

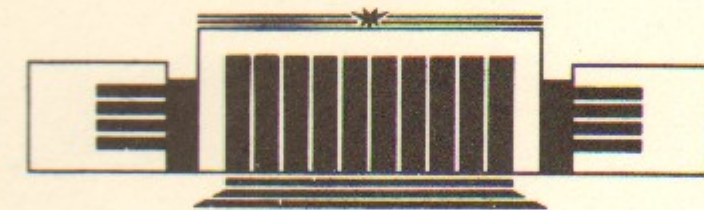


47  
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

В.Г. Давидовский

К ТЕОРИИ ТОРМОЖЕНИЯ ИОНА  
В ЗАМАГНИЧЕННОЙ  
ТЕМПЕРАТУРНО-АНИЗОТРОПНОЙ  
ЭЛЕКТРОННОЙ ПЛАЗМЕ

ПРЕПРИНТ 88-80



НОВОСИБИРСК

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В основе метода электронного охлаждения, предложенного Будкером Г.И. [1, 2, 3], лежит охлаждение «горячего» пучка тяжелых заряженных частиц (ионов) «холодным» сопутствующим электронным пучком. При этом ион, имеющий ненулевую амплитуду бетатронных или синхротронных колебаний является «горячим». Двигаясь в среде сопутствующих «холодных» электронов ион тормозится, что соответствует уменьшению амплитуды колебаний иона. Теоретическое рассмотрение процесса торможения иона в электронном газе применительно к электронному охлаждению было проведено в [4]. При этом электроны считались холодными, и влияние магнитного поля на акт столкновения не учитывалось. После экспериментального обнаружения эффекта быстрого охлаждения [5], влияние магнитного поля на акт столкновения было учтено в работе [6]. Было показано, что в случае предельно замагниченных холодных электронов, когда они могут двигаться лишь вдоль силовой линии магнитного поля, сила торможения, действующая на ион, движущийся со скоростью  $\vec{V}$  относительно электронной плазмы, равна

$$\begin{aligned} F_{\perp} &= -\frac{\omega_0^2 e_i^2}{2V^2} \frac{V_{\perp}^2 - 2V_{\parallel}^2}{V^2} \frac{V_{\perp}}{V} \ln(r_D/r_{\min}), \\ F_{\parallel} &= -\frac{\omega_0^2 e_i^2}{2V^2} \frac{3V_{\perp}^2}{V^2} \frac{V_{\parallel}}{V} \ln(r_D/r_{\min}), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $\omega_0^2 = 4\pi n e^2 / m$  — ленгмюровская частота электронной плазмы;

$e_i$  — заряд иона, индексами  $\perp$  и  $\parallel$  обозначены перпендикулярная и параллельная к внешнему магнитному полю компоненты скорости иона. Процесс торможения иона рассматривался в приближении парных столкновений, а влияние окружающей электронной плазмы на процесс столкновения учитывалось введением обрезания парного кулоновского взаимодействия на дебаевском радиусе  $r_D$ .

В работах [7, 8] формулы (1.1) были повторно выведены другими способами. Однако в работах [9, 10, 11, 12] используются формулы (2.12), отличные от формул (1.1).

В разделе 2 данной работы приведен простой качественный вывод формул (1.1). Результаты проведенного численного моделирования показали, что формулы (1.1) справедливы в области их применимости.

В разделе 3 приведены выражения продольной диэлектрической проницаемости электронной плазмы для различных случаев.

В разделе 4 на основе известных из физики плазмы формул в динамическом приближении получены выражения приводятся графики для потерь энергии и силы торможения иона в предельно замагниченной электронной плазме. В пределе холодной плазмы полученные формулы переходят в формулы работы [6].

В физике плазмы множественные столкновения и взаимодействие частиц с волнами учитываются кинетическим уравнением с интегралом столкновений в форме Балеску — Ленарда. Обобщение этого уравнения на случай замагниченной плазмы было проведено в ряде работ. Широко известен интеграл столкновений в форме Ростокера [13, 14]. Выражение для потерь энергии иона в замагниченной температурно-изотропной плазме было получено в работе [15] на основе интеграла столкновений Ростокера в интегральной форме работы [14]. Однако в установках с электронным охлаждением ион тормозится в сопутствующем электронном потоке с резко выраженной температурной анизотропией, обусловленной резким уменьшением продольной температуры при электростатическом ускорении электронов до средней продольной скорости охлаждаемых ионов [3, 16].

В разделе 5 получены формулы для потерь энергии и силы торможения иона в замагниченной температурно-анизотропной электронной плазме с двумаксвелловским распределением по скоростям.

В разделе 6 предельным переходом к нулевому магнитному полю в формулах раздела 5 получены формулы для случая незамагниченной температурно-анизотропной плазмы.

В Приложении проведено сравнение результатов раздела 5 в температурно-изотропном пределе с результатами работы [15].

## 2. ДИНАМИЧЕСКАЯ СИЛА ТРЕНИЯ В ПРИБЛИЖЕНИИ ПАРНЫХ СТОЛКНОВЕНИЙ

Ограничимся случаем, когда магнитное поле настолько сильно, что ларморовский радиус  $r_H$  электронов много меньше дебаевского радиуса ( $r_H \ll r_D$ ) и дрейфом электронов в поле пролетающего иона можно пренебречь. В этом приближении размер ларморовских кружков электронов несуществен, и такой кружок можно рассматривать как точечную частицу, привязанную к силовой линии магнитного поля и способную двигаться только вдоль этой линии. Траекторию же иона будем считать прямолинейной.

Ось  $z$  системы координат направим по скорости иона  $\vec{V}$ , ось  $x$  выберем в плоскости  $(\vec{V}\vec{H})$ ,  $\theta$  — угол между  $\vec{V}$  и  $\vec{H}$  (см. рис. 14). Координаты электрона в цилиндрической системе координат (с отсчетом угла  $\varphi$  от оси  $x$ ) —  $z, \rho, \varphi$ ; координаты движущегося иона  $z = Vt, \rho_i = 0$ , так что в момент  $t = 0$  ион находится в начале координат.

Если смещение электрона  $\xi$  вдоль силовой линии магнитного поля, вызванное взаимодействием с ионом, мало по сравнению с расстоянием от электрона до иона в течение всего времени взаимодействия, то смещение легко определить, полностью пренебрегая им в выражении для кулоновской силы взаимодействия. Такое приближение назовем приближением малых смещений. Проекция кулоновской силы взаимодействия электрон-ион на направление магнитного поля  $\vec{H}$ :

$$F_H(z - Vt) = -ee_i \left[ \frac{(z - Vt) \cos \theta}{[\rho^2 + (z - Vt)^2]^{3/2}} + \frac{\rho \sin \theta \cos \varphi}{[\rho^2 + (z - Vt)^2]^{3/2}} \right], \quad (2.1)$$

где  $e$  и  $e_i$  — заряды, соответственно, электрона и иона. Смещение  $\xi$  электрона вдоль силовой линии магнитного поля под действием силы  $F_H$  в момент прохождения ионом начала координат, т. е.  $t = 0$ , равно

$$\xi = \frac{1}{m} \int_{-t_0}^0 dt' \int_{-t_0}^{t'} F_H(z - Vt'') dt'', \quad (2.2)$$

где  $m$  — масса электрона,  $t_0$  — момент времени, когда электрон

пересекает дебаевскую сферу вокруг движущегося иона, т. е. момент начала взаимодействия с ионом. Подставив (2.1) в (2.2), перейдя к переменным

$$z' = z - Vt', \quad z'' = z - Vt''$$

и поменяв пределы интегрирования, получаем

$$\xi = -\frac{ee_i}{mV^2} \int_z^{\sqrt{r_D^2 - \rho^2}} dz' \int_{z'}^{\sqrt{r_D^2 - \rho^2}} dz'' \left\{ \frac{z'' \cos\theta}{(\rho^2 + z''^2)^{3/2}} + \frac{\rho \sin\theta \cos\varphi}{(\rho^2 + z''^2)^{3/2}} \right\}. \quad (2.3)$$

После элементарного интегрирования:

$$\xi(\rho_d, z_d) = -\frac{ee_i}{mV^2} \left( f_1(\rho_d, z_d) \cos\theta + \frac{f_2(\rho_d, z_d)}{\rho_d} \sin\theta \cos\varphi \right), \quad (2.4)$$

где

$$f_1(\rho_d, z_d) = \ln \left( \frac{1 + \sqrt{1 - \rho_d^2}}{z_d + \sqrt{\rho_d^2 + z_d^2}} \right) + z_d - \sqrt{1 - \rho_d^2}, \quad (2.5)$$

$$f_2(\rho_d, z_d) = \sqrt{\rho_d^2 + z_d^2} - \rho_d - z_d \sqrt{1 - \rho_d^2}, \quad (2.6)$$

где  $\rho_d = \rho/r_D$ ,  $z_d = z/r_D$ ;  $r_D = \sqrt{\frac{T}{4\pi n e^2}}$  — дебаевский радиус электронов;  $r_{\min} = ee_i/mV^2$  — расстояние наибольшего сближения. Здесь и в дальнейшем индекс  $d$  у величины размерности длины означает, что величина измерена в единицах  $r_D$ ,  $n$  — плотность электронов,  $T$  — температура электронов в энергетических единицах.

Первое и второе слагаемые в (2.4) определяют вклад в смещение  $\xi$  к моменту  $t=0$ , соответственно, от  $z$ - и  $x$ -компонент кулоновской силы, действующей на электрон со стороны иона. Отметим, что первое слагаемое в (2.4) не зависит от угла  $\varphi$ . На рис. 1 приведены графики  $f_1(\rho_d, z_d)$  и  $f_2(\rho_d, z_d)$  как функций  $z_d$  при различных  $\rho_d$ . При этом зависимость  $f_2(\rho_d, z_d)$  от  $\rho_d$  слабая, так что кривые с различными  $\rho_d$  с точностью рис. 1 сливаются. Видно, что смещение вдоль магнитной силовой линии от  $z$ -компоненты силы (член с  $f_1(\rho_d, z_d)$  в (2.4)) электрон набирает в основном вблизи плоскости  $z=0$ . Поэтому произвольная цилиндрическая до взаимодействия поверхность тока электронов радиуса  $\rho_d$ , с осью по траектории иона в результате взаимодействия электронов с онами деформируется так, что круговое сечение цилиндра смещается в сторону отрицательных  $x$  (слагаемое с  $f_1(\rho_d, z_d)$  в (2.4)) и слегка

сплющивается (слагаемое с  $f_2(\rho_d, z_d)$  в (2.4)). Если бы электрон был жестко закреплен, то вследствие потенциальности кулоновского взаимодействия полное изменение импульса иона за время нахождения электронов в дебаевской сфере иона было бы равно нулю. Смещение электронов вдоль силовой линии приводит к изменению импульса иона, т. е. к возникновению тормозящей силы. Малое приращение кулоновской силы, действующей на ион, в момент прохождения через начало координат, обусловленное смещением электрона на  $\xi$  вдоль силовой линии, равно

$$\bar{F}_1 = \left( \frac{\partial \bar{F}_k}{\partial x} \sin\theta + \frac{\partial \bar{F}_k}{\partial z} \cos\theta \right) \xi \quad (2.7)$$

где

$$\bar{F}_k = \frac{ee_i}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (2.8)$$

— кулоновская сила,  $\vec{r}$  — радиус-вектор от иона к электрону. Пусть  $\rho_0 < r_D$  минимальный прицельный параметр при котором еще применимо приближение малых смещений т. е.  $\xi \ll \rho_0$ . Просуммировав (2.7) по всем электронам  $\rho > \rho_0$  внутри дебаевской сферы, получим силу торможения, действующую на ион. Как обычно, введя плотность электронов  $n$ , заменим суммирование интегрированием по начальным параметрам. После интегрирования по  $\varphi$  получим

$$F_x = \frac{\pi e^2 e_i^2 n}{mV^2} \sin\theta \cos\theta \int_{\rho_0}^{r_D} \rho d\rho \int_{-\sqrt{r_D^2 - \rho^2}}^{\sqrt{r_D^2 - \rho^2}} \frac{(2z^2 - \rho^2)f_1 - 3zf_2}{(z^2 + \rho^2)^{5/2}} dz, \quad (2.9)$$

$$F_z = -\frac{\pi e^2 e_i^2 n}{mV^2} \int_{\rho_0}^{r_D} \rho d\rho \int_{-\sqrt{r_D^2 - \rho^2}}^{\sqrt{r_D^2 - \rho^2}} \frac{\{2(2z^2 - \rho^2)f_1 \cos\theta + 3zf_2 \sin^2\theta\}}{(z^2 + \rho^2)^{5/2}} dz, \quad (2.10)$$

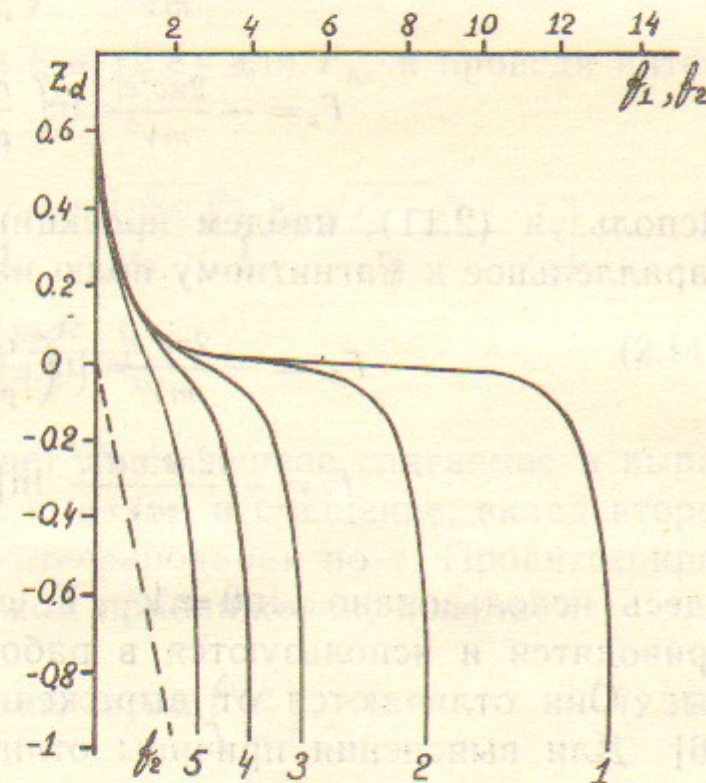


Рис. 1. График функций  $f_1(z_d)$  и  $f_2(z_d)$ . Сплошные кривые — функция  $f_1(z_d)$  при следующих значениях прицельного параметра  $\rho_d$ :  $\rho_d = 0.001$  (1);  $\rho_d = 0.01$  (2);  $\rho_d = 0.05$  (3);  $\rho_d = 0.1$  (4);  $\rho_d = 0.2$  (5).

где  $f_1$  и  $f_2$  определены (2.5), (2.6). Проведя элементарное интегрирование в логарифмическом приближении (при  $\ln(r_l/\rho_0) \gg 1$ ), получаем

$$F_x = -\frac{2\beta y^2 e_i^2}{mV^2} \ln\left(\frac{r_l}{\rho_0}\right) \sin\theta \cos\theta, \quad (2.11)$$

$$F_z = -\frac{2\pi e^2 e_i^2}{mV^2} \ln\left(\frac{r_D}{\rho_0}\right) \sin^2\theta.$$

Используя (2.11), найдем проекции силы на перпендикулярное и параллельное к магнитному полю направления:

$$F_{\perp} = -\frac{2\pi e^2 e_i^2}{mV^2} \ln\left(\frac{r_l}{\rho_0}\right) \frac{V^2 - V_{\parallel}^2}{V^2} \frac{V}{V}, \quad (2.12)$$

$$F_{\parallel} = -\frac{2\pi e^2 n e^2 e_i^2}{mV^2} \ln\left(\frac{r_l}{\rho_0}\right) \frac{2V_{\parallel}^2}{V^2} \frac{V}{V}.$$

Здесь использовано  $\sin\theta = V_{\perp}/V$ ,  $\cos\theta = V_{\parallel}/V$ . Выражения (2.12) приводятся и используются в работах [9, 10, 11, 12] как основные. Они отличаются от выражений (1.1), полученных в работе [6]. Для выяснения причины отличия выражений (1.1) и (2.12) приведем следующие качественные соображения.

Как отмечалось выше, цилиндрическая до взаимодействия поверхность тока электронов радиуса  $\rho_0$  вокруг траектории иона, согласно (2.4) и рис. 1, имеет характерный излом в окрестности иона. Так что в кильватерной области иона (за ним) цилиндрическая граница как бы смещена по отношению к исходной. Следовательно, весь цилиндрический объем  $\rho < \rho_0$ , заполненный электронами, тоже имеет этот излом и смещение, что приводит к наличию определенного электрического поля, действующего на ион. В выражениях (2.11), а значит и (2.12) вклад этого поля в силу торможения не учтен. Этот вклад следует найти отдельно и добавить к вкладу (2.11), обусловленному электронами, находящимися вне цилиндра радиуса  $\rho_0$ . Будем считать, что плотность электронов в цилиндре  $\rho < \rho_0$  однородна. Ввиду малости смещения ( $\sim \xi$ ) кильватерной части цилиндра, возникающее электрическое поле можно определить, как поле добавочного слоя электронов толщины  $\xi$  на поверхности цилиндра радиуса  $\rho_0$ . Искомая добавочная сила

$$F_{bx} = n \int \xi(z, \varphi) \cos\alpha F_{Kx} ds. \quad (2.13)$$

Здесь  $F_{Kx}$  — x-компонента кулоновской силы;  $\alpha$  — угол между ради-

ус-вектором  $\vec{r}$  и направлением магнитного поля  $\vec{H}$ ;  $ds$  — площадь элемента поверхности цилиндра. Учитывая, что на цилиндрической поверхности

$$\cos\alpha = \sin\theta \cos\varphi,$$

используя выражения (2.4) для  $\xi$  и (2.8) для  $F_{Kx}$  и проведя интегрирование по  $\varphi$ , получаем

$$F_{bx} = -\frac{\pi e^2 e_i^2 n}{mV^2} \sin\theta \cos\theta \int_{-r_0}^{r_0} \left[ \ln\left(\frac{z + \sqrt{\rho_0^2 + z^2}}{2r_D}\right) + \frac{\sqrt{r_D^2 - \rho^2}}{r_D} - \frac{z}{r_D} \right] \times \frac{\rho_0 dz}{(\rho_0^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (2.14)$$

Видим, что в силу  $F_{bx}$  вклад дает лишь первое слагаемое в выражении (2.4) для смещения  $\xi$ , т. е. излом и смещение, вклад второго слагаемого зануляется при интегрировании по  $z$ . Проинтегрировав (2.14) по  $z$  в логарифмическом приближении, получаем

$$F_{bx} = -\frac{2\pi e^2 e_i^2}{mV^2} \sin\theta \cos\theta \ln\left(\frac{r_D}{\rho_0}\right), \quad (2.15)$$

Это выражение в точности совпадает с  $F_x$  по (2.11). Таким образом, в принятых предположениях, учет поля электронов, находящихся в цилиндре радиуса  $\rho_0$  с изгибом и смещением, дает точно такой же вклад в силу  $F_x$ , как вклад всех электронов, находящихся внутри дебаевской сферы вне этого цилиндра.

