(123)}{2 k_1 k_3} k_1^{\alpha} F_{\alpha\beta}^{\lambda}(k_3) k_2^{\beta} F_{\gamma\eta}^{\mu}(k_1) F_{\delta}^{\nu\eta}(k_2) J_{\rho\sigma}^{\rho\delta} + \\
 &+ \frac{d_4(123)}{2 k_1 k_2} [F_{\gamma\beta}^{\mu}(k_1) F_{\delta}^{\lambda\beta}(k_3) F_{\eta}^{\nu\delta}(k_2) J_{\rho\sigma}^{\gamma\eta} k_1 k_2 + (\bar{k}_1^{\alpha})_{\rho\sigma} F_{\alpha\beta}^{\nu}(k_2) F_{\gamma}^{\mu\beta}(k_1) F_{\delta}^{\lambda\gamma}(k_3) k_2^{\delta} - \\
 &- (\bar{k}_2^{\alpha})_{\rho\sigma} F_{\alpha\beta}^{\mu}(k_1) F_{\gamma}^{\nu\beta}(k_2) F_{\delta}^{\lambda\gamma}(k_3) k_1^{\delta} \left. \right\}, \quad (21) \\
 J_{\rho\sigma}^{\gamma\delta} &\equiv [\gamma\delta]_{\rho\sigma} = \delta_{\rho}^{\gamma} \delta_{\sigma}^{\delta} - \delta_{\sigma}^{\gamma} \delta_{\rho}^{\delta}, \quad [12]_{\rho\sigma} = k_{1\rho} k_{2\sigma} - k_{1\sigma} k_{2\rho},
 \end{aligned}$$

$$(\bar{k}^\alpha)_{\rho\sigma} = k_\rho \delta_\sigma^\alpha - k_\sigma \delta_\rho^\alpha, \quad F_{\alpha\beta}^\mu(k) = k_\alpha \delta_\beta^\mu - k_\beta \delta_\alpha^\mu,$$

$$a(123) = \frac{1}{2} [A_2(123) + A_2(132)] = a(213) = a(312) = \dots \quad (22)$$

Функции a , A_1 , d_2 , d_3 , d_4 находим из рассмотрения диаграмм Фейнмана в однопетлевом приближении. Имеется 6 диаграмм, дающих вклад в матричный элемент. Три из них изображены на рис. 2, остальные отвечают обратному направлению фермионной линии в петле. Используя 4-импульсы согласно рисунку и удержи-

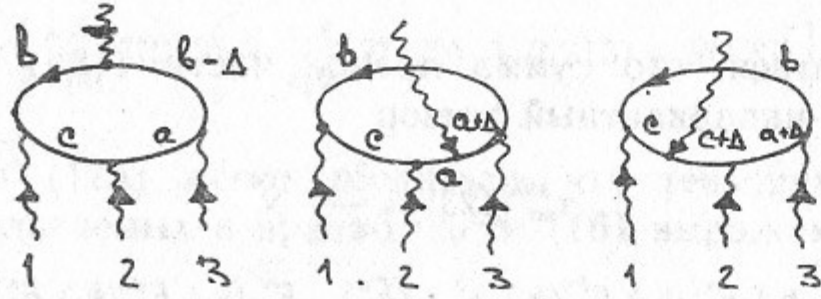


Рис. 2.

вая в разложении члены $\sim \Delta$ для $J_{\rho\sigma}^{\mu\nu\lambda}$, получим выражение

$$J_{\rho\sigma}^{\mu\nu\lambda}(123) \approx 4\alpha^2 \int \frac{d^4k}{i\pi^2} \frac{1}{4} \text{Sp} \left\{ \frac{2c_\sigma}{C^2BA} \gamma^\mu b \gamma^\lambda \gamma_\rho \gamma^\nu c + \frac{1}{BAC^2} \gamma_\sigma c \gamma^\mu b \gamma^\lambda a \gamma^\nu \gamma_\rho - \right. \\ \left. - \frac{4c_\sigma a_\rho}{C^2A^2B} \gamma^\mu b \gamma^\lambda a \gamma^\nu c + \left(\frac{2c_\rho}{C} + \frac{2a_\rho}{A} \right) \frac{\gamma_\sigma \gamma^\mu b \gamma^\lambda a \gamma^\nu}{CBA} + \frac{1}{CBA^2} \gamma^\mu b \gamma^\lambda \gamma_\rho \gamma_\sigma a \gamma^\nu c - \right. \\ \left. - \frac{2a_\rho}{CBA^2} \gamma^\mu b \gamma^\lambda \gamma_\sigma \gamma^\nu c - \frac{1}{AB^2C} \gamma^\mu b \gamma_\sigma \gamma_\rho \gamma^\lambda a \gamma^\nu c - \frac{2b_\rho}{AB^2C} \gamma^\mu \gamma_\sigma \gamma^\lambda a \gamma^\nu c - (\rho \leftrightarrow \sigma) \right\}, \quad (23)$$

где

$$A = a^2 - m^2, \quad B = b^2 - m^2, \quad C = c^2 - m^2, \quad a = k + k_2, \\ b = k - k_1, \quad c = k, \quad k_1 + k_2 + k_3 = 0. \quad (24)$$

Здесь удержаны все члены, необходимые для нахождения «главных» членов $A_{1 \div 2}$, $d_{1 \div 4}$. Массу электрона в числителе опускаем.

Использование фейнмановской параметризации

$$x_1 A + x_2 B - x_3 C = (k - x_2 k_1 + x_1 k_2)^2 - D, \\ D = m^2 - x_1 x_2 k_3^2 - x_1 x_3 k_2^2 - x_2 x_3 k_1^2 \quad (25)$$

позволяет провести интегрирование по d^4k :

$$\int \frac{d^4k}{i\pi^2} \frac{1}{(k^2 - D)^4} = \frac{1}{6D^2}; \quad \int \frac{d^4k}{i\pi^2} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - D)^5} = \frac{g_{\mu\nu}}{48D^2}; \\ \int \frac{d^4k}{i\pi^2} \frac{1}{(k^2 - D)^5} = -\frac{1}{12D^3}.$$

Вклад в функции A_1 , A_2 дает только третье слагаемое в правой части (23):

$$-32\alpha^2 \int \frac{d\tau}{D^3} x_1 x_2 x_3 [12]_{\rho\sigma} \frac{1}{4} \text{Sp} \gamma_\mu \bar{b} \gamma_\lambda \bar{a} \gamma_\nu \bar{c}, \quad d\tau = d^3x \delta\left(\sum_{i=1}^3 x_i - 1\right).$$

После взятия следа для преобразованных 4-векторов \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} используется одно из выражений таблицы (согласно правилу (5)).

	\bar{a}	\bar{b}	\bar{c}
μ	$x_3 k_2 - x_2 k_3$	$(x_1 + x_3) k_3 + x_3 k_2$	$-(x_1 + x_2) k_2 - x_2 k_3$
ν	$-x_3 k_1 - (x_2 + x_3) k_3$	$-x_3 k_1 + x_1 k_3$	$(x_1 + x_2) k_1 + x_1 k_3$
λ	$(x_2 + x_3) k_2 + x_2 k_1$	$-(x_1 + x_3) k_1 - x_1 k_3$	$x_2 k_1 - x_1 k_2$

Для функций $d_1 \div d_4$ имеются вклады двух типов: один снова происходит от третьего слагаемого в правой части (23):

$$-8\alpha^2 \int \frac{d\tau}{D^2} x_1 x_3 (\bar{2}^\mu)_{\rho\sigma} \frac{1}{4} \text{Sp} \{ \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda \bar{a} \gamma_\nu \bar{b} + \gamma_\mu \bar{b} \gamma_\lambda \gamma_\nu \gamma_\nu \bar{c} + \gamma_\mu \bar{b} \gamma_\lambda \bar{a} \gamma_\nu \gamma_\nu \}.$$

