41

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

Э.А. Кураев, Ю.Н. Кафиев

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ СТРУН. ЧАСТЬ II: ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ПОДХОД, ГЕТЕРОСТРУНА

ПРЕПРИНТ 88-72

НОВОСИБИРСК

1. СПИНОВАЯ СТРУНА И СУПЕРСТРУНА

Как мы установили в первой части этих лекций, одной из неприемлемых черт бозонной струны в $D=26$ является наличие в ней тахиона. Причину его появления можно понять, рассматривая вакуумные колебания осцилляторов, возникающие при нормальном упорядочении. После перенормировки бесконечного вклада всех нулевых мод остается конечный *отрицательный* добавок в энергию, что и приводит к появлению тахиона. Из квантовой теории поля хорошо известно [1], что для фермионов, благодаря другой статистике, знак вакуумной энергии обратен знаку для бозонов. Это свойство в случае суперсимметричных теорий (когда число бозонных и фермионных состояний одинаково) выражается для лагранжиана как [2]:

$$\mathscr{L} = :\mathscr{L}:$$

Возникает идея добавить к бозонным степеням свободы $X^i(\tau, \sigma)$ фермионные $\lambda^i(\tau, \sigma)$, где каждый из λ^i — двухкомпонентный спинор на мировом листе (и вектор в D-мерном пространстве).

Лагранжиан в светоконусной калибровке имеет вид [3]:

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\partial_\tau X^i \partial_\tau X^i - \partial_\sigma X^i \partial_\sigma X^i) + \frac{1}{2} i\lambda^j \rho_a \partial_a \lambda^j$$

$$i, j = 1, 2, \ldots, D-2, \quad \lambda^j = \begin{pmatrix} \lambda^{(1)i} \\ \lambda^{(2)i} \end{pmatrix}, \qquad (1.1)$$

где ρ_a-двумерные γ-матрицы в майорановском (здесь чисто мнимом) представлении

$$\rho_1=\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}, \quad \rho_0=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Из уравнений движения, отвечающих (1.1), (1.2), следует, что $\lambda^{(1)i}$ зависит от $\tau-\sigma$, а $\lambda^{(2)i}$ от $\tau+\sigma$:

$$\lambda^{(1)i}=\sum_{-\infty}^{\infty} d_n^i e^{-in(\tau-\sigma)},$$

$$\lambda^{(2)i}=\sum_{-\infty}^{\infty} d_n^i e^{-in(\tau+\sigma)},$$

$$[d_n^i, d_m^j]_+=\delta_{m+n,0}\,\delta_{ij},$$

$$[d_m^j, \alpha_n^i]=0. \tag{1.3}$$

Граничные условия для открытой струны могут быть выбраны в двух видах:

$$\lambda^{(1)i}(0,\tau)=\lambda^{(2)i}(0,\tau);\quad \lambda^{(1)i}(\pi,\tau)=\pm\lambda^{(2)i}(\pi,\tau). \tag{1.4}$$

Гамильтониан спиновой струны на световом конусе (т. е. оператор p^-, см. формулу (59) части 1) принимает вид (советуем как упражнение проделать выкладку)

$$H=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} d\sigma[P^{i2}+(X^{i\prime})^2-i\lambda^{(1)i}\lambda^{(1)i\prime}+i\lambda^{(2)i}\lambda^{(2)i\prime}]. \tag{1.5}$$

Подставляя сюда разложение X^i, λ^i по гармоникам, получим для энергии струны (периодические граничные условия):

$$M^2=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{-n}^i\alpha_n+\sum_{n=1}^{\infty} n\, d_{-n}^i d_n^i. \tag{1.6}$$

Очевидно, что энергия вакуумных колебаний этого сектора спиновой струны исчезает:

$$\frac{D-2}{2}\left(\sum_1^{\infty} n-\sum_1^{\infty} n\right)=0. \tag{1.7}$$

Таким образом, периодический сектор спиновой струны не имеет тахиона. Этот сектор, называемый «струной Рамона», был первой моделью струны без тахионов [3].

Рассмотрим теперь вторую возможность

$$\lambda^{(1)i}(\pi,\tau)=-\lambda^{(2)i}(\pi,\tau). \tag{1.8}$$

Разложение по гармоникам имеет вид (1.3), но суммировать мы должны по *полуцелым* модам:

$$\lambda^{(1)i}(\sigma,\tau)=\sum_{-\infty}^{\infty} b_r^i \exp[-ir(\tau-\sigma)],$$

$$\lambda^{(2)i}(\sigma,\tau)=\sum_{-\infty}^{\infty} b_r^i \exp[-ir(\tau+\sigma)];\qquad r=\frac{1}{2}+n. \tag{1.9}$$

Этот сектор спиновой струны называется «моделью Невё — Шварца». В данном случае формула для оператора квадрата массы имеет вид

$$M^2=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{-n}^i\alpha_n^i+\sum_{r=1/2}^{\infty} r b_{-r}^i b_r^i. \tag{1.10}$$

Однако теперь вклад нулевых мод отличен от нуля. Имеем

$$M_0^2=\frac{D-2}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty} n-\sum_{r=1/2}^{\infty} r\right]. \tag{1.11}$$

Пользуясь $\sum_{r=1/2}^{\infty} r=\frac{1}{24}$ (см. ниже), получим

$$M_0^2=-\frac{D-2}{16}. \tag{1.12}$$

До сих пор мы не касались вопроса — в каком числе измерений может существовать спиновая струна и можно ли в ней также отщепить состояния с отрицательной нормой? Требование Лоренц-инвариантности приводит к условию

$$D=10 \tag{1.13}$$

для обоих секторов, причем $\alpha_0=0$ в секторе Рамона и $\alpha_0=1/2$ в секторе Невё—Шварца, что согласуется с (1.7) и (1.12).

Из осцилляторных операторов α_n^i, $d_n^i(b_r^i)$ мы можем построить два типа Виразоро-подобных генераторов:

$$L_n = -\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_{n-k}^i \alpha_k^i + \sum_{-\infty}^{\infty} k d_{n-k}^i d_k^i ,$$

$$F_n = -\sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_m^i d_{n-m}^i , \qquad (1.14)$$

которые подчиняются суперагебре Виразоро:

$$[L_n, L_m] = (n-m)\, L_{n+m} + \frac{D}{8} n^3 \delta_{n+m,0} ,$$

$$[F_n, F_m]_+ = 2L_{n+m} + \frac{D}{2} n^2 \delta_{n+m,0} ,$$

$$[L_n, F_m] = \left(\frac{n}{2} - m\right) F_{n+m} . \qquad (1.15)$$

Условия

$$L_n\,|phys\rangle = 0 , \quad n > 0 ;$$

$$F_n\,|phys\rangle = 0 , \quad n \geqslant 0 ; \qquad (1.16)$$

$$L_0|phys\rangle = 0 \quad \text{Струна Рамона} ; \qquad (1.17)$$

$$\left(L_0 - \frac{1}{2}\right)|phys\rangle = 0 \quad \text{Струна Невё—Шварца} \qquad (1.18)$$

оказываются достаточными для отщепления состояний с отрицательной нормой. Таким образом, в $D=10$ оба сектора спиновой струны могут быть непротиворечиво описаны, хотя второй из них вновь имеет тахионное состояние.

Рассмотрим спектр струн. Заметим прежде, что в секторе Рамона разложение (1.3) содержит *нулевую моду*, d_0^i, присутствие которой оказывается исключительно важным. В самом деле, попытаемся выяснить, какое состояние может являться вакуумным для сектора Рамона? Из коммутационных соотношений (1.3) имеем для нулевой моды

$$[d_0^i, d_0^j] = -\delta^{ij} \quad \text{(или } g^{\mu\nu} \text{ в ковариантном подходе)} ; \qquad (1.19)$$

таким образом, d_0^μ оказывается аналогом d-мерной γ-матрицы.

Далее, из алгебры Виразоро (1.15) видим, что $F_0^2 = L_0$, т. е. F_0 является аналогом оператора Дирака для данного случая. Это легко видеть также из того, что

$$F_0 = \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n d_n = p^\mu \gamma_\mu + (n \neq 0) \qquad (1.20)$$

содержит обычный оператор Дирака. Очевидно, что условию

$$F_0\,|phys\rangle = 0 \qquad (1.21)$$

могут удовлетворять только спиноры; таким образом, в модели Рамона все состояния оказываются фермионами. «Вакуум» имеет вид

$$|0\rangle u , \qquad (1.22)$$

где u — коммутирующий, (c — числовой) спинор, удовлетворяющий безмассовому уравнению Дирака

$$p^\mu \gamma_\mu u(p) = 0 . \qquad (1.23)$$

Действуя на этот вакуум осцилляторными операторами α_n^μ, d_m^ν, мы можем строить состояния с произвольной массой, причем все они будут фермионами. Физический сектор отбирается условиями (1.16), (1.17).

Перейдем к спектру модели Невё—Шварца. В ней есть тахион с массой $M_0^2 = -1/2$, который мы и должны выбрать в качестве вакуумного состояния. Как и тахион в модели бозонной струны, этот вакуум удовлетворяет уравнению Клейна—Гордона (теперь нулевой моды у операторов b_r^i нет!) и является бозоном. Обозначим это состояние через $|0, -1/2\rangle$. Отсюда следует, что все состояния в модели Невё—Шварца являются лоренцевыми тензорами, т. е. бозонами. Заметим интересное отличие ее от модели Рамона: в модели Рамона все состояния имели целый квадрат массы, здесь же, поскольку во втором члене оператора квадрата массы

$$M^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i + \sum_{r=1/2}^{\infty} r b_{-r}^i b_r^i \qquad (1.24)$$

суммирование идет по полуцелым числам, то состояние, возникающее от действия на вакуум *нечетным* числом операторов b_r^i (и произвольным числом операторов α_n^i) имеет целый квадрат массы, в то время как состояния с *четным* числом операторов рождения b^i_r имеют полуцелый квадрат массы. Для разделения их удобно ввести оператор G-четности (оператор G-четности пиона в теории сильных взаимодействий):

$$G = -(-1)^{\sum\limits_{r=1/2}^{\infty} b^i_{-r} b^i_r}. \qquad (1.25)$$

Знак минус перед $(-1)^{\Sigma}$ отвечает выбору G-четности тахиона -1, как и для физического пиона*). Т. е. состояния с полуцелым квадратом массы имеют $G = -1$, тогда как состояния с целым квадратом массы начинаются с безмассовой векторной частицы

$$e^{\mu} b^{\mu}_{-1/2} |0, -1/2\rangle$$

и имеют $G = +1$. Можно показать, что, как и в сильных взаимодействиях, G-четный и G-нечетный секторы не перемешиваются во взаимодействиях (причем, оказывается даже невозможным рождение пар G-нечетных состояний в G-четном канале) и могут рассматриваться отдельно как две равноправные модели струны.

В работах [3, 4] 1976 г. было обнаружено, что оба сектора в модели спиновой струны можно описать ковариантным лагранжианом, получающимся в результате слияния лагранжиана двумерной супергравитации с «полями материи» в виде струнных переменных X^{μ} и λ^{μ}. Этот лагранжиан имеет вид [3, 4]

$$\mathscr{L} = \int d^2\xi\, e\Big[g^{ab}\, \partial_a X^{\mu}\, \partial_b X^{\mu} - \frac{i}{2}\lambda^{\mu}\rho^a\, \partial_a\lambda^{\mu} - $$
$$- i\chi_b\, \rho^a \rho^b \lambda_{\mu}\, \partial_a X^{\mu} + \frac{1}{4}\lambda_{\mu}\lambda^{\mu}\chi_a\, \rho^a \rho^b \chi_b \Big], \qquad (1.27)$$

где χ^a — гравитино; e^a_A — двумерная тетрада; $e = \det e^A_a = \sqrt{g}$; $g^{ab} = e^a_A\, e^b_A$; $\rho^a = e^a_A\, \rho^A$, ρ^A — обычные двумерные матрицы Дирака. Поля χ_a, e^a_A могут быть отщеплены выбором калибровки и тогда из (1.27) получится лагранжиан на световом конусе (1.1).