Складывая (2.11) и (2.15), получаем

$$F_x = -\frac{2\pi e^2 e_i^2}{mV^2} \ln\left(\frac{r_D}{\rho_0}\right) 2\sin\theta \cos\theta, \quad (2.16)$$

$$F_z = -\frac{2\pi e^2 e_i^2}{mV^2} \ln\left(\frac{r_D}{\rho_0}\right) \cdot \sin^2\theta.$$

Выписав проекцию этой силы на перпендикулярное и параллельное к полю направления и полагая  $\rho_0 = r_{\text{ин}}$ , получим формулы (1.1), т. е. результат работы [6].

Отметим, что другим методом соотношение выражений (1.1) и (2.12) обсуждалось ранее в работе [7]. Были приведены аргументы в пользу правильности формул (1.1). Однако при этом априорно считалось, что внутренний цилиндр электронов под действием поля иона смещается как целое на некоторое расстояние по маг-

нитному полю. На самом деле, как было показано выше, смещается в основном лишь кильватерная часть цилиндра.

Напомним, что проведенное выше рассмотрение справедливо, лишь если смещение электрона  $\xi$  много меньше расстояния до иона в течение всего времени взаимодействия. При  $\theta \sim 1$  из (2.4) следует, что для этого необходимо

$$\frac{r_{\min}}{r_D} f_1 \ll \frac{\rho}{r_D}, \quad \frac{r_{\min}}{r_D} f_2 \ll \frac{\rho}{r_D}. \quad (2.17)$$

Из первого условия получаем

$$-2 \left[ \ln \left( \frac{r_{\min}}{r_D} \frac{\rho}{r_{\min}} \right) + 1 \right] \ll \frac{\rho}{r_{\min}}. \quad (2.18)$$

При  $r_{\min}/r_D \simeq 10^{-5}$  величина левой части в (2.18) меняется в пределах 17—12 при изменении  $\rho/r_{\min}$  в интервале 10—100. Так что условие  $\xi \ll \rho$  будет выполнено при  $\rho/r_{\min} \gg 14$ . Второе условие в (2.17) менее ограничительно. Таким образом, в единицах  $r$  использованное приближение несправедливо в довольно большой области. К сожалению, определить аналитически вклад этой области не удастся. Для того, чтобы получить представление о величине этого вклада, было проведено численное моделирование процесса торможения иона замагниченными электронами в приближении парных столкновений.

Введем безразмерные переменные

$$\bar{r}_d = \frac{r}{r_D}, \quad t_d = \frac{t}{r_D/V}, \quad \bar{F}_d = \frac{F}{mV^2/r_D}.$$

В этих переменных сила, действующая на электрон со стороны иона,

$$F_{Kd} = r_{\min d} \frac{x_d}{[x_d^2 + y_d^2 + (z_d - t_d)^2]^{3/2}}, \quad (2.20)$$

$$F_{Kd} = r_{\min d} \frac{z_d - t_d}{[x_d^2 + y_d^2 + (z_d - t_d)^2]^{3/2}},$$

где

$$r_{\min d} = r_{\min}/r_D.$$

Смещение электрона вдоль силовой линии под действием этой силы определяется уравнением

$$\frac{d^2 \xi_d}{dt_d^2} = -r_{\min d} \frac{(z_d - t_d) \cos \theta + x_d \sin \theta}{[x_{d0}^2 + y_d^2 + (z_d - t_d)^2]^{3/2}}, \quad (2.21)$$

где

$$x_d = \xi_d \sin \theta, \quad z_d = z_{0d} + \xi_d \cos \theta, \quad z_{0d} = z_{0d} - x_{0d} \operatorname{ctg} \theta.$$

Координаты электрона в момент его вхождения в дебаевскую сферу иона:

$$x_{0d} = \rho_{0d} \cos \varphi, \quad y_{0d} = \rho_{0d} \sin \varphi, \quad z_{0d} = \sqrt{1 - \rho_{0d}^2},$$

$\xi_d$  — безразмерное расстояние от электрона вдоль силовой линии до плоскости  $(y, z)$ ,  $\xi_{0d}$  — расстояние  $\xi_d$  в начальный момент. Смещение электрона в ходе взаимодействия от начального положения

$$\xi_d = \xi_d - \xi_{0d}.$$

Если оно мало, то координаты  $x_d, z_d$  в нулевом приближении по смещению  $\xi_d$  равны  $x_{0d}, z_{0d}$ , так что (2.20) переходит в (2.1), а интегрирование (2.21) приводит к (2.2), т. е. получаем приближение малых смещений. Сила, действующая на ион со стороны электронов,

$$\bar{F}_i = nV \left( \int_{t_{in}}^{t_{out}} \bar{F}_K dt \right) ds = \frac{e^2 e_i^2 n}{mV^2} \frac{1}{r_{\min d}^2} \int \left( \int_{t_{in d}}^{t_{out d}} \bar{F}_{Kd}(\rho_d, \varphi) dt_d \right) \rho_d d\rho_d d\varphi. \quad (2.22)$$

Здесь интегрирование идет по начальному прицельному параметру  $\rho_d$ . Момент времени  $t_{in}$  — соответствует моменту входа электрона в дебаевскую сферу иона, момент  $t_{out}$  — моменту выхода из нее.

Заменим в (2.22) интегрирование по  $\varphi$  суммированием по вкладам в силу торможения иона от  $N$  электронов, равномерно распределенных по окружности радиуса  $\rho_d$ :

$$\bar{F}_i(r_{\min d}, \theta) = \frac{2\pi n e^2 e_i^2}{mV^2} \bar{\mathcal{F}}(r_{\min d}, \theta), \quad (2.23)$$

$$\bar{\mathcal{F}}(r_{\min d}, \theta) = \frac{1}{r_{\min d}} \int_{r_{\min d}}^1 \bar{S}(r_{\min d}, \theta, \rho_d) \rho_d d\rho_d, \quad (2.24)$$

$$\bar{S}(r_{\min d}, \theta, \rho_d) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \bar{f}_d \left( r_{\min d}, \theta, \rho_d, \varphi_n = 2\pi \frac{n}{N} \right), \quad (2.25)$$

$$\bar{f}_d(r_{\min d}, \theta, \rho_d, \varphi_n) = \frac{1}{r_{\min d}} \int_{t_{in}}^{t_{out}} \bar{F}_{Kd} \left( \rho_d, \varphi_n = 2\pi \frac{n}{N} \right) dt_d \quad (2.26)$$

где  $\bar{F}_{ка}$  — безразмерная кулоновская сила (2.20) Функция  $\bar{f}_d$  определяет вклад в силу торможения от электрона, имеющего начальный прицельный параметр  $\rho_d$  и азимутальный угол  $\varphi_n = 2\pi n/N$ .  $\bar{S}(r_{min d}, \theta, \rho_d)$  определяет усредненный на один электрон вклад в силу торможения от электронов, первоначально находившихся на окружности радиуса  $\rho_d$  по ходу движения иона. Очевидно, что, в силу симметрии относительно плоскости  $(\vec{V}, \vec{H})$ , усреднение в (2.25) можно проводить лишь по электронам полуокружности  $0 \leq \varphi \leq \pi$ . Для случая  $\theta = 50^\circ$  и  $r_{min d} = 10^{-5}$  на рис. 2, 3  $\bar{f}_{dx}(\rho_d, \varphi)$  и  $\bar{f}_{dz}(\rho_d, \varphi)$  представлены как функции  $\varphi$  при различных значениях прицельного параметра  $\rho_d$ . На рис. 4 представлен  $\ln S_x(r_{min d}, \theta, \rho_d)$  как функция от  $\ln \rho_d$  при  $r_{min d} = 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}$  и углах  $\theta = 10$  и  $50^\circ$ . На рис. 5 для случая  $r_{min d} = 10^{-5}$  и  $\theta = 50^\circ$  качественно представлены траектории нескольких электронов в системе покоя иона. Окружность соответствует дебаевскому радиусу. Точно отмечено лишь положение  $\theta_D$  точки вылета электрона из дебаевской сферы. На рис. 6 для того же случая представлена зависимость угла отклонения  $\theta_D$  электрона в результате взаимодействия с ионом в системе покоя иона от прицельного параметра  $\rho_{0d}$  при различных значениях азимутального угла  $\varphi$ . Видно, что при малых  $\rho$  угол отклонения  $\theta_d$  мало зависит от угла  $\varphi$ , т. е. все электроны окружности малого радиуса в результате взаимодействия с ионом смещаются вдоль силовых линий магнитного поля примерно одинаково. Поэтому, как видно из рис. 2,  $\bar{f}_{dx}$  при малых  $\rho_d$  (линия  $\rho_d \approx 10^{-6}$ ) практически не зависит от  $\varphi$ . При этом  $\bar{f}_{dx}$  примерно постоянно при увеличении  $\rho_d$  до определенной величины, зависящей от  $\theta$  и  $r_{min d}$ . Соответственно в этом интервале  $\rho_d$ , как видно на рис. 4, величина  $S_{dx}$  постоянна. С увеличением  $\rho_d$ , электроны из окрестности  $\varphi \approx 0$ , двигаясь вдоль силовой линии, проходят от иона на все более близком расстоянии, поэтому  $\bar{f}_{dx}(\rho_d, \varphi \approx 0)$  растет с ростом  $\rho_d$ . Электроны из окрестности  $\varphi \approx 180^\circ$  с ростом  $\rho_d$  проходят от иона на все более далеком расстоянии, поэтому  $\bar{f}_{dx}(\rho_d, \varphi \approx 180^\circ)$  с ростом  $\rho_d$  уменьшается (см. рис. 1). Вследствие этого средняя от  $\bar{f}_{dx}$ , т. е.  $S_{dx}$ , меняется медленно. Для электронов из окрестности  $\varphi \approx 0$  существует некоторое  $\rho_c$ , такое, что электроны с  $\rho < \rho_c$  обходят ион при  $x < 0$ , при этом  $\bar{f}_{dx} < 0$ , а электроны с  $\rho > \rho_c$  — при  $x > 0$ , при этом  $\bar{f}_{dx} > 0$ . Электроны из окрестности  $\varphi \approx 0$ ,  $\rho = \rho_c$  испытывают «близкое» столкновение с ионом. При прохождении точки  $\rho_c$  ( $\varphi \approx 0$ ) происходит переброс  $\bar{f}_{dx}$  от больших отрицательных величин до больших положительных. В качестве примера укажем, что при  $r_{min d} = 10^{-5}$  и  $\theta = 50^\circ$   $\rho_{cd} = 0.5635 \cdot 10^{-4}$ ,

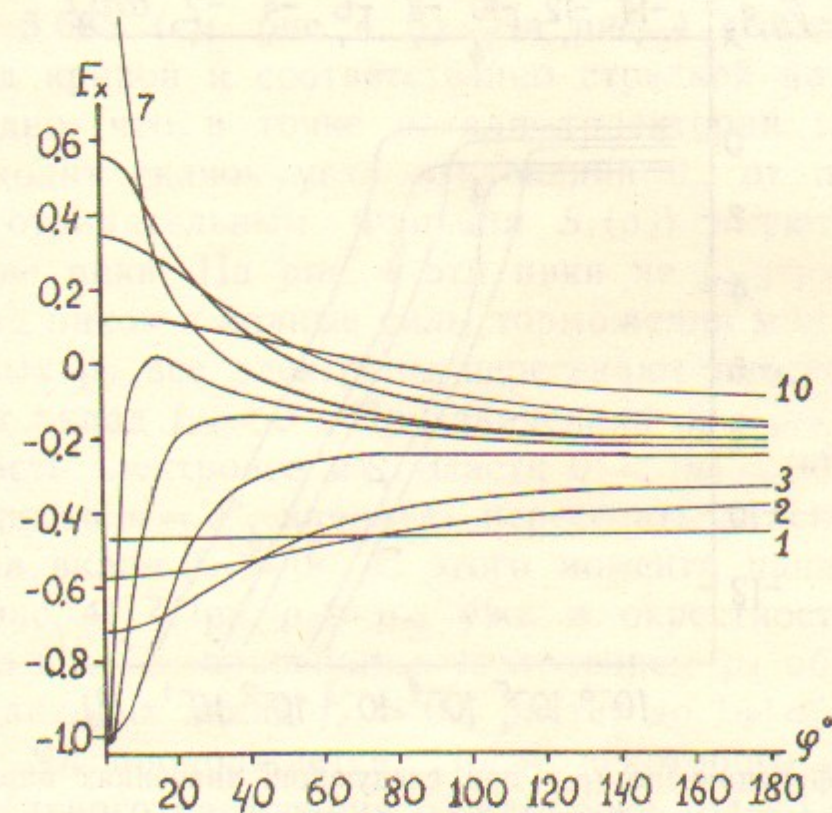


Рис. 2. График функции  $\bar{f}_{dx}(\varphi)$  при следующих значениях параметра взаимодействия  $r_{min d}$ :  $10^{-6}$  (1);  $10^{-5}$  (2);  $2 \cdot 10^{-5}$  (3);  $4 \cdot 10^{-5}$  (4);  $5 \cdot 10^{-5}$  (5);  $5.44 \cdot 10^{-5}$  (6);  $5.64 \cdot 10^{-5}$  (7);  $8 \cdot 10^{-5}$  (8);  $10^{-4}$  (9);  $2.0 \cdot 10^{-4}$  (10).

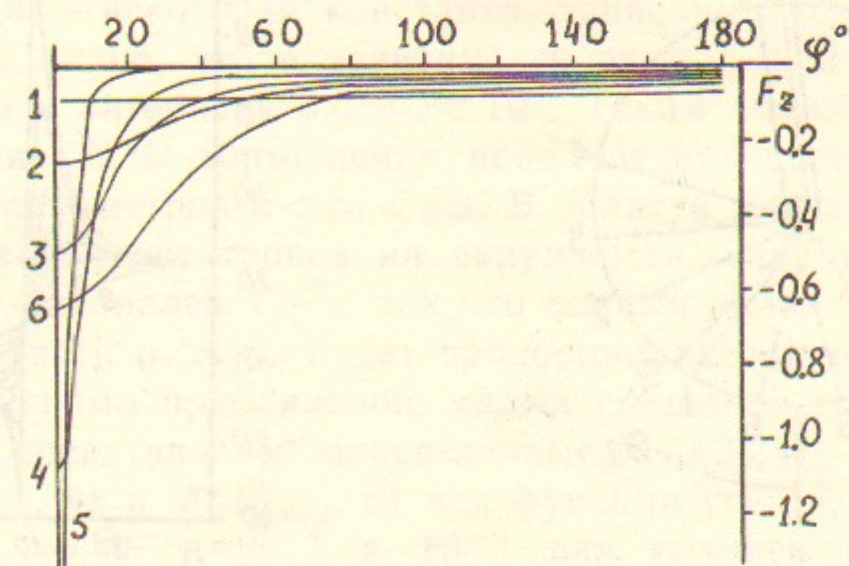


Рис. 3. График функции  $\bar{f}_{dz}(\varphi)$  при следующих значениях параметра взаимодействия  $r_{min d}$ :  $10^{-5}$  (1);  $2 \cdot 10^{-5}$  (2);  $3 \cdot 10^{-5}$  (3);  $4 \cdot 10^{-5}$  (4);  $5 \cdot 10^{-5}$  (5);  $6 \cdot 10^{-5}$  (6).

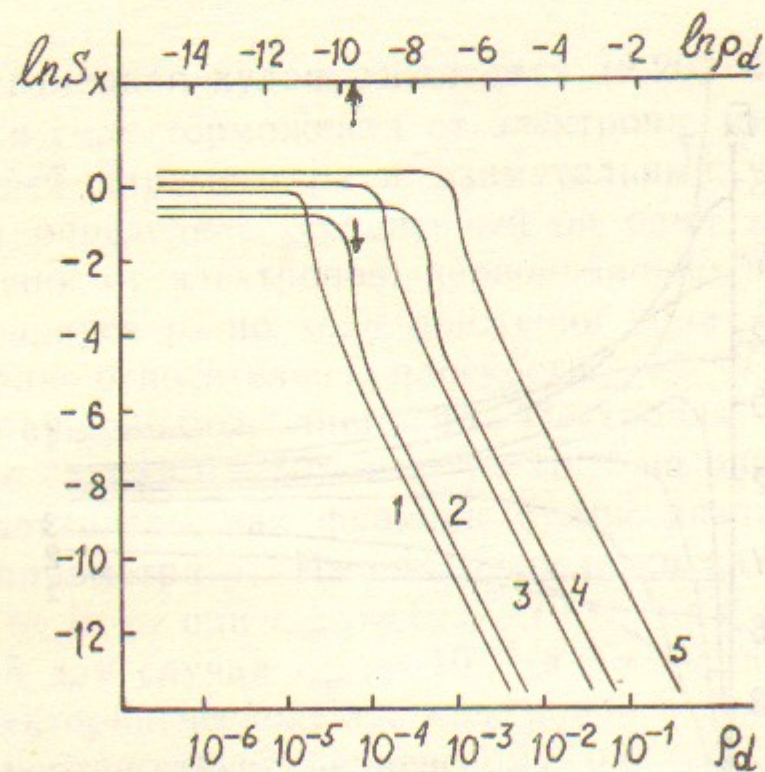


Рис. 4. График функции  $\ln S_x(\rho_d)$  при следующих значениях параметра взаимодействия  $r_{\min d}$  и угла  $\theta$ :

	1	2	3	4	5
$r_{\min d}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-4}$	$10^{-4}$	$10^{-3}$
$\theta$	$10^\circ$	$50^\circ$	$10^\circ$	$50^\circ$	$10^\circ$

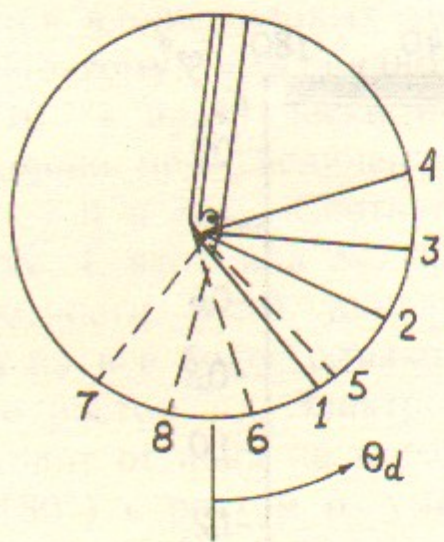


Рис. 5. Качественная картина траекторий электронов в системе покоя иона. Случай  $r_{\min d} = 10^{-5}$ ;  $\theta = 50^\circ$ . Траектории соответствуют следующим значениям прицельного параметра  $\rho_{0d}$ :  $10^{-5}$  (1);  $2.0 \cdot 10^{-5}$  (2);  $3.7 \cdot 10^{-5}$  (3);  $5.0 \cdot 10^{-5}$  (4);  $5.6 \cdot 10^{-5}$  (5);  $5.65 \cdot 10^{-5}$  (6);  $5.7 \cdot 10^{-5}$  (7);  $10^{-4}$  (10);

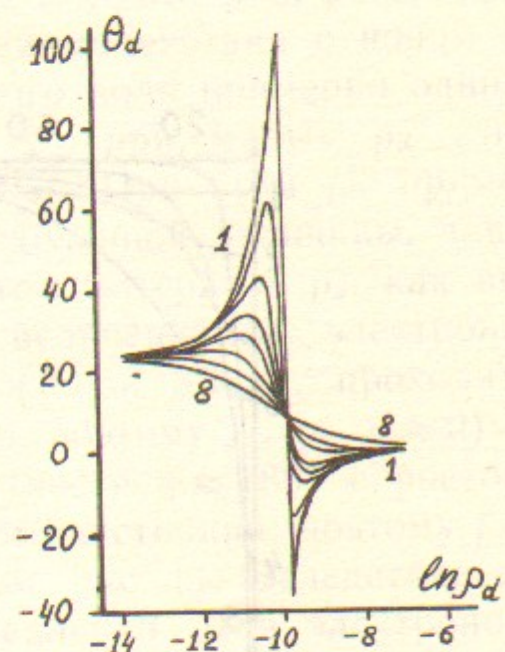


Рис. 6. График угла отклонения электрона  $\theta_d(\rho_d)$  в системе иона при следующих значениях азимутального угла начального положения электрона  $\varphi$ :  $10^\circ$  (1);  $20^\circ$  (2);  $30^\circ$  (3);  $40^\circ$  (4);  $50^\circ$  (5);  $60^\circ$  (6);  $90^\circ$  (7);  $180^\circ$  (8).

