

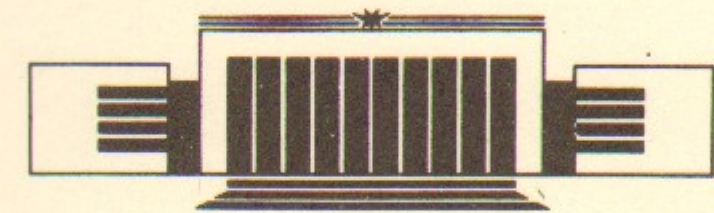


26
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

Ф.М. Израйлев

ПРОМЕЖУТОЧНАЯ СТАТИСТИКА
СПЕКТРА КВАЗИЭНЕРГИЙ И КВАНТОВАЯ
ЛОКАЛИЗАЦИЯ КЛАССИЧЕСКОГО ХАОСА

ПРЕПРИНТ 88-45



НОВОСИБИРСК

Промежуточная статистика
спектра квазиэнергий и квантовая
локализация классического хаоса

Ф.М. Израйлев

Институт ядерной физики
630090, Новосибирск 90, СССР

АННОТАЦИЯ

Исследуется статистика спектра квазиэнергий для простой квантовой модели с конечным числом уровней в условиях, когда движение соответствующей классической системы полностью хаотическое, в то время как квантовый хаос не является предельным из-за эффекта локализации. Показывается, что в этом случае распределение расстояний между соседними уровнями квазиэнергии эффективно зависит лишь от одного параметра, равного отношению размерности хаотических собственных функций (средней длины локализации) к полному числу уровней системы. Проводится сравнение с численными данными, полученными в широком диапазоне параметров модели.

1. Вопрос об особенностях движения квантовых систем, которые в классическом пределе обнаруживают хаотическое поведение, продолжает привлекать внимание многих исследователей. Одним из наиболее важных результатов последних лет является установление тесной связи между спектральными свойствами квантового хаоса и свойствами случайных матриц определенной симметрии [1—5]. Такая связь не является тривиальной хотя бы потому, что рассматриваемые квантовые системы не содержат каких-либо случайных параметров. Тем не менее, численные эксперименты убедительно показали, что в предельном случае максимального квантового хаоса статистика спектра энергии (квазиэнергии) [4—5], равно как и структура собственных функций [6], описывается теорией случайных матриц. В частности, распределение расстояний между соседними значениями энергии (квазиэнергии) в таких системах с большой точностью описывается простым законом Вигнера-Дайсона [7—9]:

$$P(s) = As^\beta \exp(-Bs^2); \quad \beta = 1; 2; 4, \quad (1)$$

где A и B — нормировочные константы, а β — параметр, который зависит от симметрии системы и определяет степень расталкивания близких уровней. Здесь расстояние s измеряется в единицах среднего расстояния между уровнями.

С другой стороны, был обнаружен эффект так называемой квантовой локализации хаоса, который приводит к подавлению хаотических свойств системы [10—11]. Механизм такой локализации в каком-то смысле аналогичен локализации Андерсона в твер-

дом теле, хотя и принципиально отличается от нее по той же причине отсутствия случайных возмущений. В результате оказывается, что максимальный квантовый хаос возможен лишь при определенных условиях, когда все собственные функции (СФ) системы случайные и полностью делокализованы в фазовом пространстве системы [5, 6]. Однако такая ситуация возможна лишь в случае достаточно сильного возмущения, эффективно связывающего все невозмущенные уровни системы. Поэтому возникает вопрос о статистических свойствах «промежуточного» квантового хаоса в условиях, когда необходимо учитывать конечную длину локализации хаотических СФ системы [12].

Исследованию вопроса о том, каким в этом случае будет статистика распределений $P(s)$ и посвящена настоящая работа. Влиянию квантовых эффектов на статистические свойства хаотических систем посвящено большое количество работ, однако связь квантовой локализации со спектральными свойствами (см., также, [13—14]) практически мало исследована.

Отметим, что предложенное в [15—17] описание промежуточной статистики для $P(s)$ относится к принципиально другой ситуации, когда в соответствующей классической системе часть фазового пространства заполнена регулярными траекториями и поэтому система не является полностью хаотической даже в классическом пределе. Известно, что в противоположном предельном случае, когда классическая система является полностью интегрируемой, распределение $P(s)$ в квантовой системе близко к пуассоновскому закону $P(s) \sim \exp(-s)$ (для типичных систем, см. [18—20]). Поэтому промежуточная статистика для систем с неполным классическим хаосом обычно рассматривается как простая сумма двух предельных типов распределения (пуассоновское и вигнер-дайсоновское) в зависимости от того, каким образом фазовое пространство расслаивается на области с регулярным и хаотическим движением.

2. Рассмотрим хорошо известную модель квантового ротатора с периодическими толчками [10—11]:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2I} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \varepsilon \cos \theta \delta_T(t); \quad \delta_T(t) \equiv \sum_{s=-\infty}^{\infty} \delta(t-sT). \quad (2)$$

Движение такой системы удобно описывать с помощью отображения для Ψ -функции через период возмущения:

$$\Psi(\theta, t+T) = \exp\left(i \frac{T\hbar}{4I} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) \exp\left(-i \frac{\varepsilon}{\hbar} \cos \theta\right) \exp\left(i \frac{T\hbar}{4I} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) \Psi(\theta, T), \quad (3)$$

записанного в симметричном виде, в котором значение Ψ -функции определяется точно посередине между толчками. Видно, что поведение системы зависит от двух параметров $\tau = \hbar T/I$ и $k = \varepsilon/\hbar$.

Известно, что соответствующая классическая система («стандартное отображение» [21]) при $\mathcal{K} \equiv k\tau \gg 1$ является хаотической, с пренебрежимо малыми устойчивыми областями в фазовом пространстве.

Согласно численным экспериментам (см., например, [10—11]), при дополнительном условии $k \gg 1$ (большое число невозмущенных ($\varepsilon=0$) уровней, связанных одним толчком возмущения) квантовая модель (2) — (3) в течение некоторого времени $t \lesssim t^*$ хорошо имитирует такие грубые свойства классического хаоса, как диффузионный рост энергии со временем и релаксацию функции распределения в импульсном пространстве системы. Однако с течением времени интерференционные квантовые эффекты сказываются все сильнее и при $t \gtrsim t^*$ диффузия замедляется, а затем и полностью прекращается. Было установлено [10, 11], что время t^* , в течение которого диффузия энергии $E(t)$ совпадает с классической ($E_{cl} = Dt/2$), определяется скоростью классической диффузии ($t^* \approx D \sim k^2$). Механизм этого эффекта связан с тем, что все собственные функции квазиэнергии оказываются локализованными в неограниченном импульсном пространстве системы (для типичных иррациональных значений $\tau/4\pi$). Средняя длина локализации СФ, как показано в работах [11, 12, 22], связана простым соотношением с классическим коэффициентом диффузии D :

$$l_D \approx \frac{D}{2} \approx \frac{k^2}{4}. \quad (4)$$

В такой модели (2) — (3) распределение $P(s)$ уровней квазиэнергии должно быть близким к пуассоновскому, поскольку для любого конечного значения k длина локализации l_D остается конечной и относительная доля перекрывающихся СФ в бесконечном импульсном пространстве, строго говоря, равна нулю. Тем не менее, если интересоваться статистикой лишь тех уровней, СФ которых перекрываются хотя бы частично, то можно наблюдать отталкивание близких уровней [13]. Естественно ожидать, что в этом случае степень отталкивания будет зависеть от степени перекрытия СФ, отобранных из полного (бесконечного) числа.

Поэтому для исследования влияния локализации на статистические свойства спектра квазиэнергий удобно перейти к системе с конечным числом N уровней:

$$\Psi_n(t+T) = \sum_{m=1}^N U_{nm}(k, T) \Psi_m(t); \quad n, m=1, \dots, N. \quad (5)$$

Здесь конечная унитарная матрица U_{nm} задает эволюцию N -мерного вектора состояния системы (Фурье-компонент Ψ -функции) и имеет вид

$$U_{nm} = G_{nn'} B_{n'm'} G_{m'm}, \quad (6)$$

где диагональная матрица $G_{ll'}$ соответствует свободному вращению ротатора в течение полупериода $T/2$:

$$G_{ll'} = \exp\left(i \frac{T}{4} l^2\right) \delta_{ll'}, \quad (7)$$

а матрица $B_{n'm'}$ описывает мгновенное действие каждого толчка (возмущения):

$$B_{n'm'} = \frac{1}{2N+1} \sum_{l=1}^{2N+1} \left[\cos(n'-m') \frac{2\pi l}{2N+1} - \cos(n'+m') \frac{2\pi l}{2N+1} \right] \times \\ \times \exp\left(-ik \cos \frac{2\pi l}{2N+1}\right). \quad (8)$$

Модель (5) — (8) является квантовым аналогом классического стандартного отображения, замкнутого на торе по фазе θ и по импульсу p и отличается от исследованной в [5—6] модели лишь тем, что описывает эволюцию только нечетных состояний ($\Psi(\theta) = -\Psi(-\theta)$).