Тем не менее ситуация с суперструной в 1976 г. оставалась не совсем ясной: действие (1.27) обладает двумерной (локальной) суперсимметрией (см. ниже), но не имеет D-мерной пространственно-временной суперсимметрии. Кроме того, неясен статус полей

---

*) Первоначально модель Невё — Шварца именовалась «дуальная пионная модель» и предназначалась для описания свойств взаимодействия пионов.

λ^{μ} — полуфермионов-полувекторов. На эти и многие другие вопросы дала ответ замечательная работа Льоцци, Олива и Шерка 1977 г. [5]. Они показали, что если отобрать G-четный сектор модели Невё — Шварца (не имеющий тахиона) и какой либо из секторов модели Рамона (например, тоже G-четный) и наложить на фермионы в секторе Рамона условие вещественности (майорановость) и определенной киральности (вейлевость), то можно «сложить» эти модели и образовать дуальную суперсимметричную теорию, на каждом уровне которой будет одинаковое число бозонов и фермионов. Подобная редукция спектра состояний модели Невё — Шварца — Рамона (НШР) называется «проекцией ЛШО».

Статистическая сумма спиновой струны

Для вывода статсумм секторов Рамона и Невё — Шварца запишем соответствующие гамильтонианы с учетом констант нормального упорядочения:

$$H_R = \sum_{n=1}^{\infty} n d^i_{-n} d^i_n + \frac{1}{3},$$

$$H_{NS} = \sum_{r=1/2}^{\infty} r b^i_{-r} b^i_r - \frac{1}{6}, \qquad (1.28)$$

$$H_X = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^i_{-n} \alpha^i_n - \frac{1}{3}.$$

Эти константы подобраны из следующих соображений: для бозонов, как мы знаем из первой части, она равна $-\frac{D-2}{24} = -\frac{1}{3}$ при $D = 10$, т. е. для сектора Рамона из условия отсутствия тахионов и безмассовости основного состояния получаем $\alpha_0 = +1/3$; для сектора NS мы имеем условие $-\frac{1}{2} = -\frac{1}{3} + \alpha_0^{NS}$, т. е. $\alpha_0^{NS} = -1/6$. Разумеется, эти значения можно получить из общей формулы регуляризации с помощью ζ-функции согласно: $\sum\limits_1 (n+\alpha) = -\frac{1}{12}(1 + 6\alpha + \alpha^2)$. Для статсумм секторов имеем следующие выражения:

$$Z_R(q) = \mathrm{Tr}\, q^{H_R} \cdot \mathrm{Tr}\, q^{H_X}, \tag{1.29}$$

$$Z_{NS}(q) = \mathrm{Tr}\, q^{H_{NS}} \cdot \mathrm{Tr}\, q^{H_X}. \tag{1.30}$$

Статсумма бозонного сектора находится тривиально:

$$\mathrm{Tr}\, q^{H_x} = q^{-1/3}(1 + q_n + q_n^2 + \ldots)^8 =$$

$$= q^{-1/3} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q_n)^{-8} = q^{-1/3} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{-8}, \tag{1.31}$$

где мы вначале вычислили статсумму отдельно для каждого осциллятора α_n^i (она определяется $q_n = q^n$), а затем перемножили их и возвели в восьмую степень, поскольку $i = 1, 2, \ldots, 8$.

Для фермионов числа заполнений могут принимать значения только 0, 1, т. е. для любого осциллятора ψ_n нам нужно взять сумму по состояниям $|0\rangle$ и $\psi_{-n}|0\rangle$. Учитывая, что в секторе Рамона оба эти состояния — фермионы, а в секторе NS — бозоны (так что не возникает изменения знака из-за отличия статистики $|0\rangle$ и $\psi_{-n}|0\rangle$), мы получаем:

$$\mathrm{Tr}\, q^{H_R} = 8 q^{1/3} \left[\prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^n) \right]^8 \tag{1.32}$$

$$\mathrm{Tr}\, q^{H_{NS}} = q^{-1/6} \left[\prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{n-1/2}) \right]^8 \tag{1.33}$$

В секторе Рамона мы учли 8-кратное вырождение основного (фермионного) состояния. Отсюда:

$$Z_R(q) = 8 \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{-8} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^n)^8, \tag{1.34}$$

$$Z_{NS}(q) = q^{-1/2} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{-8} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{n-1/2})^8. \tag{1.35}$$

Наличие тахиона в секторе NS сказалось в появлении множителя $q^{-1/2}$ перед статсуммой. Теперь применим идею ЛШО и отберем только G-четный сектор модели NS. В нем (см. (1.24), (1.25)) нет тахионов и спектр масс целочислен. Для получения его статсуммы достаточно выделить четную по $q^{1/2}$ часть Z_{NS}:

$$Z_{NS}^{even} = \frac{1}{2} q^{-1/2} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{-8} \times$$

$$\times \left\{ \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{n-1/2})^8 - \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{n-1/2})^8 \right\}. \tag{1.36}$$

Оказывается, что статсуммы (1.34) и (1.36) совпадают. Соотношение, обеспечивающее это, есть

$$16 z \prod_{n=1}^{\infty} (1 + z^{2n})^8 = \prod_{1}^{\infty} (1 + z^{2n-1})^8 - \prod_{1}^{\infty} (1 - z^{2n-1})^8.$$

Оно было обнаружено Якоби в 1829 году. В теории эллиптических функций оно известно как тождество Якоби — Римана [6]. Равенство чисел бозонных и фермионных состояний на каждом уровне есть один из признаков суперсимметрии. Сами авторы проекции ЛШО не смогли дать описание полученной модели в терминах струнных полей. Это сделали в 1980 г. Грин и Шварц, которые построили лагранжиан *суперструны* вначале в светоконусной калибровке, а затем дали ковариантное описание [3].

Суперструна Грина — Шварца. Опишем кратко лагранжиан суперструны Грина и Шварца, поскольку он нам понадобится позже при построении гетеротической струны. Введем фермионные степени свободы $S^{Aa}(\sigma, \tau)$. Здесь A — индекс мирового листа, $A = 1, 2$; a — D-мерный спинорный индекс. В общем случае спинор в D-мерном пространстве имеет $2^{D/2}$ комплексных компонент, так что имеет $2 \times 2 \times 2^5 = 128$ вещественных компонент. Налагая, согласно ЛШО, условия Майораны и Вейля, мы уменьшаем число компонент в 4 раза: $128:4 = 32$. Половину из них мы можем отщепить, наложив светоподобную калибровку

$$(\gamma^+)^{ab} S^{Ab} = 0,$$

где $\gamma^+ = \gamma_1 + \gamma_{10}$. Наконец, уравнение Дирака на S^{Aa} оставляет $16:2 = 8$ независимых компонент, что совпадает с числом независимых бозонных степеней свободы $X^i(\tau, \sigma)$, $i = 1, 2, \ldots, 8$. X^i и S^{Aa} связаны преобразованиями глобальной пространственно-временной суперсимметрии. Лагранжиан имеет вид

$$S = \int d\sigma\, d\tau\, (\partial_a X^i\ \partial_a X^i - i \bar{S} \gamma^- \rho^a\ \partial_a S). \tag{1.37}$$

Действие (1.37) инвариантно относительно суперпреобразований:

$$\delta X^i = \bar{\varepsilon}\gamma^i S,$$

$$\delta S = i\gamma^- \gamma_\mu \rho^a \partial_a X^\mu \varepsilon, \tag{1.38}$$

где ε — грассмановский параметр, спинор Майораны — Вейля в $D=10$. Уравнения движения на X^i имеют обычный вид, в то время как на S мы имеем $\rho^a\partial_a S=0$ или, в компонентах

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)S^{1a}=0,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau}-\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)S^{2a}=0.$$

Отсюда с учетом граничных условий (например, для открытой суперструны) мы получаем разложения по нормальным осцилляциям:

$$S^{1a}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n^a \exp[-in(\tau-\sigma)],$$

$$S^{2a}=\sum_{-\infty}^{\infty} S_n^a \exp[-in(\tau+\sigma)].$$

В данном случае требование суперсимметрии запрещает антипериодические граничные условия, как в струне NS. Из действия (1.37) нетрудно получить гамильтониан, т. е. оператор массы. Он имеет вид

$$\frac{M^2}{2}\equiv N=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_{-n}^i\alpha_n^i+\frac{n}{2}\bar{S}_{-n}\gamma^- S_n\right). \tag{1.39}$$

Используя коммутационные соотношения осцилляторов S_n, $\bar{S}_n$ и алгебру матриц γ^μ, можно показать, что константы нормального упорядочения в (1.39) для осцилляторов α_n^i и S_n в точности сокращаются (что находится, разумеется, в согласии с его суперсимметрией), т. е. квантовый нормально упорядоченный оператор массы имеет точно такой же вид (1.39), который положительно определен. Таким образом, в суперструне Грина — Шварца не возникают тахионы и спектр ее начинается с безмассового мультиплета

суперсимметрии со спином (1, 1/2). Для замкнутой струны получаются мультиплеты $N=2$ супергравитации.

Таким образом, суперструна Грина — Шварца, являясь правильной суперсимметричной моделью струны в $D=10$, может быть положена в основу теории «великого объединения». Трудность состоит в том, что лагранжиан (1.28) имеет простой вид только при выборе светоконусной калибровки. Грин и Шварц [3] сумели найти ковариантное обобщение лагранжиана (1.28), однако беда в том, что этот лагранжиан оказался непригодным для практических вычислений, так как для него не существует ковариантного выбора калибровки. Поэтому при вычислениях по теории возмущений пользуются ковариантным лагранжианом спиновой струны (1.27), который хотя и содержит странные поля λ^μ, но зато имеет хорошие геометрические свойства. Подчеркнем, что лагранжиан (1.27) содержит в себе *всю* спиновую струну, т. е. больше состояний, чем остается после выполнения проекции ЛШО. Поэтому при вычислениях с ним возникают неоднозначности типа свободы выбора фаз амплитуд, которые фиксируются явным наложением проекции ЛШО или, что эквивалентно [30], требованием *модулярной инвариантности.*

2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ПОДХОД ПОЛЯКОВА. КОНФОРМНАЯ АНОМАЛИЯ

В первой части лекций было показано, что физическими степенями свободы (бозонной) струны являются $D-2$-поперечные координаты, причем, требование лоренц-ковариантности в этом формализме однозначно приводит к условию $D=26$. Кроме того, в $D=26$ струна является конформно инвариантной теорией. Некоторые физики подозревали [7], что отказавшись от конформной инвариантности и присоединив продольные степени свободы, можно будет снять условие $D=26$ (казавшееся в то время совершенно нефизическим и непонятным). Однако этот вопрос так и не был прояснен в те годы (1970 — 1975) да и не мог быть прояснен, поскольку отсутствовал как необходимый аппарат, так и понимание *конформной аномалии.* Объясним вкратце, что это такое. Как известно, тензор энергии импульса произвольной квантовой теории поля может быть определен как вариация действия по метрике

$$\sqrt{g}\,T_{\mu\nu}=\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}\int d^Dx\sqrt{g}\,\mathscr{L}(x)=\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}. \tag{2.1}$$

