70

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

Э.А. Кураев, Э.П. Осипов

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ СТРУН.
ЧАСТЬ I: БОЗОННАЯ СТРУНА

ПРЕПРИНТ 88-71

НОВОСИБИРСК

ВВЕДЕНИЕ

При составлении этих лекций мы задавались целью дать основные понятия и методы, принятые в теории струн, а также направления дальнейшего развития. Материал разбит на несколько частей. Содержание первой:

Часть I

Материалом для составления лекций явились известные обзоры Шерка, Шварца, Бринка, лекции Зимних школ ЛИЯФ, семинары в ИЯФ и ИМ СО АН СССР.

Суперструнные модели в настоящее время претендуют на роль единых теорий, описывающих все взаимодействия элементарных частиц — сильные, электромагнитные и слабые (электрослабые) и гравитационные взаимодействия. Сразу следует подчеркнуть, что в настоящий момент не идет речи о предсказании каких-либо конкретных характеристик — масс частиц, констант связи и др. — все это только надежды. Сейчас вопрос ставится иначе: модель суперструн является внутренне непротиворечивой теорией (в отличие от других известных моделей, обсуждавшихся ранее в качестве кандидатов в единые теории), и при этом ее предварительные предсказания не приходят в немедленное противоречие с опытом. С другой стороны, все важнейшие ингредиенты предшествовавших теорий (великое объединение, т. е. единое описание сильных, электромагнитных и слабых взаимодействий, суперсимметрия и супергравитация, дополнительные измерения, геометрическая природа калибровочных взаимодействий) нашли свое место и в суперструнных моделях. Благодаря своим уникальным свойствам и, прежде всего, благодаря необычайно высокой симметрии взаимодействия частиц, некоторые из суперструнных моделей, по-видимому, свободны от ультрафиолетовых расходимостей и, по-видимому, позволяют включить все многообразие существующих частиц и взаимодействий непротиворечивым образом. Такими возможностями до сих пор не обладала ни одна теория. Теория суперструн — это теория, объединяющая непротиворечивым образом принципы теории относительности и квантовой механики. Она отличается от традиционной квантовой теории поля добавлением нового фундаментального принципа — фундаментальными объектами являются струны, одномерные протяженные объекты, обладающие также и фермионной структурой. Тем самым, в отличие от традиционной квантовой теории поля, в рамках теории суперструн элементарные частицы рассматриваются как возбужденные состояния струн — одномерных протяженных объектов. Фермионные степени свободы необходимы для реализации в рамках струнной модели суперсимметрии — одной из самых красивых идей, возникших в теоретической физике последних лет. В свою очередь, суперсимметрия приводит к большому сокращению ультрафиолетовых расходимостей между вкладами фейнмановских диаграмм. Бозонные и фермионные струны имеют последовательное квантовое описание в пространстве-времени со строго определенным числом измерений D: для бозонной струны $D=26$, для фермионной струны $D=10$. Обычно считают, что дополнительные пространственные измерения

имеют чрезвычайно малые размеры (порядка планковского радиуса $r_p \sim \sqrt{G} \sim 10^{-33}$ см). Идея Калузы об интерпретации дополнительных пространственных переменных как полей позволяет придать геометрический смысл внутренним симметриям. Эта процедура носит название компактификации Калузы — Клейна. Выбор подходящих компактных пространств (сфер, торов, пространств Калаби — Яо, орбифолдов и т. д.) существенным образом определяет структуру фундаментальных взаимодействий нашего мира.

С точки зрения теории поля, струна — это теория с бесконечным числом полей. Но это очень специальная версия такой теории. Прежде всего в ней жестко фиксирован спектр масс частиц. Не менее жестко задаются и взаимодействия. Они определяются классической (неквантовой) струнной динамикой, согласно которой действие пропорционально площади мировой поверхности, заметаемой струной при движении, и принципами квантовой механики, согласно которым амплитуда перехода из одного состояния струны в другое получается суммированием по всем траекториям (т. е. мировым поверхностям), связывающим конечную и начальную конфигурации, с весом, равным мнимой экспоненте от площади мировой поверхности.

Важно отметить, что тем самым определен не только закон движения отдельных струн, но и их взаимопревращения. В самом деле, наряду с поверхностями типа изображенных на рис. 1 нужно учесть и поверхности, изображенные на рис. 2. Первый тип поверхностей описывает две невзаимодействующие струны, а второй — их взаимодействие. Допущение только гладких неветвящихся поверхностей — динамический принцип, выделяющий взаимодействия, которые обычно называют струнными. Этот же принцип иногда еще называют принципом локальности взаимодействия

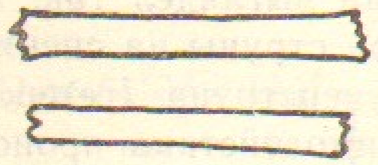


Рис. 1.

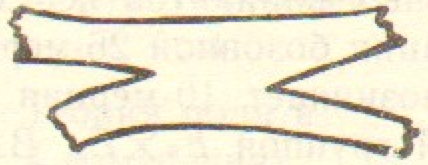


Рис. 2.

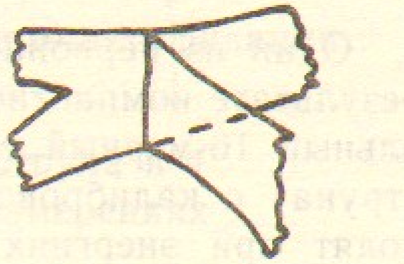


Рис. 3.

струн: гладкие мировые поверхности описывают разрывы струны в какой-то момент времени в одной точке, в то время как ветвящиеся, рис. 3, — сразу во многих точках (по линии) одновременно.

Отметим, что в теории струн параметр пропорциональности $\sim 10^{19}$ ГэВ $\sim 10^{-33}$ см (действие пропорционально площади мировой поверхности) считается универсальным — такая универсальность еще один динамический постулат.

Указанную геометрическую картину взаимодействия необходимо еще перевести на язык формул. При определении суммы по бесконечному набору поверхностей возникают различные сложности. Связанные с ними отклонения от наивной геометрической картины называются квантовыми аномалиями. Оказывается, что условия отсутствия аномалий в теории струн чрезвычайно ограничительны. Если ввести еще один динамический принцип, требующий исчезновения всех аномалий, которые могли бы появляться на различных этапах построения теории, то, похоже, удастся зафиксировать буквально все: размерность пространства-времени, группу великого объединения, число поколений фермионов, константы связи, массы и т. д.

К сожалению, пока не все в этой программе одинаково ясно. Чтобы из исходных 26 или 10 измерений получились те 4, в которых мы реально существуем, остальные 16 или 6 пространственных измерений должны быть «компактифицированы» (ограничены) до образований размером порядка M_P^{-1}. Движение в дополнительных измерениях равносильно зависимости полей от соответствующих координат. Появление такой зависимости с точки зрения наших четырех измерений равносильно взаимодействию частиц, массы которых порядка M_P, т. е. непомерно велики. Поэтому мы не можем в наших экспериментах увидеть непосредственно эти дополнительные измерения. Их существование сказывается только на составе полей четырехмерной теории.

Основные этапы перехода от струны к реалистической четырехмерной теории поля

Один из первоначальных вариантов перехода выглядел так. В результате компактификации бозонной 26-мерной струны на специальный 16-мерный тор возникает 10-мерная суперструна (гетероструна) с калибровочной группой $E_8 \times E_8$. Взаимодействия происходят при энергиях порядка массы Планка $M_P \sim 10^{19}$ ГэВ. При энергиях ниже M_P выживают — могут рождаться и возбуждаться — лишь безмассовые состояния суперструны, описываемые 10-мерной супергравитацией определенного вида. Одновременно должна происходить компактификация пространственных измерений на какое-то ограниченное (компактное) пространственное образование K^6 (многообразие, орбифолд). Свойства получающейся в результате 4-мерной теории полностью определяются свойствами этого пространственного образования. Выбор должен диктоваться динамикой струн. Желательно, чтобы в 4 измерениях суперсимметрия нарушалась при совсем низких энергиях $\sim 10^2 - 10^3$ ГэВ (тогда не возникает проблемы иерархии масштабов).

В результате должна возникать либо сразу теория $SU_3 \times SU_2 \times U_1$, либо известные ее обобщения (преонное, техни- или гиперцветовое).

В настоящее время подробности этой схемы совершенно непонятны. К тому же, в последнее время (1986—1987 гг.) появились варианты перехода к 4-мерной струне сразу из 26-мерной. Похоже, что эти обнаружившиеся в последнее время возможности, откладывают до лучших времен осуществление мечты о единственной теории всего сущего, на которое претендует теория струн.

Связь суперструн с нашим миром

Калибровочные группы		
	Бозонная струна в 26 измерениях	
	↓ компактификация ↓	↓
$E_8 \times E_8$	Суперструна в 10 измерениях	
	↓	
$E_8 \times E_8$	Теория поля в 10 измерениях	
	↓ компактификация ↓	↓ компактификация ↓
$SU_3 \times (SU_2)^2 \times (U_1)^2$ или $SU_3 \times SU_2 \times (U_1)^3$	Теория поля в 4 измерениях	Струна в 4 измерениях
	↓	↓
$SU_3 \times SU_2 \times U_1$	Реалистический низкоэнергетический предел	

БОЗОННАЯ СТРУНА

1. Классическая теория бозонной струны

Струна — 1-мерный протяженный объект

Мы будем использовать систему единиц в которой $\hbar = c = 1$.

Рассмотрим D-мерное пространство Минковского с метрикой $g^{\mu\nu}$, $g^{00} = -g^{11} = \ldots = -g^{D-1,\ D-1} = 1$, $g^{\mu\nu} = 0$ при $\mu \neq \nu$.

Релятивистское действие для свободной точечной частицы есть

$$S = -m\int_a^b ds = -m \text{ (длина мировой линии)} = -m\int_a^b [(\partial x^\mu/\partial\tau)^2]^{1/2} d\tau,$$

где интегрирование идет по мировой линии между заданными мировыми точками и $x^\mu = x^\mu(\tau)$ описывает положение частицы в зависимости от собственного времени. Функция Лагранжа для частицы есть, следовательно,

$$L = -m\sqrt{1-v^2}\ \left(\approx m + \frac{mv^2}{2} \text{ при } v \ll 1\right).$$

Следующим по сложности геометрическим объектом является одномерный объект, т. е. струна. Она может быть параметризована двумя внутренними координатами σ и τ. Первую из них можно представлять как нумерующую точки вдоль струны, тогда как вторая играет роль собственного времени. При движении струна описывает двумерную поверхность в пространстве-времени, параметризуемую координатами

$$x^\mu = x^\mu(\sigma, \tau).$$

Если мы отождествим τ со временем: $x^0 = t = \tau$, то в фиксированный момент времени струна является кривой в $D-1$-мерном пространстве, параметризуемой функциями $x^i = x^i(\sigma, \tau)$, $i = 1,\ldots,D-1$.

Заметим, что из условия, чтобы точки струны двигались не быстрее скорости света, должно выполняться условие

$$\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial t}\right)^2 = 1 - \left(\frac{\partial x^i}{\partial t}\right)^2 \geqslant 0,$$

кроме того,

$$\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma}\right)^2 = -\left(\frac{\partial x^i}{\partial \sigma}\right)^2 \leqslant 0,$$

т. е. вектор $\frac{\partial x^\mu}{\partial t}$ должен быть времениподобен, а вектор $\frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma}$ — пространственноподобен.

В этой системе координат в каждой точке поверхности есть времениподобный и пространственноподобный касательный вектор. Это должно быть верно в любой системе координат и необходимое и достаточное условие для этого имеет вид

$$(\dot{x}\,x')^2 - \dot{x}^2 x'^2 \geqslant 0, \tag{1.1}$$

где мы использовали обозначения

$$\dot{x} = \partial x^\mu/\partial\tau, \quad x' = \partial x^\mu/\partial\sigma$$

и опустили лоренцевы индексы.

Условие (1.1) следует из того, что квадратичная по λ форма

$$(\dot{x} + \lambda x')^2$$

принимает и положительные, и отрицательные значения при изменении λ и ее дискриминант должен быть неотрицательным.

Принцип действия для струны

По аналогии с действием для релятивистской свободной точечной частицы действие для релятивистской свободной струны пропорционально площади поверхности, заметаемой струной при движении в пространстве-времени.