Второй — от остальных:

$$4\alpha^2 \int \frac{d\tau}{D^2} \frac{1}{4} \text{Sp} \{ \gamma_\lambda \bar{b} \bar{c} \gamma_\nu [(2x_3 \bar{c}_\sigma + (x_1 + x_2 - x_3) \bar{a}_\sigma) g_{\rho\mu} + (x_3 + x_1 - x_2) \bar{a}_\rho g_{\sigma\mu}] + \\ + \gamma_\nu \bar{a} \gamma_\lambda \bar{b} [(x_1 + x_2 + x_3) \bar{c}_\sigma g_{\rho\mu} + (\bar{c}_\rho (x_3 - x_2 - x_1) + 2x_1 \bar{a}_\rho) g_{\mu\sigma}] + \\ + \gamma_\nu \bar{a} \gamma_\lambda \bar{c} [-(x_1 + x_2 + x_3) \bar{b}_\sigma g_{\rho\mu} + (x_3 + x_1 - x_2) \bar{b}_\rho g_{\mu\sigma}] \}.$$

Сравнивая с общим разложением (21), получим

$$A_1(123) = -64\alpha^2 \int \frac{d\tau}{D^3} x_1 x_2 x_3^2 (x_1 + x_2) (x_2 - x_1 - x_3) \equiv 64\alpha^2 \int \frac{d\tau}{D^3} P_{A_1}(123),$$

$$a(123) = 64\alpha^2 \int \frac{d\tau}{D^3} x_1 x_2 x_3 [x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 (x_1 + x_2) + x_1 x_3 (x_1 + x_3) + x_2 x_3 (x_2 + x_3)] \equiv$$

$$\equiv 64\alpha^2 \int \frac{d\tau}{D^3} P_a(123),$$

$$d_2(123) = -d_1(213) = -8\alpha^2 \int \frac{d\tau}{D^2} x_3(x_1+x_2)(x_1+x_2-x_3)(x_2+x_3-x_1) \equiv,$$

$$\equiv 8\alpha^2 \int \frac{d\tau}{D^2} P_2(123),$$

$$d_3(123) = 16\alpha^2 \int \frac{d\tau}{D^2} x_1(x_2+x_3) [x_3^2 + (x_1+x_2)^2] \equiv 16\alpha^2 \int \frac{d\tau}{D^2} P_3(123),$$

$$d_4(123) = 8\alpha^2 \int \frac{d\tau}{D^2} \{x_1x_2(2+x_3-2x_2x_3) - x_3(x_1+x_3-x_2) \times \\ \times [(x_1+x_2)(x_2+x_3) - x_1^2]\} \equiv 8\alpha^2 \int \frac{d\tau}{D^2} P_4(123).$$

3. НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ПРЕДЕЛ

В качестве контроля вычислений, рассмотрим низкоэнергетический предел $|k_1^2| \sim |k_2^2| \sim |k_3^2| \ll m^2$, $D(123) \approx m^2$. При этом получаем

$$d_1(0,0,0) = d_2(0,0,0) = 0, \quad d_3(0,0,0) = \frac{8\alpha^2}{9m^4}, \quad d_4(0,0,0) = \frac{28\alpha^2}{45m^4}. \quad (27)$$

Поэтому

$$J_{\rho\sigma}^{\mu\nu\lambda}(123) \Big|_{|k_i^2| \ll m^2} \approx \frac{2\alpha^2}{45m^4} \times \\ \times \{ -10 [F_{\beta}^{\mu\alpha}(k_1) F_{\alpha}^{\nu\beta}(k_2) F_{\rho\sigma}^{\lambda}(k_3) + F_{\beta}^{\mu\alpha}(k_1) F_{\alpha}^{\lambda\beta}(k_3) F_{\rho\sigma}^{\nu}(k_2) + \\ + F_{\beta}^{\nu\alpha}(k_2) F_{\alpha}^{\lambda\beta}(k_3) F_{\rho\sigma}^{\mu}(k_1)] + 14 [F_{\rho\alpha}^{\mu}(k_1) F_{\beta}^{\lambda\alpha}(k_3) F_{\sigma}^{\nu\beta}(k_2) + \\ + F_{\rho\alpha}^{\mu}(k_1) F_{\beta}^{\nu\alpha}(k_2) F_{\sigma}^{\lambda\beta}(k_3) + F_{\rho\alpha}^{\lambda}(k_3) F_{\beta}^{\mu\alpha}(k_1) F_{\sigma}^{\nu\beta}(k_2) - (\rho \leftrightarrow \sigma)] \}. \quad (28)$$

Это выражение согласуется с результатом Гейзенберга—Эйлера [7], (5.6.20) и Карплуса—Неймана [4]. Действительно, тензор рассеяния света на свете в этом пределе (мы удвоили результат Карплуса—Неймана [4], чтобы учесть 6 диаграмм вместо 3):

$$G^{\mu\nu\lambda\sigma}(1234) = \frac{8\alpha}{9m^4} [g^{(1)\mu\nu\lambda\sigma}(1234) + g^{(1)\mu\lambda\nu\sigma}(1324) + \\ + g^{(1)\mu\sigma\nu\lambda}(1423)] - \frac{28\alpha^2}{45m^4} [g^{(2)\mu\nu\lambda\sigma}(1234) + g^{(2)\mu\lambda\nu\sigma}(1324) + g^{(2)\mu\sigma\nu\lambda}(1423)], \quad (29)$$

где

$$g^{(1)\mu\nu\lambda\sigma}(1234) = \frac{1}{4} F_{\alpha\beta}^{\mu}(k_1) F^{\nu\beta\alpha}(k_2) F^{\lambda\gamma\delta}(k_3) F_{\delta\gamma}^{\sigma}(k_4),$$

$$g^{(2)\mu\nu\lambda\sigma}(1234) = F_{\alpha}^{\mu\beta}(k_1) F_{\beta}^{\nu\gamma}(k_2) F_{\gamma}^{\lambda\delta}(k_3) F_{\delta}^{\sigma\alpha}(k_4).$$

Подстановка (29) в (3) приводит к выражению (28) для $J_{\rho\sigma}^{\mu\nu\lambda}$.

4. КОЭФФИЦИЕНТ ПРИ $\ln(M_{\mu}^2/m_e^2)$ В Δa МЮОНА

Полученное выражение для $J_{\rho\sigma}^{\mu\nu\lambda}$ (21) позволяет провести аналитическое вычисление коэффициента при $\ln \frac{M_{\mu}^2}{m_e^2}$ во вкладе диаграмм, содержащих блок рассеяния света на свете в аномальный магнитный момент мюона Δa (1). Этот коэффициент полностью происходит от кинематической области переменных 4-импульсов виртуальных фотонов (рис. 1):

$$m_e \ll |\bar{k}_i| \ll M_{\mu}, \quad |k_{0i}| \sim \frac{\bar{k}_i^2}{M} \ll |\bar{k}_i|. \quad (30)$$

отвечающей «нерелятивистскому приближению». В этом приближении γ -матричная структура, отвечающая мюону в $M_{\rho\sigma}$ (2), упрощается (мюон покоится):

$$\frac{\gamma_{\lambda}(\rho+k_3+M)\gamma_{\nu}(\rho-k_1+M)\gamma_{\mu}}{((\rho+k_3)^2-M^2+i0)((\rho-k_1)^2-M^2+i0)} = \frac{4p_{\lambda}p_{\mu}\gamma_{\nu}}{(2Mk_{30}-k_3^2+i0)(-2Mk_{10}+k_1^2+i0)}. \quad (31)$$

При интегрировании по нулевым компонентам 4-импульсов фотонов основной вклад происходит от «близких» полюсов:

$$k_{01} = M - \sqrt{M^2 + \bar{k}_1^2} - i0 \approx -\frac{\bar{k}_1^2}{2M} + i0, \quad k_{03} = \frac{\bar{k}_3^2}{2M} - i0.$$

Свертка тензоров в (2) при этом упрощается так как необходимо удержать лишь члены $\sim M^2$. Они же происходят лишь от структур в $J_{\rho\sigma}^{\mu\nu\lambda}$, пропорциональных $g_{\mu\lambda}$, поскольку все остальные скалярные произведения малы ($2pk_i \sim k_{0i}$, $M \sim |\bar{k}_i|^2 \ll M \cdot |\bar{k}_i|$). Логарифмический характер интеграла (2) по \bar{k}_1 , \bar{k}_3 очевиден. Можно показать, что никакая другая, отличная от (30) область переменных фотонов не приводит к логарифмическим вкладкам.