Рассматривая пока (2.1) как классическое действие, предположим, что оно инвариантно относительно конформных преобразований

$$g'_{\mu\nu}=e^{\sigma(x)}\,g_{\mu\nu}\,; \qquad x'_\mu=x_\mu \tag{2.2}$$

(более правильно называть (2.2) *вейлевскими преобразованиями*). Тогда

$$\frac{\delta}{\delta\sigma}=g^{\mu\nu}\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}$$

и из условия

$$\frac{\delta S}{\delta\sigma}=0 \tag{2.3}$$

(Вейль-инвариантность), имеем

$$g^{\mu\nu}\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}=g^{\mu\nu}\sqrt{g}\;\;T_{\mu\nu}=\sqrt{g}\,T^{\mu}_{\mu}=0\,. \tag{2.4}$$

Таким образом, в конформно инвариантной теории поля след тензора энергии-импульса равен нулю (классически). Однако, мы знаем, что в квантовой теории поля неизбежно появление расходимостей, поэтому мы вынуждены на промежуточных этапах регуляризовать все наши выражения. Применим, например, метод размерной регуляризации, т. е. рассмотрим наш лагранжиан (1.1) не в D-измерениях, а в $D-\varepsilon$-измерениях. Но изменение размерности пространства-времени немедленно нарушает конформную инвариантность — например, лагранжиан $(\partial_\mu\varphi)^2+\lambda\varphi^4$ конформно инвариантен только в $D=4$, но не инвариантен, скажем, в $D=2$*). Поэтому, вместо (2.4) мы будем иметь квантовое уравнение

$$\langle\sqrt{g}\,T^{\mu}_{\mu}\rangle=\varepsilon a\,,$$

где a — некоторый квантовый оператор. Казалось бы, ничего не произошло — после вычисления квантовых поправок мы вновь устремим $\varepsilon\to0$ и восстановим закон сохранения (2.4). Беда в том, что оператор a, как правило, содержит в себе расходимости и при малых ε ведет себя как

---

*) Мы советуем читателю в качестве упражнения рассмотреть несколько известных лагранжианов и определить, в пространстве какой размерности они конформно инвариантны и как зависит размерность констант связи от размерности пространства.

$$a=\frac{1}{\varepsilon}a_1+a_2+o(\varepsilon)\,.$$

Таким образом, в пределе $\varepsilon\to0$ мы получаем

$$\langle\sqrt{g}\,T^{\mu}_{\mu}\rangle=a_1\,. \tag{2.5}$$

Не следует думать, что этот вывод каким-либо образом зависит от выбранного нами способа регуляризации — нет, ответ (2.5) универсален в том смысле, что правая часть *конечна* и отлична от нуля (в общем случае, существуют теории, такие как $N=4$ супер Янг — Миллс в $D=4$, сигма модели с весс-зуминовским членом в $D=2$, в которых, в силу некоторых специальных сокращений $a_1=0$). Уравнение (2.5), выражающее нарушение на квантовом уровне классической конформной симметрии (2.4), называется *уравнением конформной аномалии*. Перепишем (2.5) на языке *функционального интегрирования**). Как известно, среднее от любого оператора можно записать в нем в виде

$$\langle a\rangle=\int D\varphi\,D\bar\psi\,D\psi\ldots a\,\exp\left[\,iS(\varphi,\psi,\bar\psi,\ldots)\right]\,,$$

где φ, ψ, ... — все поля, по которым нужно взять функциональный интеграл. Имея в виду (2.1), получаем

$$\langle\sqrt{g}\,T^{\mu}_{\mu}\rangle=g^{\mu\nu}\,\langle T_{\mu\nu}\rangle=g^{\mu\nu}\frac{\delta\ln W}{\delta g^{\mu\nu}}=\frac{\delta\ln W}{\delta\sigma}, \tag{2.6}$$

где через W мы обозначили, как обычно,

$$W=\int D\,\varphi\,D\psi\,D\bar\psi\ldots\exp\left[\,iS(\varphi,\psi,\bar\psi,\ldots)\right]\,.$$

Конформная аномалия проявляется в том, что функциональный интеграл от конформно-инвариантного действия (2.1) зависит от σ:

$$\frac{1}{W}\frac{\delta W}{\delta\sigma}=\langle\sqrt{g}\,T^{\mu}_{\mu}\rangle=a_1\neq0\,.$$

Поляков [10] применил эти соображения к струне и обнаружил, что причиной условия $D=26$ является требование отсутствия кон-

---

*) Подробное изложение метода функционального интегрирования увело бы нас слишком далеко в сторону. Мы надеемся, что читатель сможет ознакомиться с ним по существующим прекрасным книгам: Фейнман — Хиббс, Попов, Рамон [9].

формной аномалии и оно выполняется, как мы увидим ниже, только в $D=26$.

ДЕЙСТВИЕ БД-ВХДЗ

Действие Намбу — Гото (часть I (1.2)), хотя и обладает многими красивыми свойствами, все же весьма необычно и не напоминает действие какой-либо теории поля. Поэтому применить к нему методы предыдущего параграфа невозможно. По этой причине Поляков предложил рассматривать альтернативный лагранжиан Бринка — Ди-Векиа — Хоу, Дезера — Зумино [4], который в классическом случае сводится к лагранжиану Намбу — Гото. Рассмотрим лагранжиан

$$S_B=\int_\Sigma d^2\xi\sqrt{g(\xi)}\; g^{ab}(\xi)\,\partial_a x^\mu(\xi)\,\partial_b x^\mu(\xi)\,. \tag{2.7}$$

Здесь ξ^a — координаты некоторой двумерной поверхности Σ, вложенной в D-мерное пространство Минковского; g_{ab} — ее метрика. Действие (2.7) обладает следующими симметриями:

а) общекоординатная

$$\xi_a\to f_a(\xi);$$

б) Вейлевская

$$g_{ab}\to e^{\sigma(x)}g_{ab};$$

в) D-мерная Лоренц-инвариантность

$$\delta x^\mu=\Lambda_{\mu\nu}x^\nu;\qquad \Lambda_{\mu\nu}=-\Lambda_{\nu\mu}\,.$$

Из (2.7) следуют уравнения движения

$$\partial_a(\sqrt{g}\,g^{ab}\,\partial_a x^\mu)=0\,, \tag{2.8а}$$

$$T_{ab}=\partial_a x^\mu\,\partial_b x-\frac{1}{2}g_{ab}\,g^{cd}\,\partial_c x^\mu\cdot\partial_d x^\mu=0\,. \tag{2.8б}$$

Обозначим через $\gamma_{ab}=\partial_a x\cdot\partial_b x$ метрику, индуцированную на поверхности. (2.8б) имеет решением

$$\gamma_{ab}\sim g_{ab}\,. \tag{2.9}$$

Подставляя (2.9) в (2.7), мы получаем, что классически

$$S_B=\int_\Sigma d^2\xi\,\sqrt{\gamma}=S_{NG}\,,$$

где S_{NG} — обычное действие Намбу — Гото:

$$S_{NG}=\int d^2\xi[(\partial_1 x)^2(\partial_2 x)^2-(\partial_1 x\cdot\partial_2 x)^2]^{1/2}\,. \tag{2.10}$$

Таким образом, классически действия (2.10) и (2.7) совпадают и оба с равным основанием могут быть приняты в качестве исходного действия теории струны.

Как известно, на двумерной поверхности мы можем (локально) выбрать гауссовы изотермальные координаты, в которых метрика принимает вид [11]

$$g_{ab}=\exp[\Phi(\xi)]\;\;\delta_{ab}\,. \tag{2.11}$$

В этих координатах уравнение (2.8а) сводится к обычному уравнению струны (см. часть I) в «ортогональной системе» координат:

$$\partial_a\,\partial_a\,x^\mu=0$$

и, в самом деле, в виду равенства

$$\gamma_{ab}=\delta_{ab}$$

условие (2.11) идентично требованию

$$(\partial_1 x)^2-(\partial_2 x)^2=0;\qquad \partial_1 x\cdot\partial_2 x=0\,,$$

уже известному нам из первой части лекций (здесь оно записано в евклидовых обозначениях). Подчеркнем, что, фиксируя «калибровку» (2.11), мы, разумеется, теряем координатную инвариантность «а». Тем не менее, остается обширная группа *конформных преобразований.* Чтобы увидеть это, запишем интервал в метрике (2.11)

$$ds^2=\exp[\Phi(\xi)]\,d\xi_a\,d\xi_a=\exp[\Phi(z,\bar z)]\,dz\,d\bar z\,,$$

где $z=\xi_1+i\xi_2$, $\bar z=\xi_1-i\xi_2$. Очевидно, что при преобразованиях

$$z\to f(z)$$

ds^2 переходит в

$$ds^2\to e^{\Phi}\left|\frac{df}{dz}\right|^2 dz\,d\bar z=\exp\left[\Phi+\ln\left|\frac{df}{dz}\right|^2\right]dz\,d\bar z=e^{\sigma}\,ds^2\,,$$

где $\sigma = \ln \left| \frac{df}{dz} \right|^2$. Таким образом, классическое действие (2.7) и после «фиксирования калибровки» (2.11) продолжает быть инвариантным относительно вейлевских масштабных преобразований «б» (очевидно, что действие (2.7) при этом выборе не зависит от конформного множителя e^{Φ}) и локальных конформных преобразований координат $z \to f(z)$. Однако, теперь мы подозреваем, что свойство «б» может нарушаться при квантовании. Чтобы решить этот вопрос, мы должны выяснить, зависит ли функциональный интеграл W с действием в виде (2.7) от $\Phi(\xi)$ *).

Итак, запишем (в евклидовом пространстве)

$$W = \int Dx^{\mu}\, Dg_{ab}\, \exp[-S_B(x, g)]\,. \tag{2.12}$$

Упомянув в сноске важность меры интегрирования, мы заметим здесь только, что *не существует* выбора меры, не нарушающего вейлевской инвариантности. Естественный выбор меры интегрирования в (2.12), не нарушающий симметрий «а» и «в» есть

$$\|\delta x^{\mu}\|^2 = \int d^2\xi \sqrt{g}\, \delta x^{\mu}\, \delta x^{\mu}\,,$$

$$\|\delta g_{ab}\|^2 = \int d^2\xi \sqrt{g}\, g^{ab}\, g^{cd} (\delta g_{ac}\, \delta g_{bd} + \delta g_{bc}\, \delta g_{ad})\,.$$

Подставляя сюда $g_{ab} = e^{\sigma}\, \hat{g}_{ab}$, где $\hat{g}_{ab}$ — произвольная метрика, мы убеждаемся, что оба выражения зависят от σ. С этим ничего нельзя поделать. Нам остается лишь изучить их эффект на W и попытаться каким-либо образом избавиться от конформной аномалии, если она появится.