Для двумерной поверхности, погруженной в пространство-время элемент поверхности есть

$$d^2A = [(\dot{x}\,x')^2 - \dot{x}^2 x'^2]^{1/2} d\tau\, d\sigma.$$

Вследствие условия (1.1) выражение в квадратных скобках положительно. Метрический тензор двумерной поверхности есть

$$-g_{\alpha\beta}(\tau, \sigma) = \partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x_\mu = \begin{pmatrix} \dot{x}^2 & \dot{x}\,x' \\ \dot{x}\,x' & x'^2 \end{pmatrix},$$

где α, β принимают значения τ или σ. Легко видеть, что

$$[-\det g(\tau, \sigma)]^{1/2} d\tau\, d\sigma = d^2A.$$

Таким образом, действие для струны имеет вид

$$S=\frac{1}{2\pi\alpha'}(\text{площадь мировой поверхности}) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi\alpha'}\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^{\pi} d\sigma\,[(\dot{x}x')^2-\dot{x}^2x'^2]^{1/2} \qquad (1.2)$$

и лагранжиан есть

$$L(x(\tau,\sigma)) = -\frac{1}{2\pi\alpha'}[(\dot{x}x')^2-\dot{x}^2x'^2]^{1/2}.$$

Это действие впервые было предложено Намбу в 1970 г. Так как в (1.2) τ, σ — безразмерные параметры, размерность S в единицах массы равна нулю, то α' имеет размерность $(\text{масса})^{-2} = (\text{длина})^2$

Уравнения движения струны

Для вывода уравнений движения струны рассмотрим вариацию действия

$$x_\mu \to x_\mu + \delta x_\mu(\tau,\sigma),$$

$$\delta S = \int_0^{\tau_2} d\tau \int_0^{\pi} d\sigma \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\frac{d}{d\tau}\delta x^\mu + \frac{\partial L}{\partial x'^\mu}\frac{d}{d\sigma}\delta x^\mu \right) =$$

$$= \int_0^{\pi} d\sigma \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\delta x^\mu \Big|_{\tau_1}^{\tau_2} + \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \frac{\partial L}{\partial x'^\mu}\delta x^\mu \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=\pi} -$$

$$-\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^{\pi} d\sigma \left(\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} + \frac{\partial}{\partial\sigma}\frac{\partial L}{\partial x'^\mu} \right)\delta x^\mu$$

Так как начальное и конечное положения струны фиксированы, то

$$\delta x^\mu|_{\tau=\tau_1} = \delta x^\mu|_{\tau=\tau_2} = 0,$$

а $\delta x^\mu|_{\sigma=0}$ и $\delta x^\mu|_{\sigma=\pi}$ произвольны. Принцип экстремальности действия, $\delta S=0$, дает нам:

1. Граничное условие:

$$\frac{\partial L}{\partial x'^\mu} = 0 \qquad \text{при } \sigma = 0, \pi; \qquad (1.3)$$

2. Уравнения движения:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} + \frac{\partial}{\partial\sigma}\frac{\partial L}{\partial x'^\mu} = 0 \qquad (1.4)$$

Можно также варьировать по-другому — не фиксировать начальное и конечное положения струны, но ограничить ее движения движениями, удовлетворяющими (1.3), (1.4). Мы используем этот тип вариаций при вычислении импульса и момента струны.

Для вычисления энергии импульса струны рассмотрим вариацию действия при трансляции

$$\delta S = \left\{ \int_0^{\pi} d\sigma \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\Big|_{\tau_1}^{\tau_2} + \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \frac{\partial L}{\partial x'^\mu}\Big|_0^{\pi} \right\} \delta x^\mu =$$

$$= \int_{(C)} \left[d\sigma \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} + d\tau \frac{\partial L}{\partial x'^\mu} \right] \delta x^\mu,$$

где контур C изображен на рис. 4

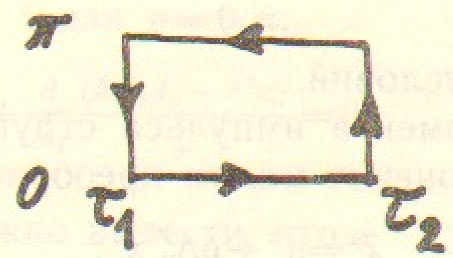


Рис. 4

Аналогично выглядит вариация действия для контура (C), ограничивающего произвольный кусок поверхности, описываемой струной.

Отсюда мы выводим, что поток энергии-импульса P^μ через любую кривую (C) на поверхности, заметаемой струной, есть

$$P^\mu = \int_{(C)} (d\sigma\, P^\mu_\tau + d\tau\, P^\mu_\sigma),$$

где

$$P^\mu_\tau = -\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}, \qquad P^\mu_\sigma = -\frac{\partial L}{\partial x'^\mu}$$

плотность энергии-импульса на поверхности. Если (C) — замкнутая кривая, то поток энергии-импульса через нее равен нулю, согласно теореме Стокса интеграл по замкнутому контуру равен интегралу по замыкаемой им поверхности

$$\int_{(C)} (d\sigma\, P^\mu_\tau + d\tau\, P^\mu_\sigma) = \int d\sigma\, d\tau \left(\frac{\partial}{\partial\tau} P^\mu_\tau + \frac{\partial}{\partial\sigma} P^\mu_\sigma\right) = 0$$

в силу уравнений движения, $\frac{\partial}{\partial\tau} P^\mu_\tau + \frac{\partial}{\partial\sigma} P^\mu_\sigma = 0$.

Полный 4-импульс струны дается выражением

$$P^\mu = \int_{(C)} (d\sigma\, P^\mu_\tau + d\tau\, P^\mu_\sigma) = \int_0^\pi d\sigma\, P^\mu_\tau ,$$

где (C) — любая кривая, идущая по поверхности от одной границы $(\sigma=0)$ до другой $(\sigma=\pi)$. Сохранение его следует из того, что

$$\frac{\partial P^\mu}{\partial\tau} = \int_0^\pi d\sigma \frac{\partial}{\partial\tau} P_\tau = -\int_0^\pi d\sigma \frac{\partial}{\partial\sigma} P_\sigma = -P_\sigma\big|_0^\pi = 0$$

вследствие граничных условий.

Для вычисления момента импульса струны рассмотрим вариацию действия при бесконечно малом преобразовании Лоренца:

$$\tilde{x}^\mu = x^\mu + \delta\Lambda^\mu_\nu\, x^\nu ,$$

где $\delta\Lambda_{\mu\nu} = -\delta\Lambda_{\nu\mu}$ — бесконечно малый лоренцев поворот,

$$\tilde{x}^2 = x^2 + 2x^\mu x^\nu \delta\Lambda_{\mu\nu} = x^2 .$$

Вариация действия вдоль траекторий, удовлетворяющих уравнениям движения

$$\delta S = \int d\sigma\, P^\mu_\tau\, \delta\Lambda_{\mu\nu} x^\nu + \int d\tau\, P^\mu_\sigma\, \delta\Lambda_{\mu\nu} x^\nu =$$

$$= \frac{1}{2}\delta\Lambda_{\mu\nu}\left[\int d\sigma (P^\mu_\tau x^\nu - P^\nu_\tau x^\mu) + \int d\tau (P^\mu_\sigma x^\nu - P^\nu_\sigma x^\mu)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\delta\Lambda_{\mu\nu}\left[\int_{(C)} d\sigma\, M^{\mu\nu}_\tau + d\tau\, M^{\mu\nu}_\sigma\right],$$

где мы определили плотность момента импульса на поверхности

$$M^{\mu\nu}_i = P^\mu_i\, x^\nu - P^\nu_i\, x^\mu , \qquad i = \tau, \sigma .$$

Так как L лоренц-инвариантно, то $\delta S = 0$, откуда для замкнутой кривой

$$\int_{(C)} (d\sigma\, M^{\mu\nu}_\tau + d\tau\, M^{\mu\nu}_\sigma) = 0 ,$$

т. е. сохранение момента импульса

$$\frac{\partial}{\partial\tau} M^{\mu\nu}_\tau + \frac{\partial}{\partial\sigma} M^{\mu\nu}_\sigma = 0 .$$

Выпишем теперь явно уравнения движения. Имеем

$$P^\mu_\tau = -\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\mu} = \frac{(\dot{x}x')x'^\mu - x'^2 \dot{x}^\mu}{(2\pi\alpha')^2 L},$$

$$P^\mu_\sigma = -\frac{\partial L}{\partial x'_\mu} = \frac{(\dot{x}x')\dot{x}^\mu - \dot{x}^2 x'^\mu}{(2\pi\alpha')^2 L},$$

где $L((\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2 x'^2)^{1/2}/2\pi\alpha'$. Тем самым уравнения движения с граничными условиями есть:

(1) $(\dot{x}x')\,\dot{x}_\mu - \dot{x}^2 x'_\mu = 0$ для $\sigma = 0, \pi$;

(2) $\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{(\dot{x}x')\,x'_\mu - x'^2 \dot{x}_\mu}{L} + \frac{\partial}{\partial\sigma}\frac{(\dot{x}x')\dot{x}_\mu - \dot{x}^2 x'_\mu}{L} = 0.$

Из этих уравнений можно вывести, что

$$P^\mu_\tau \cdot x'_\mu = P^\mu_\sigma \cdot \dot{x}_\mu = 0 ,$$

$$P^2_\tau + \frac{x'^2}{4\pi^2\alpha'^2} = 0 , \qquad P^2_\sigma + \frac{\dot{x}^2}{4\pi^2\alpha'^2} = 0 . \qquad (1.5)$$

Так как для $\sigma = 0, \pi$ $P^\mu_\sigma = 0$, то из (1.5) следует, что $\dot{x}^2(\sigma = 0, \pi) = 0$, т. е., что концы струны движутся со скоростью света.

Решения уравнений движения. Ковариантное описание

Рассмотрим сначала решение уравнений движения в ковариантном виде. Ясно, что площадь поверхности, а значит, и действие, и уравнения движения инвариантны относительно перепараметризации $\sigma \to \tilde{\sigma}(\sigma, \tau)$, $\tau \to \tilde{\tau}(\sigma, \tau)$. (Эта инвариантность есть инвариантность по отношению к выбору координатной сетки на поверхности, заметаемой струной.) Поэтому мы можем выбрать параметризацию, дающую простой вид уравнениям движения. Простейшим выбором является ортонормированная система координат на поверхности:

$$x'\dot{x}=0\,,\qquad x'^2+\dot{x}^2=0\,. \tag{1.6}$$

Так как $\dot{x}^2>0$, $x'^2<0$, то это возможно. В этой параметризации

$$P_\tau^\mu=\frac{1}{2\pi\alpha'}\dot{x}^\mu\,,\qquad P_\sigma^\mu=-\frac{1}{2\pi\alpha'}x'^\mu\,,\qquad L=\frac{1}{2\pi\alpha'}\dot{x}^2\,. \tag{1.7}$$

Граничные условия есть

$$x'^\mu=0 \quad \text{для } \sigma=0,\pi\,.$$

Уравнения движения

$$\ddot{x}_\mu-x''_\mu=0\,.$$

Общее решение уравнения движения есть

$$x_\mu=x_\mu^{(1)}(\sigma-\tau)+x_\mu^{(2)}(\sigma+\tau)\,.$$

Общее решение, удовлетворяющее граничным условиям $x'_\mu=0$ при $\sigma=0,\pi$, имеет вид

$$x^\mu=\sum_{n=0}^{\infty}x_n^\mu(\tau)\cos n\sigma$$

и уравнения движения приобретают вид

$$\ddot{x}_n^\mu+n^2x_n^\mu=0\,,\qquad n=0,1,2,\ldots$$

Введем переменные

$$a_n^\mu=\frac{1}{2\sqrt{2\pi\alpha' n}}\,(\dot{x}_n^\mu-inx_n^\mu)\,,\qquad n\neq 0\,,$$

Тогда из уравнений движения следует, что

$$a_n^\mu=a_n^\mu(0)\,e^{-in\tau}\,,\qquad a_n^{*\mu}=a_n^{*\mu}(0)\,e^{in\tau}\,,\qquad n\neq 0\,,$$

т. е.

$$x_n=x_n(0)\,\sin(n\tau+\varphi)=i\sqrt{\frac{2\alpha'}{n}}\,(a_n^\mu-a_n^{*\mu})\,.$$

Для $n=0$ из уравнения движения $\ddot{x}_0$ следует, что

$$x_0=q_0^\mu+c^\mu\tau\,.$$

Из (1.7) следует, что

$$P^\mu_{\tau,0}=\frac{c^\mu}{2\pi\alpha'}=\frac{1}{\pi}p_0^\mu\,,$$

где $p_0^\mu=\int\limits_0^\pi d\sigma\,\frac{\dot{x}^\mu}{2\pi\alpha'}=P^\mu$ есть полный импульс струны (вклады высших гармоник зануляются вследствие равенства $\int\limits_0^\pi d\sigma\,\cos n\sigma=0$).

Тем самым, общее решение имеет вид

$$x^\mu(\sigma,\tau)=q_0^\mu+2\alpha' p_0^\mu\tau-i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[\,a_n^{*\mu}(0)\,e^{in\tau}-a_n^\mu(0)\,e^{-in\tau}\,]\cos n\sigma}{\sqrt{n}}\,.$$

Связи

Эта формула выражает общее решение уравнений движения, однако не принимает во внимание связей $\dot{x}\cdot x'=0$, $\dot{x}^2+x'^2=0$. Для учета связей заметим, что если мы расширим аналитически $x_\mu(\sigma,\tau)$ с $0\leqslant\sigma\leqslant\pi$ на $-\pi\leqslant\sigma\leqslant\pi$, то мы будем иметь

$$\dot{x}(-\sigma,\tau)=\dot{x}(\sigma,\tau)\,,$$

$$x'(-\sigma,\tau)=-x'(\sigma,\tau)\,,$$

т. е. $\dot{x}$ будет четной, а x' нечетной функцией σ. Мы можем объединить связи (1.6), потребовав, чтобы

$$(\dot{x}+x')^2=0 \quad \text{для } -\pi\leqslant\sigma\leqslant\pi\,.$$

Запишем

$$\dot{x}+x'=2\alpha' P_0^\mu+(2\alpha')^{1/2}\sum_{n=1}^{\infty}n^{1/2}[\,a_n^{*\mu}\,e^{in(\tau+\sigma)}+a_n^\mu\,e^{-in(\tau+\sigma)}]$$

Для упрощения обозначений введем новые переменные

$$\alpha_0^\mu=2\alpha' p_0^\mu\,,\qquad \alpha_n^\mu=(2\alpha')^{1/2}\,n^{1/2}\,a_n^\mu\,,\qquad \alpha_{-n}^\mu=\alpha_n^{*\mu}\,. \tag{1.8}$$

В новых обозначениях имеем

$$\dot{x}^\mu + x'^\mu = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_n^\mu \, e^{-in(\tau+\sigma)} ,$$

возводя в квадрат и собирая подобные члены, получаем

$$(\dot{x}+x')^2 = -2 \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-in(\tau+\sigma)} L_n , \tag{1.9}$$

где

$$L_n = -\frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_{n-m} \, \alpha_m .$$

Тем самым мы выразим связи через бесконечный набор начальных условий (не зависящих от времени)

$$L_n = 0 .$$

Эти условия называются калибровочными условиями Виразоро. В частности, условие $L_0 = 0$ дает нам выражение для массы всей струны

$$M^2 = p^2 = -\sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_n^\mu \, \alpha_{-n}^\mu = -\frac{1}{2\alpha'} \sum_{-\infty}^{\infty} |n| \, a_n^{*\mu} a_n^\mu . \tag{1.10}$$

Отметим, что неравенство $M^2 \geqslant 0$ не очевидно.