Проведение интегрирования по k_{01} , k_{03} требует осторожности. Нельзя наивно положить $k_{0i} = 0$ в оставшейся части подынтегрального выражения в (2), кроме «близких» полюсов мюонных пропагаторов (31), поскольку возникший при этом интеграл

$$\int \frac{dk_{01}}{-k_{01} + i0} \int \frac{dk_{03}}{k_{03} + i0}$$

не сходится на «большой окружности» $|k_0| \rightarrow \infty$. Сходимость имеется в сумме 6 фейнмановских диаграмм, отвечающих всем возможным перестановкам точек излучения фотонов в мюонной линии. Вклады эти, конечно, тождественны в силу бозе-симметрии тензора $J_{\rho\sigma}^{\mu\nu\lambda}(123)$ (8):

$$\text{Diagram} = \frac{1}{3!} \left[\text{Diagram}_1 + \text{Diagram}_2 + \text{Diagram}_3 + \text{Diagram}_4 + \text{Diagram}_5 + \text{Diagram}_6 \right] \quad (32)$$

Рис. 3.

Возникающий при этом интеграл по $x_i = k_{0i}/m$, $x_1 + x_2 + x_3 = 0$

$$\int J(x_1 m, x_2 m, x_3 m) \frac{dx_1 dx_2}{6 \cdot 4 M^2} \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{(-x_1 + i0)(-x_1 - x_2 + i0)} + \frac{1}{(-x_1 + i0)(x_2 + i0)} + \frac{1}{(-x_2 + i0)(x_1 + i0)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(-x_2 + i0)(-x_1 - x_2 + i0)} + \frac{1}{(x_1 + x_2 + i0)(x_1 + i0)} + \frac{1}{(x_1 + x_2 + i0)(x_2 + i0)} \right\} \equiv I$$

уже полностью определяется вычетами в «близких» полюсах $x_i = 0$

$$I = \frac{J(0)}{24 M^2} (-2\pi i) \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \left(\frac{1}{-x_2 + i0} + \frac{1}{x_2 + i0} \right) = -\frac{J(0)}{6 M^2} \pi^2. \quad (32a)$$

Проведя свертку в (2) по индексам $\mu\nu\lambda$ с помощью (31) (в Приложении 1 мы приводим точные выражения для этой свертки без предположения $k_{i0} = 0$), получим для Δa (части $(\Delta a)_\mu$, пропорциональной $\ln \frac{M^2}{m^2}$):

$$\overline{\Delta a} = -\frac{\alpha}{3^2 \cdot 2^7 \pi^3} \int \frac{d^3 k_1 d^3 k_2 d^3 k_3}{\bar{k}_1^2 \bar{k}_2^2 \bar{k}_3^2} \delta^{(3)}(\bar{k}_1 + \bar{k}_2 + \bar{k}_3) \times$$

$$\times \sum_{\text{перест} \left\{ \begin{smallmatrix} \mu\nu\lambda \\ 123 \end{smallmatrix} \right\}} \left\{ ((\bar{k}_1^2)^2 + (\bar{k}_2^2)^2 + (\bar{k}_3^2)^2 - 2\bar{k}_1^2 \bar{k}_2^2 - 2\bar{k}_1^2 \bar{k}_3^2 - 2\bar{k}_2^2 \bar{k}_3^2) \times \right.$$

$$\times \left(d_2(123) - \frac{1}{2}(\bar{k}_3^2 - \bar{k}_1^2 - \bar{k}_2^2) A_1(123) + \frac{1}{6}(\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2 + \bar{k}_3^2) a(123) \right) -$$

$$- 2(\bar{k}_1^2 - \bar{k}_2^2 - \bar{k}_3^2)(\bar{k}_3^2 - \bar{k}_1^2 - \bar{k}_2^2) d_3(123) +$$

$$\left. + (-3(\bar{k}_1^2)^2 + (\bar{k}_2^2)^2 + (\bar{k}_3^2)^2 + 2\bar{k}_1^2(\bar{k}_2^2 + \bar{k}_3^2) - 2\bar{k}_2^2 \bar{k}_3^2) d_4(123) \right\}. \quad (326)$$

Вклады каждого из 6 слагаемых в сумме по перестановкам в (326), конечно, одинаковы. Интеграл по модулям $|\bar{k}_i|$ в (326) логарифмически расходится и должен быть «обрезан» величинами порядка M^2 : $(\bar{k}_i^2)_{\max} \leq M^2$. Сходимость его при больших \bar{k}_i^2 обеспечивают вклады «далеких» особенностей $k_{0i} \sim M$. В коэффициент при $\ln \frac{M^2}{m^2}$ они не дают вклада.

Вводя переменные $z = \frac{|\bar{k}_2|}{|\bar{k}_1|}$, $c = \cos(\widehat{\bar{k}_1 \bar{k}_2})$ и проводя тривиальное интегрирование по азимутальным углам, преобразуем (326) к виду (см. (26)):

$$\overline{\Delta a} = -\frac{\alpha^3}{2\pi^3} \frac{1}{3!} \int_0^{M^2} \frac{d\kappa_1^2}{\kappa_1^2} \int_0^\infty \frac{dz}{\chi} \int_{-1}^1 \frac{dc}{D^2} \left\{ -8z^2(1-c^2)P_2 + \frac{64zc}{D} z^2(1-c^2)P_{A_1} + \right.$$

$$\left. + 32z^2(cz + c^2)P_3 + 8P_4 [z^2(1+c^2) + 2zc] - \frac{64}{3D} P_a z^2(1+zc+z^2)(1-c^2) \right\}, \quad (33)$$

где

$$\chi = 1 + 2cz + z^2, \quad D = \frac{m^2}{\kappa_1^2} + A, \quad A = az^2 + 2bzc + d,$$

$$a = x_1(1-x_1), \quad b = x_1 x_2, \quad d = x_2(1-x_2).$$

Интегрирование по k_1 позволяет явно выделить вклад, пропорциональный $\ln \frac{M^2}{m^2}$:

$$\int_0^{M^2} \frac{dk_1^2}{k_1^2} \frac{1}{\left(\frac{m^2}{k_1^2} + A\right)^n} = \frac{1}{A^n} \int_{\frac{m^2}{M^2 A}}^{\infty} \frac{dx}{x(1+x)^n} = \frac{1}{A^n} \begin{cases} \ln \frac{M^2}{m^2} + \ln A - 1, & n=2 \\ \ln \frac{M^2}{m^2} + \ln A - \frac{3}{2}, & n=3 \end{cases} \quad (34)$$

А интегрирование по z и c можно провести, используя выражения (см. Приложение 2)

$$I_{11} = \int_{-1}^1 dc \int_0^{\infty} \frac{dz}{\chi A} = \frac{\pi}{\beta} \varphi_3, \quad I_{01} = \int_{-1}^1 dc \int_0^{\infty} \frac{dz}{A} = \frac{\pi}{b} \varphi_1, \\ I_{02} = \int_{-1}^1 dc \int_0^{\infty} \frac{dz}{A^2} = \frac{\pi}{2Rd}, \\ I_{c2} = \int_{-1}^1 dc \int_0^{\infty} \frac{2czdz}{\chi A} = \frac{\pi}{\beta} \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{d}{b} \varphi_1 + \frac{\gamma}{\alpha} \varphi_2 \right), \quad (35)$$

$$I_c = \int_{-1}^1 dc \int_0^{\infty} \frac{4c^2 dz}{\chi A} = \frac{\pi}{\beta^2} \left[\frac{\pi(\beta - \gamma)}{2} + \frac{R\beta}{b} + \frac{d(b\gamma - a\beta)}{b^2} \varphi_1 + \frac{\gamma^2}{\alpha} \varphi_2 \right],$$

где

$$\alpha = a - b = x_1 x_3; \quad \beta = d - b = x_2 x_3; \quad \gamma = a - d = x_3(x_1 - x_2); \\ R = \sqrt{ad - b^2} = \sqrt{x_1 x_2 x_3}; \\ \varphi_1 = \arctg \frac{b}{R}; \quad \varphi_2 = \arctg \frac{\alpha}{R}; \quad \varphi_3 = \arctg \frac{\beta}{R}; \quad \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \frac{\pi}{2}.$$