Такая модель получается из исходной модели (2) — (3) следующим путем [12]. Рассмотрим (2) — (3) для рациональных значений $\tau/4\pi = r/q$ (r, q — целые). Это соответствует так называемому квантовому резонансу [23—24], для которого все СФ квазиэнергии в импульсном пространстве аналогичны блоховским состояниям в периодическом кристалле. Поэтому, при сдвиге на период q каждая СФ умножается на фазовый множитель $\exp(i\theta_0)$. Отбирая в модели (2) — (3) только периодические СФ, для которых $\theta_0 = 0$, мы можем построить конечную матрицу размером q , которая опи-

сывает эволюцию лишь периодических в импульсном пространстве функций [5—6]. Это соответствует модели, у которой фазовое пространство (по импульсу) замкнуто с периодом $m_0 = 2r$, т. е. размер фазового квадрата по импульсу в соответствующей классической системе будет равен $2\pi m_0$. Далее, от полученной таким образом матрицы можно перейти к матрице U_{nm} , размером $N = (q-1)/2$ (q нечетное), которая описывает эволюцию только нечетных состояний.

Полученная модель (5) — (8), в принципе, может также рассматриваться и как модель некоторой консервативной системы с конечным числом уровней на замкнутой энергетической поверхности. Поэтому исследуемые здесь свойства квантового хаоса в некотором смысле являются типичными и для автономных систем с хаотическим поведением в классическом пределе. Аналогичные модели исследовались также в работах [14, 25].

3. Ранее было показано [5—6], что при выполнении условий $\mathcal{K} \gg 1$ (условие полного классического хаоса) и $\Lambda \equiv l_D/N \gg 1$ (делокализация всех СФ системы) в модели (5) — (8) возникает максимальный квантовый хаос. В частности, распределение $P(s)$ для расстояний между соседними значениями квазиэнергии ω матрицы U_{nm} прекрасно описывается законом (1) с $\beta = 1$. Кроме того, распределение компонент СФ в базисе невозмущенных состояний с большой точностью соответствует микроканоническому распределению для N -мерных собственных векторов случайных матриц [9]:

$$W_N(\varphi_n) = \frac{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{N-1}{2}\right)} (1 - \varphi_n^2)^{\frac{N-3}{2}}; \quad \sum_{n=1}^N \varphi_n^2 = 1. \quad (9)$$

Поскольку матрица U_{nm} симметрическая и унитарная, то действительные и мнимые части ее собственных функций равны между собой и являются, соответственно, действительной и мнимой частью от U_{nm} . Поэтому в качестве φ_n в (9) рассматривается либо действительная, либо мнимая часть СФ матрицы U_{nm} . Отметим, что при $N \rightarrow \infty$ микроканоническое распределение (9) переходит в гауссовское, поэтому в квазиклассической области СФ такого рода систем являются гауссовскими случайными функциями. В то же время, для $\Lambda < 1$ распределение $P(s)$ оказывается [5, 12] промежуточным между распределением Вигнера—Дайсона (1) и пуассоновским, а собственные векторы матрицы U_{nm} частично локализованы в импульсном пространстве.

Для дальнейшего рассмотрения удобно перейти к новому определению длины локализации СФ, поскольку формула (4) имеет смысл только для неограниченного импульсного пространства (или же для модели (5) — (8) при условии $l_D \ll N$). В отличие от общепринятого определения длины локализации как обратной скорости убывания амплитуды СФ при $n \rightarrow \pm \infty$ (n — номер невозмущенного состояния), мы будем определять l через ее «энтропию» (не путать с обычной энтропией):

$$\mathcal{H}_N^{(m)} = - \sum_{n=1}^N \omega_{nm} \ln \omega_{nm}; \quad \omega_{nm} \equiv \varphi_{nm}^2 \quad (10)$$

Здесь индекс m обозначает номер СФ матрицы U_{nm} ($m = 1, \dots, N$).

В предельном случае, когда распределение для φ_{nm} описывается зависимостью (9), энтропия $\mathcal{H}_N^{(m)}$ равна (для $N \gg 1$):

$$\mathcal{H}_N^{(m)} \approx \ln \left(\frac{N}{2} \alpha \right) + \frac{1}{N}; \quad (N \gg 1), \quad (11)$$

где α — некоторая константа:

$$\alpha = \frac{4}{\exp(2-C)} \approx 0.96, \quad (12)$$

а C — постоянная Эйлера ($C \approx 0.577\dots$). Далее, введем величину L_m :

$$L_m = \exp(\mathcal{H}_N^{(m)}), \quad (13)$$

которая имеет смысл эффективного числа компонент φ_{nm} , существенно отличающихся от нуля. Например, для равномерного распределения $\omega_{nm} = 1/N$ получим $L_m = N$, т. е. L_m в этом случае равно максимальной размерности СФ. В то же время, для микроканонического распределения (9) из (10) — (11) получаем

$$L_m \approx \alpha \frac{N}{2}. \quad (14)$$

Поэтому, несмотря на то, что в среднем такие СФ эргодические ($\langle \varphi_{nm}^2 \rangle = 1/N$), однако, из-за флуктуаций примерно половина компонент φ_{nm} имеет очень малую вероятность $\omega_{nm} \approx 0$. Это объясняется тем, что распределение для ω_{nm} является χ^2 -распределением, с особенностью в нуле. В этом смысле плотность вероятности хаотических СФ оказывается «дырявой» (как в импульсном, так и в θ -пространстве).

Численные эксперименты показывают, что при условии полного классического хаоса ($\mathcal{K} \gg 1$) с уменьшением k собственные функции остаются хаотическими на размере, меньшем, чем максимальный размер N . Поэтому, в соответствии с (9) — (13), длину локализации можно связать со средней размерностью d и определить ее через «энтропию» СФ:

$$l_{\mathcal{K}} \equiv d = \langle d_m \rangle = \frac{2}{\alpha} \langle L_m \rangle \approx 2 \langle \exp(\mathcal{H}_N^{(m)}) \rangle; \quad (d \gg 1). \quad (15)$$

Здесь усреднение проводится по всем СФ одной матрицы U_{nm} .

По существу, соотношение (15) является определением как длины локализации, так и размерности собственных хаотических функций. В случае предельного квантового хаоса размерность d принимает максимальное значение N , в то время как для $d \ll N$ численные данные показывают хорошее соответствие с обычным определением длины локализации по скорости убывания СФ на ее «хвостах» (см. далее).

Обратим внимание, что для $d = N$ теория случайных матриц дает правильный ответ о всех статистических свойствах матрицы U_{nm} , несмотря на то, что по построению она не является случайной (и зависит всего от двух динамических параметров модели: \mathcal{K} и k). В случае $d < N$ ситуация значительно сложнее, поскольку собственные векторы матрицы в N -мерном гильбертовом пространстве как бы погружены в пространство меньшей размерности, в котором сохраняется изотропное распределение.

4. Исследуем теперь, как зависит размерность d для СФ матрицы U_{nm} от квантового параметра k в модели (5) — (8). Напомним, что квазиклассические условия в этой модели имеют вид $N \gg 1$; $k \gg 1$, $\tau = 4\pi r/q \ll 1$; ($q = 2N + 1$), при этом параметр $\mathcal{K} = k\tau$ является чисто классическим. Известно [21], что при $\mathcal{K} \approx 5$ в классической модели области с устойчивым движением оказываются исчезающе малыми.

На рис. 1 отложена размерность $d(k)$, вычисленная для $\mathcal{K} = 5$ по формулам (10), (15), где φ_n — действительная часть всех собственных векторов матрицы U_{nm} с $N = 398$. В настоящее время пока нет аналитического описания полученной зависимости, однако в случае сильно локализованных состояний ($d \ll N$) известно, что средняя длина локализации СФ пропорциональна k^2 для $k \gg 1$ [11, 12, 22]. Для сравнения на вставке к рис. 1 отложена зависимость d от k^2 на начальном участке, когда $d \ll N$. Согласно дан-

ным [12, 26] по измерению длины локализации СФ в исходной модели ротатора (2) по средней скорости их убывания, имеем

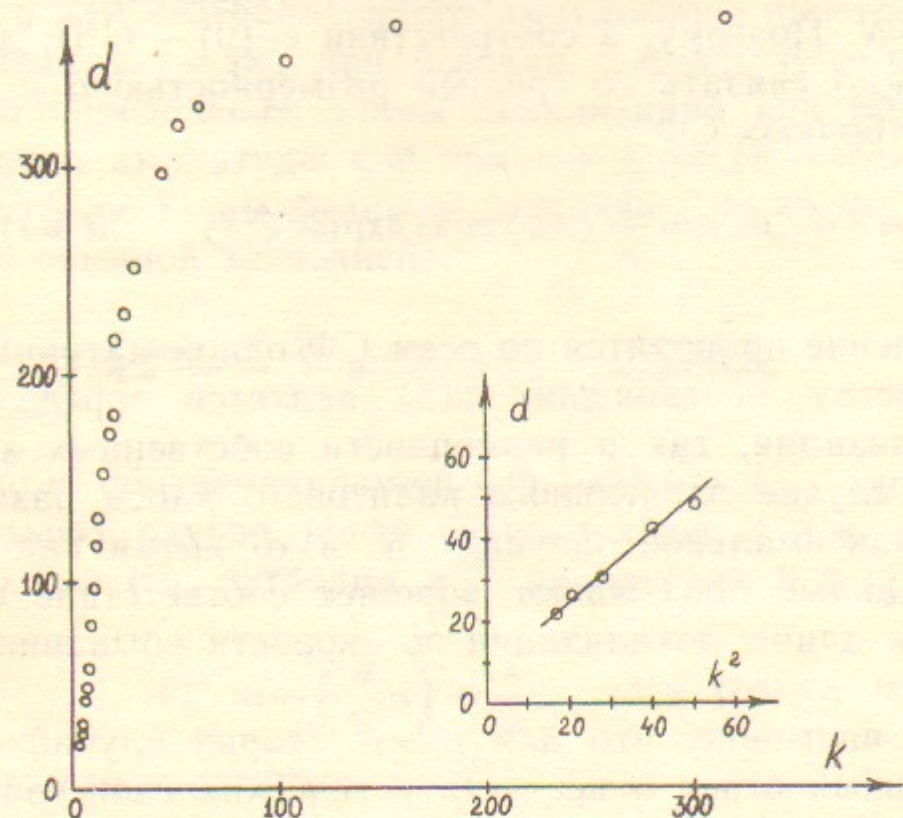


Рис. 1. Зависимость длины локализации (размерности d) от квантового параметра k при фиксированном значении классического параметра $\mathcal{K} = k\tau \approx 5$.