Заметим также, что условие $(\dot{x}-x')^2 = 0$ дает то же самое, что и условие $(\dot{x}+x')^2 = 0$ с заменой $\tau+\sigma \to \tau-\sigma$ в (1.9).

Решения уравнений движения. Нековариантное описание

Условия ортонормированности

$$\dot{x}x' = 0 , \qquad \dot{x}^2 + x'^2 = 0 \tag{1.11}$$

не определяют однозначно выбор координат на струне (но не на поверхности!), так как имеется бесконечное число ортонормированных координат на поверхности. Мы выберем теперь единственную координатную систему и в связи с этим перейдем к нековариантной записи решений уравнений движения.

Сделаем замену переменных $\sigma \to \sigma_1(\sigma, \tau)$, $\tau \to \tau_1(\sigma, \tau)$ и потребуем сохранения условий ортонормированности, тогда, обозначая

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial x}{\partial \tau_1} , \qquad x_1' = \frac{\partial x}{\partial \sigma_1} ,$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_1' , & \tau_1' \\ \dot{\sigma}_1 , & \dot{\tau}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \sigma}{\partial \sigma_1} , & \dfrac{\partial \sigma}{\partial \tau_1} \\ \dfrac{\partial \sigma}{\partial \tau_1} , & \dfrac{\partial \tau}{\partial \tau_1} \end{pmatrix}$$

Имеем

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_1 \dot{\tau}_1 + x_1' \dot{\sigma}_1 , \qquad x_1' = x' \sigma_1' + \dot{x} \tau_1' ,$$

и

$$\dot{x}_1 x_1' = \dot{x}^2 \dot{\tau}_1 \tau_1' + x'^2 \dot{\sigma}_1 \sigma_1' + \dot{x}x' (\dot{\tau}_1 \sigma_1' + \dot{\sigma}_1 \tau_1') ,$$

$$\dot{x}_1^2 + x_1'^2 = \dot{x}^2 (\dot{\tau}_1^2 + \tau_1'^2) + x'^2 (\dot{\sigma}_1^2 + \sigma_1'^2) + 2\dot{x}_1 x_1' (\dot{\tau}_1 \dot{\sigma}_1 + \tau_1' \sigma_1') .$$

Складывая и вычитая эти равенства и используя (1.11), получаем $(\dot{\sigma}_1 \pm \sigma_1')^2 = (\dot{\tau}_1 \pm \tau_1')^2$, откуда $\dot{\sigma}_1 = \tau_1'$, $\sigma_1' = \dot{\tau}_1$ (другие варианты меняют либо ориентацию, либо пространственные и временные направления на поверхности). Отсюда вытекает, что

$$\ddot{\sigma}_1 - \sigma_1'' = 0 , \qquad \ddot{\tau}_1 - \tau_1'' = 0 ;$$

т. е. старые координаты удовлетворяют уравнению Даламбера по отношению к новым (очевидно, что и наоборот, новые координаты удовлетворяют уравнению Даламбера по отношению к старым).

Замечание. В евклидовом случае перепараметризации для соответствующих координат удовлетворяют гармоническому уравнению и являются конформными преобразованиями, т. е. голоморфными преобразованиями координат $\sigma + i\tau$.

Пусть n_μ времениподобный вектор. Введем новые переменные, налагая связи

$$\begin{cases} n_\mu x^\mu(\sigma, \tau) = \lambda\tau , \\ \dot{x}^2 + x'^2 = 0 , \qquad \dot{x}x' = 0 . \end{cases}$$

т. е. мы задали плоскость $n_\mu x^\mu(\sigma, \tau) = \lambda\tau$, которая пересекает поверхность $x^\mu(\sigma, \tau)$ по линии. Накладывая такую связь, мы теряем (в оставшихся переменных) ковариантность. Отметим, что первое уравнение не противоречит уравнениям движения, $n_\mu(\ddot{x} - x'')^\mu = 0$. Так как в ортонормальных координатах

$$P^\mu_\tau = \frac{1}{2\pi\alpha'}\dot{x}_\mu,$$

то

$$n_\mu P^\mu_\tau = \lambda/2\pi\alpha',$$

интегрируя P^μ_τ по σ от 0 до π, получаем полный момент P^μ и

$$\lambda = 2\alpha' n_\mu P^\mu,$$

т. е.

$$n_\mu x^\mu = 2\alpha'(n_\mu P^\mu)\tau. \qquad (1.12)$$

Определим теперь поперечную калибровку, как калибровку, в которой n светоподобный вектор, $n=(1, -1, 0, \dots)$. Введем для удобства светоконусные координаты $a_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_0 \pm a_1)$ и поперечные координаты a_i, $i=2, \dots, D-1$; $ab = a_+b_- + a_-b_+ - a_ib_i$. В этих координатах $n_+=0$, $n_-=\sqrt{2}$ и условие (1.11) принимает вид $x^+ = 2\alpha' P^+\tau$, при этом $P^+_\tau = \frac{1}{\pi}P^+$

Теперь легко видеть, что динамическими переменными являются поперечные компоненты. Действительно, независимо от калибровки имеем

$$P^\mu_\tau x'_\mu = 0, \quad P^2_\tau + \frac{x'^2}{4\pi^2\alpha'^2} = 0. \qquad (1.13)$$

Так как в поперечной калибровке $x_+ = \text{const}\;\tau$, то $x'_+ = 0$ и $x'^2 = -x'_i x'_i$. В светоконусных переменных (1.13) принимает вид

$$x'_- = \frac{1}{P^+_\tau}P^i_\tau x'_i = \frac{\pi}{P^+}P^i_\tau x'_i,$$

$$\frac{2}{\pi}P_+P^-_\tau - P^i_\tau P^i_{\tau,i} = \frac{(x'_i)^2}{4\pi^2\alpha'^2}.$$

Таким образом, имеем

$$\begin{cases} x'_- = \dfrac{\pi}{P^+}P^i_\tau x'_i, \quad x_+ = 2\alpha' P^+\tau \\ P^-_\tau = \dfrac{1}{2\pi P^+}[\pi^2(P^i_\tau)^2 + (x'_i)^2/4\alpha'^2] \\ \ddot{x}_i - x''_i = 0 \end{cases}$$

т. е. все выражается через поперечные компоненты x_i. x_+ и x_- определяются по x_i с точностью до постоянной интегрирования q_-. Таким образом, независимые переменные есть $x_i(\sigma, \tau)$, q_-, p_+. Мы можем, как и выше, записать разложение

$$x_i(\sigma,\tau) = q_i + 2\alpha' p_i\tau - i(2\alpha')^{1/2}\sum_{n=1}^{\infty}[a_n^{+i}\exp(in\tau) - a_n^i\exp(-in\tau)]\frac{\cos n\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Используя обозначения

$$\alpha_0^i = 2\alpha' p^i, \quad \alpha_n^i = (2\alpha' n)^{1/2}a_n^i, \quad \alpha_{-n}^i = \alpha_n^{*i},$$

перепишем

$$x_\mu = q_\mu + \alpha_{0\mu}\tau - i\sum_{n=1}^{\infty}[\alpha^\mu_{-n}e^{in\tau} - \alpha^\mu_n e^{-in\tau}]\frac{\cos n\sigma}{n}$$

Далее, мы можем выразить связь α_n^- через α_n^i, α_0^+. Для этого запишем

$$\dot{x}^\mu + x'^\mu = \sum_{-\infty}^{+\infty}\alpha_n^\mu e^{-in(\tau+\sigma)},$$

$$2(\dot{x} + x')_+\,(\dot{x} + x')_- = ((\dot{x} + x')^i)^2.$$

Подставляя $x'_+=0$, $\dot{x}_+ = 2\alpha' p_+$, получаем

$$4\alpha' p_+ \sum_n \alpha_n^- e^{-in(\tau+\sigma)} = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-in(\tau+\sigma)}\, 2L_n^\perp,$$

где

$$L_n^\perp = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}\alpha^i_{n-m}\alpha^i_m$$

и

$$\alpha_n^- = \frac{1}{2\alpha' p^+}L_n^\perp. \qquad (1.14)$$

Тем самым, дискретный набор независимых переменных есть $\{\alpha_n^i, q_-, p_+\}$.

Масса и угловой момент струны

Масса струны есть $M=\sqrt{M^2}$:

$$M^2=2P_+P_- - P_i P^i.$$

Определение α_0 $(\alpha_0^\mu=2\alpha' p^\mu=2\alpha' P^\mu$, (см. (1.8)) и связь (1.14) дают нам $2\alpha' P_-=\dfrac{1}{2\alpha' P_+}L_0^\perp$, т. е.

$$2P_+P_-=\frac{1}{2\alpha'^2}L_0^\perp=\frac{1}{4\alpha'^2}\left(\alpha_0^{i2}+2\sum_1^\infty \alpha_n^i\alpha_{-n}^i\right),$$

и мы получаем

$$M^2=2P_+P_- - P_iP^i=\frac{1}{2\alpha'^2}\sum_1^\infty \alpha_n^i\alpha_{-n}^i=\frac{1}{\alpha'}\sum_1^\infty a_n^{*i}a_n^i n.$$

Отметим, что $M^2\geqslant 0$, что неочевидно в ковариантной калибровке (1.10).

Момент импульса струны есть

$$M^{\mu\nu}=\int_0^\pi d\sigma(x^\mu P_\tau^\nu - x^\nu P_\tau^\mu)==\frac{1}{2\pi\alpha'}\int_0^\pi d\sigma(x^\mu\dot{x}^\nu - x^\nu\dot{x}^\mu).$$

Подставляя разложение для x^μ по осцилляторным модам

$$x^\mu=q_0^\mu+2\alpha' p_0^\mu\tau - i\sqrt{2}\,\alpha'\sum_1^\infty\frac{a_n^{*\mu}e^{in\tau}-a_n^\mu e^{-in\tau}}{\sqrt{n}}\cos n\sigma$$

и учитывая, что

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\sigma\,\cos n\sigma\,\cos m\sigma=\frac{1}{2}\delta_{m,n},$$

получаем

$$M^{\mu\nu}=q_\mu p_\nu - q_\nu p_\mu - i\sum_{n=1}^\infty a_n^{*\mu}a_n^\nu - a_n^{*\nu}a_n^\mu\equiv q_\mu P_\nu - q_\nu P_\mu + S_{\mu\nu}.$$

Квадрат классического спина может быть вычислен из выражения

$$J^2=\frac{1}{4}\left[S_{\mu\nu}S_{\mu\nu}-\frac{2}{M^2}P_\nu S_{\nu\rho}\cdot P_\sigma S_{\sigma\rho}\right]. \qquad (1.15)$$

Между спином и массой есть интересное неравенство

$$J\leqslant\alpha' M^2. \qquad (1.16)$$

Его можно получить, рассматривая систему покоя струны и ортонормированную параметризацию, такую, что $x^0=\tau$. Тогда $P^\mu=(M,\vec{0})$, $a_n^0=0$ для всех n, и вследствие этого второй член в (1.15) исчезает. Далее,

$$J^2=\frac{1}{4}S_{ij}S_{ij}=$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n,m}(a_n^{*i}a_m^{*i}a_n^ja_m^j - a_n^{*j}a_m^ja_n^ia_m^{*i} - a_n^{*i}a_m^ia_n^ja_m^{*j}+a_n^{*j}a_m^{*j}a_n^ia_m^i).$$

Из неравенства Шварца вытекает, что

$$|a_n^{*i}a_m^{*i}a_n^ja_m^j|\leqslant(a_n^{*i}a_n^i)^{1/2}(a_m^{*i}a_m^i)^{1/2}(a_n^{*j}a_n^j)^{1/2}(a_m^{*j}a_m^j)^{1/2}=$$

$$=(a_n^{*i}a_n^i)(a_m^{*j}a_m^j)\leqslant nm\,(a_n^{*i}a_n^i)(a_m^{*j}a_m^j)$$

и такие же неравенства для остальных слагаемых. Следовательно,

$$J^2\leqslant\sum_{n,m}nm\,(a_n^{*i}a_n^i)(a_m^{*j}a_m^j)=\alpha'^2M^4$$

т. е. неравенство (1.16), при этом равенство достигается для движений струны с ненулевой только первой модой, т. е. только для струны вращающейся как целое. Проиллюстрируем неравенство (1.16) в случае, когда отлична от нуля лишь n-я гармоника. Пусть струна вращается в k-, l-плоскости, $\alpha_n^k=i\alpha_n^l$, такой выбор α_n^k, α_n^l отвечает $x_\mu=\cos n\tau$, т. е вращению струны в плоскости kl $\varphi=\omega_n\tau=n\tau$.

$$J=(\text{пространственный угловой момент})^2=-i\frac{\alpha_n^k\alpha_{-n}^l-\alpha_{-n}^k\alpha_n^l}{2\alpha' n}=$$

$$=\frac{|\alpha_n^k|^2+|\alpha_n^l|^2}{2\alpha' n}=\frac{|\vec{\alpha}_n|^2}{2\alpha' n}.$$

При этом квадрат массы струны есть

$$M^2=\frac{1}{2\alpha'^2}\sum_1^\infty \alpha_m^i\,\alpha_{-m}^i=\frac{1}{2\alpha'^2}\,|\alpha_n|^2\,,$$

т. е.

$$J=\frac{\alpha' M^2}{n}\leqslant \alpha' M^2.$$

Это растущие реджевские траектории.