В результате часть Δa , $\overline{\Delta a}$, содержащая $\ln \frac{M^2}{m^2}$, примет вид

$$\overline{\Delta a} = -\frac{2\pi}{3} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^3 \ln \frac{M^2}{m^2} \int_0^1 \frac{dx}{x^2} \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^3} (\arctg(xt) - xt) \times \\ \times \left\{ 5x - 2x^2 + \frac{2x(1-4x+4x^2)}{xt^2+1} - \frac{(1-x)(1-2x)}{(xt^2+1)^2} \right\}. \quad (36)$$

Несложное вычисление приводит к результату (детали в Приложении 3)

$$\overline{\Delta a} = \frac{1}{3} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^3 \pi^2 \ln \frac{M^2}{m^2}. \quad (37)$$

5. ОЦЕНКА РАДИАЦИОННЫХ ПОПРАВК К $J_{\rho\sigma}^{\mu\nu\lambda}$

Как мы видели выше логарифмический вклад ($\sim \ln \frac{M}{m}$) в Δa происходит от кинематической области, когда величина квадратов 4-импульсов фотонов велика по сравнению с квадратом массы электрона:

$$-k_i^2 \approx +\bar{k}_i^2 \gg m_e^2, \quad i=1,2,3, \quad |\bar{k}_1| \sim |\bar{k}_2| \sim |\bar{k}_3| \gg m_e. \quad (38)$$

Покажем, что тензор J и радиационные поправки к нему в низшем приближении не содержат членов $\sim \ln |k_i^2/m_e^2|$ в области (38).

Для низшего (однопетлевого) приближения это можно увидеть из (26). Вклады различных тензорных структур содержат функции вида

$$\frac{\int d^3x \delta(\Sigma x - 1) P(x) (m^2)^n}{(m^2 + \bar{k}_1^2 x_2 x_3 + \bar{k}_2^2 x_1 x_3 + \bar{k}_3^2 x_1 x_2)^n}. \quad (39)$$

При больших $\bar{k}_i^2 \gg m_e^2$ главный вклад в (39) происходит в области, когда два из трех x_i малы, скажем $x_1 \sim x_2 \sim \lambda \sim \left(\frac{m^2}{\bar{k}^2}\right)^\alpha \ll 1$. Из вида полиномов $P(x)$ (26) заключаем, что «логарифмический» интеграл

$$\int_0^{\epsilon} \frac{dx \cdot \lambda^{n-1}}{[1 + \lambda(\bar{k}^2/m^2)]^n}$$

не возникает ни при какой тензорной структуре: степень малости числителя не меньше степени малости знаменателя. Т. е. в этом (однопетлевом) приближении тензор $J_{\rho\sigma}^{\mu\nu\lambda}$ не содержит вкладов $\sim \ln k^2/m^2$.

При вычислении радиационных поправок к $J_{\rho\sigma}^{\mu\nu\lambda}$ (двухпетлевое приближение) вклад отдельных диаграмм вида

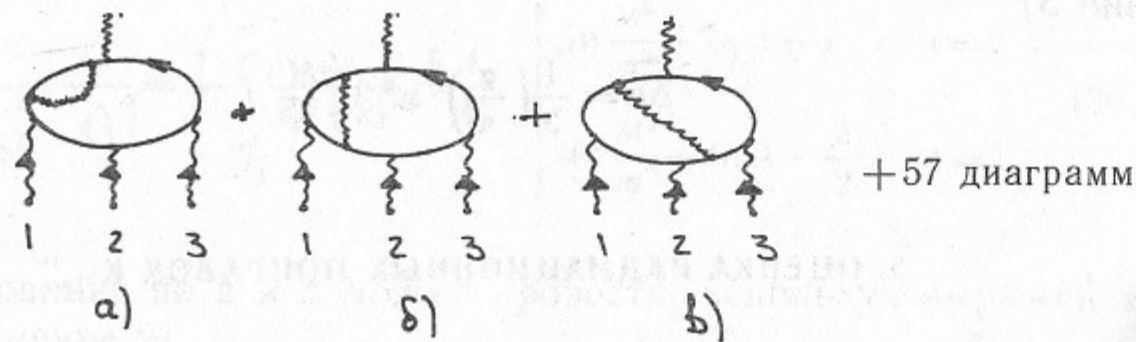


Рис. 4.

зависит от выбора калибровки для пропагаторов фотона. Мы будем работать в калибровке Фейнмана

$$D_{\mu\nu}(k) = -\frac{i}{k^2} g^{\mu\nu}. \quad (40)$$

Характерные импульсы виртуального электрона для диаграмм рис. 4 должны быть порядка импульсов виртуальных фотонов $|k| \sim |k_i| \gg m_e$. В калибровке (40) логарифмический (т. е. содержащий $\frac{\alpha}{\pi} \ln \left| \frac{k^2}{m^2} \right|$) вклад происходит от собственноэнергетических (рис. 4,а) и вершинных (рис. 4,б) диаграмм.

Вклад первых можно учесть заменой 4-импульсов электрона \hat{k} на $\hat{k} \left(1 - \frac{\alpha}{4\pi} \ln \left| \frac{k^2}{m^2} \right| \right)$. Вклад вершинных функций — заменой $\gamma_\mu \rightarrow \gamma_\mu \left(1 + \frac{\alpha}{4\pi} \ln \left| \frac{k^2}{m^2} \right| \right)$ (см. Приложение 3). Вклад диаграмм типа рис. 4,в не содержит $\ln |k^2/m^2|$. Полный вклад, таким образом, не содержит логарифмических членов.

В этом же приложении мы анализируем другие диаграммы Фейнмана низшего порядка ТВ, а также некоторые классы диаграмм в высших порядках ТВ, приводящие к вкладам в Δa , содержащим логарифм отношения масс в более высоких степенях.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе бозе-симметрии и калибровочной инвариантности получено общее выражение для тензора $J_{\rho\sigma}^{\mu\nu\lambda}$, учитывающего рассеяния света на свете $G_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1 k_2 k_3 k_4)$:

$$J_{\rho\sigma}^{\mu\nu\lambda}(k_1 k_2 k_3) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial k_1^\rho} G_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1 k_2 k_3 k_4) - \frac{\partial}{\partial k_4^\sigma} G_{\mu\nu\lambda\rho}(k_1 k_2 k_3 k_4) \right)$$

в терминах напряженностей полей. Использованный нами метод является развитием техники, предложенной Карплусом и Нейманом.

В случае, когда нелинейное взаимодействие фотонов осуществляется фермионами, найдено явное выражение для коэффициентов при тензорных структурах в однопетлевом приближении. Расчет в низкоэнергетическом пределе согласуется с эффективным лагранжианом Гейзенберга — Эйлера.

Полученное выражение для $J_{\rho\sigma}^{\mu\nu\lambda}$ использовано для аналитического вычисления при $\ln \frac{M}{m}$ во вкладе в аномальный магнитный момент мюона от диаграмм, содержащих блок рассеяния света на свете:

$$(\Delta a)_\mu = \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^3 \left(\frac{2}{3} \pi^2 \ln \frac{M}{m} + c \right).$$

Этот результат находится в соответствии с полученными ранее. Рассмотренный здесь метод позволяет в принципе вычислить и нелогарифмический вклад в $(\Delta a)_\mu$, так же, как и $(\Delta a)_e$. Необходимые формулы приведены в Приложении 2.

Дан анализ радиационных поправок. Показано, что логарифмические вклады от диаграмм этого типа в высших порядках теории возмущений происходят лишь от учета поляризации вакуума виртуальных фотонов.

За полезное обсуждение мы благодарим Л.Н. Липатова и участников семинара ИЯФ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hughes V.W. Workshop and Symposium on the Physics of Stored and Trapped Particles.— Stockholm, Sweden, June, 1987; R.S. Van Deyk. Phys. Rev. Lett. 1987, v.59, p.26.
2. Aldins J.A. et al. Phys. Rev. 1970, v.D1, p.2378.
3. Kinoshita T. et al Phys. Rev. 1984, v.D31, p.2108; Samuel M.A. Phys. Rev. Lett. 1986, v.57, p.3133.
4. Karplus R, Neuman M. Phys. Rev. 1950, v.80, p.380.
5. Lautrup B.E., Samuel M.A. Phys. Lett. 1977, v.72B, p.114.
6. Yelkhovsky A.S. Preprint INP 88-50. Novosibirsk, 1988.
7. Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б. Квантовая электродинамика.— М.: Наука, 1981.