Интеграл по x^{μ} вычисляется «просто»:

$$\int Dx^{\mu} \exp\left[-\int_{\Sigma} \sqrt{g}\, x^{\mu}\, \Delta x^{\mu}\, d^2\xi \right] = (\det \Delta)^{-D/2}\,, \tag{2.13}$$

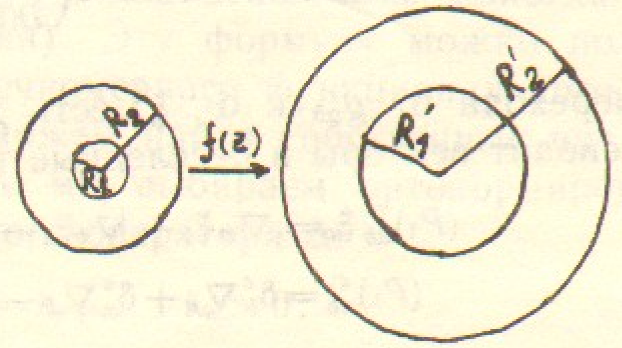
где $\Delta = -(1/\sqrt{g})\, \partial_a (\sqrt{g}\, g^{ab} \partial_b)$ — скалярный оператор Лапласа. Разумеется, пока что выражение (2.13) совершенно формально и немного позже мы к нему вернемся. Рассмотрим вариацию δg_{ab}. Ее можно представить в виде [14]

---

*) Внимательный читатель спросит, как может W зависеть от Φ, если действие не зависит от Φ, и вообще, откуда берутся аномалии в методе функционального интегрирования? Ответ, как выяснил Фуджикава [12], состоит в том, что от Φ зависит *мера* функционального интеграла и она-то неинвариантна. Этому вопросу посвящена обширная литература. С идеей метода Фуджикавы читатель может познакомиться по книге Хуанга [13]. См. также часть III лекций.

$$\delta g_{ab} = \delta\Phi\, g_{ab} + \nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a =$$
$$= \delta\varphi' g_{ab} + (\nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a - g_{ab} \nabla^c \xi_c) = \delta\varphi' g_{ab} + \delta h_{ab} \tag{2.14}$$

Из (2.14) видно, что мы разбили δg_{ab} на бесследовую часть δh_{ab} ($g^{ab} \delta h_{ab} = 0$) и след. В общем случае формула (2.14) неполна. Дело в следующем: как мы подчеркивали, формула (2.11) имеет место лишь *локально*. Из курса ТФКП известно, например, что два круговых кольца могут быть конформно отображены друг на друга тогда и только тогда, когда *модули* их (т. е. отношение $d = R_2/R_1$) совпадают. Назовем *классом эквивалентности* всевоз-



$$d = \frac{R_2}{R_1} = \frac{R_2'}{R_1'} = d'$$

Рис. 1.

можные круговые кольца с заданным модулем d, и действительно, все они могут быть конформно отображены друг на друга, т. е. конфорно эквивалентны друг другу (рис. 1). Кольца с другим значением модуля d образуют другой класс и так далее. Мы видим, что множество всех колец образует множество классов эквивалентности, параметризуемых одним вещественным положительным числом — модулем кольца. Точно так же обстоит ситуация и с выбором метрики (2.10) — все метрики разбиваются на классы эквивалентности, параметризуемые $(6g-6)$ вещественными параметрами, где g — число ручек на поверхности («род поверхности», см. рис. 2). Это приводит к тому, что в интеграле (2.12) после выполнения всех интегрирований по Dx^{μ}, $D\Phi$, Dh_{ab} остается интегрирование по $(6g-6)$-мерному *пространству модулей*. Рассмотрение вейльинвариантности интеграла (2.12) в этом случае значительно усложня-

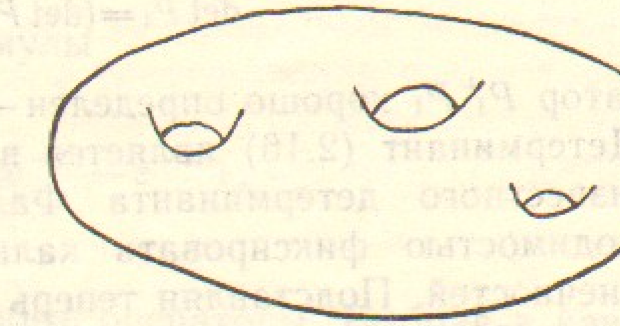


Рис. 2. Поверхность рода 3.

ется [15], но окончательный ответ от числа ручек не зависит. Поэтому мы в дальнейшем пренебрежем модулями и рассмотрим в качестве поверхности Σ сферу, для которой модулей нет.

Исходя из разложения (2.14), мы можем записать для меры интегрирования Dg_{ab} выражение в терминах вейлевских масштабных преобразований $D\Phi$ и координатных преобразований (или «диффеоморфизмов», как теперь принято говорить) ξ_a. При этом мы параметризуем три независимые компоненты метрики конформным множителем Φ и двумя компонентами вектора ξ_a. Мера принимает вид

$$Dg_{ab} = D\Phi\, D\xi^a \det\left(\frac{Dg_{ab}}{D(\xi^a, \Phi)}\right). \tag{2.15}$$

Якобиан перехода от g_{ab} к Φ, ξ^a есть детерминант оператора P_1, где P_1 переводит векторы в бесследные тензоры δh_{ab}:

$$(P_1)^c_{ab}\,\xi_c = \nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a - g_{ab}\nabla^c \xi_c,$$

$$(P_1)^c_{ab} = \delta^c_b \nabla_a + \delta^c_a \nabla_b - g_{ab}\nabla^c.$$

Сопряженный оператор P_1^+ переводит, наоборот, бесследные тензоры δh_{ab} в векторы ξ_a:

$$[P_1^+(\delta h)]_a = -2\nabla^b \delta h_{ab}.$$

Мы определим $\det P_1$ как

$$\det P_1 = (\det P_1^+ P_1)^{1/2}. \tag{2.16}$$

Оператор $P_1^+ P_1$ хорошо определен — он переводит векторы в векторы. Детерминант (2.16) является в данном случае аналогом хорошо известного детерминанта Фаддеева — Попова, связанным с необходимостью фиксировать калибровку, чтобы избавиться от бесконечностей. Подставляя теперь (2.15), (2.16) и (2.13) в функциональный интеграл (2.12) и опуская $D\xi^a$ (интегрирование по нему дает «объем группы диффеоморфизмов» — тривиальный бесконечный множитель, от которого можно избавиться, переопределяя меру), мы получаем

$$W = \int D\Phi\, (\det\Delta)^{-D/2} (\det P_1^+ P_1)^{1/2}. \tag{2.17}$$

Функциональные детерминанты

Как понимать величины, входящие в (2.17)? Что такое «функциональный детерминант»? В случае конечномерного диагонализуемого матричного оператора A мы можем определить его как

$$(\det A)^{-1/2} = \int \prod_{i=1}^{N} dx_i\, \exp(-x_i A_{ij} x_j) = \left(\prod_{i=1}^{N} \lambda_i\right)^{-1/2}, \tag{2.18}$$

где λ_i — собственные числа матрицы A (мы опустили численный множитель, связанный с $\sqrt{\pi}$; в дальнейшем мы никогда не будем обращать на него внимания). Эту формулу можно положить в основу определения бесконечномерного функционального детерминанта. Предположим, что можем найти собственные числа и собственные функции (которые мы выбираем ортонормированными) некоторого дифференциального оператора Δ:

$$\Delta\varphi_n = \lambda_n \varphi_n, \qquad \lambda_n > 0. \tag{2.19}$$

Тогда $\det\Delta = \prod_n \lambda_n$. Беда в том, что это произведение всегда расходится и мы должны регуляризовать его. Удобно воспользоваться тождеством

$$\ln \det A = \mathrm{Tr}\, \ln A$$

и выразить $\ln A$ с помощью формулы

$$\ln\frac{A}{B} = \int_0^\infty \frac{dt}{t}\left(e^{-Bt} - e^{-At}\right),$$

которая легко переносится на любые операторы. Выбрав в качестве оператора B некоторый фиксированный оператор, нужный нам исключительно для регуляризации, мы запишем

$$\mathrm{Tr}\, \ln A = -\int_0^\infty \frac{dt}{t}\, \mathrm{Tr}\, e^{-At} + \ldots$$

Интеграл по t расходится на нижнем пределе, и мы обрежем его, определив регуляризованный детерминант

$$\mathrm{Tr}\,\ln A = -\int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \frac{dt}{t}\,\mathrm{Tr}\,e^{-At} \tag{2.20}$$

Напомним, что в общем случае под следом функции от оператора мы понимаем выражение

$$\mathrm{Tr}\,f(\Delta) = \sum_n f(\lambda_n)\,\varphi_n^2(x)\,.$$

Поскольку все $\lambda_n > 0$ и на нижнем пределе интеграл сходится, выражение (2.20) конечно и может быть положено в основу определения регуляризованного детерминанта оператора. Выражение $e^{-\Delta t}$ называется в математике «ядром уравнения теплопроводности» $K(x, y, t)$, а след его имеет вид

$$\mathrm{Tr}\,K(x, x, t) = \sum_n e^{-\lambda_n t}\varphi_n^2(x)\,.$$

Математики доказали, что при малых t $K(x, x, t)$ может быть представлено в виде разложения [16]:

$$K(x, x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \sum_{k=0} a_k t^k\,, \tag{2.21}$$

где n — размерность пространства (в нашем случае мы имеем дело с двумерными поверхностями, так что $n=2$).

Вернемся к нашим операторам Δ и $P_1^+ P_1$. В общем случае они довольно сложны, но поскольку мы выбрали изотермальные координаты (2.11), то эти операторы принимают простой вид:

$$\Delta = \frac{1}{\rho}\partial_a^2\,, \tag{2.22}$$

$$P_1^+ P_1 = \frac{1}{\rho^2}\,\partial_z(\rho\,\partial_{\bar z})\,, \quad z = \xi' + i\xi^2\,, \tag{2.22}$$

где мы обозначили $\rho = e^{\Phi}$. Их можно записать единым образом как

$$\Delta_j = \rho^{-(j+1)}\,\partial_z(\rho^j\,\partial_{\bar z})\,,$$

$j=0$ для лапласиана и $j=1$ для оператора $P_1^+ P_1$. Вычислим вариацию величины $\mathrm{Tr}\,e^{-\Delta_j t}$ при изменении конформного множителя:

$$\delta\,\mathrm{Tr}\,e^{-\Delta_j t} = -t\,\mathrm{Tr}\,\delta\Delta_j\,e^{-\Delta_j t} =$$

$$= -t\,\mathrm{Tr}\left[-(j+1)\frac{\delta\rho}{\rho}\Delta_j + j\rho^{-(j+1)}\,\partial_a\frac{\delta\rho}{\rho}\rho^j\partial_a\right]e^{-\Delta_j t}\,.$$

Воспользовавшись тождеством $Ae^{BA} = e^{AB}A$ и тем обстоятельством, что под знаком следа мы можем циклически переставлять операторы, мы получаем

$$\delta\,\mathrm{Tr}\,e^{-\Delta_j t} = -t\,\mathrm{Tr}\left[-(j+1)\frac{\delta\rho}{\rho}\Delta_j e^{-\Delta_j t} + j\frac{\delta\rho}{\rho}\Delta_{-(j+1)}\,e^{-t\Delta_{-(j+1)}}\right] =$$

$$= t\frac{d}{dt}\left[-(j+1)\frac{\delta\rho}{\rho}e^{-\Delta_j t} + j\frac{\delta\rho}{\rho}e^{-t\Delta_{-(j+1)}}\right]. \tag{2.23}$$

Подставляя эту формулу в (2.20), мы видим, что вариацию можно проинтегрировать по t и ответ есть

$$\delta\,\mathrm{Tr}\,\ln\Delta_j = \mathrm{Tr}\left[\,j\delta\Phi e^{-\varepsilon\Delta_{-(j+1)}} - (j+1)\,\delta\Phi e^{-\varepsilon\Delta_j}\right]. \tag{2.24}$$