2. Гамильтонов формализм и квантование

Гамильтонов формализм для сингулярных лагранжианов

До сих пор параметр τ рассматривался как эволюционный параметр, поэтому естественно рассматривать

$$P_\tau^\mu=-\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}$$

как импульс, сопряженный $x_\mu(\sigma,\tau)$, при этом σ нумерует положение точки вдоль струны. Для обычного построения скобок Пуассона и последующего квантования необходимо выразить лагранжиан в терминах независимых координат и сопряженных им независимых импульсов.

В случае сингулярных лагранжианов, когда лагранжиан задан в виде функции от зависимых переменных, т. е. когда имеются связи, возможны два подхода (при квантовании возникает еще и вопрос об эквивалентности этих двух подходов):

а). Исключать с помощью связей лишние переменные. Скобки Пуассона строятся только для независимых координат и импульсов. При квантовании это ведет к положительной метрике состояний, но процедура явно не ковариантна и необходимо проверять ковариантность получаемой квантовой системы.

б). Пренебречь ограничениями, накладываемыми связями, вычислить скобки Пуассона и после этого наложить ограничения на систему. Это способ квантования по Дираку. Он сохраняет ковариантность, но ведет к состояниям с индефинитной метрикой. Необходимо определять физические состояния (с помощью квантовых связей) и проверять, что они приводят к положительной метрике состояний.

Ковариантный гамильтонов формализм

Изложим формализм Дирака (1950, 1958) и Фаддеева (1969) исследования систем со связями.

В этом случае канонические переменные $q=(q^1,\ \ldots,\ q^n)$, $p=(p_1,\ \ldots,\ p_n)$ не пробегают все фазовое пространство Γ, а удовлетворяют соотношениям

$$\Phi_\alpha(q,p)=0\,,\qquad \alpha=1,\ldots,m\,. \tag{2.1}$$

Функции $\Phi_\alpha(q,\ p)$ называются связями. Мы предполагаем, что они независимы и неприводимы в том смысле, что уравнения (2.1) определяют в фазовом пространстве Γ поверхность M размерности $2n-m$, причем произвольная функция f, исчезающая на M, является линейной комбинацией связей

$$f=\sum_\alpha c_\alpha(q,p)\,\Phi_\alpha(q,p) \tag{2.2}$$

с переменными, вообще говоря, коэффициентами.

Предположим, что канонический гамильтониан

$$H_0=\sum_i p_i\,\dot{q}_i-L$$

вместе со связями (2.1) образует замкнутую алгебру (условия инволюции)

$$\{\Phi_\alpha,\Phi_\beta\}=\sum_\gamma c_{\alpha\beta\gamma}\,\Phi_\gamma\,,\qquad \{H_0,\Phi_\alpha\}=\sum_\beta c_{\alpha\beta}\,\Phi_\beta\,. \tag{2.3}$$

Здесь скобки Пуассона определены обычным образом:

$$\{f,g\}=\sum\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\,\frac{\partial g}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\,\frac{\partial g}{\partial q_i}\right).$$

Другими словами, мы считаем, что скобки Пуассона связей между собой и с гамильтонианом исчезают на M.

Уравнения движения могут быть получены из вариационного принципа с обобщенным действием вида

$$S(q,p,\lambda)=\int\Big(\sum_i p_i\dot{q}^i-H_0-\sum_\alpha \lambda_\alpha\Phi_\alpha\Big)\,dt\,,$$

так что, помимо канонических переменных, в них участвуют как независимые неизвестные функции $\lambda_\alpha(t)$, играющие роль множителей Лагранжа. Таким образом, уравнения движения состоят из канонических уравнений вида

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H_0}{\partial p_i} + \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial p_i}; \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H_0}{\partial q_0} - \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial q^i}$$

и условий (2.1). Тем самым, гамильтониан системы со связями имеет вид

$$H = H_0 + \sum_{\alpha=1}^{m} \lambda_\alpha \Phi_\alpha(q, p),$$

где λ_α — константы. Выбор констант λ_α в рассматриваемом ниже случае струн эквивалентен выбору калибровки.

Наблюдаемыми величинами естественно считать не все функции на M, а только такие, на изменении которых со временем не сказывается произвол в выборе $\lambda_\alpha(t)$. Этому требованию удовлетворяют функции f, для которых выполняется условие

$$\{f, \Phi_\alpha\} = \sum_\beta d_{\alpha\beta} \Phi_\beta. \tag{2.4}$$

Действительно, в уравнениях движения для таких функций

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H_0, f\} + \sum_\alpha \lambda_\alpha \{\Phi_\alpha, f\}$$

и члены, зависящие от λ_α, исчезают на M. Входящая в эти формулы функция f является произвольным продолжением на пространство Γ функции, заданной на поверхности M. В силу неприводимости связей (2.2) любые два таких продолжения отличаются на линейную комбинацию связей, и вследствие (2.1) условие (2.4) от выбора продолжения не зависит. Можно сказать, что мы рассматриваем классы функций на Γ как функции на M. В один класс объединяются функции, отличающиеся на линейную комбинацию связей.

Функция f, заданная на M и удовлетворяющая (2.4), зависит не от всех переменных. Действительно, (2.4) можно рассматривать как систему m дифференциальных уравнений первого порядка на M, причем (2.3) играют роль условий интегрируемости. Поэтому функция f однозначно определяется своими значениями на под-

многообразии начальных данных для этой системы, которое имеет размерность $(2n-m)-m=2(n-m)$.

В качестве такого подмногообразия удобно взять поверхность Γ^*, определяемую уравнениями

$$\chi_\alpha(q, p) = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, m, \tag{2.5}$$

которые называются дополнительными условиями. Функции χ_α должны удовлетворять условию

$$\det\{\chi_\alpha, \Phi_\beta\} \neq 0 \tag{2.6}$$

(только в этом случае Γ^* параметризует начальные данные системы уравнений (2.4)). Удобно считать также, что χ_α коммутируют между собой

$$\{\chi_\alpha, \chi_\beta\} = 0. \tag{2.7}$$

В этом случае мы можем просто ввести на Γ^* канонические переменные. Действительно, если (2.7) выполнено, то при помощи канонического преобразования на Γ мы можем перейти к новым переменным, в которых χ_α примут простой вид

$$\chi_\alpha(q, p) = p_\alpha,$$

где p_α, $\alpha=1,\ldots,m$, — часть канонических импульсов новой системы переменных. Обозначим через q^α сопряженные с ними координаты, и пусть q^*, p^* — остальные канонические переменные. Условие (2.6) в новых переменных выглядит следующим образом:

$$\det \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial q^\beta} \neq 0,$$

так что уравнения (2.1) можно разрешить относительно q^α. В результате, поверхность Γ^* задается в Γ уравнениями

$$p_\alpha = 0, \quad q_\alpha = q_\alpha(q^*, p^*),$$

где q^* и p^* играют роль независимых переменных на Γ^*. Оказывается, что эти переменные канонические, скобку Пуассона любых функций f и g, удовлетворяющих (2.4), можно сосчитать следующим образом:

$$\{f, g\}\,|_M = \sum \left(\frac{\partial f^*}{\partial p^*} \frac{\partial g^*}{\partial q^*} - \frac{\partial f^*}{\partial q^*} \frac{\partial g^*}{\partial p^*} \right),$$

где
$$f^* = f(q_\alpha(q^*, p^*), q^*, 0, p^*), \tag{2.8}$$
g^* определяется аналогично, при этом в левой части участвуют произвольные продолжения f и g с M на Γ. Отметим, что вывод о каноничности q^* и p^* связан, конечно, с условием (2.7). Введение этого условия не принципиально и просто помогает выбрать канонические координаты на Γ^*.

Мы имеем, таким образом, два способа описания наблюдаемых величин в нашей системе. При первом из них наблюдаемые — классы функций на Γ, удовлетворяющие соотношению (2.4). Скобка Пуассона определяется как значение на M скобки Пуассона в Γ. При втором способе наблюдаемые представляются произвольными функциями на Γ^*. Для перехода ко второму способу следует подобрать дополнительные условия χ_α, решить уравнения (2.1), (2.5) и построить f^* по (2.8). Можно показать, что эта процедура не зависит от выбора дополнительных условий, в частности, изменение χ_α при соблюдении (2.6), (2.7) сводится к каноническому преобразованию в Γ^*.

На практике решать связи непросто, так что предпочтительнее научиться работать с первым способом описания наблюдаемых. С другой стороны, при описании по второму способу, мы имеем дело с обычным фазовым пространством и можем использовать обычные формулы механики, в частности, для квантования и для континуального интеграла. Таким образом, для проверки правильности той или иной формулы в первом способе описания наблюдаемых достаточно проверить, что она переходит в обычную формулу при описанном выше переходе ко второму способу.

Применение к струне. Ковариантный гамильтонов формализм

Для струны ковариантными координатами и импульсами естественно считать
$$q_i \to x^\mu(\sigma, \tau), \qquad p_i \to P^\mu_\tau(\sigma, \tau) = -\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}.$$
Мы предположим следующие канонические скобки Пуассона:
$$\{x^\mu(\sigma,\tau), x^\nu(\sigma',\tau)\} = 0, \qquad \{P^\mu_\tau(\sigma,\tau), P^\nu_\tau(\sigma',\tau)\} = 0$$
$$\{x^\mu(\sigma,\tau), P^\nu_\tau(\sigma',\tau)\} = -g^{\mu\nu}\delta(\sigma-\sigma'), \tag{2.9}$$

где $\delta(\sigma)$ — δ-функция Дирака, т. е. обобщенная функция такая, что $\int_{-a}^{b} dx\, f(x)\, \delta(x) = f(0)$, $a, b > 0$. Наложим также следующие первичные связи:
$$P_\tau \cdot x' = 0, \qquad P^2_\tau + x'^2/4\pi^2\alpha'^2 = 0.$$
Удобно расширить интервал изменения σ с $[0, \pi]$ до $[-\pi, \pi]$, положив
$$P^\mu_\tau(-\sigma) = P^\mu_\tau(\sigma), \quad x'_\mu(-\sigma) = -x'_\mu(\sigma), \quad -\pi \leqslant \sigma \leqslant \pi.$$
Ограничения, накладываемые ортогональностью, выразим в виде
$$L_n = -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} d\sigma\, \exp(in\sigma)\left[\sqrt{2\pi\alpha'}\, P_\tau + \frac{x'}{\sqrt{2\pi\alpha'}}\right]^2 = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$
Очевидно, что они независимы и неприводимы (как коэффициенты разложения в ряд Фурье некоторой функции).

Канонический гамильтониан обращается в нуль, как и в случае релятивистской точечной частицы,
$$H_0 = \int_0^\pi d\sigma(-\dot{x}\, P_\tau - L) = 0,$$
так как $L = -\dot{x}P_\tau$. Поэтому часть уравнений инволюции $\{H_0, \Phi_\alpha\} = \ = \Sigma c_{\alpha\beta}\Phi_\beta$ выполняется тривиально. Далее скобки Пуассона для L_n подчиняются такой алгебре
$$\{L_m, L_n\} = i(m-n)\, L_{m+n}. \tag{2.10}$$
Наметим путь доказательства (2.10). Запишем
$$L_n = -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} d\sigma\, e^{in\sigma}(aP + bx')^2.$$
Пользуясь тем, что $\{P, P\} = \{x', x'\} = 0$, и обозначая индексами 1, 2 значение аргумента σ, $x_{1,2} = x(\sigma_{1,2}, \tau)$, $P_{1,2} = P_\tau(\sigma_{1,2}, \tau)$, имеем
$$\{P_1, x'_2\} = \delta' = \frac{d}{d\sigma_2}\delta(\sigma_1 - \sigma_2), \quad \{P^2_1, x'_2\} = 2P\delta', \quad \{P_1, x'^2_2\} = -2x'_2\delta'.$$

Далее, представим скобки $\{L_m, L_n\}$ в виде

$$\{L_m, L_n\} = \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} d\sigma_1 \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma_2 \left(\frac{\partial}{\partial\sigma_1} - \frac{\partial}{\partial\sigma_2}\right)\delta(\sigma_1-\sigma_2)\times$$

$$\times[a^2 P_1 P_2 + ab(P_1 x_2' + P_2 x_1') + b^2 x_1' x_2']\, e^{in\sigma_1 + im\sigma_2}.$$

Интегрируя это выражение по частям (внеинтегральный член равен нулю в силу краевых условий), получим

$$\{L_m, L_n\} = -\frac{i}{2}(m-n)\int_{-\pi}^{\pi} d\sigma\, e^{i\sigma(m+n)}\,[aP+bx']^2.$$

Таким образом, эволюция по τ порождается исключительно связями и в качестве гамильтониана может служить выражение $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} v_n L_n$. Выбор v произволен и соответствует выбору калибровки. Удобно выбрать в качестве гамильтониана

$$H = L_0 = -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} d\sigma\left[2\pi\alpha' P_\tau^2 + \frac{1}{2\pi\alpha'}x'^2\right] = -\int_0^{\pi} d\sigma\left[\pi\alpha' P_\tau^2 + \frac{1}{4\pi\alpha'}x'^2\right].$$

Уравнения движения имеют при этом вид

$$\dot{x}_\mu = \{x_\mu, H\} = \int_0^{\pi} d\sigma'\left\{\pi\alpha' P_\tau^2(\sigma',\tau) + \frac{x'^2(\sigma',\tau)}{4\pi\alpha'}, x_\mu(\sigma,\tau)\right\} =$$

$$= 2\pi\alpha' P_{\tau\mu}(\sigma,\tau), \tag{2.11}$$

$$\dot{P}_\tau = \{P_\tau, H\} = \frac{1}{2\pi\alpha'}x_\mu'', \tag{2.12}$$

то есть

$$\ddot{x}_\mu - x_\mu'' = 0. \tag{2.13}$$

Условия ортогональности следуют из (2.11) — (2.13) и первичных ограничений

$$P_\tau x' = 0 \Rightarrow \dot{x}x' = 0;$$

$$P_\tau^2 + \frac{x'^2}{4\pi\alpha'^2} = 0 \Rightarrow \dot{x}^2 + x'^2 = 0.$$

Таким образом, выбор $H = L_0$ отвечает ортонормальной параметризации. Здесь при выводе также использовались соотношения $\{x, x\} = \{x, x'\} = \{P, P\} = 0$, $\{P_{\tau\mu}(\sigma,\tau), \quad x_\nu(\sigma', \tau)\} = g_{\mu\nu}\delta(\sigma-\sigma')$, $\{p_1, x_2'\} = \delta'$ и т. п.