т. е.  $\rho_{c/\min d} = 5.635$  (см. рис. 4, 5). На рис. 4 эта точка отмечена стрелкой над кривой и соответственно стрелкой на оси  $\ln \rho_d$ . На рис. 5, 6 видно, что в точке  $\rho_c$  для траекторий из окрестности  $\varphi = 0$  происходит скачок угла отклонения  $\theta_d$  от положительных значений к отрицательным. Функции  $S_x(\rho_d)$  имеют в точках  $\rho_{cd}$  высокие узкие пики. На рис. 4 эти пики не вычерчены ввиду их узости. Вклад пиков в полные силы торможения мал.

При малых  $\rho_d$  все электроны пересекают плоскость  $z=0$  при  $x < 0$  и дают вклад  $f_{dx} < 0$ . При значениях  $\rho_d < \rho_{cd}$ , но уже близких к  $\rho_{cd}$ , часть электронов из области  $0^\circ < |\varphi| < 90^\circ$ , за исключением окрестности  $\varphi = 0^\circ$ , начинает пересекать плоскость  $z=0$  при  $x > 0$ , давая вклад  $f_{dx} > 0$ . С этого момента начинается резкий спад  $S_{dx}$  (рис. 4). При  $\rho_d > \rho_{cd}$  уже и окрестность  $\varphi \approx 0^\circ$  дает вклад с  $f_{dx} > 0$ . С дальнейшим увеличением  $\rho_d$  область углов  $\varphi$  электронов, дающих вклад  $f_{dx} > 0$ , растет до  $|\varphi| \leq 90^\circ$ . При этом резкий спад  $S_{dx}$  продолжается. После некоторого  $\rho_{kd}$  спад  $S_{dx}$  с ростом прицельного расстояния  $\rho_d$  идет уже только за счет уменьшения взаимодействия каждого отдельного электрона с ионом. В этой области ( $\rho_{kd} < \rho_d < 1$ ), как видно из рис. 4, зависимость  $\ln S_x$  от  $\ln \rho_d$  становится линейной:

$$\ln S_x = C(r_{\min d}, \theta) - 2 \ln \rho_d, \quad (2.27)$$

где  $C(r_{\min d}, \theta)$  — некоторая константа, зависящая от  $r_{\min d}$  и  $\theta$ . Из рис. 4 также видно, что в зависимости от  $r_{\min d}$  и  $\theta$  величина  $\rho_{kd}$  лежит где-то в интервале  $5 \leq \rho_{kd} < 10$ . Таким образом, численное моделирование силы торможения иона следует вести по области прицельных параметров  $0 < \rho_d < \rho_{kd}$ . В области же  $\rho_d > \rho_{kd}$  вклад в силу торможения электронов на окружности, как это следует из (2.27), пропорционален  $1/\rho_d^2$ , так что полный вклад в силу торможения от области  $\rho_d > \rho_{kd}$  будет пропорционален  $\ln \rho_{kd}$ . В области  $\rho_d > \rho_{kd}$  применимо приближение малых смещений электронов. На рис. 7, 8, 9 представлены определенные в (2.23) безразмерные силы  $\mathcal{F}_x(r_{\min d}, \theta)$  и  $\mathcal{F}_z(r_{\min d}, \theta)$  как функции угла  $\theta$ , соответственно, при  $r_{\min d} = 10^{-5}$ ,  $10^{-4}$  и  $10^{-3}$  для случаев положительно ( $e_i > 0$ ) и отрицательно ( $e_i < 0$  — антинейтроны) заряженных ионов. Согласно (2.11), полученные аналитически в приближении малых смещений при  $\rho_0 = r_{\min d}$ , функции  $\mathcal{F}_x$  и  $\mathcal{F}_z$  имеют вид:

$$\mathcal{F}_x = \ln(1/r_{\min d}) 2 \sin \theta \cos \theta, \quad (2.28)$$

$$\mathcal{F}_z = \ln(1/r_{\min d}) \sin^2 \theta.$$



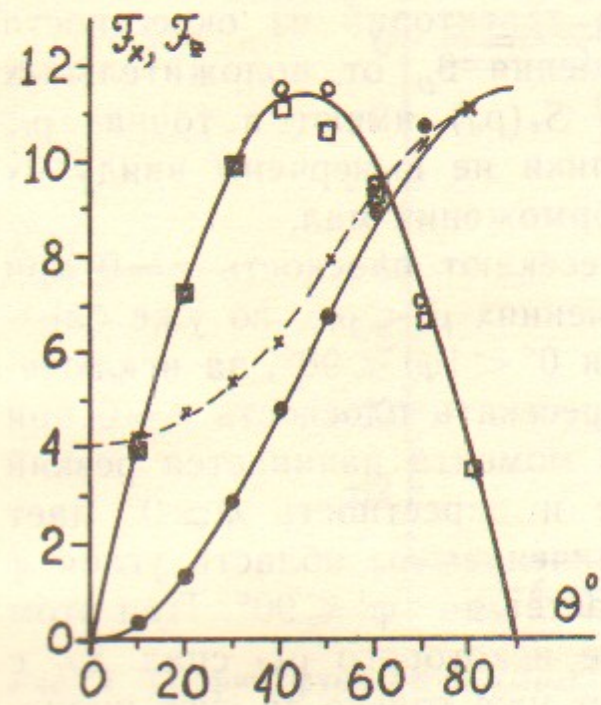


Рис. 7. График функций  $\mathcal{F}_x$  и  $\mathcal{F}_z$  при  $r_{\min d} = 10^{-5}$ . Значения, полученные численным моделированием, изображены знаками:  $\circ$   $e_i > 0$  для  $\mathcal{F}_x$ ;  $\bullet$   $e_i > 0$  для  $\mathcal{F}_z$ ;  $\square$   $e_i < 0$  для  $\mathcal{F}_x$ ;  $\times$   $e_i < 0$  для  $\mathcal{F}_z$ .

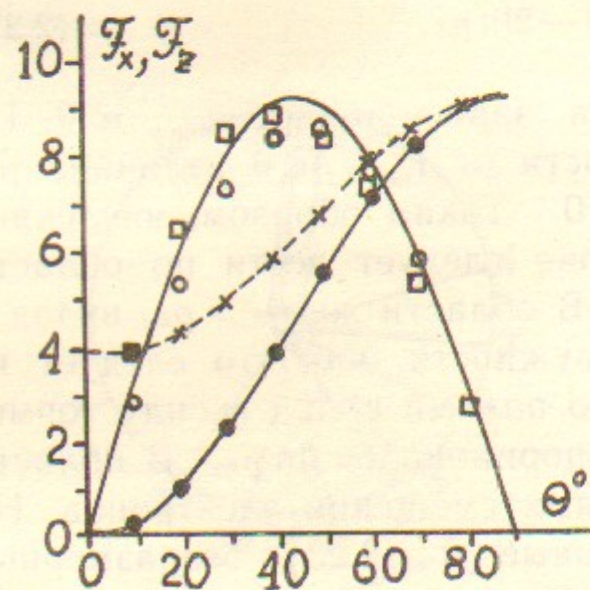


Рис. 8. То же, что и на рис. 7, но при  $r_{\min d} = 10^{-4}$ .

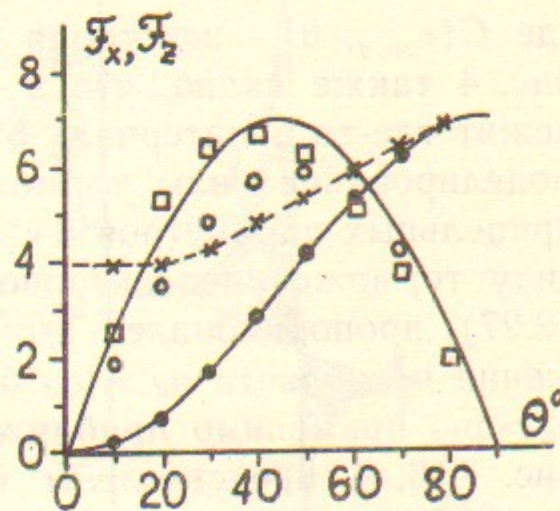


Рис. 9. То же, что и на рис. 7, но при  $r_{\min d} = 10^{-3}$ .

Кривые, построенные по этим формулам, проведены сплошными линиями и представлены результаты, полученные численным моделированием.

Очевидно что чем слабее взаимодействие, т. е. чем меньше  $r_{\min d}$ , тем меньше  $\rho_{kd}$ , и, следовательно, тем в большей области  $\rho_{kd} < \rho_d < 1$  применимо приближение малых смещений (2.11), и тем меньше будет отличие результатов численного моделирования от (2.11). Действительно, в случае  $r_{\min d} = 10^{-5}$  (рис. 7) результаты, полученные при моделировании в случае  $e_i > 0$  (кружки и зачерненные кружки), в точности легли на кривые (2.28). С ростом  $r_{\min d}$  растет  $\rho_{kd}$ , и увеличивается область, где приближение малых смещений неприменимо. На рис. 8, 9 видно, что с ростом  $r_{\min d}$  растет отклонение результатов численного моделирования от кривых приближения малых смещений.

Как показано в работе [12], процесс торможения частиц с  $e_i < 0$  при малых углах  $\theta$  и малых прицельных параметрах  $\rho_d < r_{\min d}$  существенно отличается от торможения частиц с  $e_i > 0$ . Это отличие проистекает от того, что при  $\theta = 0$  электроны проскакивают мимо иона с  $e_i > 0$  при любом  $\rho_d$ , а при  $e_i < 0$  электроны с  $\rho_d < r_{\min d}$  отражаются. Очевидно, что сила торможения иона с  $e_i < 0$  при  $\theta = 0$  [12]:

$$F_z = 2mV^2 nV^2 \pi r_{\min d}^2 = 4 \frac{2\pi n e^2 e_i^2}{mV^2},$$

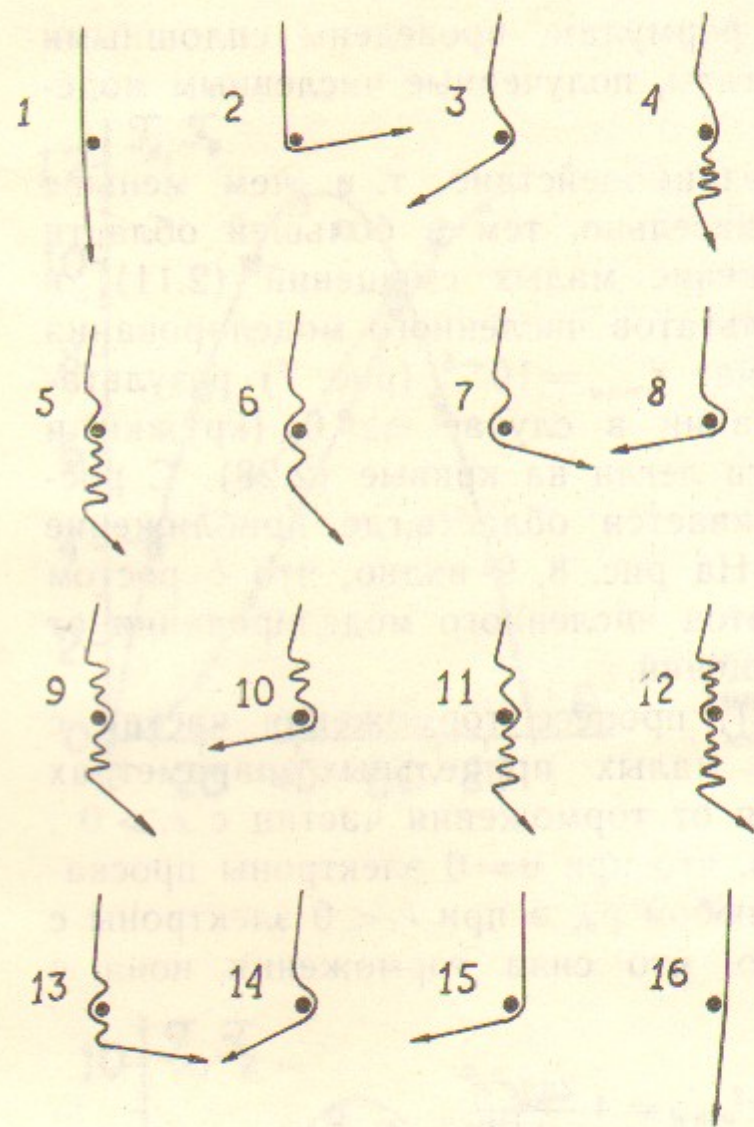
т. е.

$$\mathcal{F}_z = F_z \left( \frac{2\pi n e^2 e_i^2}{mV^2} \right)^{-1} = 4.$$

На рис. 7, 8, 9 видно, что при  $e_i > 0$  численное моделирование как раз и дает этот результат, ибо видно, что кривые  $\mathcal{F}_z \rightarrow 4$  при  $\theta \rightarrow 0$ .

Таким образом, проведенное численное моделирование показало справедливость формул (1.1), полученных в работе [6], там, где справедливо приближение малых смещений, за исключением величины  $\mathcal{F}_z$  в случае  $e_i < 0$ .

Для случая  $e_i > 0$ ,  $r_{\min d} = 10^{-5}$ ,  $\theta = 50^\circ$  несколько траекторий электронов представлены на рис. 5. Аналогично выглядят траектории и при  $r_{\min d} = 10^{-4}$ ,  $10^{-3}$ ,  $10^{-2}$  при углах  $\theta \leq 60^\circ$ . Однако при больших углах  $\theta$  появляются траектории иного типа. В качестве примера на рис. 10 качественно представлены траектории электронов для случая  $r_{\min d} = 10^{-3}$ ,  $\theta = 79^\circ$  с начальными положениями на линии  $\varphi = 180^\circ$ ,  $\varphi = 0^\circ$  при различных значениях величины при-



$\varphi = 0^\circ$

N	$\rho_d$	$\theta_D$
1	$0.787 \cdot 10^{-4}$	1.15
2	$0.79 \cdot 10^{-4}$	7.64
3	$0.1 \cdot 10^{-3}$	20.0
4	$0.2 \cdot 10^{-3}$	77.7
5	$0.4 \cdot 10^{-3}$	-76.0
6	$0.54 \cdot 10^{-3}$	26.0
7	$0.6 \cdot 10^{-3}$	-75.3
8	$0.1 \cdot 10^{-2}$	10.03
9	$0.11 \cdot 10^{-2}$	14.6
10	$10 \cdot 10^{-2}$	33.0
11	$0.2 \cdot 10^{-2}$	-67.3
12	$0.242 \cdot 10^{-2}$	-72.3
13	$0.45 \cdot 10^{-1}$	0.0
14		

$\varphi = 180^\circ$

N	$\rho_d$	$\theta_D$
1	$0.44 \cdot 10^{-1}$	0.0
2	$0.2 \cdot 10^{-3}$	94.0
3	$0.1 \cdot 10^{-3}$	-54.3

Рис. 10. Качественная картина траекторий электронов в системе покоя иона. Случай  $r_{\min d} = 10^{-3}$ . Соответствующие отдельным кривым значения параметров указаны в таблице.

N — номер траекторий;  $\varphi$  — азимутальный угол начального положения электрона;  $\rho_d$  — величина прицельного параметра;  $\theta_D$  — угол отклонения электрона в системе покоя иона.

цельного параметра  $\rho_{0d}$ . Величина конечного угла отклонения  $\theta_d$  в системе покоя иона указана для каждой траектории в таблице к рис. 10. (Обозначение угла  $\theta_d$  см. рис. 5.) Видно, что некоторые траектории имеют явно выраженный осциллирующий характер. Будем называть траекторию электрона в системе покоя иона осциллирующей (ОТ), если она пересекает плоскость ( $yz$ ) не менее трех раз. Отметим, что осциллирующий участок траектории имеет, в основном, продольный размер (по движению иона) существенно меньше, чем  $r_{\min}$  (рассматривались траектории в области  $r_{\min d} \leq 0.1$ ). Численные расчеты траекторий показали, что при заданном  $r_{\min d}$  существует некоторый характерный угол  $\theta_{0s}(r_{\min d})$  такой, что при  $\theta < \theta_{0s}$  траектории имеют нормальный вид (рис. 5), а при  $\theta > \theta_{0s}$  появляется область прицельных параметров, дающая ОТ. Размер этой области, вообще говоря, растет с ростом угла  $\theta > \theta_{0s}$ . При  $r_{\min d} = 10^{-5}$   $\theta_{0s}(r_{\min d} = 10^{-5}) \approx 75^\circ$ , при  $r_{\min d} = 10^{-3}$   $\theta_{0s}(r_{\min d} = 10^{-3}) \approx 65^\circ$ . На рис. 11 изображены области прицельных параметров, дающие ОТ для случая  $\theta = 79^\circ$  и  $r_{\min d} = 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}$ . При  $r_{\min d} = 10^{-5}$  область прицельных

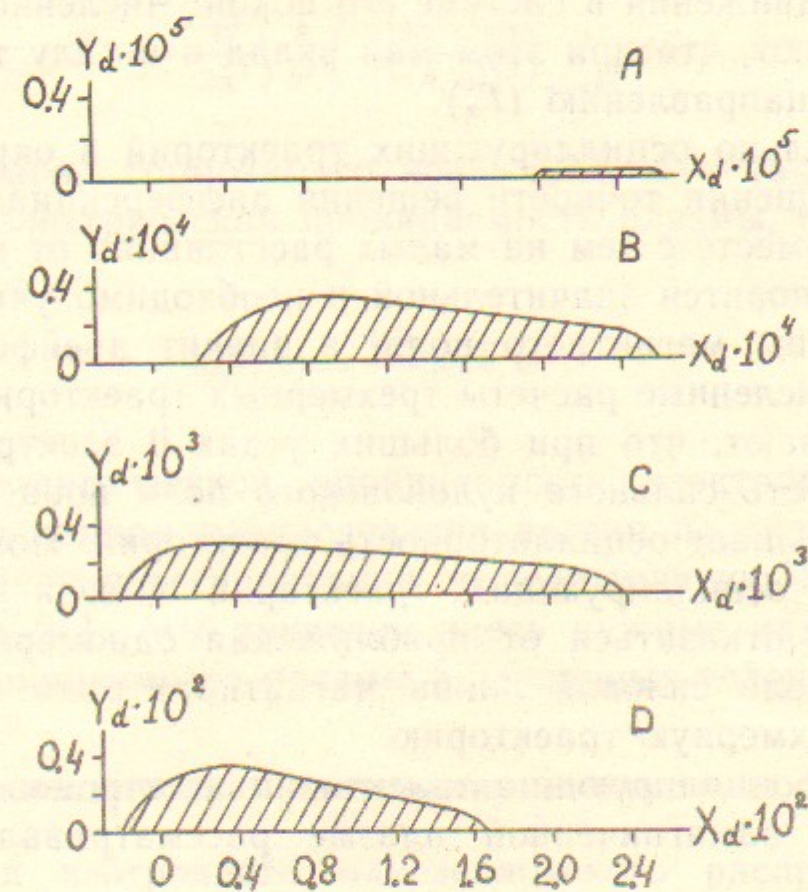


Рис. 11. Области прицельных параметров осциллирующих траекторий при угле  $\theta = 79^\circ$  и при  $r_{\min d}$ , равном  $10^{-5}$  (A);  $10^{-4}$  (B);  $10^{-3}$  (C);  $10^{-2}$  (D).