Приложение 1

Здесь мы приведем явное выражение для свертки тензорных структур, входящих в Δa :

$$\Delta a = -\frac{\alpha}{6(2\pi)^7} \int \frac{d^4 k_1 d^4 k_2 d^4 k_3 \delta(k_1 + k_2 + k_3)}{k_1^2 k_2^2 k_3^2 ((p - k_1)^2 - M^2)((p + k_3)^2 - M^2)} S_{\mu\nu\lambda}^{\rho\sigma} \cdot J_{\rho\sigma}^{\mu\nu\lambda}, \quad (1.1)$$

где

$$S_{\mu\nu\lambda}^{\rho\sigma} = \frac{1}{4} \text{Sp} [(\hat{p}[\gamma^\rho \gamma^\sigma] + [\gamma^\rho \gamma^\sigma] \hat{p})(2p_\lambda + \gamma_\lambda k_3) \gamma_\nu (2p_\mu - \hat{k}_1 \gamma_\mu)], \quad (1.2)$$

а $J_{\rho\sigma}^{\mu\nu\lambda}$ определен в формуле (21). Чтобы избежать появления в знаменателях скалярных произведений $k_i k_j$, используем эквивалентный (21) вид тензора J , который может быть получен из (21) с помощью связей (10), (11):

$$\begin{aligned} J_{\rho\sigma}^{\mu\nu\lambda} = & (3^{\nu 2\lambda} - (3 \cdot 2) g^{\nu\lambda}) [(\bar{2}^\mu)_{\rho\sigma} d_3(123) + 2^\mu [12]_{\rho\sigma} A_1(231)] + \\ & + \frac{1}{6} a(123) [12]_{\rho\sigma} [2^\mu 3^{\nu 1\lambda} - 3^\mu 1^{\nu 2\lambda} + (13)(2^\lambda g^{\mu\nu} - 2^\mu g^{\nu\lambda}) + (12)(3^\mu g^{\nu\lambda} - 3^\nu g^{\mu\lambda}) + \\ & + (23)(1^\nu g^{\mu\lambda} - 1^\lambda g^{\mu\nu})] + d_4(123) [(\bar{2}^\mu)_{\rho\sigma} (3^{\nu 1\lambda} - (31) g^{\nu\lambda}) + 3^\nu g^{\mu\lambda} [12]_{\rho\sigma} + \\ & + 1^\lambda [\mu\nu]_{\rho\sigma} (23)] + d_2(123) [(\bar{2}^\mu)_{\rho\sigma} 1^{\nu 2\lambda} + g^{\mu\nu} 2^\lambda [12]_{\rho\sigma}] + \\ & + d_1(123) [(\bar{2}^\mu)_{\rho\sigma} 1^{\nu 1\lambda} + (12) [\mu\nu]_{\rho\sigma} 1^\lambda] + 5 \text{ слагаемых}, \quad (1.3) \end{aligned}$$

получаемых из этих перестановкой $((1, \mu) (2, \nu) (3, \lambda))$.

Здесь мы используем обозначение

$$2^\mu \equiv k_2^\mu,$$

остальные обозначения приведены выше (см. (22)).

Свертку тензоров, входящих в (1.1), представим в виде

$$S_{\mu\nu\lambda}^{\rho\sigma} \cdot J_{\rho\sigma}^{\mu\nu\lambda} = \sum_{i=1,2,3,4} \sum_{\mathcal{P}(123)} D_i(123) P_i^{123} + \sum_{\mathcal{P}(123)} A_i(123) P_{A_i}^{123} + a(123) P_a.$$

В этом выражении и в (1.3) мы используем четыре величины d_i , $i=1, 2, 3, 4$, вместо трех независимых в (21).

Величины P_i получены с помощью системы REDUCE:

$$P_1^{123} = 4(y_1 - z_1)[(z_3 - z_2 - z_1)(3y_1 - 4z_1 + 2z_2 - 2z_3) + 2z_1 z_2],$$

$$\begin{aligned} P_1^{213} = & 12(z_3 - z_1 - z_2)(z_1 - y_1)(z_1 - z_3 - y_1 + y_3) + 4(z_1 - z_2 - z_3) \times \\ & \times [(z_3 - 2z_1 - z_2)(z_1 - y_1) - z_1(y_3 - z_3)], \end{aligned}$$

$$P_1^{132} = -4(y_1 - z_1)[(z_2 - z_1 - z_3)^2 + 2z_1 z_3],$$

$$\begin{aligned} P_2^{123} = & 4\{M^2(2(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) - (z_1 + z_2 + z_3)^2) + z_3(z_1 - y_1)^2 + \\ & + z_1(z_3 - y_3)^2 + (z_1 + z_3 - z_2)(z_1 - y_1)(y_3 - z_3) + \\ & + z_1(z_2 + z_3 - z_1)(z_1 - y_1) + z_1(z_1 + z_2 - z_3)(z_3 - y_3)\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2^{213} = & 4\{M^2[2(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) - (z_1 + z_2 + z_3)^2] + z_3(z_1 - y_1)^2 - \\ & - z_1(z_3 - y_3)^2 + (z_1 - y_1)(z_2 - z_3)(z_2 - z_3 - z_1) + \\ & + 2(z_3 - y_3) z_1(z_2 - z_3)\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2^{132} = & 4\{M^2(2(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) - (z_1 + z_2 + z_3)^2) + z_1(z_3 - y_3)^2 - \\ & - z_3(z_1 - y_1)^2 + 2z_3(z_1 - y_1)(z_2 - z_1 - z_3) + (z_3 - y_3)(z_2 - z_1 - z_3)^2\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_a = & 4(z_1 + z_2 + z_3)\{-M^2(2(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) - (z_1 + z_2 + z_3)^2) - \\ & - z_3(y_1 - z_1)^2 - z_1(y_3 - z_3)^2 + (y_1 - z_1)(y_3 - z_3)(z_1 + z_3 - z_2)\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{A_1}^{123} = & 2(z_1 + z_2 - z_3)\{-M^2(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - 2(z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3)) - \\ & - x_3(y_1 - x_1)^2 - x_1(y_3 - x_3)^2 + (x_1 + x_3 - x_2)(y_1 - x_1)(y_3 - x_3)\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{A_1}^{132} = & 2(z_2 - z_1 - z_3)\{M^2(z_2^2 + z_3^2 + z_1^2 - 2(z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3)) + \\ & + z_3(y_1 - z_1)^2 + z_1(y_3 - z_3)^2 + (z_2 - z_1 - z_3)(y_1 - z_1)(y_3 - z_3)\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_3^{123} = & 4(z_1 + z_2 - z_3)\{2M^2(z_1 - z_3 - z_2) + (y_3 - z_3)^2 - \\ & - (y_3 - z_3)(y_1 - z_1) + z_3(z_1 - y_1) + (y_3 - z_3)(z_2 + 2z_3 - z_1)\} + \\ & + (y_1 - z_1)[2z_3 z_2 + (z_3 + z_2 - z_1)^2], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_3^{213} = & 8\{M^2(z_2 - z_1 - z_3)(z_2 + z_1 - z_3) + (y_3 - z_3)^2 z_1 + \\ & + (y_3 - z_3)(y_1 - z_1)(z_2 - z_3)\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_3^{132} = & 4\{2M^2(z_2 + z_3 - z_1)(z_2 - z_1 - z_3) + (z_3 + z_1 - z_2)(y_3 - z_3)^2 + \\ & + 2z_3(y_1 - z_1)^2 + 2(z_2 - z_1 - z_3)(y_3 - z_3)(y_1 - z_1) + \\ & + (y_3 - z_3)(z_2 - z_1 - z_3)(z_1 - z_2 - 2z_3) + 2(y_1 - z_1) z_3(z_1 - z_2 - 2z_3)\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_4^{123} = & 4\{M^2(-3z_1^2 + 2z_1(z_2 + z_3) + (z_2 - z_3)^2) - z_1(y_3 - z_3)^2 + \\ & + (y_1 - z_1)^2(3z_1 - 3z_2 - 2z_3) + (z_1 + z_2 - z_3)(y_1 - z_1)(y_3 - z_3) + \\ & + (y_3 - z_3)(2z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - z_1 z_2 - z_1 z_3 + 2z_2 z_3) + \\ & + 3(y_1 - z_1)(z_2 + z_3 - z_1)(z_2 - z_1 - z_3)\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_4^{213} = & 4\{M^2(-3z_2^2 + 2z_2(z_1 + z_3) + (z_1 - z_3)^2) - z_1(y_3 - z_3)^2 + \\ & + (3z_2 - 3z_1 - 2z_3)(y_1 - z_1)^2 + (y_1 - z_1)(y_3 - z_3)(3z_1 + 3z_3 - 5z_2) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -(y_3 - z_3)z_1(z_1 - z_2 - z_3) + 2(y_1 - z_1)(z_3 + z_2 - z_1)(z_2 - z_1 - z_3)\}, \\
 P_4^{132} = & 4\{M^2(-3z_1^2 + 2z_1(z_2 + z_3) + (z_2 - z_3)^2) - z_1(y_3 - z_3)^2 - z_3(y_1 - z_1)^2 + \\
 & + 2z_1(y_3 - z_3)(y_1 - z_1) + 2(y_3 - z_3)(2z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - z_1z_3 + 2z_2z_3) + \\
 & + (y_1 - z_1)(z_1^2 + z_2^2 + 3z_3^2 - 2z_1z_2 - 2z_1z_3 - 4z_2z_3)\},
 \end{aligned}$$