Решение уравнения (2.13) (с краевыми условиями) имеет вид

$$x^\mu = q^\mu + \alpha_0^\mu(\tau) + i\sum_{n\neq 0}\alpha_n^\mu(\tau)\frac{\cos n\sigma}{n}, \tag{2.14}$$

$$P_\tau^\mu = \frac{1}{2\pi\alpha'}\left[\alpha_0^\mu + \sum_{n\neq 0}\alpha_n^\mu(\tau)\cos n\sigma\right]. \tag{2.15}$$

Перепишем скобки Пуассона (2.9) в терминах α_n^μ

$$\{\alpha_n^\mu, \alpha_m^\nu\} = 2in\alpha' g^{\mu\nu}\delta_{n,-m}, \tag{2.16}$$

$$\{q^\mu, \alpha_0^\nu\} = -2\alpha' g^{\mu\nu}. \tag{2.17}$$

Нам понадобятся также скобки для $a_n^\mu = (2\alpha')^{-1/2} n^{-1/2}\alpha_n^\mu$, $p^\mu = (2\alpha')^{-1}\alpha_0^\mu$, $a_n^* = a_{-n}$,

$$\{a_n^\mu, a_d^{*\nu}\} = ig^{\mu\nu}\delta_{n,m}, \tag{2.18}$$

$$\{p^\mu, q^\nu\} = g^{\mu\nu}. \tag{2.19}$$

Выразим в терминах a^h гамильтониан

$$H = -\alpha' p^2 - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{\mu +} a_{n,\mu} = L_0.$$

Зависимость $a_n(\tau)$ от τ можно получить из гамильтоновых уравнений

$$\dot{a}_n^\mu = \{a_n^\mu, H\} = -in a_n^\mu, \tag{2.20}$$

т. е.

$$a_n^\mu(\tau) = a_n^\mu(0)\, e^{-in\tau}$$

При $\tau = 0$ можно наложить ограничения $L_n = 0$ и тогда они будут справедливы и при $\tau > 0$.

Покажем теперь как получить соотношения (2.16), (2.17). Пользуясь (2.14) — (2.17) убедимся, что в

$$\left\{ x^\mu(\sigma,\tau), x^\nu(\sigma',\tau) \right\} = \left\{ \underline{q^\mu + \alpha_0^\mu \tau} + i \sum_{n\neq 0} \alpha_n^\mu \frac{\cos n\sigma}{n}, \underline{q^\nu + \alpha_0^\nu \tau} + i \sum_{m\neq 0} \alpha_m^\nu \frac{\cos m\sigma}{m} \right\}$$

подчеркнутые члены дают нулевой вклад. Тогда оставшиеся члены дают

$$\{x^\mu(\sigma,\tau), x^\nu(\sigma',\tau)\} = -\sum_{m,n\neq 0} \frac{\cos n\sigma \, \cos m\sigma'}{mn} \{\alpha_n^\mu, \alpha_m^\nu\} = \sum_{n\neq 0} \frac{\cos n\sigma \, \cos m\sigma'}{n} = 0,$$

последняя сумма обращается в нуль (в смысле обобщенных функций по σ, σ') из-за нечетности по n. Аналогично,

$$\{P^\mu(\sigma,\tau), P^\nu(\sigma',\tau)\} = \sum_{n\neq 0} n \, \cos n\sigma \, \cos n\sigma' = 0 .$$

Для скобки $\{x, P\}$ аналогичные вычисления дают

$$\{x^\mu(\sigma,\tau), P^\nu(\sigma',\tau)\} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \left\{ q_\mu + \alpha_{0\mu}\tau + i \sum_{n\neq 0} \alpha_n^\mu \frac{\cos n\sigma}{n} \alpha_{0\nu} + \sum_{m\neq 0} \alpha_m^\nu \cos m\sigma' \right\} =$$

$$= -\frac{1}{\pi} g^{\mu\nu} \Big(1 + \sum_{n\neq 0} \cos n\sigma \, \cos n\sigma' \Big) .$$

Пользуясь далее формулой

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \cos n\sigma \, \cos n\sigma' = \pi [\, \delta(\sigma+\sigma') + \delta(\sigma-\sigma')]$$

и замечая, что $\delta(\sigma+\sigma')$ не дает вклада, получаем (2.9). Поскольку из (2.9) и (2.16), (2.17) следуют ранее установленные соотношения (2.20), то предположения (2.9) и (2.16) — (2.19) верны.

Применение к струне. Нековариантный гамильтонов формализм, или гамильтонов формализм в поперечной калибровке

Мы получили ранее следующие уравнения

$$x^+ = 2\alpha' P^+ \tau , \qquad P_\tau^+ = P^+/\pi ,$$

которые определяют поперечную калибровку.

Мы имеем следующие первичные связи:

$$x'_- = \left(\frac{\pi}{P^+} \right) P_\tau^i \, x_i' , \qquad P_\tau^- = \left(\frac{1}{2\pi P^+} \right) [\, \pi^2 (P_\tau^i)^2 + (x_i'^2 / 4\alpha'^2)]$$

Уравнения движения на независимые переменные q^-, P_+, P_τ^i, x^i есть

$$\ddot{x}_i - x_i'' = 0 , \qquad x_i'(0,\tau) = x_i'(\pi,\tau) = 0 ,$$

$$P_\tau^i = \frac{\dot{x}^i}{2\pi\alpha'} ;$$

$$\dot{q}^- = 2\alpha' P_- .$$

Последнее уравнение может быть решено и дает

$$q^- = q_0^- + 2\alpha' P_- \tau .$$

q_0^- есть теперь (новая) независимая динамическая переменная и мы введем (постулируем) следующие скобки Пуассона для наших независимых переменных:

$$\{x^i, x^j\} = \{P^i, P^j\} = 0 ,$$

$$\{x^i(\sigma,\tau), P^j(\sigma',\tau)\} = \delta^{ij} \delta(\sigma - \sigma') ,$$

$$\{q_0^-, P^+\} = -1 ,$$

$$\{P_+, x^i\} = \{P_+, P_i\} = \{q_-, x_i\} = \{q_-, P_i\} = 0 .$$

Легко определить гамильтониан этой системы,

$$H = 2\alpha' P_+ P_- = \pi\alpha' \int_0^\pi d\sigma [\, (P_\sigma^i)^2 + (x'^i)^2 / (2\alpha'\pi)^2] .$$

Для проверки этого выражения для гамильтониана достаточно убедиться, что уравнения движения следуют из канонических скобок Пуассона и гамильтонового формализма.

$$\dot{f} = \left(\frac{\partial f}{\partial \tau} \right) + \{f, H\} .$$

Разложение по нормальным координатам дает

$$H = \alpha' P_i^2 + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{*i} a_n^i = 2\alpha' P_+ P_-$$

и, тем самым, квадрат массы

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n^{*i} a_n^i .$$

Скобки Пуассона для a_n^i есть

$$\{a_n^i, a_m^{*j}\} = \delta^{ij}\delta_{m,n} .$$

Момент импульса

$$M_i = \frac{1}{2}(q^i p^- - q^- p^i) - i \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}(\alpha_{-n}^i \alpha_n^- - \alpha_{-n}^- \alpha_n^i).$$

3. Квантование струны. Ковариантный формализм. Алгебра Виразоро

При квантовании динамические переменные a_n^μ, q^μ, p^μ становятся операторами, коммутаторы которых задаются принципом соответствия

$$i\,\{\text{скобки Пуассона}\} \to [\,\text{коммутатор}\,] .$$

Поэтому постулируем

$$[\,a_n^\mu, a_m^{+\nu}] = -g^{\mu\nu}\,\delta_{n,m}\,, \qquad [\,q^\mu, p^\nu] = -ig^{\mu\nu}\,, \tag{3.1}$$

и

$$[\,x^\mu(\sigma,\tau), P_\tau^\nu(\sigma',\tau)\,] = -ig^{\mu\nu}\,\delta(\sigma-\sigma') .$$

Определим теперь пространство состояний, в котором действуют операторы. Для этого введем вектор $|0,\ p\rangle$ такой, что

$$a_n^\mu\,|0, p\rangle = 0$$

(оператор p^μ) $|0,\ p\rangle =$ (число p^μ) $|0,\ p\rangle$, т. е. $|0,\ p\rangle$ — собственный вектор оператора импульса (с импульсом p^μ), не содержащий возбуждений струны.

Далее, мы будем обозначать $|0\rangle \equiv |0,\ p\rangle$.

Уровни возбуждения струны определяются теперь как векторы типа

$$\prod_n (a_{n,\mu_n}^+)^{\lambda_n}\,|0\rangle . \tag{3.2}$$

То, что векторы (3.2) соответствуют возбуждениям струны, следует из коммутационных соотношений (3.1). Пространство состояний (3.2) имеет индефинитную (т. е. неположительно определенную) метрику. Это обстоятельство является существенным осложнением теории, требующим специального рассмотрения и выделения физических состояний (состояний с положительной метрикой).

Чтобы увидеть, что состояния (3.2) приводят к индефинитной метрике, рассмотрим состояние

$$\Phi_\mu = a_\mu^+\,|0\rangle .$$

Его скалярное произведение на себя есть (см. (3.1))

$$\|\Phi_\mu\|^2 = (\Phi_\mu, \Phi_\mu) = \langle 0|a_\mu a_\mu^+\,|0\rangle = \langle 0|[\,a_\mu, a_\mu^+] + a_\mu^+ a_\mu|0\rangle =$$

$$= \langle 0|(-g^{\mu\mu})\,|0\rangle = -\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}_{\mu\mu} \quad \text{(нет суммирования по } \mu) .$$

Тем самым, видно, что состояние Φ_0 имеет отрицательный скалярный квадрат ($=$квадрат индефинитной нормы), а Φ_i — положительный.

В дальнейшем мы выберем единицу массы таким образом, что $2\alpha' = 1$. Такой выбор несколько упрощает запись формул. В этих единицах запишем так называемое поле Фубини — Венециано

$$P^\mu(z) = p^\mu + \sum_{n=1}^{\infty} n^{1/2}[\,a_n^+ z^n + a_n z^{-n}]\,, \qquad z = e^{i(\tau+\sigma)}\,, \tag{3.3}$$

$$P^\mu(z) = (\dot{x} + x')(\tau, \sigma)$$

Не следует его путать с P_τ^μ.

Ограничения L_n теперь являются операторами, которые мы определим как

$$L_n = -\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\sigma\, e^{in(\sigma+\tau)} :P^2(\exp[\,i(\tau+\sigma)]):,$$

где знак :: обозначает нормальное упорядочение, т. е. выражение для P возводится в квадрат (для определения $:P^2:$) и все операторы рождения a^+ ставятся слева, а операторы уничтожения

a — справа. Например,

$$:a_1 a_2^+: = a_2^+ a_1.$$

Легко видеть, что L_n не зависят от τ и могут быть выражены в виде

$$L_n = -\frac{1}{2}\oint \frac{dy}{2\pi i y} y^n :P^2(y):, \tag{3.4}$$

где контур интегрирования есть малая окружность с центром в начале координат, обходимая против часовой стрелки. Пользуясь соотношением $[a_m^\mu, a_n^{+\nu}] = -g^{\mu\nu}\delta_{m,n}$ легко вывести (3.4) из соотношений для вычета (аналитической функции)

$$\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{dy}{y} = 1, \qquad \frac{1}{2\pi i}\oint dy\, y^n = 0 \quad \text{при } n \neq -1.$$

Покажем, что

$$P^\mu(x)\, P^\nu(y) = :P^\mu(x)\, P^\nu(y): - g^{\mu\nu}\frac{xy}{(x-y)^2}, \quad |x| > |y|. \tag{3.5}$$

Подставляя (3.3) в (3.5), имеем в левой части

$$P^\mu(x)\, P^\nu(y) = \left(p^\mu + \sum_1^\infty \sqrt{n}(a_n^+ x^n + a_n x^{-n})^\mu\right) \times$$

$$\times \left(p^\nu + \sum_1^\infty \sqrt{m}(a_m^+ y^m + a_m y^{-m})^\nu\right) = p^\mu p^\nu + p^\nu \Sigma(\ ) + \Sigma(\ )\, p^\nu +$$

$$+ \Sigma\Sigma\sqrt{m}\sqrt{n}(a_n^+ a_m^+ x^n y^m + a_n a_m x^{-n} y^{-m} + a_n^+ a_m x^n y^{-m} + a_n a_m^+ x^{-n} y^m).$$

Используя соотношение $a_n^\mu a_m^{+\nu} - a_m^{+\nu} a_n^\mu = -g^{\mu\nu}\delta_{m,n}$, получаем

$$:P^\mu(x)\, P^\nu(y): - g^{\mu\nu}\sum_{n=1}^\infty n\left(\frac{y}{x}\right)^n$$

Возникшая сумма сходится лишь для $|x| > |y|$. Она равна:

$$\sum_1^\infty n a^n = a\frac{d}{da}\sum_{n=0}^\infty a^n = a\frac{d}{da}\frac{1}{1-a} = \frac{a}{1-a^2}.$$

В результате получаем (3.5).