параметров ОТ—узкая полоска вдоль луча  $\theta=0$  в пределах  $0.2 \cdot 10^{-4} < \rho_d < 0.25 \cdot 10^{-4}$ .

Рассмотрение траекторий электронов с прицельными параметрами на луче  $\varphi=0$ , показывает, что с изменением  $\rho_d$  траектория электрона обходит ион то при  $x > 0$ , то при  $x < 0$ . Малые подобласти значений  $\rho_{0d}$ , в которых происходят эти изменения обхода соответствуют «близким» столкновениям. Соответствующие траектории могут терять осциллирующий характер, как только в кильватерной части траектории так и на всем протяжении, и иметь вид траекторий рис. 5 с большими углами отклонения. Таким образом, при больших  $r_{\min d}$  и  $\theta$  в области прицельных параметров ОТ может быть много подобластей прицельных параметров, соответствующих «близким» столкновениям. Однако общая площадь этих подобластей незначительна, так что эти «множественные близкие столкновения» не дают существенного вклада в торможение. Отметим также, что мал вклад в продольную по скорости иона силу торможения и от сильно осциллирующих траекторий, ибо такие траектории вблизи иона достаточно симметричны относительно иона по оси движения в системе его покоя. Численное моделирование показывают, что при этом мал вклад и в силу торможения по поперечному направлению ( $F_x$ ).

Расчет сильно осциллирующих траекторий в окрестности иона требует повышения точности решения дифференциального уравнения (2.21). Вместе с тем на малых расстояниях от иона кулоновская сила становится значительной и необходимо учитывать конечность величины магнитного поля, а значит дрейфовое движение электрона. Численные расчеты трехмерных траекторий в этих условиях показывают, что при больших углах  $\theta$  электроны, дрейфуя, обходят область сильного кулоновского поля иона, не попадая в нее, что уменьшает осцилляторность траекторий. Поэтому при расчете сильно осциллирующих траекторий вблизи иона следует, по-видимому, отказаться от приближения одномерного движения электрона вдоль силовой линии магнитного поля и рассчитывать реальную трехмерную траекторию.

Впервые осциллирующие траектории электронов и их вклад в диффузию в замагниченной плазме рассматривались в работе [17].

### 3. ТЕНЗОР ПРОДОЛЬНОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ЭЛЕКТРОННОЙ ПЛАЗМЫ

Основной вклад в потери энергии иона при его нерелятивистском движении в электронной плазме с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_{ik}(\vec{k}, \omega)$  вносят поляризационные потери, связанные с поляризацией плазмы полем иона и возбуждением продольных плазменных волн. Мы ограничимся случаем, когда можно считать, что тормозимый пробный ион движется прямолинейно с заданной скоростью  $\vec{V}$ , не учитывая искривления его траектории во внешнем магнитном поле и рассеяния на частицах плазмы, т. е. считаем массу пробного иона бесконечной. Известно [20], что скорость потерь энергии при этом равна

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{e_i^2}{2\pi^2} \int \frac{\vec{k}\vec{V}}{k^2} \left( \frac{\text{Im}\epsilon_e(\vec{k}, \omega)}{|\epsilon_e(\vec{k}, \omega)|^2} \right)_{\omega=\vec{k}\vec{V}} d\vec{k}. \quad (3.1)$$

Соответственно, сила динамического торможения

$$\vec{F} = -\frac{e_i^2}{2\pi^2} \int \frac{\vec{k}}{k^2} \left( \frac{\text{Im}\epsilon_e(\vec{k}, \omega)}{|\epsilon_e(\vec{k}, \omega)|^2} \right)_{\omega=\vec{k}\vec{V}} d\vec{k}. \quad (3.2)$$

Здесь  $e_i$ —заряд тормозимого иона,  $\epsilon_e(\vec{k}, \omega)$ —так называемая продольная диэлектрическая проницаемость плазмы, определяемая соотношением

$$\epsilon_e(\vec{k}, \omega) = \frac{k_i k_j}{k^2} \epsilon_{ij}(\vec{k}, \omega). \quad (3.3)$$

Тензор диэлектрической проницаемости электронной плазмы  $\epsilon_{ij}(\vec{k}, \omega)$  при заданном распределении частиц по скоростям легко находится методом интегрирования по невозмущенным траекториям частиц [20, 21]. Мы приведем здесь нужные нам выражения продольной проницаемости плазмы в различных условиях.

#### 3.1. Незамагниченная изотропная электронная плазма

Для случая изотропного максвелловского распределения по скоростям

$$f(\vec{v}) = \frac{n_e}{\pi^{3/2} v_0^3} e^{-v^2/v_0^2}, \quad (3.4)$$

где  $mv_0^2/2 = T$ ,  $T$  — температура электронов в энергетических единицах. Продольная проницаемость определяется выражением

$$\varepsilon_{ii}(\vec{k}, \omega) = 1 - \frac{2\omega_0^2}{k^2 v_0^2} \left[ Z\left(\frac{\omega}{kv_0}\right) - 1 \right], \quad (3.5)$$

где  $\omega_0^2 = 4\pi n e^2 / m$ ,  $\omega_0$  — ленгмюровская частота,

$$Z(\omega) = X(\omega) - iY(\omega), \quad (3.6)$$

$$Y(\omega) = \sqrt{\pi} \omega e^{-\omega^2}, \quad (3.7)$$

$$X(\omega) = 2\omega D(\omega), \quad (3.8)$$

а  $D(\omega) = e^{-\omega^2} \int_0^{\omega} e^{t^2} dt$  — табулированный интеграл Досона [23].

Функция  $Z_{FC} = -Z(\omega)/\omega$  табулирована в [24]. Отметим, что  $Z(\omega) = -i\sqrt{\pi} \omega W(\omega)$ , где

$$W(\omega) = e^{-\omega^2} \left( 1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\omega} e^{t^2} dt \right) \quad (3.9)$$

— табулированная функция Крампа [25]. Графики функций  $Y(\omega)$

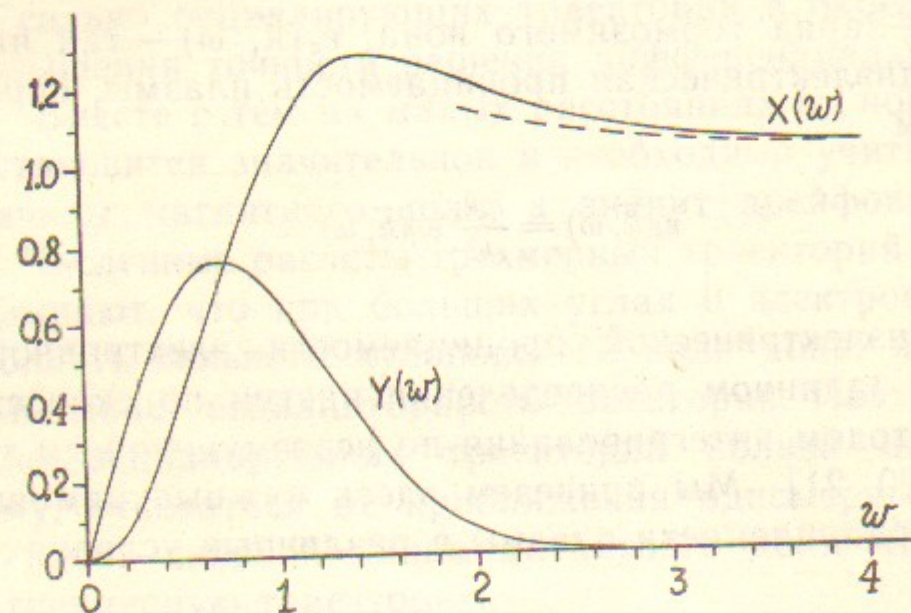


Рис. 12. Графики вещественной  $X(\omega)$  и мнимой  $Y(\omega)$  части функции  $Z(\omega)$ . Пунктиром проведена кривая по первым двум членам асимптотической формулы (3.11):  $X(\omega) \cong 1 - 1/2\omega^2$ .

и  $X(\omega)$  изображены на рис. 12. При  $\omega \ll 1$

$$Z(\omega) \cong 2\omega^2 \left( 1 - \frac{2\omega^2}{3} + \frac{4\omega^4}{15} - \dots \right) - i\omega\sqrt{\pi} e^{-\omega^2}. \quad (3.10)$$

При  $\omega \gg 1$

$$Z(\omega) \cong 1 + \frac{1}{2\omega^2} + \frac{3}{4\omega^4} + \frac{15}{8\omega^6} + \dots - i\omega\sqrt{\pi} e^{-\omega^2}. \quad (3.11)$$

На рис. 12 штрихами проведена линия  $X(\omega) = 1 + 1/2\omega^2$ . Из (3.5) следует, что

$$\text{Im} \varepsilon_{ii}(\vec{k}, \omega) = Y(\omega) \frac{2\omega_0^2}{k^2 v_0^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{k^2 r_D^2} \omega e^{-\omega^2}, \quad (3.12)$$

$$\text{Re} \varepsilon_{ii}(\vec{k}, \omega) = 1 - \frac{1}{k^2 r_D^2} (X(\omega) - 1), \quad (3.13)$$

$$|\varepsilon_{ii}(\vec{k}, \omega)|^2 = \frac{1}{(kr_D)^4} \{ [k^2 r_D^2 + 1 - X(\omega)]^2 + \pi^2 \omega^2 e^{-2\omega^2} \}. \quad (3.14)$$

Здесь  $\omega = \frac{\omega}{kv_0}$ ,  $r_D^2 = \frac{v_0^2}{2\omega_0^2}$ ,  $r_D$  — дебаевский радиус.

### 3.2. Замагниченная температурно-анизотропная электронная плазма

Ограничимся здесь случаем простейшего анизотропного максвелловского распределения электронов по скоростям

$$f(v_{\perp}, v_{\parallel}) = \frac{n_e}{\pi^{3/2} v_{\perp 0}^2 v_{\parallel 0}^2} e^{-v_{\perp}^2/v_{\perp 0}^2 - v_{\parallel}^2/v_{\parallel 0}^2}, \quad (3.15)$$

где  $mv_{\perp 0}^2/2 = T_{\perp}$ ,  $mv_{\parallel 0}^2/2 = T_{\parallel}$ , — соответственно, поперечная и продольная по полю температуры. Выберем систему координат с осью  $z$  по полю  $H$  и осью  $x$  в плоскости  $(\vec{k}, \vec{H})$ , тогда по (3.3)

$$\varepsilon_{ii}(\vec{k}, \omega) = \frac{k_x^2}{k^2} \varepsilon_{xx}(\vec{k}, \omega) + 2 \frac{k_x k_z}{k^2} \varepsilon_{xz}(\vec{k}, \omega) + \frac{k_z^2}{k^2} \varepsilon_{zz}(\vec{k}, \omega). \quad (3.16)$$

Выпишем входящие в это выражение компоненты тензора:

$$\varepsilon_{xx}(\vec{k}, \omega) = 1 - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{n^2}{z} A_n(z) \times$$

$$\times \left\{ \left( 1 - \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} \right) + Z(P_n) \left[ \frac{\omega}{\omega + n\omega_H} - \left( 1 - \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} \right) \right] \right\},$$

$$\varepsilon_{xz}(\vec{k}, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_0^2}{\omega \omega_H} \frac{k_{\perp}}{|k_{\parallel}|} \frac{n}{z} A_n(z) (1 - Z(P_n)) \times \\ \times \left\{ \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} - \frac{\omega_H}{\omega} n \left( 1 - \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} \right) \right\},$$

$$\varepsilon_{zz}(\vec{k}, \omega) = 1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\omega_0^2}{\omega |k_{\parallel}| v_{\parallel 0}} A_n(z) P_n (1 - Z(P_n)) \times \\ \times \frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} \left[ \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} - \frac{\omega_H}{\omega} n \left( 1 - \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} \right) \right].$$

Здесь  $A_n(z) = e^{-z} I_n(z)$ ;  $I_n(z)$  — функция Бесселя мнимого аргумента;

$$z = \frac{k_{\perp}^2 v_{\perp 0}^2}{2\omega_H^2}; \quad P_n = \frac{\omega + n\omega_H}{|k_{\parallel}| v_{\parallel 0}}.$$

Подставив  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{xz}$  и  $\varepsilon_{zz}$  в (3.16), получаем

$$\varepsilon_{\parallel}(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{k^2 r_D^2} \left\{ k^2 r_D^2 + 1 - A_0(z) Z(P_0) - \right. \\ \left. - \frac{\omega}{|k_{\parallel}| v_{\parallel 0}} \sum_{n=1}^{\infty} A_n(z) \left( \frac{Z(P_n)}{P_n} + \frac{Z(P_{-n})}{(P_{-n})} \right) - \right. \\ \left. - \left( 1 - \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} \right) \frac{\omega_H}{|k_{\parallel}| v_{\parallel 0}} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n(z) \left( \frac{Z(P_n)}{(P_n)} - \frac{Z(P_{-n})}{(P_{-n})} \right) \right\}. \quad (3.17)$$

Выпишем мнимую и действительную части  $\varepsilon_{\parallel}(\vec{k}, \omega)$ , нужные для подстановки в (3.1) и (3.2):

$$\text{Im} \varepsilon_{\parallel}(\vec{k}, \omega) = \frac{\sqrt{\pi}}{k^2 r_D^2} \left\{ \frac{\omega}{|k_{\parallel}| v_{\parallel 0}} A_0(z) e^{-P_0^2} + \right. \\ \left. + \frac{\omega}{|k_{\parallel}| v_{\parallel 0}} \sum_{n=1}^{\infty} A_n(z) (e^{-P_n^2} + e^{-P_{-n}^2}) + \right. \\ \left. + \left( 1 - \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} \right) \frac{\omega_H}{|k_{\parallel}| v_{\parallel 0}} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n(z) (e^{-P_n^2} - e^{-P_{-n}^2}) \right\}. \quad (3.18)$$

$$\text{Re} \varepsilon_{\parallel}(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{k^2 r_D^2} \left\{ k^2 r_D^2 + 1 - A_0(z) X(P_0) - \right.$$

$$- \frac{\omega}{|k_{\parallel}| v_{\parallel 0}} \sum_{n=1}^{\infty} A_n(z) \left( \frac{X(P_n)}{P_n} + \frac{X(P_{-n})}{P_{-n}} \right) - \\ \left. - \left( 1 - \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} \right) \frac{\omega_H}{|k_{\parallel}| v_{\parallel 0}} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n(z) \left( \frac{X(P_n)}{P_n} - \frac{X(P_{-n})}{P_{-n}} \right) \right\}. \quad (3.19)$$

В установках электронного охлаждения продольная температура электронов мала. Переходя к пределу  $v_{\parallel 0} \rightarrow 0$  и используя асимптотическое разложение  $X(\omega)$  при  $\omega \gg 1$  (3.11):

$$X(\omega) \cong 1 + \frac{1}{2\omega^2} + \dots, \quad (3.20)$$

получим:

$$\varepsilon_{\parallel}(\vec{k}, \omega) \cong 1 + \frac{\omega_0^2}{k^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{2n\omega_H / v_{\perp 0}^2}{\omega + n\omega_H - i\delta} - \frac{k_{\perp}^2}{(\omega + n\omega_H - i\delta)^2} \right) A_n. \quad (3.21)$$

Это выражение было получено в [18], исходя из «плоской» функции распределения

$$f(v_{\perp}, v_{\parallel}) = \frac{n_e}{\pi v_{\perp 0}} e^{-v_{\perp}^2 / v_{\perp 0}^2} \delta(v_{\parallel}).$$

В пределе сильного магнитного поля  $z = \frac{k_{\perp}^2 v_{\perp 0}^2}{2\omega_H^2} \rightarrow 0$ , тогда все  $A_n(z) \rightarrow 0$  при  $n \neq 0$ , и получим, что при  $H, \omega_H \rightarrow \infty$

$$\varepsilon_{\parallel}(\vec{k}, \omega) \cong 1 - \frac{2\omega_0^2}{k^2 v_{\perp 0}^2} \left[ Z\left( \frac{\omega}{|k_{\parallel}| v_{\parallel 0}} \right) - 1 \right]. \quad (3.22)$$

При проведении численных расчетов суммирование медленно убывающих рядов с функциями Бесселя мнимого аргумента не всегда удобно. Иногда выгоднее перейти от сумм к интегральной форме. Для этого используем известное соотношение

$$i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{I_n(x)}{\gamma - n} = \int_0^{2\pi} e^{x \cos \varphi + i\gamma \varphi} d\varphi,$$

с помощью которого выражение (3.17) продольной проницаемости можно преобразовать к виду

$$\epsilon_{\parallel}(\vec{k}, \omega) = 1 + 2 \frac{\omega_0^2}{k^2 v_{\parallel 0}^2} \left( 1 + i\omega \int_0^{\infty} e^{-B+i\omega t} dt \right) +$$

$$+ \left( 1 - \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} \right) \frac{\omega_0^2 k_{\perp}^2}{\omega_H^2 k^2} \int_0^{\infty} \sin \omega_H t e^{-B+i\omega t} dt, \quad (3.23)$$

$$\text{Im} \epsilon_{\parallel}(\vec{k}, \omega) = 2 \frac{\omega_0^2 \omega}{k^2 v_{\parallel 0}^2} \int_0^{\infty} \cos \omega t e^{-B} dt +$$

$$+ \left( 1 - \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} \right) \frac{\omega_0^2 k_{\perp}^2}{\omega_H^2 k^2} \int_0^{\infty} \sin \omega_H t \sin \omega t e^{-B} dt, \quad (3.24)$$

$$\text{Re} \epsilon_{\parallel}(\vec{k}, \omega) = 1 + 2 \frac{\omega_0^2}{k^2 v_{\parallel 0}^2} \left( 1 - \omega \int_0^{\infty} \sin \omega t e^{-B} dt \right) +$$

$$+ \left( 1 - \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} \right) \frac{\omega_0^2 k_{\perp}^2}{\omega_H^2 k^2} \int_0^{\infty} \sin \omega_H t \cos \omega t e^{-B} dt, \quad (3.25)$$