где

$$z_i = k_i^2, \quad y_3 = 2pk_3 + k_3^2, \quad y_1 = -2pk_1 + k_1^2.$$

Остальные величины получаются из приведенных заменами:

$$P_i^{321} = P_i^{123}(y_1 \leftrightarrow y_3, x_1 \leftrightarrow x_3, x_2 \rightarrow x_2), \quad i = 1, \dots, 4;$$

$$P_i^{231} = P_i^{213}(y_1 \leftrightarrow y_3, x_1 \leftrightarrow x_3, x_2 \rightarrow x_2),$$

$$P_i^{312} = P_i^{132}(y_1 \leftrightarrow y_3, x_1 \leftrightarrow x_3, x_2 \rightarrow x_2),$$

$$P_{A_1}^{123} = P_{A_1}^{213}, \quad P_{A_1}^{321} = P_{A_1}^{231}, \quad P_{A_1}^{132} = P_{A_1}^{312},$$

$$P_{A_1}^{231} = P_{A_1}^{213}(y_1 \leftrightarrow y_3, x_1 \leftrightarrow x_3, x_2 \rightarrow x_2).$$

Для вычисления $(g-2)_e$ надо положить в этих формулах $M^2 = m_e^2$.

Приложение 2

ДЕТАЛИ ВЫЧИСЛЕНИЙ a_μ

Рассмотрим, например, одно из слагаемых в формуле (33):

$$\begin{aligned}
 I_{11} &= \int_0^\infty dz \int_{-1}^1 \frac{dc}{(1+2cz+z^2)(az^2+2bcz+d)} = \\
 &= \frac{1}{2a} \int_{-1}^1 dc \int_{-\infty}^\infty \frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}, \quad (2.1)
 \end{aligned}$$

где

$$z_{1,2} = -c \pm i\sqrt{1-c^2}, \quad z_{3,4} = -\frac{bc}{a} \pm i\frac{\sqrt{ad-b^2c^2}}{a}.$$

Замыкая контур интегрирования по z верхней полуплоскости и пользуясь теорией вычетов, получим

$$I_{11} = J_1 + J_2, \quad (2.2)$$

где

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \frac{i\pi}{a} \int_{-1}^1 \frac{dc}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_1 - z_4)}; \\
 J_2 &= \frac{i\pi}{a} \int_{-1}^1 \frac{dc}{(z_3 - z_1)(z_3 - z_2)(z_3 - z_4)}. \quad (2.3)
 \end{aligned}$$

Учитывая, что $z_1 - z_2 = 2i\sqrt{1-c^2}$,

$$\begin{aligned}
 (z_1 - z_3)(z_1 - z_4) &= \left[\frac{c(b-a)}{a} + i\sqrt{1-c^2} \right]^2 + \frac{ad-b^2c^2}{a^2} = \\
 &= \frac{1}{a} [-\gamma + 2\alpha c^2 - 2i\alpha c\sqrt{1-c^2}], \\
 \alpha &= a-b, \quad \beta = d-b, \quad \gamma = a-d,
 \end{aligned}$$

преобразуем J_1 к виду

$$J_1 = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 \frac{dc}{\sqrt{1-c^2}} \frac{1}{-\gamma + 2\alpha c^2 - 2i\alpha c\sqrt{1-c^2}} = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{d\theta}{\beta + \alpha e^{-2i\theta}},$$

где $\theta = \arccos c$. Вводя новую переменную $t = e^{-2i\theta}$, получим

$$J_1 = \frac{\pi}{4i} \oint \frac{dt}{t(\beta + \alpha t)} = \frac{\pi^2}{2\beta} [1 - \theta(\alpha - \beta)] = \frac{\pi^2}{2\beta} \theta(-\gamma). \quad (2.4)$$

Пользуясь тем, что

$$z_3 - z_4 = \frac{2i}{a} \sqrt{ad - b^2c^2},$$

$$(z_3 - z_1)(z_3 - z_2) = \frac{1}{a^2} [a\gamma - 2\alpha bc^2 + 2i\alpha c\sqrt{ad - b^2c^2}],$$

$$t = e^{-2i\theta}, \quad \theta = \arccos \frac{bc}{\sqrt{R^2 + b^2}},$$

представим J_2 контурным интегралом

$$J_2 = \frac{\pi a}{2} \frac{1}{2i} \int_{C_1} \frac{dt}{t(\alpha\beta + \alpha dt)} \quad (2.5)$$

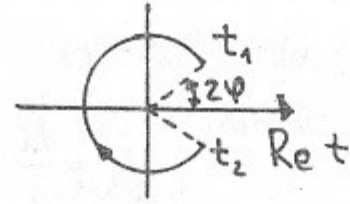


Рис. 5.

где контур C_1 показан на рисунке, а $\varphi = \arccos \frac{b}{\sqrt{R^2 + b^2}}$. В итоге получаем

$$J_2 = \frac{\pi}{2\beta} \left[-\pi\theta(\alpha\beta - \alpha d) + 2\varphi - \frac{1}{2i} \ln \frac{\alpha\beta/\alpha d + e^{2i\varphi}}{\alpha\beta/\alpha d + e^{-2i\varphi}} \right].$$

Учитывая, что $\alpha\beta - \alpha d = -b\gamma$, и

$$\ln \frac{\alpha\beta/\alpha d + e^{2i\varphi}}{\alpha\beta/\alpha d + e^{-2i\varphi}} = 2i \left[\arctg \frac{2\alpha/R}{\Lambda - \alpha^2/R^2} + \pi\theta(\alpha - R) \right] = 4i \arctg \frac{\alpha}{R} \equiv 4i\varphi_2,$$

J_2 запишем в виде

$$J_2 = -\frac{\pi^2}{2\beta} \theta(-\gamma) + \frac{\pi}{\beta} (\varphi - \varphi_2) = -\frac{\pi^2}{2\beta} \theta(-\gamma) + \frac{\pi}{\beta} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1 - \varphi_2 \right), \quad (2.6)$$

так как

$$\varphi = \arctg \frac{R}{b} = \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{b}{R} \equiv \frac{\pi}{2} - \varphi_1.$$

Складывая (2.4) и (2.6), приходим к окончательному выражению

$$I_{11} = \frac{\pi}{\beta} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1 - \varphi_2 \right) = \frac{\pi}{\beta} \varphi_3. \quad (2.7)$$

Отметим полезное равенство $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \frac{\pi}{2}$, справедливое в силу тождества

$$\arctg \sqrt{\frac{x_1 x_2}{x_3}} + \arctg \sqrt{\frac{x_1 x_3}{x_2}} + \arctg \sqrt{\frac{x_2 x_3}{x_1}} = \frac{\pi}{2}, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 1. \quad (2.8)$$