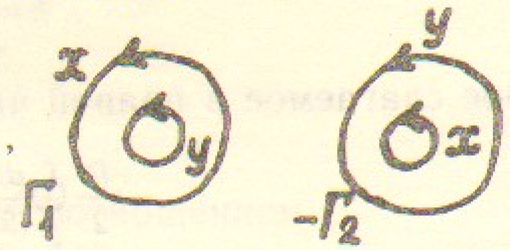
Наша цель сейчас — получить коммутационные соотношения для L_n. Определим оператор

$$L_f = \frac{1}{2}\oint \frac{dy}{2\pi i y} f(y) :P^2(y):.$$

Тогда имеем для коммутатора

$$[L_f, L_g] = \frac{1}{4}\oint_{\Gamma_1}\frac{dx}{2\pi i x}\oint\frac{dy}{2\pi i y} f(x)\, g(y) :P^2(x)::P^2(y): -$$

$$-\frac{1}{4}\oint_{\Gamma_2}\frac{dx}{2\pi i x}\oint\frac{dy}{2\pi i y} f(x)\, g(y) :P^2(y)::P^2(x):, \tag{3.6}$$



где выбор контуров $\Gamma_1 = \{|x| > |y|\}$, $\Gamma_2 = \{|x| < |y|\}$ — необходим для определения (3.6). Используя разложение произведения операторов на нормальное их произведение и свертку (3.5) и помня, что (по теореме Вика) не нужно брать свертку операторов внутри нормального произведения $\underbrace{ab} = ab - :ab:$,

$$:P^2(x)::P^2(y): = :P^2(x)\,P^2(y): + 4:P(x)\underline{P(x)::P(y)}P(y): + 2:\underline{P(x)\underline{P(x)::P(y)}P(y)}:$$

получим для произведения $:P^2(x):\ :P^2(y):$

$$:P^2(x)::P^2(y): = :P^2(x)\ P^2(y): - \frac{4xy}{(x-y)^2}:P(x)\,P(y): + \frac{2Dx^2y^2}{(x-y)^4}. \tag{3.7}$$

В (3.7) входит величина $D = g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}$ — размерность пространства-времени. Поскольку операторы внутри нормального произведения можно переставлять (в силу определения), первое слагаемое в правой части (3.7) не даст вклад. В результате,

$$[L_f, L_g] = \oint_\Gamma\frac{dx}{2\pi i x}\oint\frac{dy}{2\pi i y} f(x)\, g(y)\left\{-\frac{xy}{(x-y)^2}:P(x)\,P(y): + \frac{Dx^2y^2}{2(x-y)^4}\right\}, \tag{3.8}$$

где

$$\Gamma = \{|x| > |y|\}\ U(-\{|y| > |x|\}) = \Gamma_1 U(-\Gamma_2)$$

В первом слагаемом (3.8) проведем интегрирование по x, взяв вычет в первом контуре и по y во втором:

$$-\oint \frac{dy}{2\pi i} g(y) : P(y) \frac{d}{dx} f(x) P(x) : \Big|_{x=y} +$$

$$+ \oint \frac{dx}{2\pi i} f(x) : P(x) \frac{d}{dy} g(y) P(y) : = \oint \frac{dy}{2\pi i} \times$$

$$\times : \{ -g(y) P(y)(f'(y) P(y) + f(y) P'(y)) + f(y) P(y)(g'(y) P(y) + g(y) P'(y)) \} : =$$

$$= \oint \frac{dy}{2\pi i} : P^2(y) : y(f(y) g'(y) - g(y) f'(y)) \equiv -L_h , \tag{3.9}$$

$$h = y(fg' - gf') .$$

Второе слагаемое в правой части (3.8) преобразуем аналогично:

$$\frac{D}{2} \oint_{\Gamma} \frac{dx\, dy}{(2\pi i)^2} \frac{xy f(x) g(y)}{(x-y)^4} =$$

$$\frac{D}{2 \cdot 3!} \oint \frac{dy}{2\pi i} \{ y\, g(y) \cdot (x f(x))''' |_{x=y} - x f(x) (y g(y))''' |_{y=x} \} . \tag{3.10}$$

Подставляя $f(x) = x^n$, $g(y) = y^m$ в (3.9), (3.10), имеем

$$y(f(y) g'(y) - g(y) f'(y)) = y^{m+n} (m-n) ,$$

$$y\, g(yf)''' - y\, f(yg)''' = y^{m+n-1} [(n+1) n (n-1) - (m+1) m (m-1)] .$$

Интеграл (3.10) отличен от нуля при $m+n=0$. Принимая во внимание определение (3.4), получим

$$[L_m, L_n] = (m-n) L_{m+n} + \frac{D}{12} m(m^2-1) \delta_{m,-n} ,$$

так называемые коммутационные соотношения алгебры Виразоро.

Наложение ограничений в квантовом случае приводит к необходимости ввести новую неопределенную константу (неясно, как писать a^+a или aa^+!)

$$(L_n - \alpha(0) \delta_{n,0}) | \Psi \rangle = 0 , \quad n \geqslant 0 ,$$

$$\langle \Psi | (L_{-n} - \alpha(0) \delta_{n,0}) = 0 , \quad n \geqslant 0 , \tag{3.11}$$

причем из-за индефинитной метрики мы не уверены, что не возникнут состояния $|\Psi\rangle$ с отрицательной нормой.

Как мы увидим в дальнейшем, таких состояний не возникает при условии, что

$$\alpha(0) = 1 \quad \text{и} \quad D \leqslant 26$$

или

$$\alpha(0) \leqslant 1 \quad \text{и} \quad D \leqslant 25 .$$

В ковариантно-квантованной теории оператор квадрата массы и оператор спина имеют вид

$$L_0 = p^2 - \frac{1}{\alpha'} \sum_{1}^{\infty} a_n^+ a_n ,$$

$$J = \sum_{1}^{\infty} \frac{a_n^+ a_n}{n}$$

и ведущая траектория задается теперь соотношением

$$J = \alpha(0) + \alpha' M^2 ,$$

т. е. в отличие от классики имеем реджевскую траекторию с интерсептом (пересечением) $\alpha(0)$.

Ковариантность такой процедуры квантования следует из того, что операторы импульса P^μ и момента $M^{\mu\nu}$ порождают алгебру Пуанкаре. Поскольку операторы x и P_τ не перестановочны, введем оператор момента в квантовом случае так:

$$M^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \int_0^\pi d\sigma (x^\mu P_\tau^\nu + P_\tau^\nu x^\mu - x^\nu P_\tau^\mu - P_\tau^\mu x^\nu) .$$

Пользуясь перестановочными соотношениями для x и p:

$$[x, x] = [p, p] = 0 , \quad [x^\mu(\sigma, \tau), P_\tau^\nu(\sigma', \tau)] = -i g^{\mu\nu} \delta(\sigma - \sigma') ,$$

получаем алгебру операторов P, M:

$$[P^\mu, P^\nu] = 0 , \quad [P^\mu, M^{\nu\rho}] = i(g^{\mu\nu} P^\rho - g^{\mu\rho} P^\nu) ,$$

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = i(g^{\nu\rho} M^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} M^{\nu\rho} - g^{\nu\sigma} M^{\mu\rho}) . \tag{3.12}$$

Далее можно проверить, что операторы P^μ и $M^{\mu\nu}$ коммутируют с операторами L_n, т. е. $[L_n, P^\mu] = 0$, $[L_n, M^{\mu\nu}] = 0$. Следовательно, трансляции и лоренцевы преобразования векторов состояния удовлетворяют условиям ковариантности (3.11).

Квантование струны в поперечной калибровке

Напомним некоторые соотношения

$$x^+ = 2\alpha' P^+ \tau, \quad P_\tau^+ = \frac{1}{\pi} P^+, \quad x'_- = \frac{\pi}{P^+} P_\tau^i x'_i = 0$$

(следует из первичных ограничений $P_\tau^\mu x'_\mu = 0$; $P_\tau^2 + \frac{x'^2}{4\pi^2\alpha'^2} = 0$),

$$P_\tau^- = \frac{1}{2\pi P^+}\left\{\pi^2 (P_\tau^i)^2 + \frac{(x_i')^2}{4\alpha'^2}\right\},$$

уравнения движения $\ddot{x}_i - x_i'' = 0$, $x_i' = 0$ для $\sigma = 0, \pi$, $q^- = q_0^- + 2\alpha' P_- \tau$, $P_\tau^i = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{x}^i$.

Постулируем скобки Пуассона и выпишем гамильтониан

$$\{x^i, x^j\} = \{P^i, P^j\} = 0,$$

$$\{x^i(\sigma,\tau), P^j(\sigma',\tau)\} = \delta^{ij}\,\delta(\sigma - \sigma'),$$

$$\{q_0^-, P^+\} = -1,$$

$$\{P_+, x^i\} = \{P_+, P_i\} = \{q_-, x_i\} = \{q_-, P_i\} = 0;$$

$$H = 2\alpha' P_+ P_- = \pi\alpha' \int_0^\pi d\sigma [(P_\tau^i)^2 + (x'^i)^2/(2\alpha'\pi)^2].$$

Переход к квантовому случаю соответствует замене скобок Пуассона на коммутаторы и для нормальных координат дает

$$[a_n^i, a_m^{+j}] = \delta^{ij}\,\delta_{m,n}$$

и другие канонические коммутационные соотношения для a_n^i, a_n^{+i}, q_0^-, P^+, P^i, q_i. Гамильтониан в терминах нормальных координат есть

$$H = \alpha' P_i^2 + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{+i} a_n^i = 2\alpha' P_+ P_-, \tag{3.13}$$

т. е. $M^2 = \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{+i} a_n^i$.

Так как нулевых компонент нет, то векторы состояний

$$\prod_{n=1}^{\infty} (a_n^+)^{\lambda_n} |0\rangle$$

имеют положительную метрику, т. е. состояние струны — чисто поперечные осцилляторы.

Непоперечные колебания выражаются через поперечные с помощью уравнений

$$\alpha_n^- = \frac{1}{P^+}[L_n - \delta_{n,0}\,\alpha(0)],$$

где число $\alpha(0)$ появляется вследствие неопределенности, связанной с нормальным упорядочением операторов, и операторы L_n содержат лишь поперечные компоненты.

Ковариантность в поперечной калибровке

Возможность осуществить преобразования Лоренца и трансляции в поперечной калибровке связана с тем, что можно определить генераторы удовлетворяющие коммутационным соотношениям группы Пуанкаре (3.12). Естественный выбор для генераторов P^μ и $M^{\mu\nu}$ есть, конечно, как и при ковариантном квантовании, операторы энергии-импульса и момента струны. Пользуясь коммутационными соотношениями

$$[\alpha_n^-, \alpha_m^-] = \frac{1}{P^+}(n-m)\alpha_{m+n}^- + \delta_{n,-m}\left\{-\frac{2n}{P^+}\alpha(0) + \frac{(D-2)}{12} n(n^2-1)\right\},$$

$$[\alpha_n^i, \alpha_m^j] = n\delta^{ij}\,\delta_{n,-m},$$

можно проверить, что для оператора M_{i-}

$$M_{i-} = \frac{1}{2}(q^i p^- + p^- q^i) - q^- p^i - i\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}(\alpha_{-n}^i \alpha_n^- - \alpha_{-n}^- \alpha_n^i)$$

коммутатор

$$[M^{i-}, M^{j-}] = \frac{2}{P^{+2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ n\left(1 - \frac{1}{24}(D-2)\right) + \frac{1}{n}\left(\frac{D-2}{24} - \alpha(0)\right)\right\} \times$$

$$\times (\alpha_{-n}^i \alpha_n^j - \alpha_{-n}^j \alpha_n^i)$$

вообще говоря, отличен от нуля. Так как в силу лоренц-инвариантности он должен быть нулем, то, вообще говоря, теория нековариантна. Если мы требуем выполнения ковариантности, то мы должны положить $D=26$, $\alpha(0)=1$.