где

$$B = \frac{k^2 v_{\parallel 0}^2 t^2}{4} + \frac{k_{\perp}^2 v_{\perp 0}^2}{\omega_H^2} \sin^2 \frac{\omega_H t}{2}, \quad (3.26)$$

### 3.3. Незамагниченная температурно-анизотропная электронная плазма

Продольную проницаемость плазмы для этого случая легко получить, совершив в выражении (3.23) предельный переход  $H, \omega_H \rightarrow 0$ . Получаем:

$$\epsilon_{\parallel}(\vec{k}, \omega) = 1 + 2 \frac{\omega_0^2}{k^2 v_{\parallel 0}^2} \left( 1 + i\omega \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{B_0 t^2}{4} + i\omega t\right) dt \right) +$$

$$+ \left( 1 - \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} \right) \frac{\omega_0^2 k_{\perp}^2}{k^2} \int_0^{\infty} t \exp\left(-\frac{B_0 t^2}{4} + i\omega t\right) dt. \quad (3.27)$$

Здесь  $B_0 = k_{\perp}^2 v_{\perp 0}^2 + k_{\parallel}^2 v_{\parallel 0}^2$ . Используя известные [26, 27] интегралы

$$\int_0^{\infty} \sin \omega t \exp\left(-\frac{B_0 t^2}{4}\right) dt = \frac{2}{\sqrt{B_0}} D\left(\frac{\omega}{\sqrt{B_0}}\right),$$

$$\int_0^{\infty} t \cos \omega t \exp\left(-\frac{B_0 t^2}{4}\right) dt = \frac{2}{B_0} - \frac{4\omega}{B_0 \sqrt{B_0}} D\left(\frac{\omega}{\sqrt{B_0}}\right),$$

$$\int_0^{\infty} \cos \omega t \exp\left(-\frac{B_0 t^2}{4}\right) dt = \sqrt{\frac{\pi}{B_0}} e^{-\omega^2/B_0},$$

$$\int_0^{\infty} t \sin \omega t \exp\left(-\frac{B_0 t^2}{4}\right) dt = \frac{2\omega}{B_0} \sqrt{\frac{\pi}{B_0}} e^{-\omega^2/B_0}, \quad (3.28)$$

выражение (3.27) легко преобразовать к виду

$$\epsilon_{\parallel}(\vec{k}, \omega) = 1 - \frac{2\omega_0^2}{B_0} \left( Z\left(\frac{\omega}{\sqrt{B_0}}\right) - 1 \right), \quad (3.29)$$

Здесь  $Z(\omega/\sqrt{B_0})$  определено соотношением (3.6).

Сравнивая выражения (3.29) и (3.5) видим, что продольная проницаемость незамагниченной температурно-анизотропной плазмы может быть получена из выражения (3.5) для продольной проницаемости температурно-изотропной плазмы путем формальной замены в (3.5)

$$k^2 v_0^2 \rightarrow B_0 = k_{\perp}^2 v_{\perp 0}^2 + k_{\parallel}^2 v_{\parallel 0}^2.$$

### 4. ПОТЕРИ ЭНЕРГИИ И СИЛА ТОРМОЖЕНИЯ ТЯЖЕЛОГО ИОНА В ЭЛЕКТРОННОЙ ПЛАЗМЕ. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Рассмотрим отдельные случаи, представляющие интерес для установок с электронным охлаждением.

#### 4.1. Однородная незамагниченная температурно-изотропная плазма

Потеря энергии пробного тяжелого иона заряда  $e_i$  в такой плазме с максвелловским распределением электронов по скоростям (3.4) подробно рассмотрена в многочисленных работах (см., например, [20, 21]). Подставляя выражения (3.12) и (3.14) для продольной диэлектрической проницаемости в формулу энергетических

потерь (3.1), получаем

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\omega_0^2 e_i^2}{V} \frac{4}{\pi} \int_0^1 \frac{V}{v_0} d\tau \int_0^{k_{\max}} \frac{\omega^2 e^{-\omega^2} k^3 r_D^4 dk}{|k^2 r_D^2 + 1 - X(\omega)|^2 + \pi \omega^2 e^{-2\omega^2}}, \quad (4.1)$$

где  $V$  — скорость иона,  $\omega = \bar{k}V/kv_0$ ,  $k_{\max} = 1/r_{\min}$ ,  $r_{\min} = ee_i/(mV^2)$  — расстояние наибольшего сближения. Проведя интегрирование по  $k$ , получаем:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\omega_0^2 e_i^2}{V} \frac{4}{\pi} \int_0^{V/v_0} \omega^2 e^{-\omega^2} \Psi(\omega) d\omega, \quad (4.2)$$

где

$$\Psi(\omega) = \frac{1}{4} \ln \left( \frac{|\Lambda^2 + 1 - X(\omega)|^2 + \pi \omega^2 e^{-2\omega^2}}{|1 - X(\omega)|^2 + \pi \omega^2 e^{-2\omega^2}} \right) - \frac{1 - X(\omega)}{2\sqrt{\pi} \omega e^{-\omega^2}} \operatorname{Arctg} \left( \frac{\Lambda^2 \sqrt{\pi} \omega e^{-\omega^2}}{(\Lambda^2 + 1 - X(\omega))(1 - X(\omega) + \pi \omega^2 e^{-2\omega^2})} \right), \quad (4.3)$$

$$\Lambda = k_{\max} r_D = r_D/r_{\min} = 1/r_{\min} d.$$

Здесь считается, что  $\operatorname{Arctg}$  меняется в интервале  $0 - \pi$ . Максимальные значения функций  $X(\omega)$  и  $\omega^2 e^{-\omega^2}$  — величины порядка единицы, поэтому при  $\Lambda \gg 1$ :

$$j(\omega) \cong \ln \Lambda - \frac{1 - X(\omega)}{2\sqrt{\pi} \omega e^{-\omega^2}} \operatorname{Arctg} \left( \frac{\sqrt{\pi} \omega e^{-\omega^2}}{1 - X(\omega)} \right). \quad (4.4)$$

Подставляя эту функцию в (4.2) и вынося  $\ln \Lambda$  как медленно меняющуюся функцию за знак интеграла, получаем

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\omega_0^2 e_i^2}{V} \{ \mu_1(V/v_0) \ln \Lambda + \mu_2(V/v_0) \}, \quad (4.5)$$

где

$$\mu_1(V/v_0) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{(V/v_0)} \omega^2 e^{-\omega^2} d\omega, \quad (4.6)$$

$$\mu_2(V/v_0) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{(V/v_0)} |1 - X(\omega)| \omega \operatorname{Arctg} \left( \frac{\sqrt{\pi} \omega e^{-\omega^2}}{1 - X(\omega)} \right) d\omega, \quad (4.7)$$

$\mu_1(x)$  называют функцией энергетических потерь или интегралом

Максвелла [21]. Графики функций  $\mu_1(x)$  и  $\mu_2(x)$  изображены на рис. 13.

В случае  $V/v_0 \gg 1$  функция  $\mu_1(x) \cong 1$ , и, используя асимптотическое разложение  $X(\omega)$  по (3.11), легко показать, что  $\mu_2(x) \cong \ln(x)$  штриховая линия на рис. 13). Подставляя это в

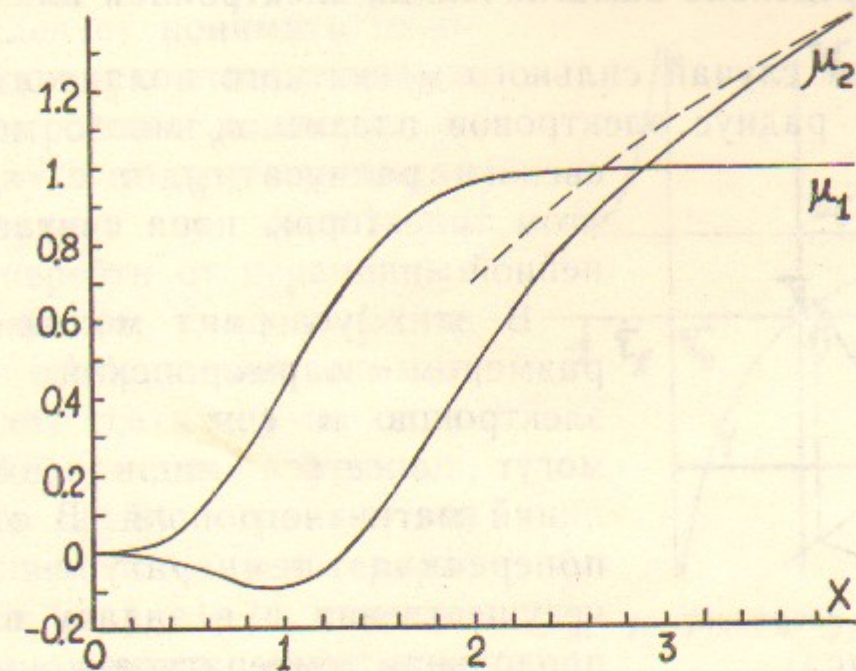


Рис. 13. Графики функций  $\mu_1(x)$  и  $\mu_2(x)$ . Штрихами проведена кривая  $\ln(x)$ .

(4.5), получаем

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= -\frac{\omega_0^2 e_i^2}{V} \left\{ \ln \left( \frac{k_{\max} v_0}{\omega_0} \right) + \ln \frac{V}{v_0} \right\} = \\ &= \frac{\omega_0^2 e_i^2}{V} \ln \left( \frac{k_{\max} V}{\omega_0} \right) = -\frac{\omega_0^2 e_i^2}{V} \ln \Lambda_a, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где  $\Lambda_a = k_{\max} V/\omega_0 = k_{\max} r_a = r_a/r_{\min}$ . Величину  $r_a = V/\omega_0$  иногда называют адиабатической длиной экранирования. Формулу (4.8) обычно получают, непосредственно рассматривая торможение иона в холодной электронной плазме [20].

В обратном предельном случае малых скоростей иона  $V/v_0 \ll 1$ , легко показать, что

$$\mu_1(V/v_0) \cong \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left( \frac{V}{v_0} \right)^3,$$

$$\mu_2(V/v_0) \cong \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \left( \frac{V}{v_0} \right)^3.$$

Таким образом, в этом пределе вклад  $\mu_2(x)$  логарифмически

мал, в результате:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\omega_0^2 e^2}{V} \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left(\frac{V}{v_0}\right)^3 \ln \Lambda.$$

## 2. Предельно замагниченная электронная плазма

Рассмотрим случай сильного магнитного поля, когда тепловой ларморовский радиус электронов плазмы  $r_H$  много меньше дебаевского радиуса  $r_D$ , т. е.  $r_H \ll r_D$ . При этом траекторию иона считаем прямолинейной.

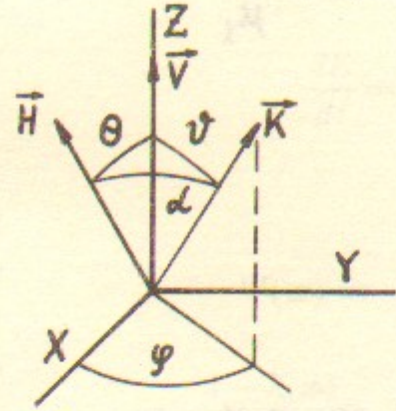


Рис. 14. Система координат.

В этих условиях можно пренебречь размером ларморовской окружности электронов и считать, что электроны могут двигаться лишь вдоль силовых линий магнитного поля. В этом режиме поперечная температура электронов несущественна и в задачу входит лишь продольная температура.

Выберем систему координат с осью  $z$ , направленной по скорости пробного иона  $\vec{V}$ , и осью  $x$  в плоскости  $(\vec{V}, \vec{H})$  (см. рис. 14). Здесь  $\theta$  — угол между  $\vec{V}$  и  $\vec{H}$ ;  $\theta$  — угол между волновым вектором  $\vec{k}$  поля и  $\vec{V}$ ;  $\tau = \cos \theta$ ;  $\alpha$  — угол между  $\vec{k}$  и  $\vec{H}$ . Так что

$$\vec{k}\vec{V} = kV\tau; \quad \vec{k}\vec{H} = kH \cos \alpha = k_{\parallel} H,$$

где

$$\cos \alpha = \tau \cos \theta + \sqrt{1 - \tau^2} \sin \theta \cos \varphi.$$

Продольная диэлектрическая проницаемость предельно замагниченной плазмы определяется выражением (3.22). Подставляя его в формулу энергетических потерь иона (3.1), получаем

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\omega_0^2 e^2}{\pi^{3/2} V} \int_0^{\Lambda} \chi^3 d\chi \int_{-1}^1 d\tau \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{V}{v_{\parallel 0}} \frac{\omega^2 e^{-\omega^2} |\cos \alpha|}{[\chi^2 + 1 - X(\omega)]^2 + \pi^2 \omega^2 e^{-2\omega^2}}, \quad (4.9)$$

где

$$\omega = \frac{\vec{k}\vec{V}}{k_{\parallel} v_{\parallel 0}} = \frac{V\tau}{v_{\parallel 0} \cos \alpha}.$$

В случае, если ларморовский радиус электрона много меньше расстояния наибольшего сближения электрона и иона, т. е.

$r_{\min} = ee_i/mV^2 \gg r_H$ , то считаем, что  $\Lambda = r_D/r_{\min}$ . Если же  $r_H > r_{\min}$ , то считаем, что  $\Lambda = r_D/r_H$ . В этом случае ко всем получаемым в дальнейшем выражениям, содержащим  $\ln \Lambda$ , следует прибавлять соответствующие выражения от парных незамагниченных столкновений со значением  $\ln \Lambda = \ln(r_H/r_{\min})$ . При этом в выражении для  $r_{\min}$  под  $V$  следует понимать некоторую эффективную относительную скорость электронов и иона.

Поскольку подынтегральная функция зависит от  $(\chi, \omega)$  то естественно перейти от переменных интегрирования  $(\chi, \tau, \varphi)$  к  $(\chi, \omega, \varphi)$ . В силу соображений симметрии, учитывая, что  $X(\omega)$  по определению (3.8) четная функция, достаточно в (4.9) ограничиться интегрированием по  $\varphi$  на интервале  $(0, \pi/2)$ , по  $\tau$  на  $(-1, 1)$ , с последующим умножением результата на 4. При некотором  $\varphi$  из интервала  $(0, \pi/2)$  график зависимости  $\omega$  от  $\tau$  приведен на рис. 15. В точке

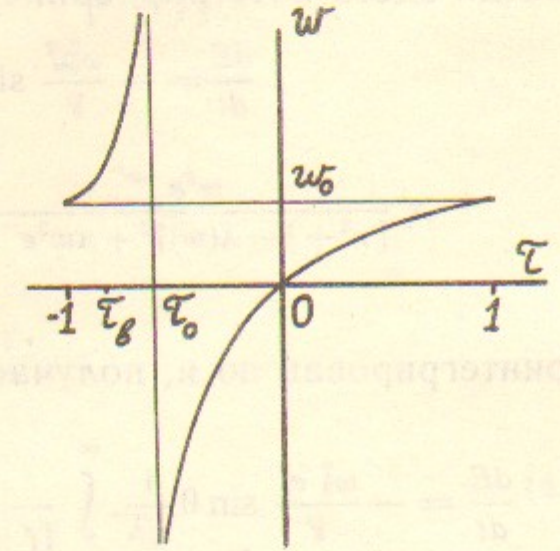


Рис. 15. График функции  $\omega(\tau)$  (см. (4.9)).

$$\tau_0 = -\frac{\sin \theta \cos \varphi}{\sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \varphi}},$$

где  $\cos \alpha(\tau_0) = 0$ , функция  $\omega(\tau)$  терпит разрыв. При изменении  $\varphi$  на интервале  $0 < \varphi \leq \pi/2$   $\tau_0$  меняется в интервале  $-\sin \theta < \tau_0 < 0$ . Видно, что изменение  $\tau$  на интервале  $-1 < \tau < 1$  соответствует изменению  $\omega$  на интервале  $-\infty < \omega < \infty$ . В результате перехода к переменным  $(\chi, \omega, \varphi)$  выражение (4.9) преобразуется к виду

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\omega_0^2 e^2}{V} \frac{4}{\pi^{3/2}} \int_0^{\Lambda} \chi^3 d\chi \times \left\{ \int_{V/v_{\parallel 0} \cos \theta}^{\infty} d\omega \int_0^{\pi/2} u(\omega, \varphi) d\varphi - \int_{-\infty}^{V/v_{\parallel 0} \cos \theta} d\omega \int_0^{\pi/2} u(\omega, \varphi) d\varphi \right\},$$

где

$$u(\omega, \varphi) = \frac{\omega^2 e^{-\omega^2}}{[\chi^2 + 1 - X(\omega)]^2 + \pi^2 \omega^2 e^{-2\omega^2}} \times$$



$$\times \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi \left( \omega \frac{v_{\parallel 0}}{V} \cos \theta - 1 \right)}{\left[ \left( \frac{v_{\parallel 0}}{V} \omega^2 \right) \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \left( \frac{v_{\parallel 0}}{V} \cos \theta - 1 \right)^2 \right]}$$

Проведя здесь интегрирование по  $\varphi$ , получаем:

$$\frac{dE}{dt} = - \frac{\omega_0^2 e_i^2}{V} \sin^2 \theta \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\Lambda} \chi^3 d\chi \int_0^{\infty} d\omega \times \\ \times \frac{\omega^2 e^{-\omega^2}}{[\chi^2 + 1 - \chi(\omega)]^2 + \pi \omega^2 e^{-2\omega^2}} \frac{1}{\left[ \left( \frac{\omega}{V/v_{\parallel 0}} - \cos \theta \right)^2 + \sin^2 \theta \right]^{3/2}}$$

Проинтегрировав по  $\chi$ , получаем:

$$\frac{dE}{dt} = - \frac{\omega_0^2 e_i^2}{V} \sin \theta \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2 e^{-\omega^2}}{\left[ \left( \frac{\omega}{V/v_{\parallel 0}} - \cos \theta \right)^2 + \sin^2 \theta \right]^{3/2}} \Psi(\omega) d\omega \quad (4.10)$$

Здесь  $\Psi(\omega)$  — функция, определенная (4.3). Аналогичные вычисления для силы торможения (3.2) приводят к следующему результату:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}_i}{dt} = - \frac{\omega_0^2 e_i^2}{V^2} \frac{V}{v_{\parallel 0}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \times \\ \times \left\{ \vec{e}_{\perp} \sin \theta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Psi(\omega) \omega e^{-\omega^2} \left( \frac{\omega}{V/v_{\parallel 0}} - \cos \theta \right)}{\left[ \left( \frac{\omega}{V/v_{\parallel 0}} - \cos \theta \right)^2 + \sin^2 \theta \right]^{3/2}} d\omega + \right. \\ \left. + \vec{e}_{\parallel} \sin^2 \theta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Psi(\omega) \omega e^{-\omega^2}}{\left[ \left( \frac{\omega}{V/v_{\parallel 0}} - \cos \theta \right)^2 + \sin^2 \theta \right]^{3/2}} d\omega \right\} \quad (4.11)$$

Здесь  $\vec{e}_{\parallel}$  — единичный вектор, параллельный полю  $\vec{H}$ , а  $\vec{e}_{\perp}$  — перпендикулярный.