Выражения для остальных необходимых нам интегралов этого типа приведены в (35). Отметим соотношения между ними:

$$\frac{\partial}{\partial b} I_{11} = \frac{\partial}{\partial d} I_{cz}, \quad \frac{\partial}{\partial b} I_{cz} = \frac{\partial}{\partial a} I_c, \quad \frac{\partial}{\partial d} I_{01} = -I_{02}. \quad (2.9)$$

Пользуясь этими выражениями, (33) и (34) представим в виде

$$\begin{aligned} \overline{\Delta a} = & -\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 \cdot \frac{1}{12} \ln \frac{M^2}{m^2} \int d\tau \left\{ 2P_2 \frac{\partial}{\partial a} (4I_{11} - I_c) + \right. \\ & + 4\left(P_{A_1} + \frac{1}{3}P_a\right) \frac{\partial^2}{\partial a \partial b} (4I_{11} - I_c) - 8P_3 \frac{\partial}{\partial a} (2I_{cz} + I_c) + \\ & + 2P_4 \left(4I_{02} + 4 \frac{\partial}{\partial d} I_{11} - \frac{\partial}{\partial a} I_c \right) + \\ & \left. + \frac{8}{3} P_a \left(\frac{\partial^2}{\partial b^2} - 4 \frac{\partial^2}{\partial a \partial d} \right) I_{01} \right\} \Big|_{a=x_1(1-x_1), b=x_1 x_2, c=x_2(1-x_2)}. \quad (2.10) \end{aligned}$$

Заменой

$$R = \sqrt{x_1 x_2 x_3} = x_2 x_3 t, \quad x_2 = \frac{1-x_3}{D}, \quad D = x_3 t^2 + 1, \quad \sqrt{\frac{x_3 x_1}{x_2}} = x_3 t$$

это выражение после продолжительных преобразований приводится к виду (36). Интеграл, входящий в (36), возьмем, вводя параметр α :

$$\arctg xt - xt \rightarrow \arctg(\alpha xt) - \alpha xt, \quad (2.11)$$

причем $\frac{d}{d\alpha} (\arctg \alpha xt - \alpha xt) = -\alpha^2 x^3 t^3 (1 + \alpha^2 x^2 t^2)^{-1}$. Последующее интегрирование по t и α приводит к (37).

Заметим, что отдельные слагаемые в (3.10) имеют более сложную структуру:

$$\begin{aligned} \overline{\Delta a} = & -\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 \frac{1}{12} \ln \frac{M^2}{m^2} \pi^2 \left\{ 2 \left(13 - \frac{4\pi^2}{3} \right) + 4 \left(\frac{244}{15} - \frac{5}{3} \pi^2 \right) + 4 \left(-\frac{593}{30} + 2\pi^2 \right) - \right. \\ & - 8 \left(-\frac{63}{10} + \frac{2}{3} \pi^2 \right) + 2 \left(-\frac{166}{5} + \frac{10}{3} \pi^2 \right) \left. \right\} = \frac{1}{3} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 \pi^2 \ln \frac{M^2}{m^2}. \quad (2.12) \end{aligned}$$

Это независимое вычисление является контролем для (36).

ДЕТАЛИ ВЫЧИСЛЕНИЯ РП

Основной вопрос, который мы будем здесь обсуждать, — какого типа диаграммы Фейнмана для РП к $(\Delta a)_\mu$ могут приводить к вкладам $\sim \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3+k} \ln\left(\frac{M^2}{m^2}\right)^k$. Такой вклад может произойти от интегралов вида (34):

$$\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 \int_{m^2}^{M^2} \frac{dk^2}{k^2} \left(\frac{\alpha}{\pi} \ln \frac{k^2}{m^2}\right)^k; \quad (3.1a)$$

$$\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 \int_{m^2}^{M^2} \frac{dk^2}{k^2} \left(\frac{\alpha}{\pi} \ln \frac{M^2}{k^2}\right)^k; \quad (3.1b)$$

Вклад 1-го типа (3.1a) происходит от РП, учитывающих поляризацию вакуума виртуальных фотонов:

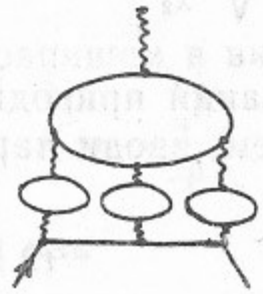


Рис. 6.

$$\rightarrow \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 \cdot C_1 \int \frac{dk^2}{k^2} \left(1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{k^2}{m^2}\right)^{-3}. \quad (3.2)$$

Ниже мы покажем, что РП к блоку рассеяния света светом в низшем порядке ТВ не содержат вкладов (3.1a). Вклад типа

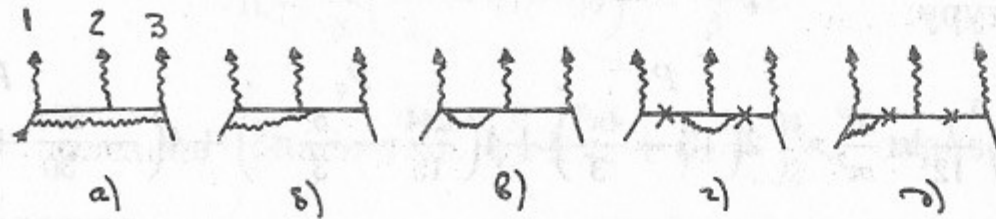


Рис. 7.

(3.1b) мог бы происходить от диаграмм Фейнмана вида рис. 7 (блок рассеяния света на свете не изображен). Только диаграммы типа рис. 7 (e, d) могут приводить к логарифмическому вкладу, поскольку их амплитуды содержат полюсы типа $(-2pk_1 + k_1^2 + i0)^{-1}$, $(2pk_2 + k_2^2 + i0)^{-1}$, отвечающие одноюонному состоянию в пере-

крестном канале. Однако в области

$$m_e^2 \ll -k_i^2 \ll M_\mu^2$$

соответствующие вершинные функции ([7] формула (5.1.37)):

$$\Gamma_\mu(p_1, p_2) = \frac{\alpha}{\pi} \left(\gamma_\mu A(q^2) + \frac{i}{8m} (\gamma_\mu \hat{q} - \hat{q} \gamma_\mu) B(q^2) \right), \quad q^2 < 0, \quad q = p_1 - p_2,$$

$$A(q^2) = \left(\ln \frac{M_\mu}{\lambda} - 1 \right) \left(\frac{1+a^2}{2a} \ln b + 1 \right) + \frac{1}{4a} \ln b - \frac{1+a^2}{4a} \times \\ \times \left[-\frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2} \ln^2 b - 2 \ln b \ln(1+b) + 2 \int_0^b \frac{dx}{x} \ln(1+x) \right], \quad (3.3)$$

$$B(q^2) = \frac{1-a^2}{2a} \ln b, \quad a = \sqrt{1 - \frac{4M^2}{q^2}}, \quad b = \frac{a-1}{a+1}$$

малы, они пропорциональны $q^2/M^2 = k_i^2/M^2 \ll 1$. Таким образом, логарифмический вклад типа (3.1b) в РП в однопетлевом приближении отсутствует.