При малых ε мы можем воспользоваться разложением (2.21) и выразить $\delta\,\mathrm{Tr}\,\ln\Delta_j$ через функции a_i. Нас интересует член, конечный в пределе $\varepsilon\to 0$, т. е. a_1. Вычисление функций a_i (их называют коэффициенты Швингера — Де Витта — Сили) довольно громоздко, и мы его не будем приводить. Для оператора Δ_j ответ есть

$$a_1^{(j)} = -\frac{(3j+1)}{24\pi}\sqrt{g}\,R\,, \tag{2.25}$$

где R — кривизна метрики (2.10):

$$R = -\frac{1}{\rho}\partial_a^2\ln\rho\,. \tag{2.26}$$

Подставляя (2.26), (2.25) в (2.24), мы получаем

$$\delta\,\mathrm{Tr}\,\Delta_j = \delta\ln\det\Delta_j = -\frac{1+6j(j+1)}{24\pi}\,\frac{\delta\rho}{\rho}\,\partial_a^2\ln\rho =$$

$$= \frac{1+6j(j+1)}{24\pi}\,\delta\int d^2\xi\,\frac{1}{2}\left[(\partial_a\ln\rho)^2 + \mu^2\rho\right] \tag{2.27}$$

(где μ^2 — некоторый контрчлен, связанный с возможной перенормировкой космологической константы). Таким образом, благодаря конформной аномалии (2.25), все детерминанты, входящие в определение функционального интеграла (2.17), зависят от конформного множителя ρ. Подставляя (2.27) в (2.17), получаем ответ

$$W=\int D\Phi\ \exp\left[-\frac{D-26}{48\pi}\int d^2\xi[(\partial_\mu\Phi)^2+\mu^2e^\Phi]\right]. \qquad (2.28)$$

Единственная возможность избавиться от этой зависимости — положить $D=26$. Только в $D=26$ струна, описываемая лагранжианом Б—ДВ—Х—Д—З (2.7) конформно инвариантна, т. е. ни одна из классических симметрий не нарушается при квантовании. Это и есть то условие, которое мы требовали от струны в операторном формализме (см. часть I). Теперь мы лучше понимаем происхождение числа 26, хотя, конечно, история здесь не кончается. Однако мы здесь прервемся и рассмотрим простые физические следствия подхода Полякова.

Амплитуды рассеяния и аналогия с электростатикой

Функциональный интеграл (2.12), (2.28) отвечал диаграммам без внешних концов, т. е. мы рассматривали лишь вакуумные диаграммы. Чтобы описать амплитуды рассеяния, мы должны ввести вершинные операторы и проследить, чтобы их присутствие не нарушало вывода об отсутствии конформных аномалий в $D=26$. Поляков предложил в качестве вершинного оператора тахиона в модели замкнутой струны выражение

$$V(k_i)=\int d^2\xi\sqrt{g(\xi)}\ \ \exp[ik^i_\mu x_\mu(\xi)]. \qquad (2.29)$$

Ниже мы убедимся, что это выражение конформно инвариантно. Таким образом, амплитуда излучения N тахионов с импульсами k^i_μ, удовлетворяющих закону сохранения энергии $\Sigma k^i_\mu=0$, имеет вид

$$A(k_1\dots k_N)=\prod_i\int d^2\xi_i\int Dx_\mu Dg_{ab}\sqrt{g(\xi_i)}\ \times$$
$$\times\exp[ik^ix(\xi_i)]\ \exp[-S_B(x,g)]; \qquad (2.30)$$

функциональный интеграл без вершинных операторов мы вычислять уже умеем, а их присутствие вносит небольшое усложнение. В самом деле, запишем

$$i\sum k^i_\mu x^\mu(\xi_i)=i\int d^2\xi\, J_\mu(\xi)\, x^\mu(\xi), \qquad (2.31)$$

где

$$J_\mu(\xi)=\sum_i k^i_\mu\,\delta^2(\xi-\xi_i).$$

Тогда интеграл по x может быть вычислен стандартным приемом — сдвигом [9]:

$$x^\mu\to x^\mu+\eta^\mu,$$

где «классическое поле» η^μ удовлетворяет

$$\partial_a(\sqrt{g}\ g^{ab}\,\partial_b)\,\eta_\mu=-iJ_\mu.$$

Это уравнение можно решить, введя евклидову функцию Грина:

$$\partial_a(\sqrt{g}\ g^{ab}\,\partial_b)\,G(\xi,\xi')=-\delta^2(\xi-\xi'). \qquad (2.32)$$

Тогда

$$\eta^\mu(\xi)=i\int d^2\xi'\,J^\mu(\xi')\,G(\xi,\xi')$$

и функциональный интеграл (2.30) после выделения тривиального интегрирования по $DxDg$ (оно дает фактор (2.28), т. е. константу при $D=26$) равен

$$A(k_1\dots k_N)=\prod_i\int d^2\xi_i\sqrt{g(\xi_i)}\ \ \exp\left[-\frac{1}{2}\int d^2\xi\, d^2\xi'\,J_\mu(\xi)\,J_\mu(\xi')\,G(\xi,\xi')\right]$$

или, подставляя вместо J_μ выражение (2.31), получаем окончательно

$$A(k_1\dots k_N)=\prod_i\int d^2\xi_i\sqrt{g(\xi_i)}\ \times$$
$$\times\exp\left[-\sum k_i^2\,G(\xi_i,\xi_i)\right]\ \exp\left[-\sum_{i<j}k_ik_jG(\xi_i,\xi_j)\right]. \qquad (2.33)$$

Здесь мы сталкиваемся с двумя неприятными обстоятельствами: во-первых, как мы говорили выше, мы уже проинтегрировали по Dg, но здесь в формуле оставили произведение $\sqrt{g(\xi_i)}$, которое зависит от Φ как $\prod e^{\Phi(\xi_i)}$, во-вторых, в экспоненту входит неопределенная величина $G(\xi_i,\xi_i)$. Как известно из курса электростатики, двумерная функция Грина при малых $|\xi-\xi'|$ ведет себя как $\ln|\xi-\xi'|^2$, т. е. сингулярна в пределе совпадающих аргументов. Вдобавок, как известно, функция Грина — величина конформно инвариантная и непонятно, каким образом она может сократить конформный множитель, идущий от $\sqrt{g(\xi_i)}$. Разрешение парадокса состоит в том, что функция Грина конформно инвариантна только при несовпадающих аргументах, а при совпадающих должна быть регуляризована. Регуляризация вновь приводит к конформной аномалии. Запишем функцию Грина через собственные функции оператора Лапласа (2.19) [17]:

$$G(\xi, \xi') = \sum_n \frac{1}{\lambda_n} \varphi_n(\xi)\, \varphi_n(\xi')\,.$$

Его можно регуляризовать, например, как

$$G_{reg}(\xi, \xi') = \sum_n \frac{1}{\lambda_n} e^{-\varepsilon\lambda_n} \varphi_n(\xi)\, \varphi_n(\xi') = \int_\varepsilon^\infty dt \sum e^{-t\lambda_n} \varphi_n(\xi)\, \varphi_n(\xi')\,.$$

Положим теперь $\xi = \xi'$, мы находим в пределе малых ε

$$G_{reg}(\xi, \xi) = \int_\varepsilon^\infty dt\ \mathrm{Tr}\ e^{-t\Delta} = \ln \varepsilon - \Phi(\xi) + O(\varepsilon)\,. \tag{2.33}$$

Таким образом, вся зависимость от Φ имеет теперь вид

$$\prod_{i=1}^{N} \exp\left[\Phi(\xi_i)(1 + k_i^2/4)\right]$$

и она исчезает только при $k_i^2 = -4$, т. е. как раз когда все внешние импульсы — тахионные! Этот результат показывает, что выражение $\exp(ikx)$ на самом деле зависит от конформного множителя (являясь, как говорят, конформной плотностью веса 1), и эта зависимость сокращает в точности фактор e^Φ, содержащийся в $\sqrt{g}$. При этом ответ для амплитуды рассеяния имеет вид

$$A(k_1 \dots k_N) = \prod_i \int d^2\xi_i\ \exp\left[-\sum_{i<j} k_\mu^i k_\mu^j G(\xi_i, \xi_j)\right]. \tag{2.34}$$

Рассмотрим подробнее входящую сюда экспоненту. Величина $\sum k_\mu^i k_\mu^j\, G(\xi_i, \xi_j)$ приводит нам на память электростатический потенциал системы зарядов*) k^i, расположенных в точках ξ_i. Чтобы

*) Разумеется, импульсы k^i имеют пространственно-временной индекс μ, так что читатель может представлять себе, что он имеет 26 копий плоскостей с зарядами.

избежать инфракрасной расходимости, связанной с ростом функции Грина на больших расстояниях, полный заряд системы должен быть равен нулю, т. е. $\sum k_\mu^i = 0$. Это обеспечивается законом сохранения энергии. Исторически, электростатическая аналогия [18] родилась одновременно с теорией струн и долгое время оказывалась исключительно полезной для ее развития. Некоторое время физики даже полагали, что возможно будет свести всю теорию сильных взаимодействий к двумерной электростатике и предлагали в шутку вместо постройки ускорителей делать из фольги римановы поверхности и измерять на них распределение зарядов!

Рассмотрим (2.34) на простейшей поверхности — сфере. На сфере функция Грина имеет вид

$$G(\xi, \xi') = \ln|z - z'|^2, \quad z = \xi_1 + i\xi_2,$$

и формула (2.34) в этом случае обладает всеми свойствами дуальной амплитуды: она инварианта относительно циклических перестановок импульсов. Однако формально выражение (2.34) есть бесконечность. Причина расходимости в симметрии подынтегрального выражения относительно группы преобразований Мебиуса $z_i \to (az_i + b)/(cz_i + d)$. Действительно, в (2.34) имеется явная инвариантность относительно сдвигов, поскольку все зависит от разностей $\xi_i - \xi_j$. Инвариантность относительно инверсий $z_i \to -1/z$; $z_i - z_j \to \frac{\xi_i - \xi_j}{\xi_i \xi_j}$; $d^2\xi_i \to \frac{d^2 z_i}{|z_i|^4}$ будет при условии сокращения лишнего множителя:

$$\prod_1^N |z_i|^{-4} \prod_{1=i<j}^{N} |z_i z_j|^{-2k_i k_j}, \quad \sum k^i = 0\,.$$

Это происходит лишь для тахионов $k_i^2 = -4$. Регуляризация (2.34), т. е. удаление бесконечного объема группы Мебиуса достигается фиксацией каких-либо трех точек, скажем,

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = 1, \quad \xi_3 = \infty\,. \tag{2.35}$$

Для 4-точечной амплитуды получим

$$A(s, t, u) = c \int d^2\xi_4\, |\xi_4|^{-k^i k^4}\, |1 - \xi_4|^{-k^2 k^4}.$$

Вычисляя этот интеграл, получим формулу Виразоро — Шапиро, обобщающую формулу Венециано и обладающую явной кроссингинвариантностью:

$$A(s,t,u)=$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\alpha(s)\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\alpha(t)\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\alpha(u)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\alpha(s)-\frac{1}{2}\alpha(t)\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\alpha(s)-\frac{1}{2}\alpha(u)\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\alpha(t)-\frac{1}{2}\alpha(u)\right)},$$

$$\alpha(s)=2+\frac{s}{2}. \tag{2.36}$$

В заключение мы приведем для справки выражение для вершинных функций излучения векторной частицы (для открытой струны):

$$V(x,e,k)=\int d^2\xi\sqrt{g(\xi)}\ e^{\mu}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial z}\ e^{ikx(\xi)};\qquad e\cdot k=0$$

и гравитона (для замкнутой струны):

$$V(x,e,k)=\int d^2\xi\sqrt{g(\xi)}\ \frac{\partial x^{\mu}}{\partial\xi^{a}}\ \frac{\partial x^{\nu}}{\partial\xi^{b}}\ g^{ab}\,e_{\mu\nu}\,e^{ix(\xi)\cdot k}, \tag{2.37}$$

$$e^{\mu}_{\mu}=0;\qquad e_{\mu\nu}=e_{\nu\mu},\qquad k_{\mu}e_{\mu\nu}=0;$$

величины e_{μ}, $e_{\mu\nu}$ описывают поляризацию векторной частицы и гравитона. Используя свойства функции Грина (2.33), нетрудно показать, что вершины (2.37) вейльинвариантны только при условии $k^2=0$ (плюс поперечность векторов поляризации, уже записанная в (2.37)).