Очевидно, что соотношение  $\frac{dE}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{V}$  выполняется. Как отмечалось выше, при  $\Lambda \gg 1$  функция  $\Psi(\omega) \cong \ln \Lambda$ . Вынося в (4.9) и (4.10)  $\ln \Lambda$  за знак интеграла и проинтегрировав по частям, получаем:

$$\frac{dE}{dt} = - \frac{\omega_0^2 e_i^2}{2V} \ln \Lambda \sin^2 \theta \left\{ 3G_0 - 2G_2 + 3 \frac{v_{\parallel 0}}{V} G_1 \cos \theta \right\}, \quad (4.12)$$

$$\vec{F} = - \frac{\omega_0^2 e_i^2}{2V^2} \ln \Lambda \left\{ \vec{e}_{\perp} \sin \theta (3 \sin^2 \theta G_0 - 2G_2) + \right. \\ \left. + \vec{e}_{\parallel} 3 \sin^2 \theta \left( \cos \theta G_0 + \frac{v_{\parallel 0}}{V} G_1 \right) \right\}, \quad (4.13)$$

где

$$G_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int \frac{e^{-y^2} dy}{\left[ \left( \cos \theta + \frac{v_{\parallel 0}}{V} y \right)^2 + \sin^2 \theta \right]^{5/2}}, \\ G_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y e^{-y^2} dy}{\left[ \left( \cos \theta + \frac{v_{\parallel 0}}{V} y \right)^2 + \sin^2 \theta \right]^{5/2}}, \\ G_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int \frac{e^{-y^2} dy}{\left[ \left( \cos \theta + \frac{v_{\parallel 0}}{V} y \right)^2 + \sin^2 \theta \right]^{3/2}} \quad (4.14)$$

Если скорость тормозимого иона много больше тепловой скорости электронов плазмы, т. е.  $v_{\parallel 0}/V \ll 1$ , то из (4.14) легко видно, что

$$G_0 \rightarrow 1, \quad G_1 \rightarrow 0, \quad G_2 \rightarrow 1,$$

и тогда (4.12) и (4.13) переходят в

$$\frac{dE}{dt} = - \frac{\omega_0^2 e_i^2}{2V} \ln \Lambda \sin^2 \theta,$$

$$\vec{F} = - \frac{\omega_0^2 e_i^2}{2V^2} \ln \Lambda \left\{ \vec{e}_{\perp} \sin \theta (3 \sin^2 \theta - 2) + \vec{e}_{\parallel} 3 \sin^2 \theta \cos \theta \right\}.$$

Если  $V_{\perp}$  и  $V_{\parallel}$  — соответственно, перпендикулярная и параллельная к магнитному полю компоненты скорости иона  $\vec{V}$ , то

$$\frac{dE}{dt} = - \frac{\omega_0^2 e_i^2}{2V} \ln \Lambda \frac{V_{\perp}^2}{V^2}, \quad (4.15)$$

$$\vec{F} = - \frac{\omega_0^2 e_i^2}{2V^2} \ln \Lambda \left\{ \vec{e}_{\perp} \frac{V_{\perp}}{V} \frac{V_{\perp}^2 - 2V_{\parallel}^2}{V^2} + \vec{e}_{\parallel} 3 \frac{V_{\perp}^2}{V^2} \frac{V_{\parallel}}{V} \right\}. \quad (4.16)$$

Выражение (4.16) для силы торможения в точности совпадает с результатом работы [6].

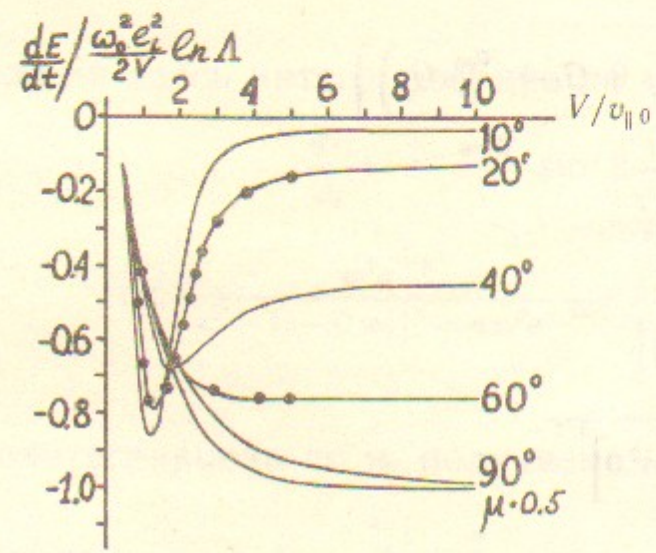


Рис. 16. График потерь энергии  $\frac{dE}{dt} \left( \frac{\omega_0^2 e_i^2}{2V} \ln \Lambda \right)$  как функции от  $V/v_{\parallel 0}$  по (4.12), (4.14) при различных значениях угла  $\theta^\circ$ .

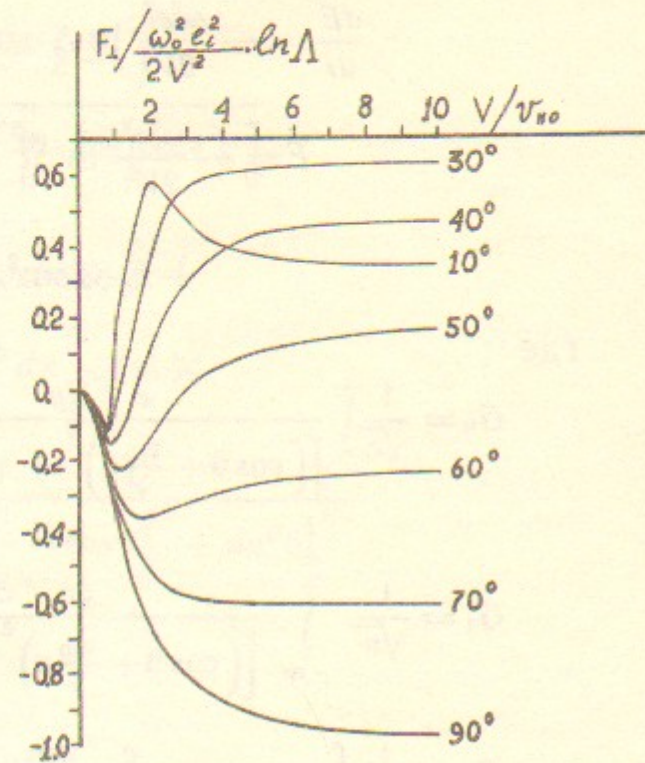


Рис. 17. График перпендикулярной к скорости иона компоненты силы торможения  $F_{\perp} \left( \frac{\omega_0^2 e_i^2}{2V^2} \ln \Lambda \right)$  как функции от  $V/v_{\parallel 0}$  по (4.13), (4.14) при различных значениях угла  $\theta^\circ$ .

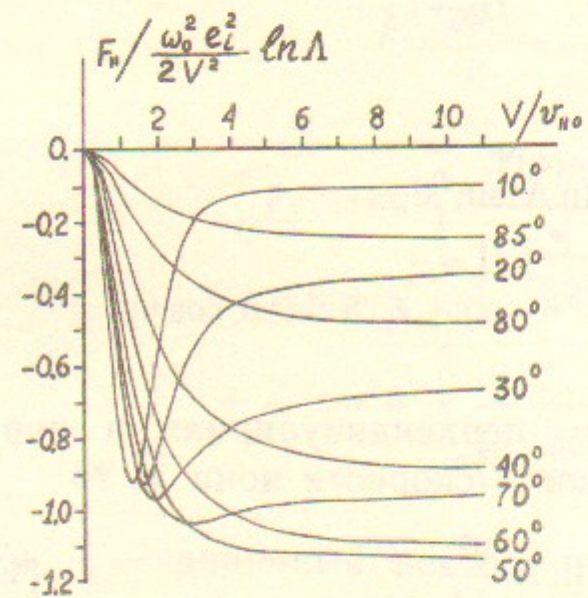


Рис. 18. График параллельной к скорости иона компоненты силы торможения  $F_{\parallel} \left( \frac{\omega_0^2 e_i^2}{2V^2} \ln \Lambda \right)$  как функции от  $V/v_{\parallel 0}$  по (4.13), (4.14) при различных значениях угла  $\theta^\circ$ .

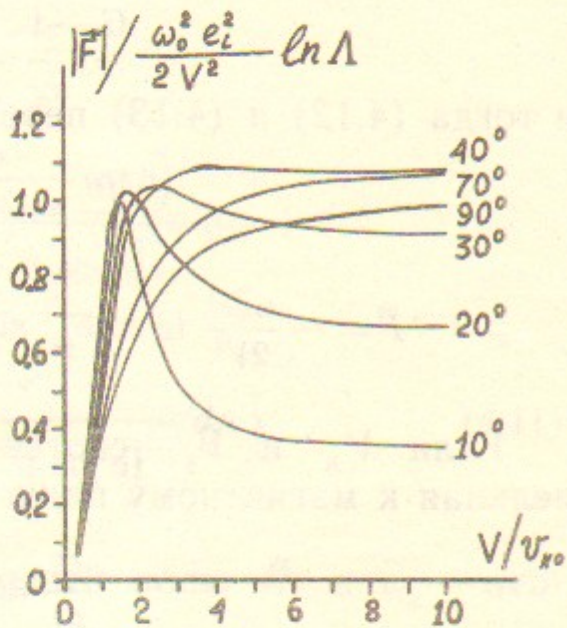


Рис. 19. График модуля силы торможения  $|F| \left( \frac{\omega_0^2 e_i^2}{2V^2} \ln \Lambda \right)$  как функции от  $V/v_{\parallel 0}$  по (4.13), (4.14) при различных значениях угла  $\theta^\circ$ .

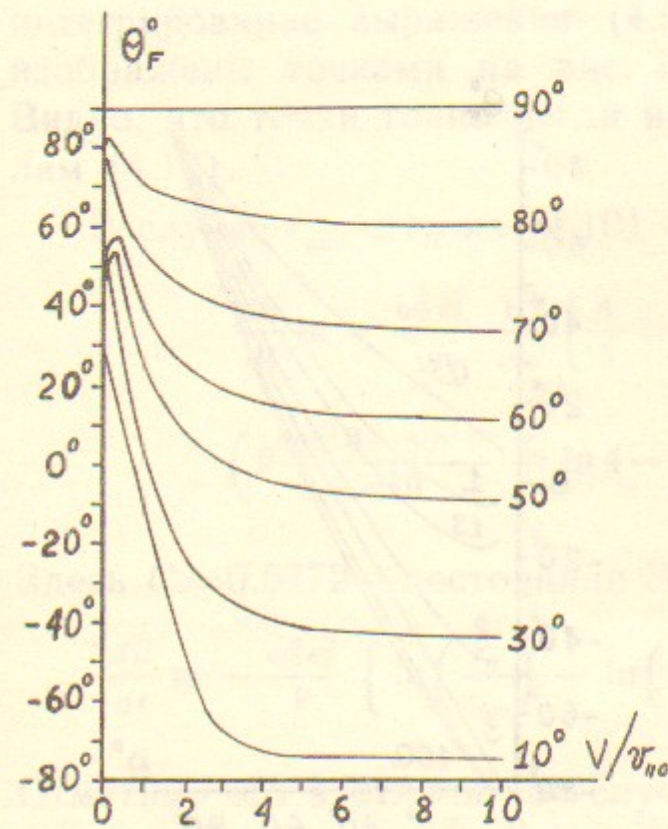


Рис. 20. График  $\theta_F$  — угла отклонения силы торможения  $\vec{F}$  от силовой линии магнитного поля как функции от  $V/v_{\parallel 0}$  по (4.13), (4.14) при различных значениях угла  $\theta$ .

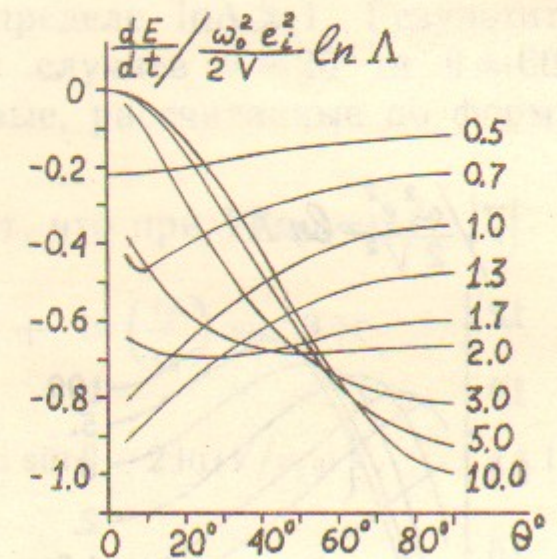


Рис. 21. График потерь энергии  $\frac{dE}{dt} \left( \frac{\omega_0^2 e_i^2}{2V} \ln \Lambda \right)$  как функции от угла  $\theta$  по (4.12), (4.14) при различных значениях  $V/v_{\parallel 0}$ .

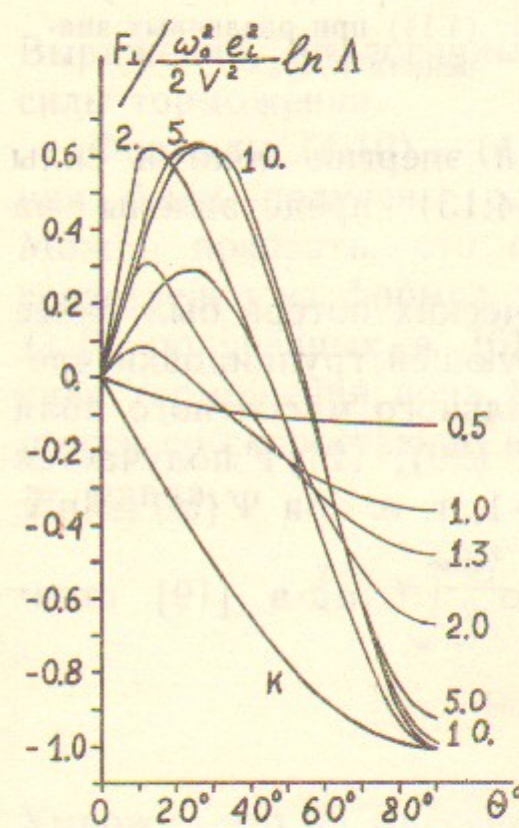


Рис. 22. График перпендикулярной к скорости иона компоненты силы торможения  $F_{\perp} \left( \frac{\omega_0^2 e_i^2}{2V^2} \ln \Lambda \right)$  как функции от угла  $\theta$  по (4.13), (4.14) при различных значениях  $V/v_{\parallel 0}$ .

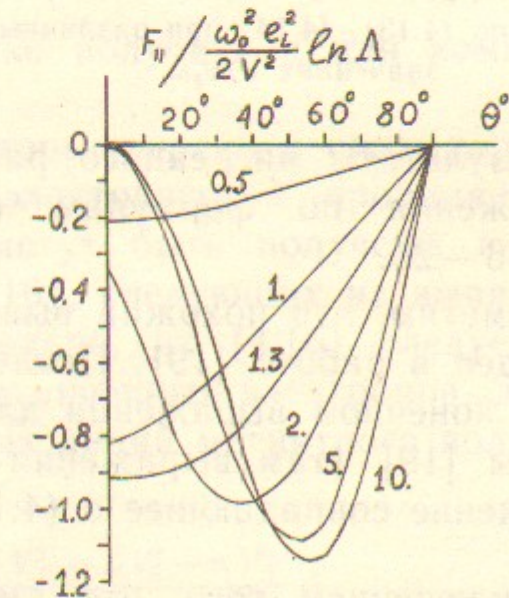


Рис. 23. График параллельной к скорости иона компоненты силы торможения  $F_{\parallel} \left( \frac{\omega_0^2 e_i^2}{2V^2} \ln \Lambda \right)$  как функции от угла  $\theta$  по (4.13), (4.14) при различных значениях  $V/v_{\parallel 0}$ .

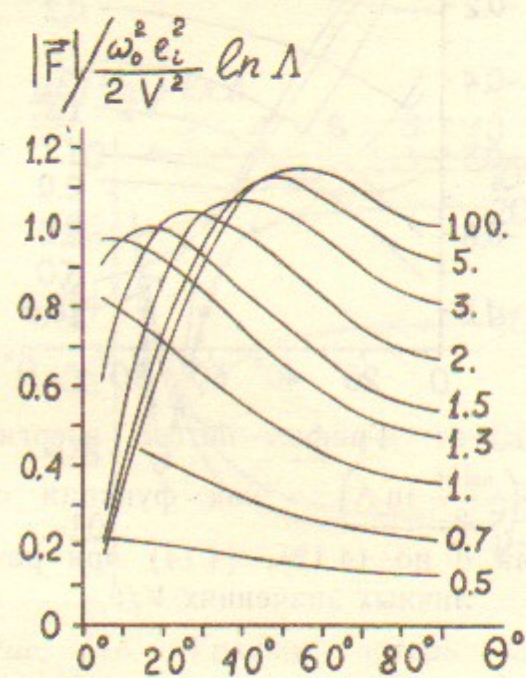


Рис. 24. График модуля силы торможения  $|\vec{F}| \left( \frac{\omega_0^2 e_i^2}{2V^2} \ln \Lambda \right)$  как функции от угла  $\theta$  по (4.13), (4.14) при различных значениях  $V/v_{||0}$ .

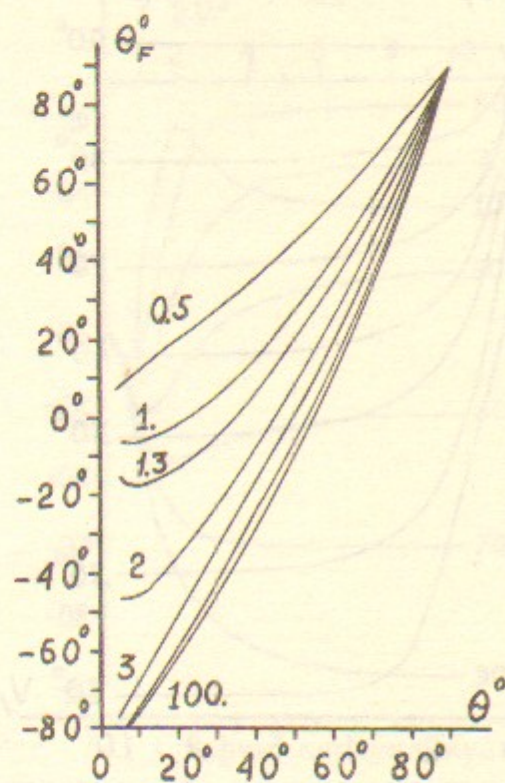


Рис. 25. График  $\theta_F$  — угла отклонения силы торможения  $\vec{F}$  от силовой линии магнитного поля как функции от угла  $\theta$  по (4.13), (4.14) при различных значениях  $V/v_{||0}$ .