Рассмотрим теперь РП к блоку рассеяния света светом (рис. 7). Диаграммы типа рис. 7, a можно учесть, модифицировав пропагатор электрона: $\frac{i}{\hat{p}-m} \rightarrow \frac{i}{\hat{p}-m-M(\hat{p})}$, причем массовый оператор $M(\hat{p})$ в калибровке (40) имеет вид ([7], формула (5.1.12)):

$$M(\hat{p}) = \frac{\alpha}{2\pi m} (\hat{p}-m)^2 \left\{ \frac{1}{2(1-\rho)} \left(1 - \frac{2-3\rho}{1-\rho} \ln \rho \right) - \right. \\ \left. - \frac{\hat{p}+m}{m\rho} \left[\frac{1}{2(1-\rho)} \left(2-\rho + \frac{\rho^2+4\rho-4}{1-\rho} \ln \rho \right) + 1 + 2 \ln \frac{\lambda}{m} \right] \right\}, \quad \rho = 1 - \frac{p^2}{m^2}. \quad (3.4)$$

При $|p^2| \gg m^2$ (только эта область 4-импульсов электрона петли существенна для логарифмического вклада) $M(\hat{p}) = \frac{\alpha}{4\pi} \ln \frac{p^2}{m^2}$. Таким образом, учет диаграмм типа собственной энергии фермиона можно провести (во всех порядках ТВ) формальной заменой

$$\frac{i}{\hat{k}-m} \approx \frac{i}{\hat{k}} \rightarrow \frac{i}{\hat{k}} \left(1 - \frac{\alpha}{4\pi} \ln \left| \frac{k^2}{m^2} \right| \right)^{-1}. \quad (3.5)$$

Рассмотрим теперь перенормированную вершинную функцию в случае, когда все три частицы вне массовой поверхности, причем

модули квадратов их 4-импульсов велики по сравнению с квадратом массы электрона. Пользуясь параметризацией Фейнмана запишем ее в виде

$$\Gamma^\mu = -\frac{4\pi\alpha i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{k^2 - \lambda^2} \frac{\gamma^\nu(p+q+k+m) \gamma^\mu(p+k+m) \gamma^\nu}{((p+k)^2 - m^2)((p+k+q)^2 - m^2)} =$$

$$= \frac{\alpha}{2\pi} \int d^3x \delta(\Sigma x - 1) \left\{ \gamma^\mu \left(\ln \frac{\Lambda^2}{m^2} - \frac{3}{2} - \ln \frac{D}{m^2} \right) + \frac{1}{2D} \times \right.$$

$$\left. \times [2m^2 \gamma^\mu + 2(\hat{p}x_3 - \hat{q}x_2) \gamma^\mu (\hat{p}x_3 + \hat{q}(1-x_2)) - 4m(2p^\mu x_3 + q^\mu(1-2x_2))] \right\}, \quad (3.6)$$

где $D = m^2(1-x_3) + \lambda^2 x_3 - p^2 x_1 x_3 - q^2 x_1 x_2 - (p+q)^2 x_2 x_3$. Логарифмический вклад происходит только от первого слагаемого в скобках правой части (3.6):

$$\Gamma^\mu(p, p+q, q) \approx -\gamma^\mu \frac{\alpha}{4\pi} \ln \left| \frac{p^2}{m^2} \right|, \quad |p^2| \sim |p+q|^2 \gg m^2. \quad (3.7)$$

Вершинные функции в логарифмическом приближении, таким образом, можно учесть формальной заменой:

$$\gamma_\mu \rightarrow \gamma_\mu \left(1 - \frac{\alpha}{4\pi} \ln \left| \frac{k^2}{m^2} \right| \right). \quad (3.8)$$

Из (3.5) и (3.8) видно, что логарифмические вклады вершинных и собственно энергетических диаграмм сокращаются. Этот результат непосредственно получается в калибровке Ландау.

При вычислении вкладов диаграмм типа рис. 7(в) возникает вершинная функция в той же ситуации, которая обсуждалась выше, но со вставкой дополнительного фотона с нулевым (малым) 4-импульсом.

$$\Gamma^{\mu\sigma} = -\frac{\alpha}{4\pi} \int \frac{d^4k}{i\pi^2 k^2} \times$$

$$\times \frac{\gamma^\nu(p+q+\Delta+k+m) \gamma^\sigma(p+q+k+m) \gamma^\mu(p+k+m) \gamma^\nu}{((p+q+\Delta+k)^2 - m^2)((p+q+k)^2 - m^2)((p+k)^2 - m^2)} \Big|_{\Delta \rightarrow 0}. \quad (3.9)$$

После фейнмановской параметризации и сдвигки $k = \tilde{k} + \beta$ имеем

$$\Gamma^{\mu\sigma} = -\frac{3\alpha}{2\pi} \int_0^1 d^3x x_2 \delta(\Sigma x - 1) \int \frac{d^4\tilde{k}/i\pi^2}{(\tilde{k}^2 - D)^4} N^{\mu\sigma}.$$

Члены $\sim \tilde{k}^2$ из $N^{\mu\sigma}$ приведут к вкладам типа второго слагаемого в скобках подынтегрального выражения в (3.6), не содержащим $\ln |p^2/m^2|$. Оставшиеся имеют вид

$$\int \frac{d^3x x_2 \delta(\Sigma x - 1)}{D^2} \tilde{N}^{\mu\sigma},$$

$$\tilde{N}^{\mu\sigma} = \gamma^\nu(p x_3 + q(x_1 + x_3)) \gamma^\sigma(p x_3 + q(x_1 + x_3)) \gamma^\mu(p x_3 - q x_2) \gamma^\nu. \quad (3.10)$$

В этих слагаемых не содержится логарифмических вкладов по той причине, что степень малости числителя будет выше степени малости знаменателя для существенных конфигураций параметров Фейнмана, приводящих к логарифмическому вкладу, скажем $x_3, x_2 \rightarrow 0$.

Рассмотрим, наконец, вопрос о вкладах диаграмм высших порядков ТВ, изображенных на рис. 8. Вклад диаграмм вида

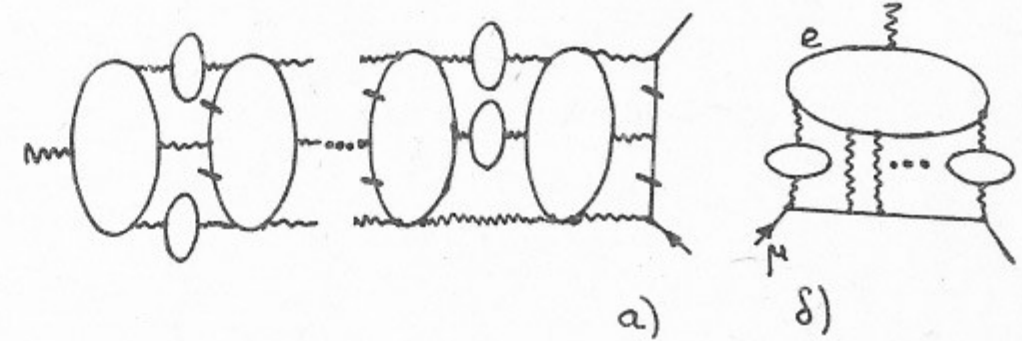


Рис. 8.

рис. 8,б обсуждался в работе Елховского [6], он имеет вид

$$\frac{1}{3} n C_n \pi^{n-1} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{n+1} L^2, \quad C_n \sim 1, \quad n \geq 3. \quad (3.11)$$

Логарифмический вклад Ф-диаграмм рис. 8,а происходит от области «реальности» перечеркнутых линий, причем величины \tilde{k}_i^2 упорядочены:

$$\Phi = \sum_1^\infty c^n \int \frac{dk_n^2}{m^2} \frac{1}{x_n^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{k_n^2}{m^2}\right)^3} \int \frac{dk_{n-1}^2}{m^2} \frac{1}{k_{n-1}^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{k_{n-1}^2}{m^2}\right)^3} \dots, \quad (3.12)$$

где $c = \frac{1}{3} \pi^2 \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^3$. Дифференцирование Φ по M^2 позволяет получить для него простое дифференциальное уравнение, решением которого является

$$\Phi = -1 + \exp \left\{ c \int_0^{\ln(M^2/m^2)} \frac{dx}{\left(1 - \frac{\alpha}{3\pi} x\right)^3} \right\}. \quad (3.13)$$

В заключение заметим, что рассмотренный здесь класс диаграмм может давать значительный вклад в магнитные моменты протона и нейтрона. Этот вклад получится из (37) заменой $\alpha \rightarrow \alpha_s$, $m_e \rightarrow m_u$, $M \rightarrow M_p$ и домножением на некоторый (~ 10) множитель «цветового» комбинаторного происхождения.

Э.А. Кураев, З.К. Силагадзе, А. Чешель, А. Шиллер

Тензор рассеяния света на свете
и аномальный магнитный момент мюона

Ответственный за выпуск С.Г.Попов

Работа поступила 3 ноября 1988 г.
Подписано в печать 16.11.1988 г. МН 08592
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 2,2 печ.л., 1,8 уч.-изд.л.
Тираж 170. экз. Бесплатно. Заказ № 152

Набрано в автоматизированной системе на базе фото-наборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и отпечатано на ротапринтере Института ядерной физики СО АН СССР,
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.