3. ГЕТЕРОТИЧЕСКАЯ СТРУНА

Первоначально гетеротической струной (ГС) называлась гибридная модель в $D=10$ компактифицированной 26-мерной бозонной струны, и 10-мерной суперструны, построенной в работах Грина — Шварца [19]. В настоящее время ясно, что она не является единственной, ни даже чем-либо выделяющейся среди всего множества подобных асимметрических струнных моделей. Более того, нет никакой необходимости при компактификации из $D=26$ «задерживаться» на 10-мерии [20] и можно спускаться прямо в $D=4$. Тем не менее, первоначальный вариант ГС Гросса и других [19] воплотил в себе идеи и методы, ставшие классическими и ознакомление с ними будет полезно для читателя.

Напомним кратко цепь идей, приведших к ее построению. В 1982—1984 гг. физики интенсивно занимались изучением киральных аномалий в высших измерениях. Кульминацией их усилий можно считать установление связей калибровочной неабелевской аномалии с топологической U(1) аномалией [21] и открытие гравитационной аномалии [22] для киральных фермионов, взаимодействующих с гравитационным полем в $D=4k+2$. Если фермионы взаимодействуют одновременно с калибровочным полем A_{μ} и гравитационным, то в теории имеются также смешанные аномалии. С ростом числа измерений пространства выражение для аномалии быстро увеличивается, и в общем случае сокращение аномалий представляется невероятным. Грин и Шварц показали тем не менее, что для двух специальных калибровочных групп SO(32) и $E_8\times E_8$ аномалии сокращаются [23]. Из них только SO(32) является физически реализуемой, так как при обычном присоединении квантовых чисел к открытым струнам («кварки на концах» — метод Чана — Патона) требование унитарности допускает только группы SO($2N$) и Sp(N) [3]. Между тем, группа $E_8\times E_8$ выглядела предпочтительнее с точки зрения возможных феноменологических приложений. Фройнд [24] обратил внимание, что ранг группы SO(32) и $E_8\times E_8$ равен 16 и это число может быть получено при компактификации из 26 измерений до 10. Конкретная реализация этих идей требует привлечения довольно сложной конструкции Френкеля — Каца, которые использовали ее для построения алгебр Каца — Муди, а также обычных алгебр Ли при помощи вершинных операторов струнной модели [25, 26].

Рассмотрим вершину излучения тахиона $\gamma^2=-2$.

$$V(\gamma,z)=:\exp[i\gamma_{\mu}Q^{\mu}(z)]:=$$

$$=\exp[i\gamma_{\mu}Q^{\mu}_{<}(z)]\ \exp[i\gamma_{\mu}Q^{\mu}_{0}(z)]\ \exp[i\gamma_{\mu}Q^{\mu}_{>}(z)],$$

где

$$Q^{\mu}(z)=Q^{\mu}_{0}(z)+Q^{\mu}_{<}(z)+Q^{\mu}_{>}(z),$$

$$Q^{\mu}_{>}(z)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{\alpha^{\mu}_{n}}{n}z^{-n},\qquad Q^{\mu}_{<}(z)=\sum_{n\leqslant -1}\frac{\alpha^{\mu}_{n}}{n}z^{-n}, \tag{3.1}$$

$$Q^{\mu}_{0}(z)=q^{\mu}-ip^{\mu}\ln z,\qquad [q^{\mu},p^{\nu}]=i\eta^{\mu\nu},$$

$$\exp[i\gamma_{\mu}Q^{\mu}_{0}]=z^{\gamma^{\mu}p_{\mu}+\gamma^2/2}\ \exp[i\gamma^{\mu}q_{\mu}].$$

Имеем следующие алгебраические свойства вершины $V(\gamma,z)$:

$$[L_n, V(\gamma, z)] = z^n\left\{z\frac{d}{dz} - \frac{\gamma^2}{2}n\right\} V(\gamma, z)\,. \tag{3.2}$$

Заметим, что правая часть (3.2) при $\gamma^2 = -2$ пропорциональна полной производной $z\frac{d}{dz}(z^n V)$. Определим оператор

$$A_\gamma = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{dz}{z} V(\gamma, z)\,. \tag{3.3}$$

Пользуясь отмеченным фактом, получаем

$$[L_n, A_\gamma] = 0\,, \quad \gamma^2 = -2\,. \tag{3.4}$$

Таким образом, если оператор A_γ *хорошо определен*, то он отображает физические состояния в физические, поскольку коммутирует с операторами Виразоро $L_n A_\gamma |\mathrm{phys}\rangle = A_\gamma L_n |\mathrm{phys}\rangle = 0$, $n > 0$.

Рассмотрим теперь случай, когда импульс γ компактифицируется и часть его компонент приобретает дискретные значения. Полезно напомнить движение частицы в (многомерном) кристалле, описываемое волновой функцией

$$\Psi(x) = \exp(ix\cdot\gamma/\hbar)\,.$$

Она однозначна в кристалле (т. е. на торе, ввиду бесконечной периодичности), только если $\Psi(x+a) = \Psi(x)$, где a — вектор решетки. Отсюда возникает требование

$$\frac{a\cdot\gamma}{\hbar} = 2\pi Z\,. \tag{3.5}$$

Иными словами, если обозначить кристаллическую решетку Γ, а решетку импульсов через Γ^*, то условие (3.5) означает, что решетки Γ и Γ^* *дуальны* друг другу.

Применим эти соображения к бозонной вершине. Обозначим состояние с импульсом γ_μ через $|\gamma\rangle$:

$$|\gamma\rangle = e^{i\gamma q}|0\rangle\,; \quad p^\mu|\gamma\rangle = \gamma^\mu|\gamma\rangle\,. \tag{3.6}$$

Имеем, пользуясь (3.1),

$$e^{i\gamma\cdot Q_0(z)}|\gamma'\rangle = z^{(1/2)\gamma^2 + \gamma\cdot\gamma'}|\gamma+\gamma'\rangle\,. \tag{3.7}$$

Таким образом, оператор $Q_0(\gamma)$ (а, следовательно, и A_γ) хорошо

определен, только если

$$\gamma^2 = \text{четное}\,; \quad \gamma\cdot\gamma' = \text{целое}\,. \tag{3.8}$$

Такая решетка называется *четной* и *целой*, причем она, по вышесказанному, должна быть подрешеткой в дуальной решетке (или совпадать с ней). Рассмотрим вершинные операторы для таких решеток и ограничимся $r^2 = 2$. Здесь r — компактифицированный импульс в евклидовой метрике, соответствующий $\gamma^2 = -2$ для тахиона. Изучим алгебру, порожденную операторами

$$A_r = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{dz}{z} V(r, z)\,. \tag{3.9}$$

Коммутационные соотношения для них могут быть вычислены методом окружения контуров (часть I формулы (3.6)), ответ такой:

$$A_r A_s - (-1)^{rs} A_s A_r = \begin{cases} A_{r+s}\,, & rs = -1 \\ rP\,, & r = -s \\ 0\,, & rs \geqslant 0 \end{cases} \tag{3.10}$$

Оператор P получается, благодаря $P^\mu = z\frac{d}{dz}Q^\mu$. Алгебра операторов A_r «испорчена» присутствием множителя $(-1)^{rs}$. Избавиться от него можно, вводя так называемый операторный коцикл $\tilde{c}_r$ с определенными коммутационными свойствами (см. обзор [26]). Операторы $E_r = A_r \tilde{c}_r$ удовлетворяют соотношениям

$$E_r E_s - E_s E_r = \begin{cases} \varepsilon(r, s) E_{r+s}\,, & rs = -1 \\ rP\,, & r = -s \\ 0\,, & sr \geqslant 0;\ \varepsilon(r, s) = \pm 1 \end{cases} \tag{3.11}$$

Далее, поскольку оператор E_r несет импульс r, имеем

$$[P_\mu, E_r] = r_\mu E_r\,. \tag{3.12}$$

Присоединяя к (3.11), (3.12) коммутатор операторов импульса

$$[P_\mu, P_\nu] = 0\,, \tag{3.13}$$

получаем алгебру g генераторов полупростой группы Ли *в базисе Картана — Вейля*:

$$[H_i, H_j]=0 \qquad \text{«максимальный тор» или «подалгебра Картана»},$$
$$[H_i, E_\alpha]=\alpha^i E_\alpha\,; \qquad [E_\alpha, E_{-\alpha}]=c^i H_i\,; \qquad (3.14)$$
$$[E_\alpha, E_\beta]=\begin{cases} N_{\alpha\beta}E_{\alpha+\beta}, & \text{если } \alpha+\beta \text{ — корень} \\ 0, & \text{если } \alpha+\beta \text{ не есть корень}\end{cases}$$

Число независимых H_i — взаимно коммутирующих генераторов, называется *рангом алгебры Ли*; α^i — корневые векторы, размерность их равна, очевидно, рангу алгебры [27].

Вычислим размерность построенной таким образом алгебры Ли, иными словами, число генераторов P_μ, E_r. Число P_μ равно, очевидно, размерности компактифицированного пространства d. Число E_r равно числу точек на целочисленной решетке Z^d, таких, что квадрат любого из векторов, задающих эту точку, равен 2. Такими векторами являются, очевидно, $(0, \pm 1, 0, ..., \pm 1, 0, ...)$, $(0, ..., \pm 1, 0, ..., \mp 1, ...)$. С учетом четырех возможных выборов знака находим, что число таких векторов равно $4\frac{d(d-1)}{2}$. В результате, размерность алгебры равна

$$\dim g = d + 2d(d-1) = \frac{2d(2d-1)}{2} = \dim SO(2d)\,. \qquad (3.15)$$

Таким образом, исходя из тахионной вершины, мы пришли к алгебре Ли группы $SO(2d)$.

Кроме решетки Z^d, таким свойством обладает также решетка векторов

$$\left(n_1+\frac{1}{2},\ n_2+\frac{1}{2}, ..., n_d+\frac{1}{2}\right), \qquad n_i \in Z\,.$$

Она является целой и самодуальной для размерности $d=4k$. Для $d=8k$ она четна $(8k(1/2)^2$ — четно) (см. Серр «Курс арифметики» [28]). Какова ее размерность?

В $d=8$ мы получаем с помощью целочисленной решетки алгебру $SO(16)$. Добавляя к решетке $128\,(=2^7)$ точек вида $\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, ...\right)$ (четное число $+\frac{1}{2}$ и четное число $-\frac{1}{2}$ для

целочисленности), мы получим алгебру с 248 $\left(=\frac{16\cdot 15}{2}+2^7\right)$ генераторами — алгебру E_8. (Заодно мы получили известный факт, что алгебра $SO(16)$ есть подалгебра E_8.) Все эти алгебры называются «simply laced», т. е. все их корни имеют одинаковую длину.

В $d=16$ получаются две возможные алгебры: $SO(32)$, имеющая $31\times 16=496$ генераторов, и E_8+E_8, имеющая $248+248=496$ генераторов. Эти две алгебры, выделенные условием сокращения аномалий, возникают как алгебры вершинных операторов, определенных на единственных 16-мерных самодуальных четных решетках.