Результаты численного расчета потери энергии иона и силы торможения по формулам (4.12) и (4.13) представлены на рис. 16—25.

Отметим, что похожий вывод энергетических потерь был ранее проведен в работе [19]. После соответствующей группировки членов в конечном выражении для случая сильного магнитного поля работы [19] (там выражения (13), (14), (20), (21)) получается выражение совпадающее с (4.10) при  $\Lambda \gg 1$ , т. е. при  $\Psi(\omega) \cong \ln \Lambda$ ,

за исключением того, что вместо нашего  $\int_{-\infty}^{\infty} (\dots) d\omega$  в [19] стоит (формула (21) работы [19]);

$$2 \int_0^{V/v_{||0} \cos \theta} (\dots) d\omega.$$

Поскольку исходные выражения (13) и (14) работы [19] совпадают с нашим (4.9), то для проверки было проведено численное

интегрирование выражения (4.9) в пределе  $\ln \Lambda \gg 1$ . Результаты изображены точками на рис. 16 для случаев  $\theta = 20^\circ$  и  $\theta = 60^\circ$ . Видно, что точки точно легли на кривые, рассчитанные по формулам (4.12).

В случае  $r_{\min} < r_H$  из (4.10) следует, что при  $V/v_{||0} \ll 1$

$$\frac{dE}{dt} \cong - \frac{\omega_0^2 e_i^2}{\sqrt{\pi}} \frac{V^2}{v_{||0}^3} \left\{ \frac{4}{3} \ln \left( \frac{r_H}{r_{\min}} \right) + \ln \left( \frac{r_D}{r_H} \right) \sin^2 \theta \times \right. \\ \left. \left( 2 \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} + \ln 4 - C - 2 \ln \sin \theta - 2 \ln (V/v_{||0}) \right) \right\}. \quad (4.17)$$

Здесь  $C = 0.5772$  — постоянная Эйлера. При  $V/v_{||0} \gg 1$

$$\frac{dE}{dt} \cong - \frac{\omega_0^2 e_i^2}{V} \left\{ \ln \left( \frac{r_H}{r_{\min}} \right) + \ln \left( \frac{r_D}{r_H} \right) \frac{\sin^2 \theta}{2} \left( 1 + \frac{9}{2} \frac{5 \cos^2 \theta - 1}{(V/v_{||0})^2} \right) \right\}. \quad (4.18)$$

Отметим, что в отличие от случая торможения в незамагниченной плазме ( $H \rightarrow 0$ ) здесь при  $V/v_{||0} \gg 1$  не происходит замены

$$\ln \Lambda = \ln \left( \frac{k_{\max} v_0}{\omega_0} \right) \rightarrow \ln \left( \frac{k_{\max} V}{\omega_0} \right).$$

Выражения, аналогичные (43), легко получить и для компонент силы торможения.

Формулы (4.10) — (4.14) для потерь энергии и силы торможения были получены с учетом диэлектрической проницаемости. Можно показать, что они легко могут быть получены и непосредственно из формул (4.15) и (4.16), следующих из выражений (1.1) полученных в [6]. Действительно, из (4.16) следует, что сила торможения иона в среде замагниченных электронов, движущихся со скоростью  $v_{||}$  вдоль силовых линий магнитного поля (ось  $z$ ), равна

$$\vec{F} = - \frac{\omega_0^2 e_i^2}{2} \ln \Lambda \left\{ \vec{e}_\perp \frac{V_\perp [V_\perp^2 - 2(V_\perp^2 - v_{||}^2)]}{|V_\perp^2 + (V_\perp - v_{||})^2|^{5/2}} + \right. \\ \left. + \vec{e}_\parallel 3 \frac{V_\perp^2 (V_\perp - v_{||})}{|V_\perp^2 + (V_\perp - v_{||})^2|^{5/2}} \right\}.$$

Умножив это на максвелловское распределение электронов по продольным скоростям (3.15)

$$j(v_{||}) = \frac{1}{\sqrt{\pi} v_{||0}} e^{-v_{||}^2/v_{||0}^2} \quad (4.19)$$

и проинтегрировав по скорости  $v_{\parallel}$ , получим выражение (4.13). Энергия  $E$  частицы в лабораторной системе координат выражается через энергию  $E'$  и импульс  $\vec{P}$  в движущейся со скоростью  $\vec{v}_{\parallel}$  системе координат соотношением

$$E = E' + \vec{P} \cdot \vec{v}_{\parallel}.$$

Следовательно, потери энергии в лабораторной и движущейся системах координат связаны соотношением

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE'}{dt} + \frac{d\vec{P}}{dt} \cdot \vec{v}_{\parallel} = \frac{dE'}{dt} + \vec{F}' \cdot \vec{v}_{\parallel}.$$

Подставив сюда (4.15) для  $\frac{dE'}{dt}$  и (4.16) для  $\vec{F}'$  и произведя замену  $\vec{V}_{\parallel} \rightarrow \vec{V}_{\parallel} - \vec{v}_{\parallel}$ , имеем

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\omega_0^2 e_i^2}{2} \ln \Lambda \left\{ \frac{v_{\parallel}^2}{[(V_{\parallel} - v_{\parallel})^2 + V_{\perp}^2]^{3/2}} + 3 \frac{V_{\perp}^2 V_{\parallel} v_{\parallel}}{[(V_{\parallel} - v_{\parallel})^2 + V_{\perp}^2]^{5/2}} \right\}.$$

Умножив это на распределение (4.19) и проинтегрировав по  $v_{\parallel}$  получим для потерь энергии иона выражение (4.12).

### 5. ПОТЕРИ ЭНЕРГИИ И СИЛА ТОРМОЖЕНИЯ ИОНА В ЗАМАГНИЧЕННОЙ ТЕМПЕРАТУРНО-АНИЗОТРОПНОЙ ЭЛЕКТРОННОЙ ПЛАЗМЕ

В работе [15] на основе кинетического уравнения со столкновительным членом Балеску—Ленарда для замагниченной плазмы [14] было получено следующее выражение для изменения функции распределения ионов, инжектированных в замагниченную фоновую плазму:

$$\frac{\partial f_i(\vec{V}_i)}{\partial t} = \sum_{\beta=e,i} R_{i\beta} \frac{\partial}{\partial \vec{V}_i} \int d^3\vec{v} \int d^3\vec{k} \int_{-\infty}^{\infty} P_{\beta} f_i(\vec{V}_i) f_{\beta}(\vec{v}) ds dt d\omega, \quad (5.1)$$

где

$$P_{\beta} = \frac{\vec{k} \exp [i(s - \vec{k} \cdot \vec{V}) + i\omega t + iY_{\beta}]}{k^4 |\epsilon_e(\vec{k}, \omega)|^2} \left( \frac{m_{\beta}}{m_i} \vec{k} \frac{\partial}{\partial \vec{V}_i} - O_{\beta} \right),$$

$$O_{\beta} = k_{\parallel} \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} + k_{\perp} \cos(v + \omega_{H\beta} t) \frac{\partial}{\partial v_{\perp}},$$

$$Y_{\beta} = k_{\perp} \frac{v_{\perp}}{\omega_{H\beta}} \{ \sin v - \sin(v + \omega_{H\beta} t) \} - k_{\parallel} v_{\parallel} t,$$

$$R_{i\beta} = \frac{e_i^2 e_{\beta}^2}{2\pi^2} \frac{n_{\beta}}{m_i m_{\beta}},$$

$\omega_{H\beta}$  — ларморовская частота фоновых частиц сорта  $\beta$ . Здесь ось  $z$  цилиндрической системы координат направлена по магнитному полю  $H$ . Азимутальные углы векторов  $\vec{k}$  и  $\vec{V}_i$  равны, соответственно,  $\psi$  и  $\chi$ , а  $v = \psi - \chi$ .

Все вычисления работы [15] были проведены для температурно-изотропных максвелловских функций распределения фоновых электронов и ионов. В системах электронного охлаждения температурный разброс охлаждаемых ионов уменьшается при их движении в сопутствующем электронном потоке. Этот поток формируется путем электростатического ускорения электронов вылетающих из катода, имеющего температуру  $T$ . Известно [16], что при таком ускорении в идеальной системе функция распределения электронов по поперечным скоростям не изменяется, а функция распределения по продольным скоростям  $f(u_{\parallel})$  определяется в лабораторной системе формулой

$$f(u_{\parallel}) = \begin{cases} 0 & u_{\parallel} < u_{\min} \\ \sqrt{\frac{2m}{\pi T}} \frac{e^{-mu_{\parallel}^2/2T}}{1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{E_k}{T}}\right)} & u_{\parallel} > u_{\min} \end{cases}$$

где  $mu_{\min}^2/2 = E_k$  — энергия, полученная электронами при ускорении,

$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$  — интеграл вероятности.

Мы ограничимся рассмотрением нерелятивистского случая.

Используя известное асимптотическое разложение  $\Phi(x)$  при  $x \gg 1$  (см. [26], с. 945):

$$\Phi(x) \cong 1 - \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi} x} + \dots,$$

получим, что при  $E_k \gg T$

$$f(u_{\parallel}) = \begin{cases} 0 & u_{\parallel} < u_{\min} \\ \frac{mu_{\min}}{T} \exp\left[\frac{m}{2T}(u_{\min}^2 - u_{\parallel}^2)\right] & u_{\parallel} > u_{\min} \end{cases}$$

Представив  $u_{\parallel} = u_{\min} + v_{\parallel}$ , получим функцию распределения электронов в движущейся со скоростью  $u_{\min}$  ( $v_{\parallel} \ll u_{\min}$ ) системе координат

$$f(v_{\parallel}) = \begin{cases} 0 & v_{\parallel} < 0 \\ \frac{mu_{\min}}{T} \exp\left(-\frac{mu_{\min}}{T}v_{\parallel}\right) & v_{\parallel} > 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

Если принять, что температурный разброс по продольным скоростям определяется соотношением

$$\frac{mu_{\min}}{T}v_{\parallel 0} \cong 1,$$

то получим, что продольный энергетический разброс ускоренного электронного пучка равен [3]:

$$T_{\parallel} = \Delta E = \frac{mv_{\parallel 0}^2}{2} = \frac{m}{2} \frac{T^2}{m^2 u_{\min}^2} = T \frac{T}{4E_k}.$$

Отметим, что функция распределения (5.2) не является максвелловской. Однако простая оценка показывает, что при используемых в методе электронного охлаждения плотностях пучка и температурном разбросе  $T_{\parallel}$  максвеллизация функции распределения электронов по продольным скоростям происходит достаточно быстро. Поэтому будем считать, что в электронном пучке в области взаимодействия с ионами распределение электронов по скоростям описывается температурно-анизотропным максвелловским распределением, с поперечной температурой, равной температуре катода, и продольной температурой  $T_{\parallel}$  (см. (3.15)):

$$f(\vec{v}) = \frac{n_e}{\pi^{3/2} v_{\perp 0}^2 v_{\parallel 0}} \exp\left(-\frac{v_{\perp}^2}{v_{\perp 0}^2} - \frac{v_{\parallel}^2}{v_{\parallel 0}^2}\right)$$

где  $mv_{\perp 0}^2/2 = T_{\perp}$  — температура катода,  $mv_{\parallel 0}^2/2 = T_{\parallel}$  — установившаяся продольная температура в пучке после его ускорения и релаксации к максвелловскому распределению.

Подставив это распределение в (5.1) и проведя преобразования, получим следующее кинетическое уравнение для функции распределения ионов  $f_i(\vec{V})$ , инжектированных в замагниченную электронную плазму с максвелловской температурно-анизотропной функцией распределения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i(\vec{V}_i)}{\partial t} &= \frac{\omega_0^2 t_i^2}{4\pi m_i} \frac{\partial}{\partial V_i} \int d^3 k \frac{\vec{k}}{k^4 |\epsilon_i(\vec{k}, \omega)|^2} \times \\ &\times \left( \frac{m_e}{m_i} 2 \int_0^{\infty} e^{-B} \cos \omega t dt \vec{k} \frac{\partial}{\partial V_i} + \frac{4\omega}{v_{\parallel 0}^2} \int_0^{\infty} e^{-B} \cos \omega t dt - \right. \\ &\left. - \frac{2k_{\perp}^2 (v_{\perp 0}^2 - v_{\parallel 0}^2)}{\omega_H v_{\parallel 0}^2} \int_0^{\infty} e^{-B} \sin \omega t \sin \omega_H t dt \right) f_i(\vec{V}_i). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Здесь, как и в (3.26),

$$B = \frac{k^2 v_{\parallel}^2 t^2}{4} + \frac{k_{\perp}^2 v_{\perp}^2}{\omega_H^2} \sin^2 \frac{\omega_H t}{2}, \quad \omega = \vec{k} \vec{V},$$

$\epsilon_i(\vec{k}, \omega)$  — продольная диэлектрическая проницаемость замагниченной температурно-анизотропной плазмы с распределением (3.15), определенная выражениями (3.17) — (3.19).

Для определения скорости изменения энергии пробного иона, движущегося со скоростью  $\vec{V}$  в рассматриваемой фоновой электронной плазме, умножим обе стороны кинетического уравнения (5.3) на  $m_i V_i^2/2$ , положим  $f(\vec{V}_i) = \delta(\vec{V} - \vec{V}_i)$  и проинтегрируем по  $\vec{V}_i$ . После преобразований получаем

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= -\frac{\omega_0^2 e_i^2}{2\pi^2} \int k^2 dk d\tau d\varphi \left\{ \frac{\omega}{k^4 |\epsilon_i(\vec{k}, \omega)|^2} \times \right. \\ &\times \left[ \frac{2\omega}{v_{\parallel 0}^2} \int_0^{\infty} e^{-B} \cos \omega t dt - \frac{k_{\perp}^2 (v_{\perp 0}^2 - v_{\parallel 0}^2)}{\omega_H v_{\parallel 0}^2} \int_0^{\infty} e^{-B} \sin \omega t \sin \omega_H t dt \right] - \\ &\left. - \frac{m_e}{m_i k^2} \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{\omega}{|\epsilon_i(\vec{k}, \omega)|^2} \int_0^{\infty} \cos \omega t e^{-B} dt \right) \right\}_{\omega = \vec{k} \vec{V}}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Сила торможения, действующая на ион при его движении в плазме, равна изменению его импульса в единицу времени. Умножим обе стороны кинетического уравнения (5.3) на  $m_i \vec{V}_i$ , положим  $f(\vec{V}_i) = \delta(\vec{V} - \vec{V}_i)$  и проинтегрируем по  $\vec{V}_i$ . После преобразований получаем:

$$\begin{aligned} \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = & -\frac{\omega_0^2 e_i^2}{2\pi^2 v_{i0}^2} \int \bar{k} d^3 k \left\{ \frac{1}{k^4 |e(\bar{k}, \omega)|^2} \times \right. \\ & \times \left( 2\omega \int_0^\infty e^{-B} \cos \omega t dt - \frac{k_\perp^2 (v_{\perp 0}^2 - v_{\parallel 0}^2)}{\omega_H} \int_0^\infty e^{-B} \sin \omega t \sin \omega_H t dt \right) \\ & \left. - \frac{m_e}{m_i} k^2 v_{i0}^2 \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{1}{k^4 |e(\bar{k}, \omega)|^2} \int_0^\infty e^{-B} \cos \omega t dt \right) \right\}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Введем следующие обозначения:

$$S_1 = 1 - \frac{\omega}{|k_\parallel| v_{i0}} C_s - \frac{\omega_H}{|k_\parallel| v_{i0}} \left( 1 - \frac{T_\parallel}{T_\perp} \right) C_{ss},$$

$$S_2 = \frac{\omega}{|k_\parallel| v_{i0}} C_c - \frac{\omega_H}{|k_\parallel| v_{i0}} \left( 1 - \frac{T_\parallel}{T_\perp} \right) C_{cs},$$

$$S_3 = -C_s - \frac{\omega}{|k_\parallel| v_{i0}} C_{tc} + \frac{\omega_H}{|k_\parallel| v_{i0}} \left( 1 - \frac{T_\parallel}{T_\perp} \right) C_{tss}, \quad (5.6)$$

$$S_4 = C_s - \frac{\omega}{|k_\parallel| v_{i0}} C_{tc} - \frac{\omega_H}{|k_\parallel| v_{i0}} \left( 1 - \frac{T_\parallel}{T_\perp} \right) C_{tcs}, \quad (5.6)$$

где

$$C_s = |k_\parallel| v_{i0} \int_0^\infty e^{-B} \sin \omega t dt,$$

$$C_c = |k_\parallel| v_{i0} \int_0^\infty e^{-B} \cos \omega t dt,$$

$$C_{ss} = |k_\parallel| v_{i0} z \int_0^\infty e^{-B} \sin \omega t \sin \omega_H t dt,$$

$$C_{cs} = |k_\parallel| v_{i0} z \int_0^\infty e^{-B} \cos \omega t \sin \omega_H t dt,$$

$$C_{ts} = k_\perp^2 v_{i0}^2 \int_0^\infty te^{-B} \sin \omega t dt, \quad (5.7)$$

$$C_{tc} = k_\perp^2 v_{i0}^2 \int_0^\infty te^{-B} \cos \omega t dt,$$

$$C_{tss} = k_\perp^2 v_{i0}^2 z \int_0^\infty te^{-B} \sin \omega t \sin \omega_H t dt,$$

$$C_{tcs} = k_\perp^2 v_{i0}^2 z \int_0^\infty te^{-B} \cos \omega t \sin \omega_H t dt.$$

Используя известное разложение

$$e^{a \cos \varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(a) e^{-in\varphi}$$

и проведя преобразования, интегральные выражения (5.7) можно представить в виде следующих рядов:

$$C_s = A_0(z) \frac{X(P_0)}{P_0} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(z) \left( \frac{X(P_n)}{P_n} + \frac{X(P_{-n})}{P_{-n}} \right),$$

$$C_c = \sqrt{\pi} \left( A_0(z) e^{-P_0^2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(z) (e^{-P_n^2} + e^{-P_{-n}^2}) \right),$$

$$C_{ss} = \sqrt{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n(z) (e^{-P_{-n}^2} - e^{-P_n^2}),$$

$$C_{cs} = \sum_{n=1}^{\infty} n A_n(z) \left( \frac{X(P_n)}{P_n} - \frac{X(P_{-n})}{P_{-n}} \right), \quad (5.8)$$

$$C_{ts} = 2\sqrt{\pi} \left( A_n(z) P_0 e^{-P_0} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(z) (P_n e^{-P_n^2} + P_{-n} e^{-P_{-n}^2}) \right),$$

$$C_{tc} = 2 \left( 1 - A_0(z) X(P_0) - \sum_{n=1}^{\infty} A_n(z) (X(P_n) + X(P_{-n})) \right),$$

$$C_{tss} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} n A_n(z) (X(P_n) - X(P_{-n})),$$

$$C_{tcs} = 2\sqrt{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n(z) (P_n \cdot e^{-P_n^2} - P_{-n} e^{-P_{-n}^2})$$