$l \approx k^2/4$. В качестве грубой оценки предположим, что СФ, без учета флуктуаций ее амплитуды, имеет вид $\varphi_n = l^{-1/2} \exp(-|n - n_0|/l)$, где n_0 — положение «центра тяжести» СФ. Подставляя это выражение в (10), (15) и считая, что доля СФ с $|n_0| \approx N$ мала, получим:

$$d \approx 2el \approx 5.4l \approx 1.25k^2, \quad (16)$$

в то время как подгоночной прямой на рис. 1 соответствует $d \approx 0.86$. Видно, что для малых $d \ll N$ выражение (15) вполне согласуется с обычным понятием длины локализации СФ. Тем не менее, желательно более подробное исследование не только в области $k \gg 1$, $1 \ll d \ll N$ (см., также, [26]), но и вблизи квантовой границы устойчивости $k \gtrsim 1$ ($d \gtrsim 1$).

Существенной особенностью хаотических СФ являются довольно большие флуктуации длины локализации каждой из СФ. В качестве примера на рис. 2 приведено распределение по длинам локализаций d_m для трех значений $k \approx 3.3; 21.1; 317$ (соответственно,

$r = 95; 15; 1$ в выражении для $\tau = 4\pi r / (2N + 1)$). По горизонтали отложено значение параметра d_m/N , равного отношению длины локализации l_m (размерности d_m) к полному числу уровней N . Видно, что максимальный разброс по длинам локализации соответствует значению $d/N \approx 0.5$. В этом случае среди СФ имеются как сильно локализованные ($d_m \ll N$), так и слабо локализованные ($d_m \approx N$). Тем не менее, несмотря на большие флуктуации, средние значения d достаточно хорошо ложатся на некоторую плавную зависимость от квантового параметра k (см. рис. 1).

Определение длины локализации СФ через энтропию также вполне согласуется с простым представлением о длине локализации, как об эффективном размере, на котором сосредоточена практически вся вероятность. Это отражено на рис. 3, на котором отложена зависимость «энтропийной длины» локализации d от «вероятностной» длины l_w . Последняя численно находится как число невозмущенных состояний, в которых сосредоточена основная «доля» (95% вероятности) собственных функций. Видно вполне хорошее соответствие между этими двумя определениями, особенно, если учесть флуктуационный разброс по длинам локализации.

5. Таким образом, мы видим, что в условиях полного классического хаоса характерным параметром квантовой локализации является средняя размерность собственных функций. Естественно теперь предположить, что и статистические свойства спектра квазиэнергий в этом случае будут в основном зависеть от параметра $\beta = d/N$. В пределе $d \rightarrow N$, параметр β стремится к единице и распределение $P(s)$, как было численно показано в [5], описывается законом Вигнера-Дайсона (1) с линейным отталкиванием близких уровней квазиэнергии. В другом предельном случае интегрируемых систем, для $\beta \rightarrow 0$, как мы знаем, отталкивание будет исчезать.

Поэтому можно предположить, что введенный нами выше параметр β является параметром отталкивания и в промежуточной ситуации, когда $0 < \beta < 1$. Сложность, однако, заключается в том, что в качестве зависимости $P(s)$, описывающей корреляции соседних уровней с учетом квантовой локализации хаотических собственных функций, мы не можем использовать имеющиеся аналитические выражения. Действительно, как отмечалось выше, зависимость Берри—Робника [15] получена для принципиально иной задачи, когда хаотическое движение в классической системе происходит в какой-то части фазового пространства, в то время как в остальной области движение интегрируемо.

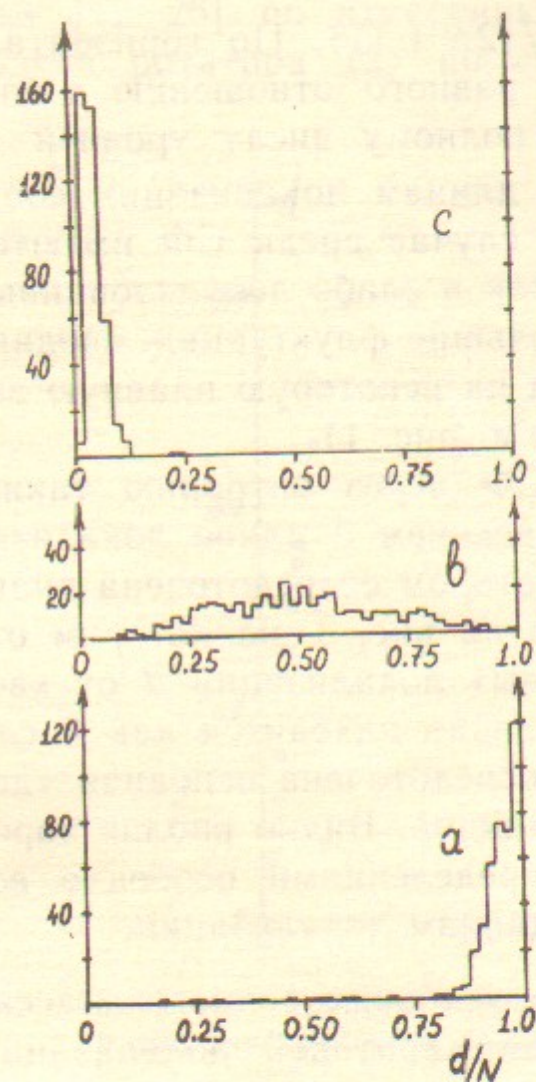


Рис. 2. Примеры распределения по длинам локализации d_m разных СФ для трех значений k ($\mathcal{K}=5$):
 (a) — $r=1$, $k \approx 317$, $\beta \approx 0.95$;
 (b) — $r=15$, $k \approx 21.1$, $\beta \approx 0.50$;
 (c) — $r=95$, $k \approx 3.3$, $\beta \approx 0.05$.

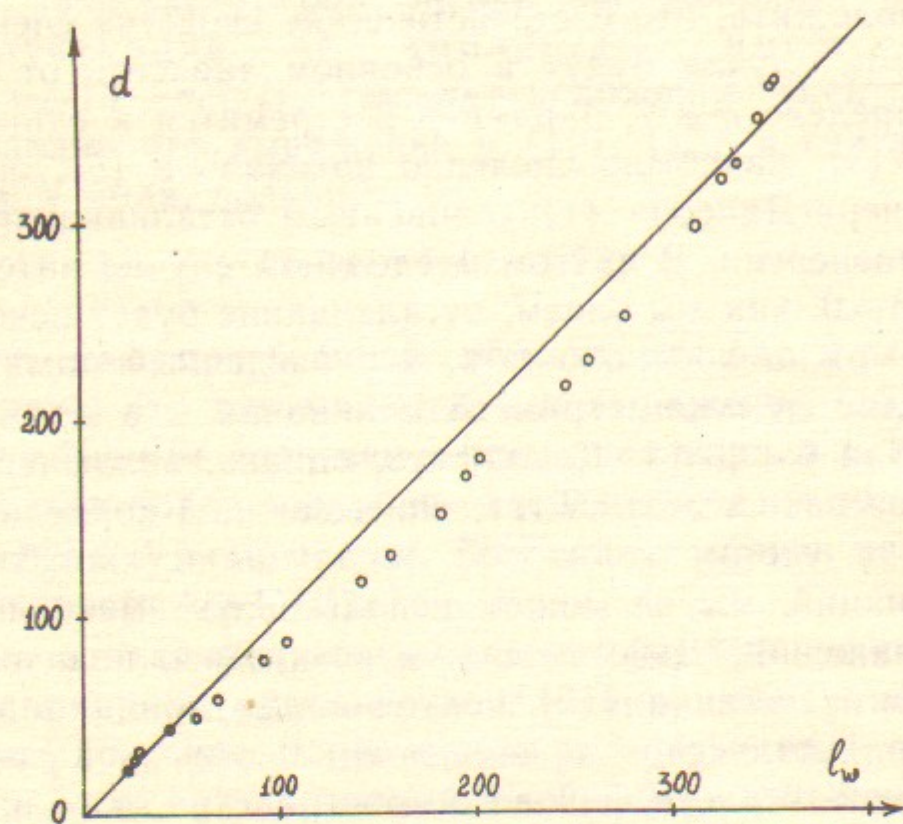


Рис. 3. Соотношение между «энтропийной» длиной локализации (размерностью d) и «вероятностной» длиной l_w .