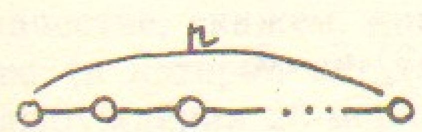
Алгебры Ли характеризуют матрицами Картана и графически изображают схемами Дынкина. Матричные элементы матрицы Картана строятся из скалярных произведений корней:

$$A_{ij}=2\frac{\alpha_i\cdot\alpha_j}{\alpha_j^2}\,; \qquad A_{ii}=2, \qquad A_{ij}\leqslant 0, \qquad i\neq j\,. \qquad (3.16)$$

Схема Дынкина дает графическое представление матрицы Картана. Она состоит из вершин, связанных между собой линиями. Вершины представляют собой квадраты независимых корневых векторов. Если две вершины связаны (соединены линией), то скалярное произведение их векторов не нуль. Связная диаграмма — когда все вершины соединены в цепь (возможно разветвленную). Для simply laced алгебр линиям не приписывают направления — все корни имеют одинаковую длину.

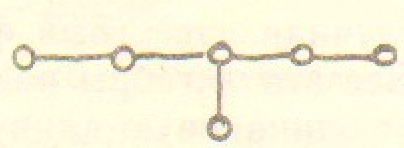
Для примера приведем схемы Дынкина и матрицы Картана для групп $sl(n+1)$ и E_6:

$sl(n+1)$:



$$A_{ij}=\begin{vmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & \cdot & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{vmatrix}\,. \qquad (3.17)$$

E_6:



$$A_{ij}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Замкнутые струны

Поскольку ГС является замкнутой, то полезно напомнить ее свойства. Мы видели, что для открытой струны граничные условия $x'(0, \tau) = x'(\pi, \tau)$ приводят к тому, что $x^\mu(\sigma, \tau)$ разлагается только по $\cos n\sigma$. В замкнутой струне этих граничных условий нет, и разложение идет как по синусам, так и по косинусам. Соответственно, коэффициентами при них являются независимые осцилляторные переменные α_n и $\bar{\alpha}_n$. Однако удвоение числа независимых переменных не ведет в замкнутой струне к обогащению спектра — наоборот, благодаря наложению дополнительного важного условия, он оказывается более узким, чем в открытой струне. Чтобы понять происхождение этого условия, напомним, что в замкнутой струне естественно возникает комплексная переменная z и разложение x^μ имеет вид

$$x^\mu(z, \bar{z}) = x_0^\mu + p^\mu \ln z + \bar{p}^\mu \ln \bar{z} + \sum_{n\neq 0} \frac{\alpha_n^\mu}{n} z^{-n} + \sum \frac{\bar{\alpha}_n^\mu}{n} \bar{z}^{-n};$$

$$z = e^{i(\tau-\sigma)}, \qquad \bar{z} = e^{i(\tau+\sigma)},$$

$$2L_n = p\cdot\alpha_n + \sum_{k\neq 0} \alpha_k \alpha_{n-k}, \qquad 2L_0 = p_0^2 + 2\sum_1^\infty \alpha_{-n}\alpha_n, \tag{3.18}$$

$$2\bar{L}_n = \bar{p}\cdot\bar{\alpha}_n + \sum_{k\neq 0} \bar{\alpha}_k \bar{\alpha}_{n-k}, \qquad 2\bar{L}_0 = \bar{p}_0^2 + 2\sum_1^\infty \bar{\alpha}_{-n}\bar{\alpha}_n.$$

Операторы α_n связаны с «правыми» колебаниями, а $\bar{\alpha}_n$ — с «левыми».

Запишем по аналогии со случаем открытой струны пропагатор для замкнутой струны:

$$D(p) = \int_0^1 dx\, x^{L_0-2} \to \int_{|z|\leqslant 1} dz\, d\bar{z}\, z^{L_0-2}\, \bar{z}^{\bar{L}_0-2}. \tag{3.19}$$

Вычисляя интеграл по z введением полярных координат, получим:

$$D(p)_{\text{замкн.стр.}} = \frac{1}{L_0+\bar{L}_0-2}\,\delta_{L_0-\bar{L}_0,\,0}, \tag{3.20}$$

т. е. физические состояния должны удовлетворять

$$(L_0+\bar{L}_0-2)\,|phys\rangle = 0, \tag{3.21}$$

$$(L_0-\bar{L}_0)\,|phys\rangle = 0. \tag{3.22}$$

Условие (3.22) является дополнительным ограничением на спектр состояний замкнутой струны, благодаря которому в ее спектре нет векторной частицы и вообще нет состояний с нечетным спином. Еще одним свойством замкнутой сруны, которое мы будем использовать, является замечательная возможность рассматривать по отдельности правые и левые возбуждения. В самом деле, свободные поля в двумерном пространстве-времени естественно разбиваются на правые (зависящие от $\tau-\sigma$ или от z в пространстве Евклида) и «левые» (зависящие от $\tau+\sigma$ или от $\bar{z}$). Точно так же правый спинор описывает движение вправо, левый — влево. В этом легко убедиться, решив уравнение (двумерное) Дирака $\gamma_a \partial_a \psi(x) = 0$ и наложив на ψ условие $\gamma_5\psi = \pm\psi$. Поскольку лагранжиан струны не содержит членов взаимодействия, которые могли бы смешивать правый и левый секторы, а взаимодействие возникает, благодаря усложнению топологии мировой поверхности, то для ориентируемой мировой поверхности правые возбуждения не могут перейти в левые. Поэтому разбиение на правый и левый секторы полностью инвариантно. Отсюда возникает идея взять в качестве, скажем, правого сектора правые возбуждения суперструны (в которой нет тахиона), а в качестве левого сектора — левые возбуждения 26-мерной бозонной струны и компактифицировать 16 координат с помощью описанной процедуры Френкеля — Каца. Благодаря условию (3.22), в модели заведомо не будет тахиона, а компактификация 16 координат на четной самодуальной решетке даст нам калибровочную группу $E_8\times E_8$ или $SO(32)$ (свободные от аномалий). Присутствие кирального фермиона важно для описания низкоэнергетического предела.

Итак, введем следующий набор полей на световом конусе:

Правый сектор;

Суперструна Грина — Шварца	$X^i(\tau-\sigma)$, $i, a=1, 2, ..., 8$	
	$S^a(\tau-\sigma)$	(3.23)

Левый сектор;

Бозонная струна	$X^i(\tau+\sigma)$, $i=1, 2, ..., 8$
	$X^I(\tau+\sigma)$, $I=1, 2, ..., 16$

В правом секторе мы имеем $N=1/2$ суперсимметрию на мировом листе и $N=1$ суперсимметрию в пространстве-времени. Координаты $X^i(\tau-\sigma)$ и $X^i(\tau+\sigma)$ совместно описывают положение струны в $D=10$, $X^I(\tau+\sigma)$ будут компактифицированы на 16-мерный тор. За недостатком места мы не будем выписывать разложение $X^i(\tau-\sigma)$ и $S^a(\tau-\sigma)$ по нормальным координатам, а сосредоточимся на процедуре компактификации:

$$X^I(\tau+\sigma)=x^I+p^I(\tau+\sigma)+\frac{1}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{\tilde{\alpha}_n^I}{n}\, e^{-2in(\tau+\sigma)}. \qquad (3.24)$$

Поскольку тор является топологически нетривиальным многообразием, то при компактификации замкнутой струны появляются «солитоны», которые существенно расширяют спектр безмассовых частиц. Появление солитонов связано с тем, что отображение замкнутой струны (т. е. окружности) на одномерный тор (т. е. окружность) гомотопически нетривиально и такие отображения можно разбить на непересекающиеся классы, характеризующиеся целым числом L [29]. (См. книгу Милнора и Уоллеса «Основы дифференциальной топологии» [30].)

Из формул (3.21), (3.22) следует выражение для оператора квадрата массы (см. формулу (1.29)):

$$\frac{1}{4}M^2=N+(\tilde{N}-1)+\frac{1}{2}\sum_{I=1}^{16}(p^I)^2, \qquad (3.25)$$

$$N=\sum_1^{\infty}\left(\alpha_{-n}^i\alpha_n^i+\frac{1}{2}\bar{S}_{-n}\gamma^- S_n\right),\quad \tilde{N}=\sum_1^{\infty}(\tilde{\alpha}_{-n}^i\tilde{\alpha}^i+\tilde{\alpha}_{-n}^I\tilde{\alpha}_n^I) \qquad (3.26)$$

и дополнительное условие

$$N=\tilde{N}-1+\frac{1}{2}\sum_1^{16}(p^I)^2,$$

где N и $\tilde{N}$ — операторы числа частиц в правом и левом секторах.

В качестве упражнения можно проверить, что оператор $T=\exp\,[i\Delta(N-\tilde{N}+1-\frac{1}{2}\sum(p^I)^2)]$ действует на $X^i(\tau\pm\sigma)$, $X^I(\tau+\sigma)$, $S^a(\tau-\sigma)$ как оператор сдвига по переменной σ: $\sigma\to\sigma+\Delta$. Для замкнутой струны такой сдвиг несуществен, поэтому оператор является единичным (на физических состояниях).

Рассмотрим эффект солитонов с помощью простейшей модели: пусть мы компактифицируем всего одну координату, скажем, X^{24} (рассматривается обычная замкнутая бозонная струна):

$$X^{24}(\tau,\sigma)=x^{24}+p^{24}\tau+2LR\sigma+\text{осцилляторы}. \qquad (3.28)$$

Здесь $p^{24}=M/R$; M, L — целые. Оператор квадрата массы имеет вид

$$\frac{1}{4}M^2=N+\tilde{N}-2+\frac{M^2}{4R^2}+L^2R^2, \qquad (3.29)$$

а дополнительное условие

$$N=\tilde{N}+ML. \qquad (3.30)$$

При компактификации возникают два безмассовых векторных мезона:

$$\alpha_{-1}^{24}\tilde{\alpha}_{-1}^i|0\rangle \quad \text{и} \quad \tilde{\alpha}_{-1}^{24}\alpha_{-1}^i|0\rangle. \qquad (3.31)$$

Пусть теперь наш тор будет *специальным*, с радиусом $R=\frac{1}{\sqrt{2}}$ (в единицах $\sqrt{\alpha'}$). Тогда для массового оператора

$$\frac{1}{4}M^2=N+\tilde{N}-2+\frac{M^2+L^2}{2}=2\tilde{N}-2+\frac{(M+L)^2}{2}=$$
$$=2N-2+\frac{(M-L)^2}{2}. \qquad (3.32)$$

Из (3.32) следует, что, в целом, есть еще четыре безмассовых векторных бозона, описываемых квантовыми числами:

$$\tilde{N}=1, \quad M=-L=\pm 1, \quad \tilde{\alpha}^i_{-1}\,|M=-L=\pm 1\rangle,$$
$$N=1, \quad M=L=\pm 1, \quad \alpha^i_{-1}\,|M=L=\pm 1\rangle.$$

В результате для этого «специального» тора имеется 6 безмассовых векторных мезонов, заполняющих присоединенное представление группы $SU(2)\times SU(2)$. Без солитонов мы имели бы калибровочную группу $U(1)\times U(1)$.

В точности то же самое происходит и при компактификации всех 16 лишних координат. Аналогом условия $R=1/\sqrt{2}$ («самодуальность» для $D=1$) будет условие четности и самодуальности решетки и импульсов.

Запишем в общем случае

$$X^I(\tau,\sigma)=x^I+p^I\tau+2L^I\cdot\sigma+\text{осцилляторы}, \tag{3.33}$$

где L^I разлагается по решетке x, т. е. Γ с базисом e^I_i:

$$L^I=\sqrt{\frac{1}{2}}\sum_1^D R_i\cdot n_i\cdot e^I_i, \tag{3.34}$$

а импульс p^I — по дуальной ей решетке Γ^* с базисом e^{*I}_i:

$$\Sigma\, e^I_i e^{*I}_j=\delta_{ij}. \tag{3.35}$$

Разобьем X^I на правую и левую компоненты. Нам нужна только левая компонента, т. е. часть X^I, зависящая от $\tau+\sigma$. Но, чтобы такая зависимость была возможной, импульс p^I должен быть связан строго определенным образом с $2L^I$, т. е. решетка Γ должна совпадать с дуальной решеткой Γ^*.