Как видно из (3.13) гамильтониан струны в светоконусной калибровке представляет собой гамильтониан бесконечного набора осцилляторов

$$M=\sum_{i=1}^{D-2}\sum_{n=1}^{\infty}\omega_{(n)}\,a_{(n)}^{+i}\,a_{(n)}^{i}\,.$$

Спектр осцилляторов имеет вид $E_m^{(n)}=\left(\frac{1}{2}+m\right)\hbar\omega_{(n)}$; m — номер возбуждения осциллятора, собственная его частота $\omega_{(n)}$. Подсчитаем энергию нулевых колебаний всех осцилляторов:

$$E_0=\frac{(D-2)\hbar}{2}\sum_{n=1}^{\infty}n\,. \tag{3.14}$$

Выражение (3.14) содержит расходящуюся сумму, которую надо регуляризовать, т. е. доопределить, чтобы получить конечный ответ. Общепринятая регуляризация основана на аналитическом продолжении дзета-функции Римана:

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}$$

в точку $s=-1$. Из соотношения

$$\zeta(s)\pi^{-s/2}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)=\zeta(1-s)\pi^{-(1-s)/2}\,\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)$$

и аналитических свойств Г-функции следует, что

$$«\sum_{1}^{\infty}n»=\zeta(-1)=\frac{\zeta(2)\,\Gamma(1)}{\pi^{3/2}\,\Gamma(-1/2)}=-\frac{1}{12}\,.$$

Таким образом, энергия вакуумного состояния в бозонной струне отрицательна

$$E_{\text{вак}}=-\frac{D-2}{24}\,.$$

Построение физических состояний при ковариантном квантовании

В литературе многочисленные работы посвящены построению пространства физических состояний — это построение вакуумных представлений алгебры Виразоро или представлений с высшим весом. Мы описываем здесь довольно наивную картину построения физических состояний, не затрагивая более сложные вопросы (так называемые модули Верма алгебры Виразоро).

Пространство состояний, с которым мы работаем является линейной комбинацией векторов

$$|r\rangle=\prod_{n=1}^{\infty}\prod_{\mu_n=0}^{D-1}(a_{n,\mu_n^+})^{\lambda_{n,\mu_n}}|0,p\rangle\,. \tag{3.15}$$

Здесь $|0,p\rangle$ — вакуумный вектор, не содержащий возбуждений струны, $a_{n,\mu_n}|0,p\rangle=0$. Состояния (3.15) содержат состояния как с положительной, так и с отрицательной нормой. Физические состояния теории при ковариантном квантовании должны удовлетворять условиям

$$L_n|\Phi\rangle=0\,,\quad (L_0-1)|\Phi\rangle=0\,. \tag{3.16}$$

Оказывается, при $D\leqslant 26$ состояния, удовлетворяющие (3.16), действительно имеют неотрицательную норму. Мы проверим это утверждение в некоторых случаях и поясним возникновение условия $D\leqslant 26$.

Пользуясь явным видом операторов L_i, мы можем найти волновые функции состояний с заданными числами уровней (состояния уровня M)

$$M=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\mu_n}n\lambda_{n,\mu_n}\,,$$

M — собственное число оператора числа состояний

$$R=-\sum_{n=1}^{\infty}na_{n,\mu_n}^{+}a_n^{\mu_n}$$

как суперпозицию вкладов, образующих пространство состояний

$$|r\rangle=\prod_{n=1}^{\infty}\prod_{\mu_n=0}^{D-1}(a_{n,\mu_n^+})^{\lambda_{n,\mu_n}}|0,p\rangle\,,$$

$$R|r\rangle = M|r\rangle\,.$$

Квадрат D-импульса состояния уровня M есть

$$p^2 = 2(M-1)\,.$$

Из определения операторов

$$L_n = -\frac{1}{2\cdot 2\pi i}\oint \frac{dx}{x}\,x^n : P^2(x):\,,$$

$$P^\mu(z) = p^\mu + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n^{+\mu} z^n + \alpha_n^\mu z^{-n}\right)$$

находим

$$L_0 = -\frac{p^2}{2} - \sum_1^\infty \alpha_n^{+\mu_n}\alpha_n^{\mu_n}\,,$$

$$L_{-1} = -p\alpha_1^+ - \sum_2^\infty \alpha_n^+\,\alpha_{n-1}\,,$$

$$L_{+1} = -p\alpha_1 - \sum_2^\infty \alpha_{n-1}^+\,\alpha_n\,,$$

$$L_{-2} = -p\alpha_2^+ - \frac{1}{2}\alpha_1^{+2} - \sum_3^\infty \alpha_n^+\,\alpha_{n-2}\,,$$

$$L_{+2} = -p\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_1^2 - \sum_3^\infty \alpha_{n-2}^+\,\alpha_n\,.$$

Основное состояние струны с уровнем 0 имеет отрицательный квадрат массы. Оно называется тахионом. Обозначим его $|0\rangle$.

Случай $M=1$. Квадрат D-импульса состояния есть нуль, $p_1^2=0$. Волновая функция получится действием $a_1^{+\mu}$ на состояние тахиона

$$|1\rangle = a_\mu\,\alpha_{-1}^\mu\,|0\rangle\,.$$

Учитывая коммутационные соотношения

$$[\alpha_n^\mu, \alpha_m^{+\nu}] = -g^{\mu\nu}\,\delta_{m,n}\,n\,,$$

получаем, что условие $L_0|1\rangle = |1\rangle$ выполняется автоматически, так как $L_0 = R$, $p_1^2=0$. Из условия $L_1|1\rangle = 0$ находим $L_1 = -p\alpha_1$,

$pa=0$, $p^2=0$. Норма этого состояния,

$$\Psi_1 = a_\mu\,\alpha_{-1}^\mu\,|0\rangle\,,\qquad \langle\Psi_1|\Psi_1\rangle = \langle 0|\alpha_1^\nu\,\alpha_{-1}^\mu|0\rangle\,a_\mu a_\nu = -a^2$$

является в силу условий $pa=0$, $p^2=0$ строго положительной. Так, выбирая $p=(\underset{0}{1},\ldots,\underset{i}{0},\ldots,\underset{D-1}{1})$, $a=(a_0,\ldots,a_i,\ldots a_{D-1})$, имеем $a_0 = a_{D-1}$, т. е. $-a^2 = \sum\limits_{i=1}^{D-2} a_i^2 > 0$.

Рассмотрим состояние уровня 2. Общий его вид

$$|2\rangle = (a_{\mu\nu}\,\alpha_{-1}^\mu\,\alpha_{-1}^\nu + b_\mu\,\alpha_{-2}^\mu\,|0\rangle\,.$$

Квадрат D-импульса этого состояния положителен: $p_2^2=2$. Удобно перейти в систему, где она покоится, $p_2 = (\sqrt{2},\,0,\,\ldots 0)$. Наложим условия

$$(L_0 - 1|2\rangle = L_1|2\rangle = L_2|2\rangle = 0\,,$$

$$L_0 - 1 = -2 - \alpha_1^+\,\alpha_1 - \alpha_2^+\alpha_2,\quad L_1 = -p\alpha_1 - \alpha_1^+\,\alpha_2\,,\quad L_2 = -\frac{1}{2}\alpha_1^2 - p\alpha_2\,.$$

Операторы из L_i, содержащие α_3, не работают.
Снова, первое условие $(L_0-1)|2\rangle$ выполняется автоматически в силу соотношений

$$-[\alpha_1^\rho, \alpha_{-1}^\mu\,\alpha_{-1}^\nu] = \alpha_{-1}^\mu\,g^{\rho\nu} + \alpha_{-1}^\nu\,g^{\rho\mu},\qquad -[\alpha_2^\rho, \alpha_{-2}^\nu] = 2g^{\rho\nu}$$

Соотношение $L_1|2\rangle = 0$ дает

$$(p_0\alpha_1^0 + \alpha_{-1}^\rho\,\alpha_{2\rho})\,(a_{\mu\nu}\alpha_{-1}^\mu\,\alpha_{-1}^\nu + b_\mu\alpha_{-2}^\mu)\,|0\rangle = 0 \Rightarrow -2p_0\,a_{\mu 0}\,\alpha_{-1}^\mu - 2b_\mu\,\alpha_{-1}^\mu = 0\,.$$

Наконец из $L_2|2\rangle = 0$ следует $b_\mu = -a_{\mu\nu}\;p^\nu$, $a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}$,

$$\left(\frac{1}{2}\alpha_1^\rho\alpha_{1\rho} + \alpha_2^0 p_0\right)(a_{\mu\nu}\alpha_{-1}^\mu\alpha_{-1}^\nu + b_\rho\alpha_{-2}^\rho)\,|0\rangle = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}2a_{\mu\mu} + 2a_{\mu\rho}p^\mu p^\rho = 0\,,$$

или же $(p_0^2=2)$: $\frac{1}{2}(a_{00} - a_{ii}) + 2a_{00} = 0$, $a_{ii} = 5a_{00}$. Норма состояния $|2\rangle$ будет

$$\langle 2|2\rangle = \langle 0|(a_{\mu\nu}^*\,\alpha_{-1}^\mu\,\alpha^{\nu+1} - a_{\mu\rho}^*\,p^\rho\alpha_2^\mu)(a_{\mu_1\nu_1}\,\alpha_{-1}^\mu\,\alpha_{-1}^\nu - a_{\mu_1\rho_1}\,p^{\rho_1}\alpha_{-2}^{\mu_1})\,|0\rangle =$$

$$= \langle 0|0\rangle\cdot 2(a_{\mu\nu}a^{\mu\nu} - a_{\mu\rho}p^\rho a_{\mu\rho_1}p^{\rho_1})\,,$$

$a^{\mu\nu}a_{\mu\nu} = a_{00}^2 - 2a_{0i}^2 + a_{ij}^2$, для диагональных матриц $a_{ij} = a\delta_{ij}$

(это минимизирует квадратичную форму) получаем

$$\langle 2|2\rangle = \langle 0|0\rangle \cdot 2(a_{ij}^2 - a_{00}^2) \geqslant \langle 0|0\rangle \cdot 2\left[(D-1)a^2 - \frac{1}{25}(D-1)^2 a^2\right] \geqslant 0 .$$

Мы получили ограничение на размерность пространства $D \leqslant 26$.

Операторный формализм. Техника когерентных состояний

Определим состояние $|f\rangle$ (= когерентное состояние):

$$|f\rangle = \exp(fa^+)\,|0\rangle = \left(1 + fa^+ + \frac{(fa^+)^2}{2!} + \frac{(fa^+)^3}{3!} + \ldots\right)|0\rangle .$$

Оно обладает свойствами:

1) $a\,|f\rangle = f\,|f\rangle$,

2) $\exp(ga^+)\,|f\rangle = |f+g\rangle$,

3) $\langle f|g\rangle = \exp(f^* g)$,

4) $x^{a^+a}|f\rangle = |xf\rangle$, (3.17)

Здесь не выписаны явно векторные индексы, но их легко восстановить.

Докажем свойства (1)—(4). Пользуясь $[a_n^\mu, a_m^{+\nu}] = -g^{\mu\nu}\delta_{n,m}$ и опуская индексы, имеем

$$[a, (a^+)^m] = -m(a^+)^{m-1} .$$

Это доказывает (1), а (2) следует из определения и коммутативности $(a^+)^m$; $(a^+)^n$. При доказательстве третьего свойства путем разложения экспонент в ряд замечаем, что отличное от нуля вакуумное среднее возникает только от операторов вида $\frac{1}{m!}\frac{1}{n!}(f^* a)^m (ga^+)^n$ при $m=n$. Далее, пользуясь соотношением

$$\langle 0|a^n a^{+n}|0\rangle = n!\,\langle 0|0\rangle ,$$

получаем (3). Это выражение можно также получить, пользуясь известной формулой

$$e^a e^b = e^{a+b} e^{[a,b]/2} , \qquad c = [a,b] , \qquad [c,a] = [c,b] = 0 .$$

Соотношение (4) из (3.17) можно получить, представив x^{a^+a} в виде

$$x^{a^+a} = \exp(a^+a \ln x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a^+a \ln x)^k}{k!}$$

и воспользовавшись тождеством

$$(a^+a)^k (a^+)^m |0\rangle = m^k (a^+)^m |0\rangle .$$

Действительно,

$$x^{a^+a}|f\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln x)^n}{n!}(a^+a)^n \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(fa^+)^m}{m!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln x)^n}{n!}\frac{(fm)^n}{m!}(a^+)^m|0\rangle = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(fa^+)^m x^m}{m!} = |f\cdot x\rangle .$$

4. ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССОВ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В ДРЕВЕСНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ. ФОРМУЛА ВЕНЕЦИАНО

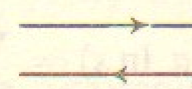
Опишем кратко амплитуды в низшем беспетлевом приближении в теории струн. Учитывая, что возникающие формулы оказываются весьма полезной феноменологической моделью для сильных взаимодействий, выпишем их в размерности $D=4$.