Другая известная зависимость Броди [27] могла бы быть нами использована, однако, лишь как чисто эмпирическая, не имеющая под собой никакого физического основания. Однако, и как эмпирическая формула, она становится совершенно неприменимой для других систем, когда $\beta > 1$ (см. далее).

Для получения необходимой нам зависимости $P(s)$, обратимся к теории случайных матриц (ТСМ) [7—9]. Поскольку наша матрица U_{nm} унитарная, естественно рассмотреть вариант ТСМ, разработанный Дайсоном (см. [7]) и относящийся к случайным унитарным матрицам. В теории Дайсона все статистические характеристики спектра определяются многочастичной функцией распределения

$$Q(\omega_1, \dots, \omega_N) = Q_0 \prod_{n \neq m} |e^{i\omega_n} - e^{i\omega_m}|^\beta d\omega_1 \dots d\omega_N, \quad (17)$$

которая описывает совместное распределение всех собственных значений $\lambda_n = \exp(i\omega_n)$ случайной унитарной матрицы размера N . Значение β в (17) равно 1 — для ансамбля симметрических матриц, 2 — для несимметрических матриц, и 4 — для симплектических матриц. Однако подход Дайсона, основанный на аналогии с двумерным кулоновским газом (см., подробнее, [7]), в принципе, дает возможность исследовать статистические свойства и для произвольных значений β . В этом случае соответствие между моделью кулоновского газа и случайными матрицами исчезает, и, естественно, возникает вопрос о реальной физической ситуации, в которой спектральные свойства квантовых систем могли бы быть описаны распределением (17) с произвольными $\beta \neq 1; 2; 4$.

Гипотеза состоит в том, что такими системами могут быть квантовые системы с конечным числом уровней и локализованными хаотическими собственными функциями. В нашем случае мы ожидаем, что в зависимости от степени локализации, параметр расталкивания близких уровней β будет меняться в пределах $0 < \beta < 1$ (напомним, что исходная система (2), равно как и модель (5) — (8) инвариантна относительно обращения времени). Отметим, однако, что получение зависимости $P(s)$ из распределения (17) является далеко нетривиальной задачей. Достаточно, например, напомнить, что даже для исследованных в ТСМ случаях $\beta = 1; 2; 4$, нет аналитической зависимости для $P(s)$. Обычно используемое эвристическое выражение (1), по существу не связано с теорией случайных матриц. Оказалось, однако, что приближение (1) существенным образом отличается от истинного (численным

образом полученного с помощью метода Мехты (см. [7, 8]) лишь для значений s , больших по сравнению со средним расстоянием между уровнями. Поскольку полное число уровней, как правило, не превышает нескольких тысяч, то в практическом отношении зависимость (1) Вигнера — Дайсона является вполне приемлемой.

В качестве эмпирической формулы для промежуточной ситуации $\beta \leq 2$ предлагается использовать следующее выражение:

$$P(s) = As^\beta \exp \left\{ -\frac{\beta\pi^2}{16}s^2 - \left(C_0 - \frac{\beta}{2} \right) \frac{\pi}{2}s \right\}. \quad (18)$$

Здесь два параметра A и C_0 определяются из обычных нормировочных условий:

$$\int_0^\infty P(s) ds = 1; \quad \int_0^\infty sP(s) ds = 1, \quad (19)$$

где $s=1$ — среднее расстояние между уровнями. Выражение (18), с одной стороны учитывает асимптотику $P(s)$ при больших $s \rightarrow \infty$, полученную Дайсоном [7], а с другой стороны, дает неплохое согласие с формулой (1) при $\beta=1; 2$. Кроме того, при $\beta=0$ зависимость (18) переходит в пуассоновское (экспоненциальное) с правильными значениями для A и C_0 . На рис. 4 приведены зависимости (18) и (1) для $\beta=1$ вместе с точными численными данными теории случайных матриц [7—8]. Видно, что отличие в наиболее существенной (с практической точки зрения) области $s \approx 1 \div 2$ не превышает 5%. Это означает практически хорошее соответствие, если полное число уровней не превышает $N \approx 10^4$. Еще лучшее соответствие имеет место для $\beta=2$ (см. рис. 5). Таким образом, есть надежда, что и для промежуточных значений $1 < \beta < 2$ зависимость (18) будет неплохо соответствовать правильному (но неизвестному!) выражению, вытекающему из (17).

6. Перейдем теперь к рассмотрению промежуточной статистики $P(s)$ для нашей модели (5) — (8) в зависимости от степени локализации квантового хаоса. При этом будем проводить сравнение с приближенным выражением (18), в котором параметр β определен через среднюю длину локализации хаотических СФ по формулам (10), (15). Для этой цели проведем численное исследование, при котором независимо находятся размерность d собственных функций матрицы U_{nm} и распределение $P(s)$ расстояний между сосед-

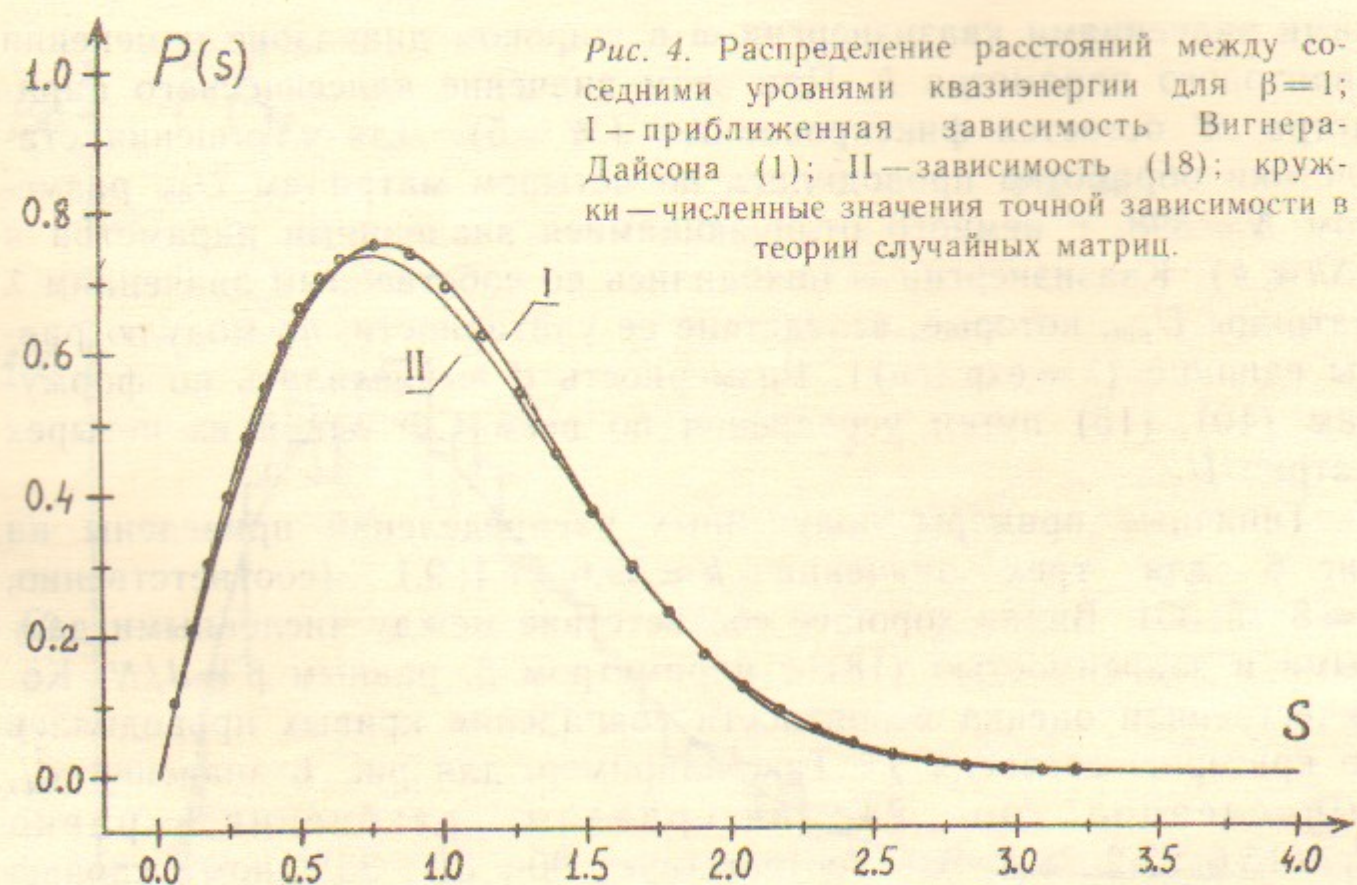


Рис. 4. Распределение расстояний между соседними уровнями квазиэнергии для $\beta=1$; I — приближенная зависимость Вигнера-Дайсона (1); II — зависимость (18); кружки — численные значения точной зависимости в теории случайных матриц.