Здесь

$$A_n(z) = e^{-z} I_n(z), \quad z = \frac{k_{\perp}^2 v_{\perp}^2}{2\omega_H^2},$$

$I_n(z)$  — функция Бесселя мнимого аргумента,  $X(P)$  — определено выражением (3.8).

$$P_n = \frac{\omega + n\omega_H}{|k_{\parallel}| v_{\parallel 0}}, \quad P_{-n} = \frac{\omega - n\omega_H}{|k_{\parallel}| v_{\parallel 0}},$$

В этих обозначениях продольная диэлектрическая проницаемость рассматриваемой электронной плазмы (3.17) — (3.19) имеет вид

$$\varepsilon_{\parallel}(\vec{k}, \omega) = 1 + \frac{1}{\kappa^2} S_1 + \frac{i}{\kappa^2} S_2, \quad (5.9)$$

$$\kappa^4 |\varepsilon_{\parallel}(\vec{k}, \omega)|^2 = (\kappa^2 + S_1)^2 + S_2^2,$$

где

$$\kappa = k r_{D\parallel}, \quad r_{D\parallel} = \sqrt{\frac{T_{\parallel}}{4\pi n e^2}}.$$

Входящая в (5.4) и (5.5) производная

$$\omega \frac{\partial}{\partial \omega} (\kappa^4 |\varepsilon_{\parallel}(\vec{k}, \omega)|^2) = 2 \frac{\omega}{|k_{\parallel}| v_{\parallel 0}} ((\kappa^2 + S_1) S_3 + S_2 S_4). \quad (5.10)$$

Подставляя эти выражения в формулу (5.4) для потерь энергии иона, получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} \frac{dE_i}{dt} = & - \frac{\omega_0^2 e_i^2}{2\pi^2 V} \int_0^{\Lambda} \kappa^3 dx \int_{-1}^1 d\tau \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(\kappa^2 + S_1)^2 + S_2^2} \times \\ & \times \left\{ 2\tau \frac{V^2}{v_{\parallel 0}^2} \left( \tau \frac{kV}{|k_{\parallel}| v_{\parallel 0}} C_c - \frac{\omega_H}{|k_{\parallel}| v_{\parallel 0}} \left( 1 - \frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} \right) C_{ss} \right) + \right. \end{aligned}$$

$$\left. + \frac{m_e}{m_i} \left( - \frac{kV}{|k_{\parallel}| v_{\parallel 0}} C_c + \tau \frac{(kV)^2}{(k_{\parallel} v_{\parallel 0})^2} \left[ C_{ts} + 2C_c \frac{(\kappa^2 + S_1) S_3 + S_2 S_4}{(\kappa^2 + S_1)^2 + S_2^2} \right] \right) \right\}. \quad (5.11)$$

Здесь  $\Lambda = k_{\max} r_{D\parallel} = r_{D\parallel} / r_{\min} = 1 / r_{\min d}$ ,  $\kappa = k r_{D\parallel}$ .

В Приложении показано, что в температурно-изотропном случае выражение (5.11) в основном совпадает с результатом работы [15].

В этих же обозначениях выражение для силы торможения иона (5.5) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = & - \frac{\omega_0^2 e_i^2}{2\pi^2 V^2} \int_0^{\Lambda} \kappa^3 dx \int_{-1}^1 d\tau \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\sqrt{1-\tau^2} \cos \varphi \vec{e}_x + \tau \vec{e}_z}{(\kappa^2 + S_1)^2 + S_2^2} \times \\ & \times \left\{ \frac{2V^2}{v_{\parallel 0}^2} \left[ \tau \frac{kV}{|k_{\parallel}| v_{\parallel 0}} C_c - \frac{\omega_H}{k_{\parallel} v_{\parallel 0}} \left( 1 - \frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} \right) C_{ss} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{m_e}{m_i} \frac{(kV)^2}{(k_{\parallel} v_{\parallel 0})^2} \left( C_{ts} + 2C_c \frac{(\kappa^2 + S_1) S_3 + S_2 S_4}{(\kappa^2 + S_1)^2 + S_2^2} \right) \right\}. \quad (5.12) \end{aligned}$$

При  $V/v_{\parallel 0} \gg 1$  членами, пропорциональными  $m_e/m_i$ , в выражениях (5.11) и (5.12) можно пренебречь, что соответствует пренебрежению диффузией. Легко видеть, что оставшиеся выражения в точности совпадают, соответственно, с (3.1) и (3.2). Так что при рассмотрении предела  $V/v_{\parallel 0} \gg 1$  можно исходить непосредственно из выражений (3.1) и (3.2), при этом продольная диэлектрическая проницаемость дается выражением (3.21), из которого следует, что

$$\frac{\text{Im } \varepsilon_{\parallel}(\vec{k}, \omega)}{|\varepsilon_{\parallel}(\vec{k}, \omega)|^2} = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{v}{(\text{Re } \varepsilon_{\parallel}(\vec{k}, \omega))^2 + v^2} = \delta(\text{Re } \varepsilon_{\parallel}(\vec{k}, \omega)),$$

где  $\delta$  — дельта функция Дирака. Так что в пределе  $V/v_{\parallel 0} \gg 1$  получаем

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} = & - \frac{e_i^2}{2\pi^2} \int \frac{\vec{k} V}{k^2} \delta(\text{Re } \varepsilon_{\parallel}(\vec{k}, \omega)) d\vec{k}, \\ \vec{F} = & - \frac{e_i^2}{2\pi^2} \int \frac{\vec{k}}{k^2} \delta(\text{Re } \varepsilon_{\parallel}(\vec{k}, \omega)) d\vec{k}, \quad (5.13) \end{aligned}$$

где  $\omega = \vec{k} \vec{V}$  и где, согласно (3.21),

$$\operatorname{Re} \varepsilon_l(\vec{k}, \omega) = 1 + \frac{\omega_0^2}{k^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{2n\omega_H/v_{\perp 0}^2}{\omega + n\omega_H} - \frac{k_{\parallel}^2}{(\omega + n\omega_H)^2} \right) A_n(z). \quad (5.14)$$

Напомним, что  $z = \frac{k_{\parallel}^2 v_{\perp 0}^2}{2\omega_H^2}$ . Наличие дельта-функции позволяет провести интегрирование по одной из переменных.

В частном случае  $\vec{V} \parallel \vec{H}$  удобно выбрать полярную систему координат с осью  $z$  направленной по  $H$ . При этом подынтегральное выражение не зависит от азимутального угла  $\varphi$  и интегрирование по  $\varphi$  тривиально. Этот случай подробно рассмотрен в работе [18], где выражение для силы трения (5.13) представлено в виде суммы одномерных интегралов, соответствующих корням уравнения

$$\operatorname{Re} \varepsilon_l(\vec{k}, \omega) = 0,$$

где  $\varepsilon_l(\vec{k}, \omega)$  определено (5.14).

#### 6. ПОТЕРИ ЭНЕРГИИ И СИЛА ТОРМОЖЕНИЯ ИОНА В НЕЗАМАГНИЧЕННОЙ ТЕМПЕРАТУРНО-АНИЗОТРОПНОЙ ЭЛЕКТРОННОЙ ПЛАЗМЕ

В пункте 3.2 мы получили продольную диэлектрическую проницаемость незамагниченной температурно-анизотропной плазмы (3.27), (3.29), совершив предельный переход  $\vec{H}, \omega_H \rightarrow 0$  в соответствующем выражении (3.23) для замагниченной плазмы. Совершив аналогичный переход  $\vec{H}, \omega_H \rightarrow 0$  в (5.3) получим кинетическое уравнение для функции распределения ионов, инжектированных в незамагниченную температурно-анизотропную плазму с распределением (3.15) по скоростям

$$\frac{\partial f_i(\vec{V}_i)}{\partial t} = \frac{\omega_0^2 e_i^2}{2\pi^2 m_i} \frac{\partial}{\partial V_i} \int d^3 k \frac{\vec{k} e^{-(\vec{k} \cdot \vec{V}_i)^2 / B_0}}{k^4 |\varepsilon_l(\vec{k}, \omega)|^2} \frac{1}{\sqrt{B_0}} \times \left\{ \frac{4k^2(\vec{k} \cdot \vec{V}_i)}{B_0} + \frac{m_e}{m_i} \vec{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{V}_i} \right\} f_i(\vec{V}_i). \quad (6.1)$$

Здесь  $\omega = \vec{k} \cdot \vec{V}$ ,  $\varepsilon_l(\vec{k}, \omega)$  определено выражением (3.29),

$$B_0 = k_{\perp}^2 v_{\perp 0}^2 + k_{\parallel}^2 v_{\parallel 0}^2.$$

Откуда для потерь энергии ионом получаем

$$\frac{dE_i}{dt} = - \frac{\omega_0^2 e_i^2}{2\pi \sqrt{\pi}} \int \frac{dx d\tau d\varphi e^{-2\omega^2/B_0}}{\sqrt{B_0} r_D^2 |\varepsilon_l(\vec{k}, \omega)|^2} \left\{ \frac{2\omega^2}{B} - \frac{m_e}{m_i} \left[ Q + \frac{\omega}{\kappa^4 |\varepsilon_l(\vec{k}, \omega)|^2} \left( \frac{4}{\sqrt{B_0}} \left( \frac{\omega}{\sqrt{B_0}} + Q D \left( \frac{\omega}{\sqrt{B_0}} \right) \right) \operatorname{Re} \varepsilon_l(\vec{k}, \omega) - \frac{2\pi}{B_0} \omega Q e^{-2\omega^2/B_0} \right) \right] \right\}, \quad (6.2)$$

где  $Q = 1 - 2\omega^2/B_0$ ,  $\omega = \vec{k} \cdot \vec{V}$ ,  $\kappa = kr_{D\parallel}$ ,  $D(x)$  — интеграл Досона (см. (3.8)).

Сила торможения, действующая на ион в такой плазме, равна

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = - \frac{\omega_0^2 e_i^2}{2\pi^{3/2}} \int \frac{dx d\tau d\varphi k e^{-2\omega^2/B_0}}{\sqrt{B_0} r_{D\parallel}^2} \times \left\{ \frac{(\sqrt{1-\tau^2} \cos \varphi \cdot \vec{e}_x + \tau \vec{e}_z)}{|\varepsilon_l(\vec{k}, \omega)|^2} \cdot \left\{ \frac{2\omega}{B_0} - \frac{m_e}{m_i} \left[ -\frac{2\omega}{B_0} + \frac{1}{\kappa^4 |\varepsilon_l(\vec{k}, \omega)|^2} \times \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \times \left[ \frac{4}{\sqrt{B_0}} \left( \frac{\omega}{\sqrt{B_0}} + Q D \left( \frac{\omega}{\sqrt{B_0}} \right) \right) \operatorname{Re} (\varepsilon_l(\vec{k}, \omega)) - \frac{2\pi}{B_0} \omega Q e^{-2\omega^2/B_0} \right] \right\} \right\}. \quad (6.3)$$

#### 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В разделе 2 этой работы сила торможения и потери энергии при движении иона в предельно-замагниченной холодной электронной плазме рассматривались в приближении парных столкновений. Показана справедливость формул (1.1), полученных в работе [6], в области их применимости. Эти формулы были получены в приближении парных столкновений. При этом наличие окружающей среды замагниченных электронов учитывалось введением обрезания области чисто кулоновского взаимодействия на дебаевском радиусе. Смещение электронов, обусловленное взаимодействием с ионом, считается малым. Численное моделирование позволяет рассмотреть случай произвольных смещений. Полученные результаты показывают, что с ростом параметра взаимодействия  $r_{\min d}$  происходит уменьшение поперечной к скорости силы торможения по сравнению результатом (1.1). В разделах 3 и 4 этой работы предпринята попытка более корректно учесть влияние среды замагниченных электронов путем введения диэлектрической проницаемости. Однако используемые выражения для тензора проницаемости получены методом интегрирования по невозмущенным траекториям, т. е. в приближении, когда взаимодействие электронов с про-



летающим ионом можно рассматривать как слабое возмущение их свободного движения. Поэтому, полученные этим способом результаты требуют уточнения с уменьшением скорости тормозимого иона.

В разделе 5 получены общие формулы для потерь энергии и силы торможения иона при конечной величине внешнего магнитного поля. Однако какие-либо численные вычисления не проводились.

В этой работе считалось, что электроны ускоренного пучка — слабо взаимодействующая плазма, т. е. что выполнено условие  $r_{min} = (ee_i/mV^2) \ll n^{-1/3}$ . Однако вполне возможно появление установок с настолько холодным пучком, что это условие будет нарушено. Тогда пучок следует рассматривать уже как сильно взаимодействующую электронную плазму.

Пользуюсь случаем выразить глубокую благодарность А.Н. Скринскому и Б.В. Чирикову за интерес к этой работе, просмотр рукописи и замечания. Я искренне благодарен Б.Н. Брейзману, Н.С. Диканскому, В.А. Лебедеву, В.В. Пархомчуку и Д.В. Пестрикову за обсуждения и полезную критику. Я благодарен Е.В. Шунько за ссылку на работу [16].

#### ПРИЛОЖЕНИЕ

В работе [15] получена формула для потерь энергии ионом в замагниченной температурно-изотропной плазме. Для сравнения наших результатов с результатами работы [15] в формуле энергетических потерь (5.4) и в выражении продольной диэлектрической проницаемости (3.23) положим  $T_{||} = T_{\perp} = T$ , перейдем к новой переменной интегрирования  $y = kv_0 t / 2$  — и введем обозначения

$$G_e = 2\tau x \int_0^{\infty} e^{-B} \sin(2\tau xy) dy,$$

$$F_e = 2\tau x \int_0^{\infty} e^{-B} \cos(2\tau xy) dy,$$

$$G'_e = 2 \int_0^{\infty} e^{-B} \sin(2\tau xy) dy + 4\tau x \int_0^{\infty} e^{-B} \cos(2\tau xy) dy,$$

$$F'_e = 2 \int_0^{\infty} e^{-B} \cos(2\tau xy) dy - 4\tau x \int_0^{\infty} e^{-B} \sin(2\tau xy) dy,$$

где

$$x = V/v_0, \quad \frac{mv_0^2}{2} = T.$$

В этих обозначениях

$$\chi^4 |\epsilon_l|^2 = 4((\chi^2 + G)^2 + F_e^2),$$

$$\omega \frac{\partial(\chi^4 |\epsilon_l|^2)}{\partial \omega} = -8\tau x [(\chi^2 + G)G' - F_e F'_e],$$

где  $G = 1 - G_e$ .

Выражение (5.4) для потерь энергии:

$$\frac{dE_i}{dt} = -\frac{e^2 k_e^2 V}{\pi^2} \int_0^{\infty} \chi^3 d\chi \int_{-1}^1 d\tau \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\chi \tau F_e - \frac{1}{2} \frac{m_e}{m_i} H_e}{(\chi^2 + G)^2 + F_e^2},$$

где

$$H_e = \frac{(\chi^2 + G)[2G'F_e + F'_e(\chi^2 + G)] - F_e^2 F'_e}{F_e^2 + (\chi^2 + G)^2}.$$

Здесь  $k_e^2 = 1/r_D^2 = 4\pi n e^2 / T$ .

Сравнивая это выражение с результатом работы [15], видим, что там в подынтегральном выражении перед  $H_e$  пропущен множитель  $m_e/m_i$ , а в предынтегральном коэффициенте стоит лишнее  $m_i$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Будкер Г.И.: Proc. Intern. Sympos. Electron and Positron Storage Rings. Sac- lau, 1966, p.11-1-1. Атомная энергия, 1967, Т.22, с.346.
2. Будкер Г.И., Скринский А.Н. УФН, 1978, т.124, с.561.
3. Скринский А.Н., Пархомчук В.В. Физ. ЭЧАЯ, 1981, т.12, с.557.
4. Дербенев Я.С., Скринский А.Н. Препринт ИЯФ СО АН СССР. № 225. Новоси- бирск, 1968.
5. Будкер Г.И., Булушев А.Ф., Диканский Н.С. и др. Труды V Всесоюзного сове- щания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1976, т.1, с.236.
6. Дербенев Я.С., Скринский А.Н. Физика плазмы. 1978, т.4, с.492; Particle Ace- lerators, 1978, v.8, p.235.
9. BurHW. Particle Accelerators, 1980, v.10, p.101.
8. Ogino T., Ruggiero A.G. Particle Accelerators. 1980, v.10, p.197.
9. Пархомчук В.В. Физика быстрого электронного охлаждения. Диссертация. — Новосибирск, 1985.
10. Parhomchuk V.V. Proc. Workshop on Electron Cooling and Related Applica-

- tions ECOOL 1984. Karlsruhe, 1984. Ed. Poth H. (КЕК 3846, 1985). p.71.
11. Диканский Н.С., Кот Н.Х. и др. Труды 13 Международной конференции по ускорителям заряженных частиц высоких энергий. Новосибирск: Наука, 1987, т.1, с.330.
  12. Диканский Н.С., Кот Н.Х., Куделайнен В.И. и др. Препринт ИЯФ СО АН СССР 87-102. Новосибирск, 1987.
  13. Rostoker N. Phys Fluids, 1980, v.3, p.922.
  14. Hassan M.N., Watson C.J.H. Plasma Phys, 1976, v.19, p.237.
  15. Hassan M.N., Sakanaka P.H. J. Plasma Phys. 1983, v.29, part.1, p.131.
  16. Грановский В.Л. Электрический ток в газе. Установившийся ток. — М.: Наука, 1971, с.28.
  17. Голант В.Л. ЖТФ, 1963, т.33, с.1.
  18. Sorensen A.H., Bonderup E. Nucl. Instr. and Meth, 1983, v.215, p.27.
  19. May R.M., Cramer N.F. Phys. Fluids, 1970, v.13, p.1766.
  20. Шафранов В.Д. Вопросы теории плазмы / под ред. Леонтовича М.А. М.: Атомиздат, 1963, т.3, с.3.
  21. Трубников Б.А. Ibidem. 1963, т.1, с.98.
  22. Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А. Основы электродинамики плазмы. М.: Высш. школа, с.146.
  23. Справочник по специальным функциям. Под ред. Абрамовица М. и Стиган И. — М.: Наука, 1979, с.119, 140.
  24. Fried B.D., Conte S.D. The Plasma Dispersion Function. — N.Y., London.: Academic Press, 1961.
  25. Карпов К.А. Таблицы функции  $W(z) = e^{-z^2} \int_0^z e^{x^2} dx$  в комплексной области. — М.: Изд. АН СССР, 1954.
  26. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1962.
  27. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. — М.: Наука, 1981.

В.Г.Давидовский

**К теории торможения иона в замагниченной  
температурно-анизотропной электронной плазме**

Ответственный за выпуск С.Г.Попов

Работа поступила 19 мая 1988 г.  
Подписано в печать 7.06. 1988 г. МН 08384.  
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 5,0 печ.л., 3,0 уч.-изд.л.  
Тираж 200 экз. Бесплатно. Заказ № 80

Набрано в автоматизированной системе на базе фото-  
наборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и  
отпечатано на ротапринтере Института ядерной физики  
СО АН СССР,  
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.