Матричные элементы S-матрицы, отвечающие связным диаграммам нормируем по Боголюбову—Ширкову

$$\langle p_1 \ldots p_j | s | p_{j+1} \ldots p_N\rangle = i(2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(\sum_{i=1}^{j} p_i - \sum_{k=j+1}^{N} p_k\right) ,$$

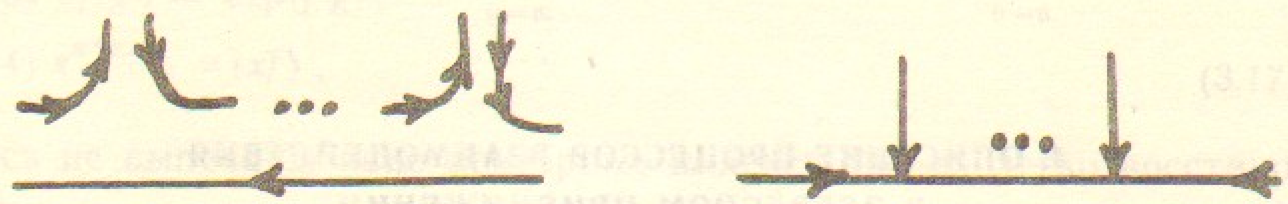
$$\prod_{i=1}^{N} ((2\pi)^4 \cdot 2p_i^0)^{-1/2} \cdot T_N(p_1, \ldots, p_N) . \qquad (4.1)$$

Этот матричный элемент отвечает переходу j частиц (струн) в $N-j$ частиц (струн). T_N называется амплитудой рассеяния. По аналогии с квантовой теорией поля ее можно описывать диаграммами Фейнмана и строить по правилам Фейнмана. Свободную струну изображают либо двойной линией



как бы отражающей ее края или же линии кварка и антикварка, между которыми натянута струна, либо простой линией. Взаимодействие струн — превращение двух струн в одну или распад одной струны на две изображается либо кварковой диаграммой с двойными линиями, либо диаграммой с простыми:

Типичная диаграмма, описывающая взаимодействие нескольких струн имеет вид



Пропагатор струн (изображаемый отрезком прямой между двумя вершинами в диаграмме слева) отвечает, согласно правилам Фейнмана,

$$D(p^2) = -\frac{i\alpha'}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{L_0-1-i\varepsilon}, \tag{4.2}$$

где $L_0-1=\alpha'(M^2-p^2)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n^+ a_n-\alpha(0)-\alpha' p^2$, $\alpha(0)=1$, p — импульс, текущий в струне. Это определение согласуется с определением пропагатора в теории поля:

$$D(p^2)=\frac{-i}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{m^2-p^2-i\varepsilon}.$$

Вершинной диаграмме сопоставляют $\frac{ig}{\sqrt{\alpha'}}(2\pi)^4 V(p)$. Беспетлевой диаграмме (типа дерева) отвечает амплитуда рассеяния B_N

$\alpha'=1/2$:

$$B_N=g^{N-2}\langle 0,p_1|\,V(p_2)(L_0-1)^{-1}\,V(p_3)\dots(L_0-1)^{-1}\,V(P_{N-1})\,|0,p_N\rangle,$$

g — константа взаимодействия струн (считаем их скалярами), $\langle 0,\ p_1|$, $|0,\ p_N\rangle$ — скалярные волновые функции начального основного состояния струны и конечного.

Вершинный оператор $V(p)$ выберем в виде

$$V(p)=:\exp(-ip\ Q(1)):=e^{-ip\cdot q}\prod_{n=1}^{\infty}e^{-a_n^+ p n^{-1/2}}\prod_{n=1}^{\infty}e^{a_n p n^{-1/2}},$$

где $Q_\mu(1)$ — оператор координаты струны:

$$Q_\mu(z)=q_\mu-ip_\mu\ln z-i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}(a_n^+z^n-a_nz^{-n}).$$

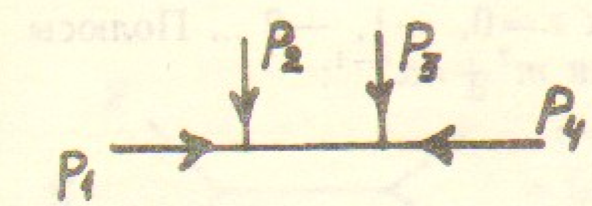
Этот вид является обобщением волновой функции свободного скалярного поля в квантовой теории поля e^{ikx}.

Рассмотрим конкретный случай процесса рассеяния 2→2:

$$B_4=g^2\langle 0,p_1|\ \exp\left(-p_2\sum_1^{\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}\right)(L_0-1)^{-1}\exp\left(p_3\sum_1^{\infty}\frac{a_n^+}{\sqrt{n}}\right)|0,p_4\rangle\ \times$$

$$\times\ \exp[-iq(p_1+p_2+p_3+p_4)]. \tag{4.3}$$

Этой амплитуде отвечает диаграмма



$$p_1+p_2+p_3+p_4=0;\quad p_{12}=p_1+p_2.$$

Представляя $(L_0-1)^{-1}$ в виде (см. (4.2))

$$(L_0-1)^{-1}=\int_0^1 dx\,x^{-\alpha(p_{12}^2)-1}\,x^{-\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n^+a_n},\quad \alpha(p^2)=\alpha(0)-\alpha' p^2 \tag{4.4}$$

в (4.3) и пользуясь свойствами когерентных состояний (3.17):

$$\prod_n \langle 0|\ \exp\left(-p_2\frac{a_n}{\sqrt{n}}\right) x^{-na_n^+a_n}\ \exp\left(p_3\frac{a_n^+}{\sqrt{n}}\right)|0\rangle =$$

$$=\prod_n \langle 0|\ \exp\left(-p_2\frac{a_n}{\sqrt{n}}\right)\exp\left(x^n p_3\frac{a_n^+}{\sqrt{n}}\right)|0\rangle =$$

$$=\exp\left(-p_2p_3\sum_1^\infty\frac{x^n}{n}\right)=(1-x)^{p_2p_3}.$$

Получаем, в результате, что амплитуда выражается через B-функцию Эйлера

$$B_4=g^2\int_0^1 dx\, x^{-\alpha(s)-1}(1-x)^{-\alpha(t)-1}=g^2\frac{\Gamma(-\alpha(s))\,\Gamma(-\alpha(t))}{\Gamma(-\alpha(s)-\alpha(t))}=$$

$$=g^2B(-\alpha(s)),-\alpha(t)) . \qquad (4.5)$$

где

$$\alpha(s)=\alpha(0)+\alpha' s\,,\quad s=(p_1+p_2)^2,\quad t=(p_2+p_3)^2,\quad 2\alpha'=1\,.$$

Это и есть формула Венециано для амплитуды рассеяния $2\rightarrow 2$ в построенной им феноменологической модели, воспроизводящей бесконечные последовательности состояний, лежащих на линейных траекториях Редже. Эти амплитуды обладают также свойствами дуальности, т. е. описывают как s-канальные резонансы, так и t-канальные одновременно.

Наличие бесконечной серии полюсов в s- и t-каналах обеспечивается в (4.5) свойствами функции $\Gamma(z)$, имеющей простые полюсы во всех целых отрицательных точках $z=0,\ -1,\ -2$ ... Полюсы в s-канале отвечают частицам с массами $m^2+n\alpha'^{-1}$:

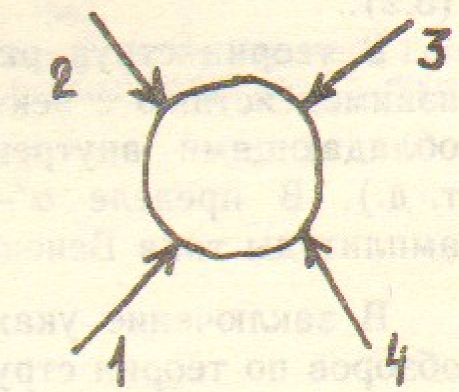
$$\alpha(s)=\alpha'(s-m^2)=n\,.$$

Полюсы в t-канале отвечают серии $\alpha(t)=m,\ m=0,\ 1$ ...

Формула Венециано была предложена в конце шестидесятых годов для описания рассеяния мезонов и адронов. Входившие в нее резонансы имеют размеры порядка $10^{-13}-10^{-14}$ см. Формулы Венециано, возникающие в современных теориях струн, относятся к размерам порядка 10^{-33} см, т. е. описывают совершенно другие физические явления.

5. Предел $\alpha'\rightarrow 0$. Соответствие с квантовой теорией поля

Полная амплитуда процесса $2\rightarrow 2$ (см. (4.1)) T_4, отвечающая диаграммам типа дерева, есть сумма выражений типа (4.5):



$$T_4=B_4(s,t)+B_4(t,u)+B_4(u,t)\,,$$

$$p_1+p_2+p_3+p_4=0\,,$$

$$s=(p_1+p_2)^2\,, \qquad (5.1)$$

$$t=(p_2+p_3)^2\,,$$

$$u=(p_1+p_3)^2\,.$$

Подставляя $\alpha(s)=\alpha'(s-m^2)$ в (5.1) и пользуясь тем, что

$$\Gamma(z)\sim 1/z\,,\qquad z\rightarrow 0\,,$$

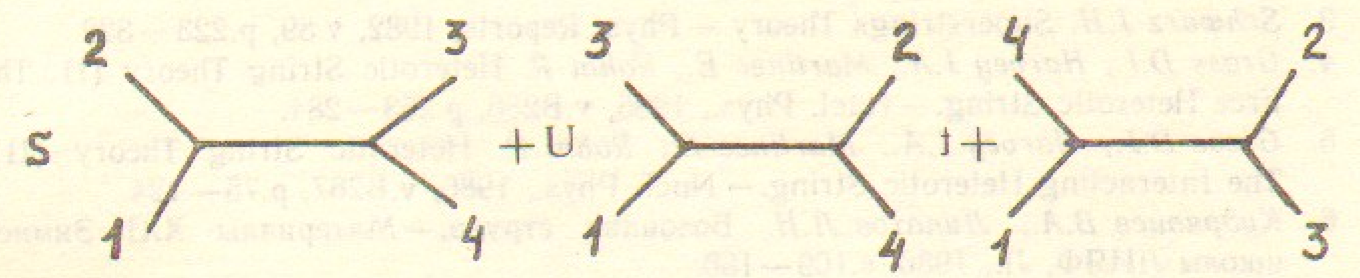
имеем из (5.1)

$$T_4|_{\alpha'\rightarrow 0}=\lambda^2\left(\frac{1}{m^2-s}+\frac{1}{m^2-t}+\frac{1}{m^2-u}\right),\quad \lambda^2=\frac{g^2}{\alpha'}. \qquad (5.2)$$

Мы видим, что в пределе $\alpha'\rightarrow 0$, g^2/α' фиксировано, амплитуда Венециано сводится к борновскому члену в теории поля с лагранжианом:

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}[(\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi)-m^2\varphi^2]+\frac{1}{6}\lambda\varphi^3\,, \qquad (5.3)$$

описываемому графиками Фейнмана



отвечающим полюсам в s-, t-, u-каналах. По правилам Фейнмана в теории с лагранжианом (5.3) пропагатору сопоставляется

$$D(p^2) = \frac{i(2\pi)^4}{m^2 - p^2 - i\varepsilon}$$

вершине сопоставляется $-i\lambda(2\pi)^4$. В результате, приходим к (5.2).

В теории струн развит метод написания вершин, отвечающих взаимодействию с векторами, тензорными, спинорными частицами, обладающими внутренними квантовыми свойствами (изоспин и т. д.). В пределе $\alpha' \to 0$ для взаимодействия векторных частиц амплитуды типа Венециано приводят к теории Янга — Миллса.

В заключение укажем несколько ключевых работ и полезных обзоров по теории струн.

Подборка основных работ по теории струн за период с 1970 по 1985 гг. (вплоть до появления первых работ по теории гетеротической струны [4, 5]) содержится в двухтомнике под редакцией Шварца [1]. Этот двухтомник содержит и первые обзоры по теории струн [2, 3]. Первые обзоры по теории струн на русском языке содержатся в материалах зимних школ ЛИЯФ [6—8]. Обзор Альварец-Гауме и Нельсона [9] содержит изложениие важной работы Белавина и Книжника [10] о расходимостях в теории струн. В одном из последних обзоров Лерше и Шеллекенса [11] излагаются варианты построения 4-мерной струны сразу из 26-мерной. Отметим также работу [12].

ЛИТЕРАТУРА

1. Superstrings. The First 15 Years of Superstring Theory. Ed. by J. Schwarz. World Scientific 1985, v.1, 2.
2. *Scherk J.* An Introduction to the Theory of Dual Models and Strings. — Rev. Mod. Phys., 1975, v.47, p.123—164.
3. *Schwarz J.H.* Superstrings Theory. — Phys. Reports, 1982, v.89, p.223—322.
4. *Gross D.J., Harvey J.A., Martinec E., Rohm R.* Heterotic String Theory (I). The Free Heterotic String. — Nucl. Phys., 1985, v.B256, p.253—284.
5. *Gross D.J., Harvey J.A., Martinec E., Rohm R.* Heterotic String Theory (II). The Interacting Heterotic String. — Nucl. Phys., 1986, v.B267, p.75—124.
6. *Кудрявцев В.А., Липатов Л.Н.* Бозонная струна. — Материалы XXI Зимней школы ЛИЯФ, Л., 1986, с.109—150.
7. *Кудрявцев В.А., Липатов Л.Н.* Суперструны. — Материалы XXII Зимней школы ЛИЯФ, Л., 1987, с.169—216.
8. *Морозов А.* Суперструна как модель фундаментальных взаимодействий. — Материалы XXII Зимней школы ЛИЯФ, Л., 1987, с.95—168.
9. *Alvarez-Gaume L., Nelson P.* Riemann Surfaces and String Theories. — In: Supersymmetry, Supergravity and Superstrings 86/Eds B. De Witt, P. Fayet and M. Grisaru. World Scientific, 1986, &Preprint CERN-TH. 4615/86, December 1986.
10. *Белавин А.А., Книжник В.Г.* Комплексная геометрия и теория квантовых струн. ЖЭТФ, 1986, т.91, вып.2(8) с.364—390.
11. *Lerche W., Schellekens A.N.* The Covariant Lattice Construction of Four-Dimensional Strings. — Preprint CERN-TH. 4925, December 1987.
12. *Alvarez-Gaume L., Gomez C., Moore G., Vafa C.* Strings in the Operator Formalism. Preprint CERN-TH. 4883/87, December 1987; Nucl. Phys., 1988, v.B303, p.455—521.

Э.А. Кураев, Э.П. Осипов

Введение в теорию струн.
Часть I: Бозонная струна

Ответственный за выпуск С.Г.Попов

Работа поступила 5 мая 1988 г.
Подписано в печать 20.05.1988 г. МН 08330
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 3,6 печ.л., 3,0 уч.-изд.л.
Тираж 250 экз. Бесплатно. Заказ № 71

Набрано в автоматизированной системе на базе фотонаборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и отпечатано на ротапринте Института ядерной физики СО АН СССР,
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.