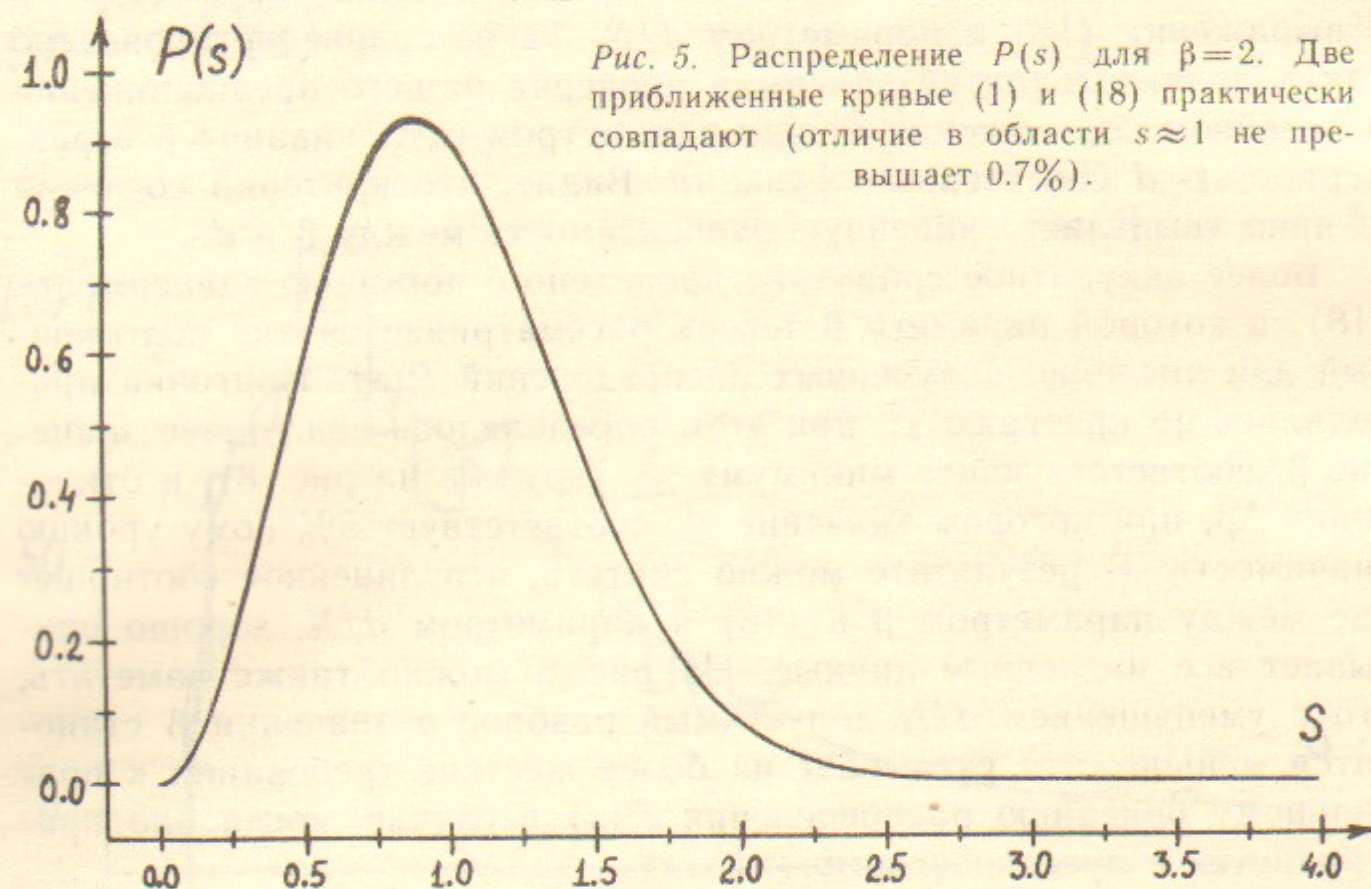


Рис. 5. Распределение $P(s)$ для $\beta=2$. Две приближенные кривые (1) и (18) практически совпадают (отличие в области $s \approx 1$ не превышает 0.7%).

ними значениями квазиэнергии ω в широком диапазоне изменения квантового параметра k . При этом значение классического параметра \mathcal{K} остается фиксированным ($\mathcal{K} = 5$). Для улучшения статистики обработка проводилась по четырем матрицам U_{nm} размером $N = 398$, с немного отличающимися значениями параметра k ($\Delta k \ll k$). Квазиэнергии ω находились по собственным значениям λ матрицы U_{nm} , которые, вследствие ее унитарности, по модулю равны единице ($\lambda = \exp(i\omega)$). Размерность d вычислялась по формулам (10), (15) путем усреднения по всем СФ одной из четырех матриц U_{nm} .

Типичные примеры полученных распределений приведены на рис. 6 для трех значений $k \approx 39,6; 21,1; 9,1$ (соответственно, $r = 8; 15; 35$). Видно хорошее соответствие между численными данными и зависимостью (18) с параметром β , равным $\beta = d/N$. Количественная оценка вероятности совпадения кривых проводилась по критерию согласия χ^2 . Так, например, для рис. 6 значение χ^2_{24} , вычисленное по 24 интервалам разбиения, равно $\chi^2_{24} \approx 15,6; 27,2; 28,5$. Это соответствует 90-, 30-, 35%-ному уровню значимости. Более полные данные приведены на рис. 7, из которого видно, что для всех значений $\beta = d/N$ (кружки) уровень значимости не ниже 5%. На этом же рисунке в качестве сравнения даны значения χ^2 для двух других соотношений между параметром β в выражении (18) и параметром d/N . Такое сравнение проведено как дополнительная независимая проверка нашего предположения о линейном соотношении между параметром отталкивания β и размерностью d собственных функций. Видно, что критерий согласия χ^2 явно «выделяет» линейную зависимость между β и d .

Более аккуратное сравнение проведено с помощью зависимости (18), в которой параметр β теперь рассматривается как подгоночный для численно полученных распределений $P(s)$. Подгонка проводилась по критерию χ^2 , при этом определялось наилучшее значение β , соответствующее минимуму χ^2_{24} (кружки на рис. 8), и отклонение $\Delta\beta$, при котором значение χ^2_{24} соответствует 5%-ному уровню значимости. В результате можно считать, что линейное соотношение между параметром β в (18) и параметром d/N , хорошо описывает все численные данные. Из рис. 8 можно также заметить, что с уменьшением d/N допустимый разброс в значении β становится меньше, что указывает на более жесткие требования к правильному описанию распределения $P(s)$ в случае, когда оно приближается к пуассоновскому.

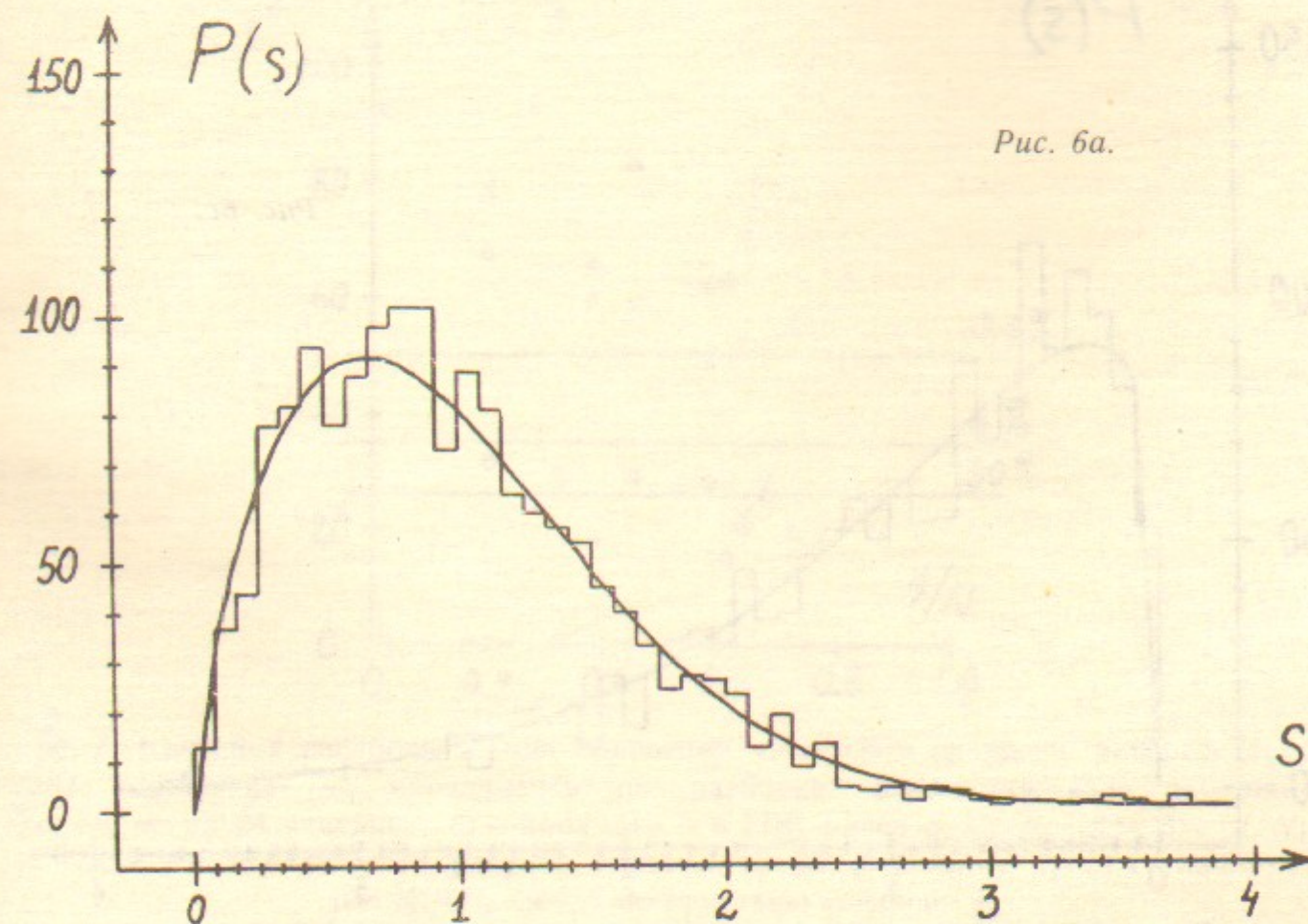


Рис. 6а.