Запишем теперь оператор квадрата массы и дополнительное условие для ГС с учетом вышеописанных требований:

$$N=\tilde{N}-1+\frac{1}{2}\sum_{I=1}^{16}(p^I)^2,$$

$$\frac{1}{4}M^2=N+\tilde{N}-1+\frac{1}{2}\sum_{I=1}^{16}(p^I)^2=2N\geqslant 0. \tag{3.36}$$

Благодаря дополнительному условию, оператор квадрата массы в ГС оказывается равным оператору квадрата массы суперструны Грина — Шварца, в которой нет тахионов. Следовательно ГС автоматически оказывается свободной от тахионов.

Рассмотрим спектр безмассовых частиц. Прежде всего мы имеем 16 Калуца — Клейновских бозонов, отвечающих $p^I=0$, $\tilde{N}=1$ (калибровочная группа $U(1)^{16}$). Далее, положим $p^I\cdot p^I=2$. Мы знаем, что в ГС p^I играют роль индексов отображения (winding numbers). Они лежат на четной самодуальной решетке в $D=16$. Таких решеток в $D=16$, как мы установили, две: решетки весов групп $E_8\times E_8$ и $SO(32)$. Число точек на них, имеющих $(p^I)^2=2$, равно 480. Таким образом, при $(p^I)^2=2$, $N=\tilde{N}=0$ мы получаем еще 480 безмассовых «заряженных» калибровочных бозонов $|p^I,\ (p^I)^2=2\rangle$, которые вместе с 16 «нейтральными» $\tilde{\alpha}^I_{-1}|0\rangle$ образуют присоединенное представление группы $E_8\times E_8$ или $SO(32)$: 496 состояний. Во внешнем $D=10$ пространстве имеются 8 поперечных состояний $\alpha^i_{-1}|0\rangle$. Полное число безмассовых состояний левого сектора $504=496+8$. Правый сектор содержит 8 бозонных $|i\rangle_R$ и 8 фермионных $|a_R\rangle$ состояний: $|i\rangle_R=\frac{1}{16}\bar{S}_0(\gamma_i\gamma_+)^a|a\rangle_R$; $|a\rangle_R=\frac{i}{8}\gamma^i S^a|i\rangle$, $i=1, \ldots, 8$, $a=1, \ldots, 8$. Физические состояния есть произведение фоковских состояний правого и левого секторов. В безмассовом секторе ГС, таким образом, содержится $(496+8)\times 16=8064$ состояний.

Благодаря наличию «зарядов», т. е. дополнительных квантовых чисел, связанных с компонентами компактифицированного импульса, число состояний в ГС очень быстро разрастается. Например, уже на первом массивном уровне имеется 18883584 состояния! Разумеется, эти состояния, имеющие массу порядка массы Планка $\sim 10^{-5}$ г, не представляют физического интереса, хотя, подчеркнем еще раз, для математической самосогласованности любой модели струны, в том числе и гетеротической, необходимо существование всей бесконечной «башни» состояний.

В этих лекциях мы лишь вскользь касались вопросов петлевых поправок к амплитудам рассеяния струн (или тех или иных возбуждений струн). Представляя эволюцию струны в виде ее мирового листа, мы можем нарисовать, например, такой процесс, как на рис. 3. Здесь струны *1* и *2* в некоторый момент времени t_1 сливаются, двигаются вместе до момента времени t_2, затем виртуально распадаются на струны *1′* и *2′*, вновь сливаются при $t=t_3$ и окончательно распадаются при $t=t_4$ на струны *3* и *4*. В общем случае мы не умеем вычислять амплитуды, изображенные на

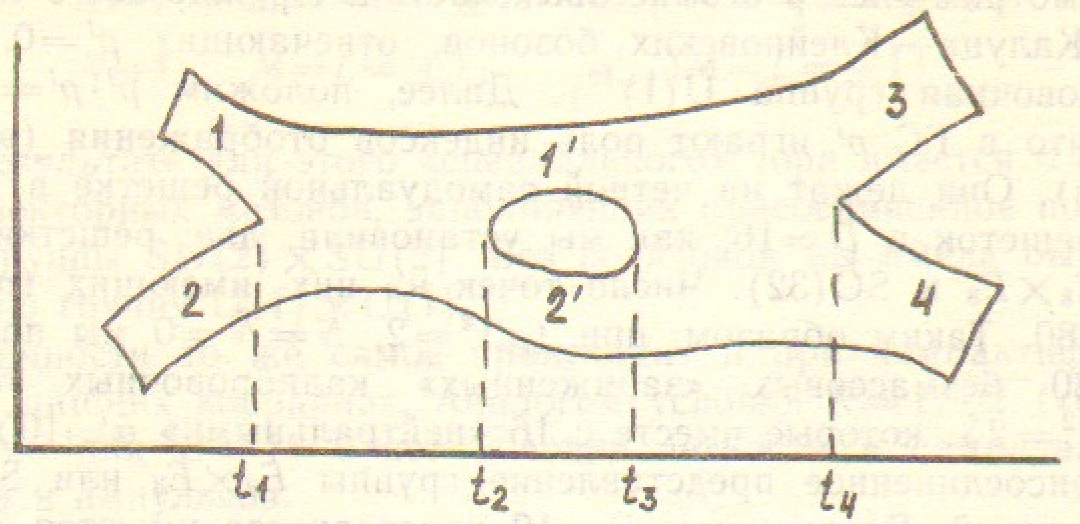


Рис. 3.

рис. 3, но можем рассматривать предел «бесконечно короткой» струны, т. е. одного из ее возбуждений, например, процесс типа:

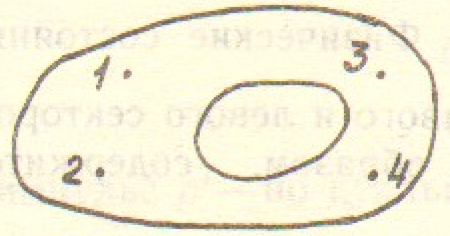


Рис. 4.

Здесь выколотым точкам *1*, *2*, *3*, *4* соответствуют вершинные операторы выбранных нами возбуждений, например, простейших — безмассовых. Особый интерес представляет вычисление процессов типа рис. 4 в ГС. Дело в том, что при вычислении диаграмм теории возмущений с петлями мы должны интегрировать по внутренним импульсам петель. В данном случае, поскольку часть компонент импульсов у нас стала дискретной, интегрирование заменяется бесконечной суммой. Так вот, оказывается [31], что сумма эта имеет хорошие свойства, то есть обеспечивает сходимость интеграла теории возмущений только при условии, что импульс p^I лежит на четной самодуальной решетке, иными словами, решетке весов групп SO(32) или $E_8 \times E_8$*), что дает еще одно подтверждение замкнутости и самосогласованности теории ГС. Остается пока нерешенным вопрос исключительной важности — достаточно ли этих свойств для обеспечения отсутствия расходимостей во всех порядках теории возмущений. Тем не менее, гетеротическая струна и ее обобщения, продолжают оставаться наиболее популярной моделью струны.

*) В несколько ином контексте этот факт хорошо известен математикам. См. книгу Серра [28].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В.* Введение в теорию квантованных полей. — М.: Наука, 1973, §13.
2. *Весс Ю., Беггер Дж.* Суперсимметрия и супергравитация. — Мир, 1986.
3. Большинство необходимых статей по суперструнам, включая оригинальные работы Грина и Шварца, Полякова, Гросса и др. и обзор Шварца «Суперструны», перепечатаны в книге: «Superstrings: the First 15 Years» v.1, 2; ed. J.H. Schwarz, World Scientific, 1985.
4. *Brink L., Di Vecchia P. and Howe P.* Phys. Lett. 65B, (1976) 471;
Deser S. and Zumino B. Phys. Lett. 65B (1976) 369.
5. *Gliozzi F., Scherk J. and Olive D.* Nucl. Phys. B122 (1977) 253.
6. *Уиттекер Э., Ватсон Дж.* Курс современного анализа. — Физматгиз, 1963, т.II.
7. *Mandelstam S.* Phys. Reports, 13C (1974) 259.
8. *Бирелл Н., Девис П.* Квантованные поля в искривленном пространстве-времени. — Мир, 1984.
9. *Фейнман Р., Хиббс А.,* Квантовая механика и интегралы по траекториям. — Мир, 1968;
Рамон П. Теория поля. — Мир, 1984;
Попов В.Н. Континуальные интегралы.... — Атомиздат, 1976.
10. *Polyakov A.M.* Phys. Lett. 103B (1981) 207.
11. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. — М.: Наука, 1977.
12. *Fujikawa K.* Phys. Rev. D21 (1980) 2848.
13. *Хуанг К.* Кварки, лептоны и калибровочные поля. — Мир, 1985, гл.12.
14. *Вейнберг С.* Гравитация и космология. — Мир, 1976;
Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1973.
15. *Moore G. and Nelson P.* Nucl. Phys. B266 (1986) 58.
16. *Шварц А.С.* Эллиптические операторы в квантовой теории поля. — В кн.: Современные проблемы математики, т.17, ВИНИТИ, 1981.
17. См., например, *Морс Ф., Фешбах Х.* Методы теоретической физики. — ИЛ, 1959.
18. *Fairlie D., Nielsen H.B.* Nucl. Phys. B20 (1970) 637.
19. *Gross D., Harvey J., Martinec E. and Rohm R.* Nucl. Phys. B256 (1985) 253.
20. *Narain K.S.* Phys. Lett. 169B (1986) 41.
21. *Zumino B., Wu Y.S., Zee A.* Nucl. Phys. B239 (1984) 477.
22. *Alvarez-Gaume L.A. and Witten E.* Nucl. Phys. B234 (1984) 269.
23. *Green M.B., Schwarz J.H.* Phys. Lett. 149B (1984) 117.
24. *Freund P.G.O.* Phys. Lett. 151B (1985) 387.
25. *Frenkel I.B., Kac V.G.* Invent. Math. 62 (1980) 23.
26. *Goddard P., Olive D.* Int. J. Modern Phys. 1 (1986) 303.
27. См., например, обзор *Гюрши Ф.* — В кн.: Теория групп и элементарные частицы. — Мир, 1967, или любую книгу по теории алгебр Ли.
28. *Серр Ж.П.* Курс арифметики. — Мир, 1973.
29. *Cremmer E. and Scherk J.* Nucl. Phys. B103 (1976) 399.
30. *Милнор Дж., Уоллес А.* Основы дифференциальной топологии. — Мир, 1976.
31. *Seiberg N., Witten E.* Nucl. Phys. B276 (1986) 272.
32. *Gross D.J., Harvey J., Martinec E. and Rohm R.* Nucl. Phys. B267 (1986) 75.

Содержание

Часть II

Э.А. Кураев, Ю.Н. Кафиев

Введение в теорию струн.
Часть II: Функциональный подход,
гетероструна

Ответственный за выпуск С.Г.Попов

Работа поступила 5 мая 1988 г.
Подписано в печать 20.05.1988 г. МН 08331
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 3,4 печ.л., 2,7 уч.-изд.л.
Тираж 250 экз. Бесплатно. Заказ № 72

Набрано в автоматизированной системе на базе фотонаборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и отпечатано на ротапринте Института ядерной физики СО АН СССР,
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.