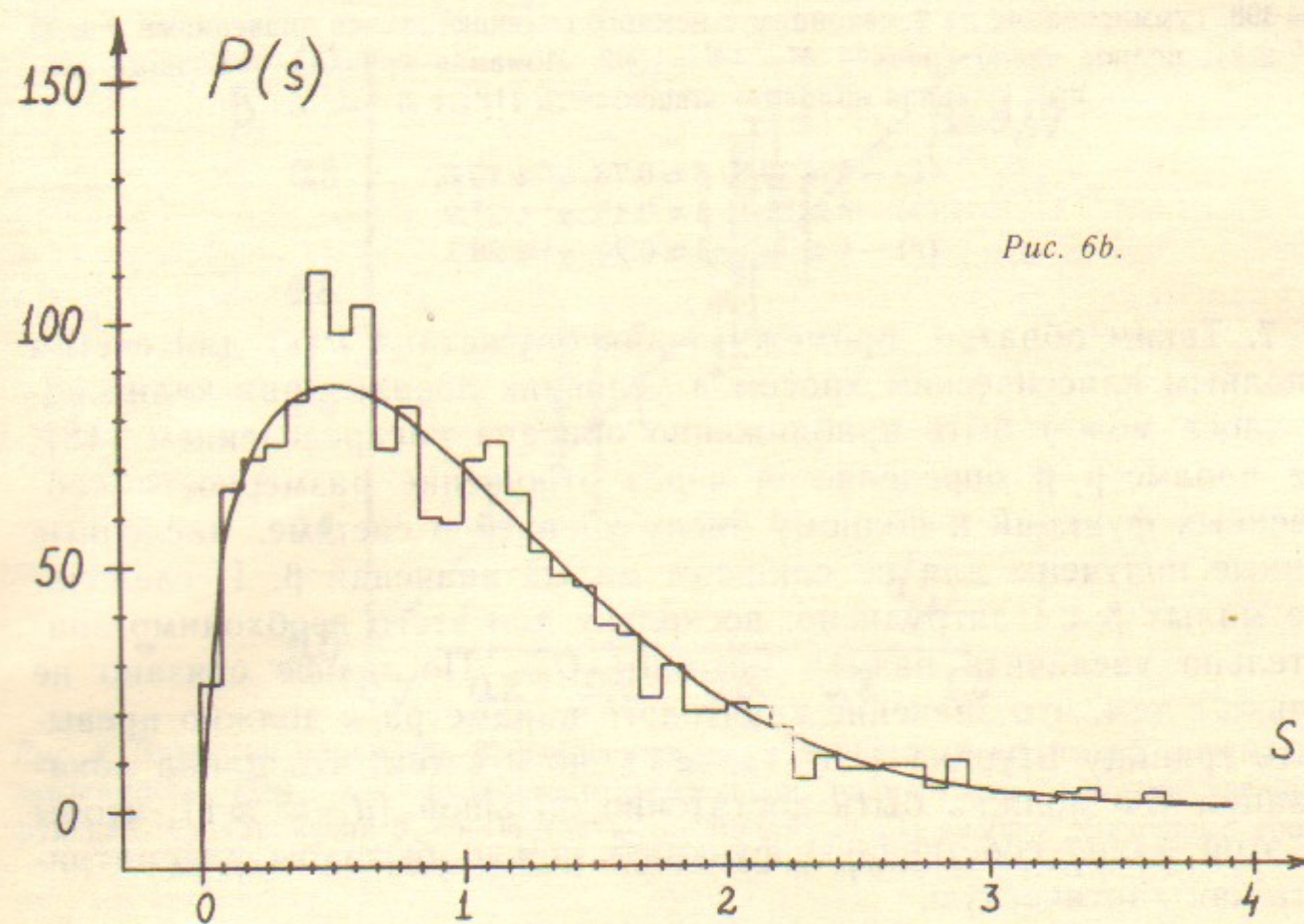


Рис. 6б.

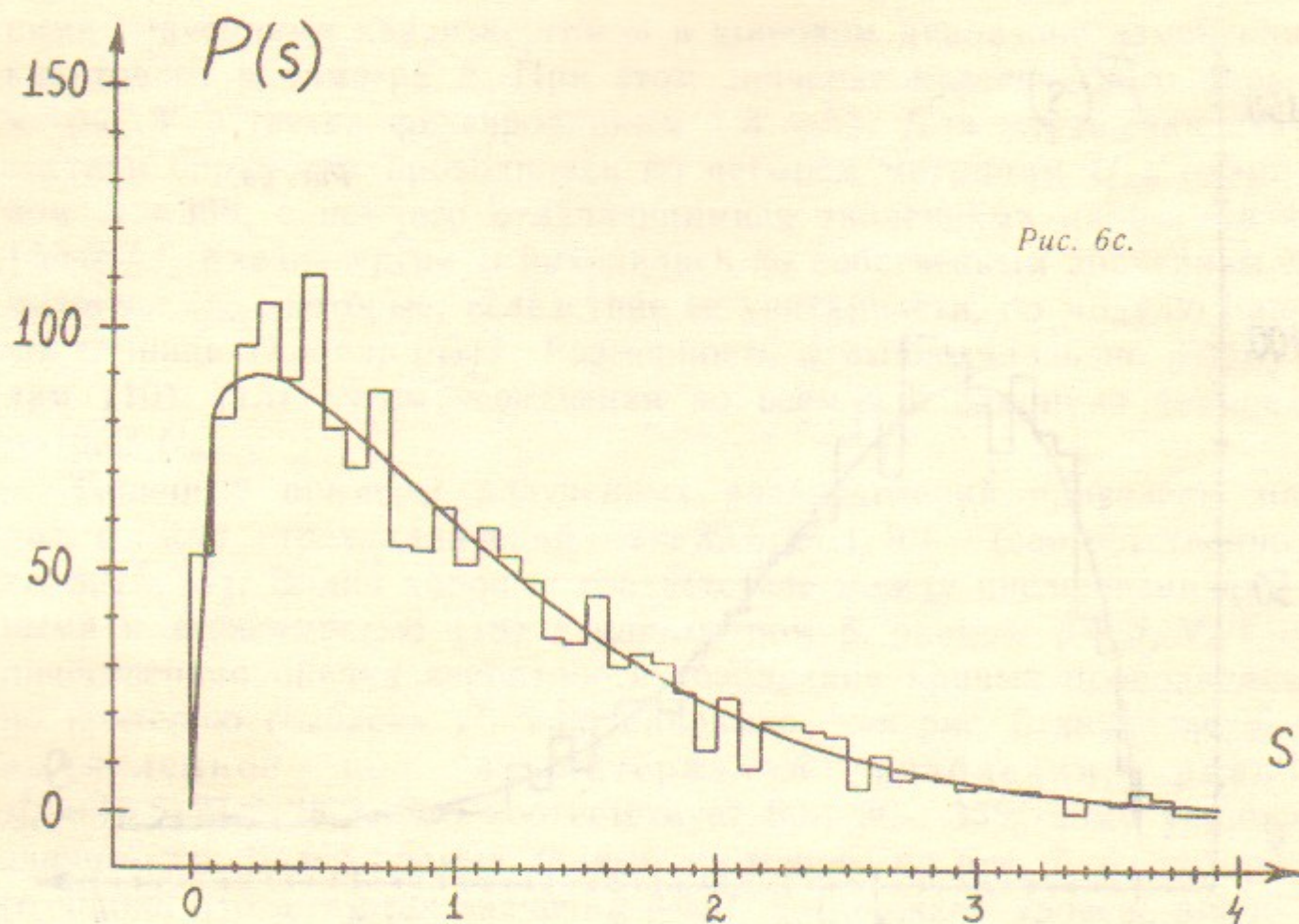


Рис. 6с.

Рис. 6. Три примера промежуточной статистики $P(s)$, полученной для $\mathcal{K} \approx 5$, $N=398$, суммирование по 4 матрицам с немного отличающимися значениями $k \pm \Delta k$ ($\Delta k \ll k$), полное число уровней $M=4N=1592$. Ломаная кривая — численные данные, плавная кривая — зависимость (18) с $\beta=d/N$.

- (a) — $k \approx 39.6$, $\beta \approx 0.73$, $\chi^2 \approx 15.6$;
- (b) — $k \approx 21.1$, $\beta \approx 0.45$, $\chi^2 \approx 27.2$;
- (c) — $k \approx 9.1$, $\beta \approx 0.20$, $\chi^2 \approx 28.5$.

7. Таким образом, промежуточная статистика $P(s)$ для систем с полным классическим хаосом в условиях локализации квантового хаоса может быть приближенно описана распределением (18), где параметр β определяется через отношение размерности собственных функций к полному числу уровней в системе. Численные данные получены для не слишком малых значений β . Исследование малых $\beta \ll 1$ затруднено, поскольку для этого необходимо значительно увеличить размер матрицы U_{nm} . Последнее связано не только с тем, что значение квантового параметра k должно превышать границу Шуряка [28] ($k_{cr} \approx 1$), но и с тем, что длина локализации СФ должна быть достаточно большой ($d \sim k^2 \gg 1$), чтобы на этой длине собственную функцию можно было бы рассматривать как хаотическую.

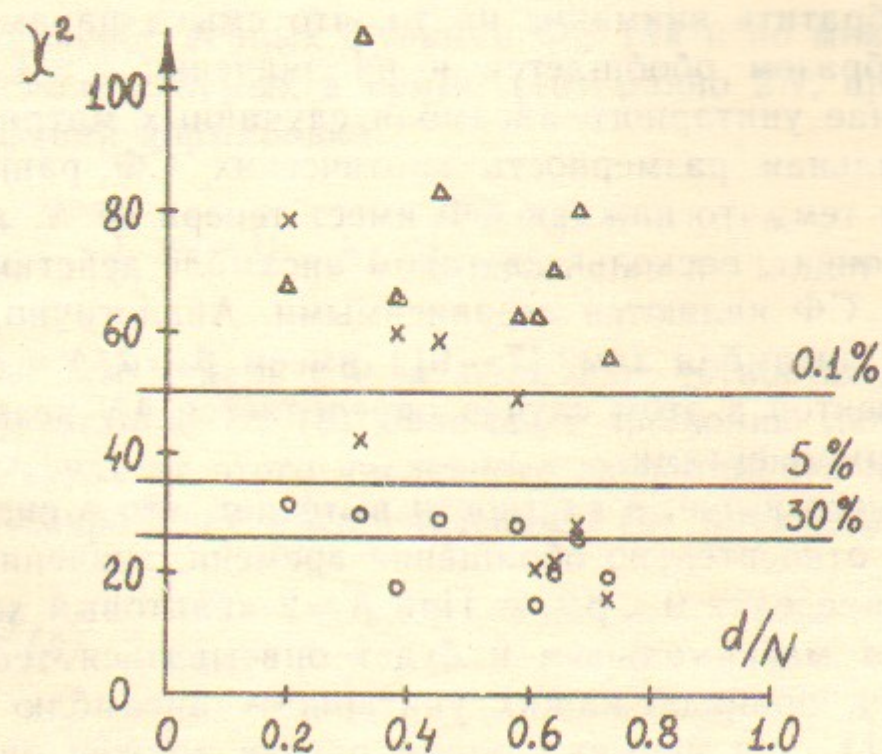


Рис. 7. Критерий согласия χ^2 при сравнении численных данных с распределением (18); вычисление χ^2_{24} проводилось при разбиении всего интервала расстояний $0 < s < \infty$ на 24 «ячейки»; \circ — параметр β в (18) равен d/N ; \triangle — для $\beta = (d/N)^2$; \times — для $\beta = (d/N)^{1/2}$. На рисунке указаны также различные уровни значимости (0.1%, 5%, 30%) по критерию согласия χ^2_{24} .

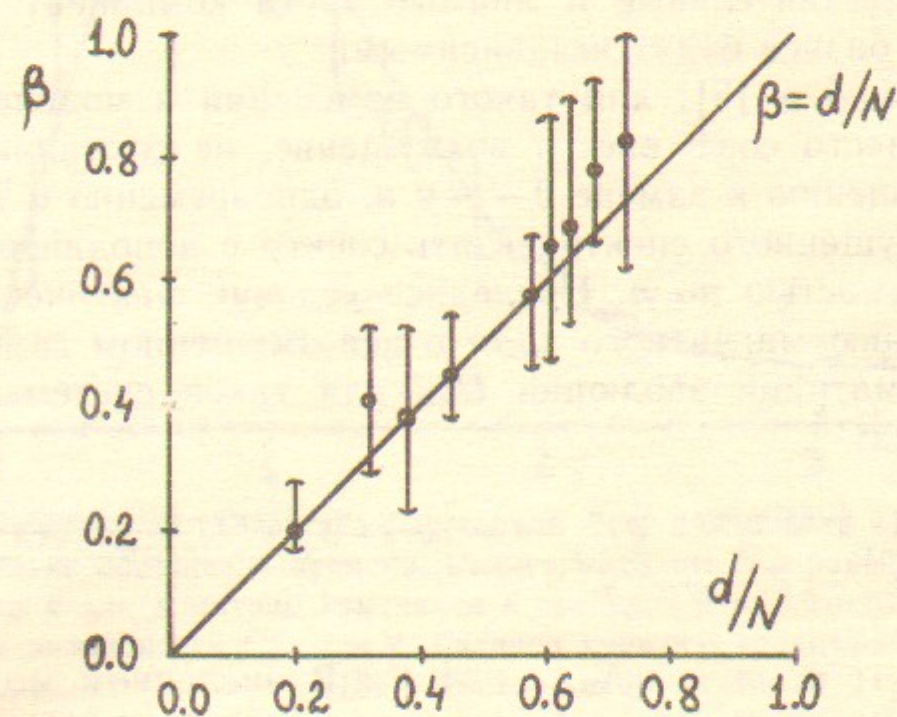


Рис. 8. Значения параметра β , найденные методом подгонки численных данных на зависимость (18), как функция относительной размерности d/N собственных функций. \circ — значения β , соответствующие минимуму χ^2_{24} ; разброс значений β соответствует 5%-ному уровню значимости по критерию согласия χ^2 .

Следует обратить внимание на то, что смысл параметра β естественным образом обобщается и на значения $\beta > 1$. Действительно, в случае унитарного ансамбля случайных матриц ($\beta=2$ в (1)) максимальная размерность хаотических СФ равна $d=2N$. Это связано с тем, что каждая СФ имеет теперь не N , а $2N$ независимых компонент, поскольку в таком ансамбле действительные и мнимые части СФ являются независимыми. Аналогично, для симплектического ансамбля (см. [7—9]) имеем $\beta=d/N=4$, так как собственный вектор в этом случае определяется $4N$ независимыми случайными компонентами.

Из сказанного выше, в частности вытекает, что в системах, неинвариантных относительно обращения времени, значение β может изменяться в пределах $0 < \beta \leq 2$. При $\beta=2$ квантовый хаос в этих системах будет максимальным и будет описываться теорией случайных матриц, принадлежащих унитарному ансамблю (см. примеры в [5, 25]), а в промежуточном случае должен описываться тем же распределением (18). В качестве предварительной проверки было проведено численное исследование системы, модифицированной по сравнению с (5)–(8) таким образом, чтобы новая модель была бы неинвариантной при замене $t \rightarrow -t$ (см. подробнее [5]). В итоге матрица \tilde{U}_{nm} теперь будет несимметрической и, соответственно, действительные и мнимые части компонент СФ в невозмущенном базисе будут независимыми.

Как показано в [5], для такого изменения в модели (2), (3) достаточно вместо $\cos \theta$ ввести возмущение, не сохраняющее четность по отношению к замене $\theta \rightarrow -\theta$ и, одновременно с этим в качестве невозмущенного спектра взять спектр с дополнительной линейной зависимостью по n . Последнее условие фактически аналогично включению магнитного поля в невозмущенном гамильтониане. В итоге, матрица эволюции \tilde{U}_{nm} для такой системы приняла следующий вид:

$$\tilde{U}_{nm} = \frac{1}{N} e^{\frac{1}{4}i\tau(n^2 + \xi n)} \sum_{p=-N_0}^{N_0} e^{-ik \cos(2\pi p/N + \eta)} e^{i\frac{2\pi}{N}p(n-m)} e^{\frac{1}{4}i\tau(n^2 + \xi n)}, \quad (19)$$

где $N=2N_0+1$; $n, m = -N_0, \dots, +N_0$. В численном моделировании значение параметров было равно $\tau=4\pi \cdot 16/N$; $N=199$; $\xi \approx 1.88$; $\eta \approx 0.81$. Величина возмущения k была подобрана таким образом, чтобы среднее значение размерности d было бы равным $d \approx N$. Величина d вычислялась по тем же формулам (10), (15), только суммирование в (10) проводилось как по действительным

компонентам собственных функций Φ_n , так и по мнимым. Поэтому полное число слагаемых в сумме (10) равно $2N$, при этом сохранялась обычная нормировка:

$$\sum_{n=1}^{2N} \omega_n = 1; \quad \omega_n = \begin{cases} (\operatorname{Re} \Phi_n)^2 & n=1, \dots, N \\ (\operatorname{Im} \Phi_n)^2 & n=N+1, \dots, 2N \end{cases} \quad (20)$$

Понятно, что теперь СФ не обладают четностью, поэтому матрица \tilde{U}_{nm} в отличие от (8) описывает эволюцию любых состояний системы. Результат этого численного эксперимента представлен на рис. 9. Суммирование распределения $P(s)$ проводилось по 8 мат-

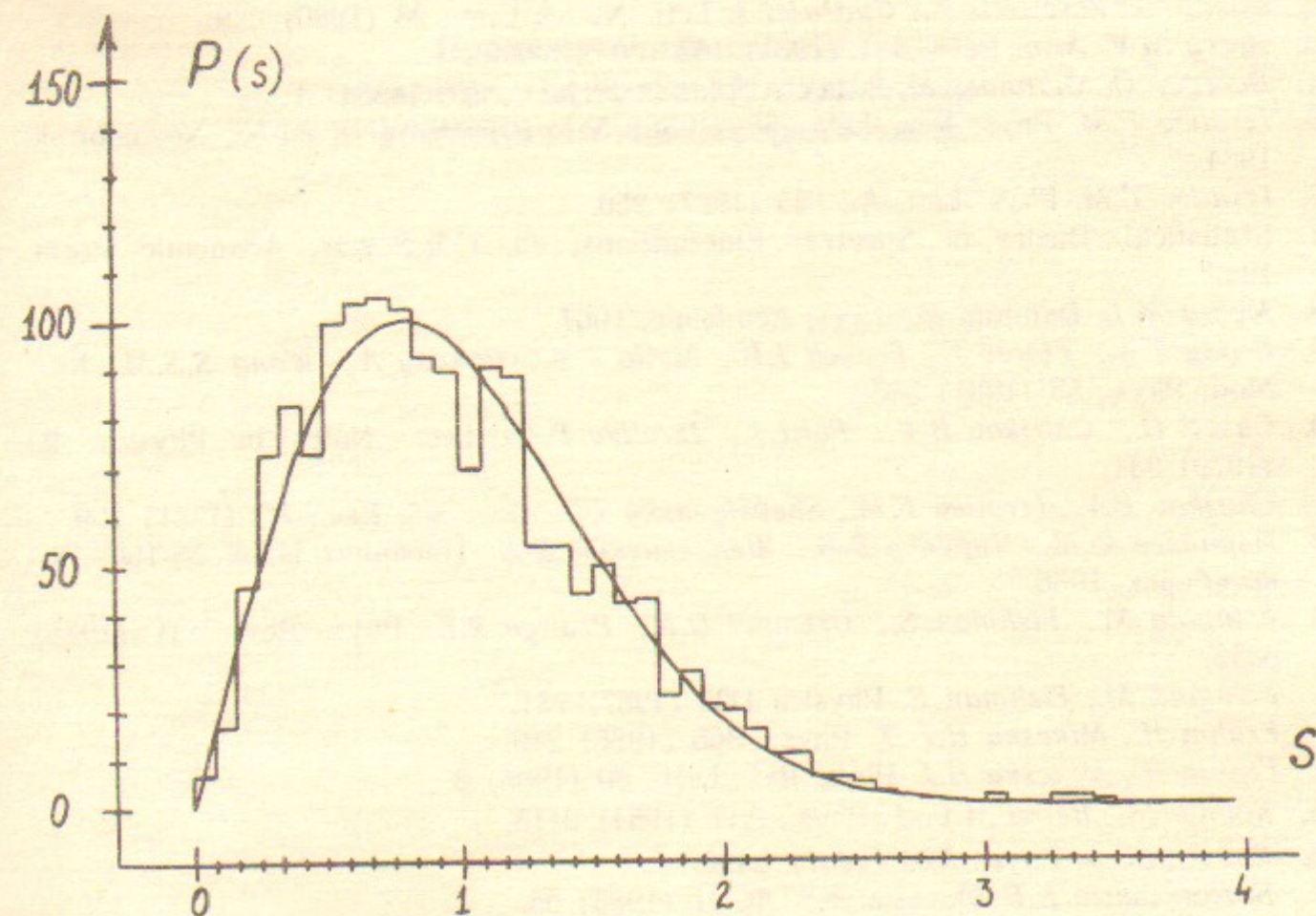


Рис. 9. Промежуточная статистика расстояний $P(s)$ для модели (19), неинвариантной относительно обращения времени. Размер матрицы \tilde{U}_{nm} равен $N=199$, квантовый параметр k для 8 матриц изменялся в пределах $k=13.0 \div 13.9$, что соответствует средней размерности СФ $d \approx N$. Гладкая кривая — аналитическая зависимость (18) с $\beta=1$; $\gamma_{24}^2 \approx 32$.

рицам со значениями параметра k в интервале $13.0 \leq k \leq 13.9$, размер матрицы $N=199$, полное число уровней квазиэнергии равно $M=8 \cdot N=1592$. Из рисунка видно вполне удовлетворительное соответствие с зависимостью (18). Важно подчеркнуть, что полученное распределение $P(s)$, хотя и описывается зависимостью (18)

с $\beta=1$ (или распределением Вигнера—Дайсона (1)), но является промежуточным между пуассоновским и предельным распределениями. Последнее, как было показано в [5], прекрасно описывается (1) с $\beta=2$, в соответствии с теорией случайных матриц (унитарный ансамбль).

Автор благодарен Б.В. Чирикову за внимание к работе и полезные замечания, а также В.Г. Зелевинскому, В.В. Соколову и Д.Л. Шепелянскому за плодотворные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Заславский Г.М., Филоненко Н.Н. ЖЭТФ, 65 (1973) 643.
2. Casati G., Valz-Gris F., Guarneri I. Lett. Nuovo Cim., 28 (1980) 279.
3. Berry M.V. Ann. Phys. 131 (1981) 163.
4. Bohigas O., Giannoni M.-J. Lect. Notes in Physics, 209 (1984) 1.
5. Izrailev F.M. Phys. Rev. Lett., 56 (1986) 541; Preprint INP 84-63, Novosibirsk, 1984.
6. Izrailev F.M. Phys. Lett. A., 125 (1987) 250.
7. Statistical Theory of Spectra: Fluctuations, ed. C.E. Porter, Academic Press, 1965.
8. Mehta M.L. Random Matrices, Academic, 1967.
9. Brody T.A., Flores J., French J.B., Mello P.A., Pandey A., Wong S.S.M. Rev. Mod. Phys., 53 (1981) 385.
10. Casati G., Chirikov B.V., Ford J., Izrailev F.M. Lect. Notes in Physics, 93 (1979) 334.
11. Chirikov B.V., Izrailev F.M., Shepelyansky D.L. Sov. Sci. Rev., 2C (1981) 209.
12. Израйлев Ф.М., Чириков Б.В., Шепелянский Д.Л. Препринт ИЯФ 86-166. Новосибирск, 1986.
13. Feingold M., Fishman S., Grempel D.R., Prange R.E. Phys. Rev. B31 (1985) 6852; Feingold M., Fishman S. Physica D25 (1987) 181.
14. Frahm H., Mikeska H.J. Z. Phys., B65 (1986) 249; Frahm H., Mikeska H.J. Phys. Rev. Lett., 60 (1988) 3.
15. Robnik M., Berry M.V. J. Phys., A17 (1984) 2413.
16. Robnik M. J. Phys., A20 (1987) L495.
17. Богомольный Е.Б. Письма ЖЭТФ, 41 (1985) 55.
18. Berry M.V., Tabor M. Proc. Roy. Soc., A356 (1977) 375.
19. Casati G., Chirikov B.V., Guarneri I. Phys. Rev. Lett., 54 (1985) 1350.
20. Casati G., Guarneri I., Izrailev F.M. Phys. Lett. A124 (1987) 263.
21. Chirikov B.V. Phys. Rep., 52 (1979) 263.
22. Shepelyansky D.L. Phys. Rev. Lett., 56 (1986) 677.
23. Израйлев Ф.М., Шепелянский Д.Л. ТМФ 43 (1980) 417.
24. Chang S.-J., Shi K.-J. Phys. Rev. Lett., 55 (1985) 269.
25. Haake F., Kus M., Scharf, R. Z. Phys. B65 (1986) 381, Lect. Notes in Phys., 282 (1987) 3.
26. Чириков Б.В., Шепелянский Д.Л. Радиофизика, 29 (1986) 1041.
27. Brody T.A. Lett. Nuovo Cim., 7 (1973) 482.
28. Шуряк Е.В. ЖЭТФ 71 (1976) 2039.

Ф.М. Израйлев

Промежуточная статистика спектра квазиэнергий и квантовая локализация классического хаоса

Ответственный за выпуск С.Г. Попов

Работа поступила 11 марта 1988 г.
Подписано в печать 17.03. 1988 г. МН 08200
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 2,2 печ.л., 1,9 уч.-изд.л.
Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 45

Набрано в автоматизированной системе на базе фото-
наборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и
отпечатано на ротапринте Института ядерной физики
СО АН СССР,
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.