

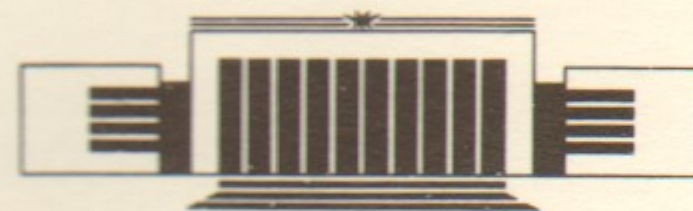


ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

В.Н. Байер, В.М. Катков, В.М. Страховенко

ИЗЛУЧЕНИЕ И РОЖДЕНИЕ ПАР  
ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ  
В ОРИЕНТИРОВАННЫХ МОНОКРИСТАЛЛАХ

ПРЕПРИНТ 88-91



НОВОСИБИРСК

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Процесс излучения фотона заряженной частицей и рождения электрон-позитронной пары фотоном в случае, когда начальная частица движется под малым углом  $\theta_0$  к направлению осей или плоскостей монокристалла, существенно меняется по сравнению с аморфной средой, что обусловлено коллективным взаимодействием некоторой совокупности систематически расположенных атомов кристаллической решетки с налетающей частицей.

Этот круг вопросов начал исследоваться еще в 50-е годы, когда было установлено, что возможна конструктивная интерференция вкладов в излучение (рождение пары) на различных центрах (когерентное излучение и рождение пар). При определенных углах  $\theta_0$  и энергиях вероятности когерентного излучения и рождения пар (см., [1, 2] и цитированную там литературу) существенно отличаются от вероятностей независимого (некогерентного) излучения и рождения пар на отдельных центрах, имеющих место в аморфной среде (механизм Бете — Гайтлера).

В 70—80-е годы было выяснено, что специфическое взаимодействие заряженных частиц и фотонов с монокристаллами отнюдь не исчерпывается когерентными процессами. В последние годы большое внимание привлекает область высоких энергий (десятки ГэВ и выше), где, в частности, с большой вероятностью идут процессы в сильных электрических полях, создаваемых осями и плоскостями монокристалла, т. е. кристалл оказывается полигоном, где может исследоваться квантовая электродинамика в интенсивном внешнем

электромагнитном поле. Недавно была развита общая теория излучения частиц высокой энергии и рождения пар фотонами, справедливая при любых углах влета  $\theta_0$  падающей частицы [3—8]. Оказалось, что механизм взаимодействия существенно зависит от величины угла влета  $\theta_0$  и что важным характерным углом задачи является  $\theta_0 = \theta_V \equiv V_0/m$ , где  $V_0$  — масштаб непрерывного потенциала оси (плоскости), относительно которой определяется угол  $\theta_0$ ;  $m$  — масса электрона.

При  $\theta_0 \gg V_0/m$  общая теория переходит в теорию когерентного излучения и рождения пар. Для углов  $\theta_0 \gg V_0/m$  из нее следует ранее не обсуждавшаяся модифицированная теория когерентных процессов. Так же, как для механизма Бете—Гайтлера, в когерентной области применима теория возмущений по взаимодействию с кристаллом.

В области малых углов  $\theta_0 \ll V_0/m$  действует механизм излучения и рождения пар в постоянном внешнем поле (для излучения используются термины магнитотормозной или синхротронный предел), где эффекты поля должны учитываться точно, без использования теории возмущений. Это означает, что поле оси (плоскости) можно считать постоянным на длине формирования излучения (пары)  $l_f \sim ma_s/V_0$  (где  $a_s$  — радиус экранирования потенциала), см., [9—11]. Тогда вычисление вероятностей процессов в кристаллах сводится к выбору адекватного потенциала и проведению надлежащих усреднений (см. [9, 10, 12, 3, 4] для излучения и [11, 13, 5—8, 14—17] для рождения пар). В задаче о рождении пар работы [18—20] основывались на предположении о существенной роли захвата частиц родившейся пары в каналы, это предположение не подтвердилось. Из общей теории в этой области следует как предел постоянного поля, так и поправки к нему  $\propto \theta_0^2$ . Важно, что в области высоких энергий характерные длины, на которых происходят процессы излучения или рождения пар оказываются на один-два порядка более короткими, чем длины в соответствующем аморфном веществе. В силу этого в ориентированных кристаллах могут развиваться специфические электрон-фотонные ливни [21]. Особенно сильно эти эффекты проявляются при малых углах  $\theta_0$ , когда процессы происходят в постоянном внешнем поле.

К настоящему времени уже выполнен обширный цикл экспериментов с использованием пучков фотонов и электронов в ЦЕРН [22—28]. Полученные экспериментальные данные вполне удовлетворительно описываются теорией [29].

Многие особенности обсуждаемых процессов — излучения заря-

женной частицы и рождения пар фотоном в монокристалле — схожи с излучением и рождением пар в поле плоской электромагнитной волны. Это связано с тем, что для ультррелятивистских частиц и фотонов, движущихся вблизи осей (плоскостей), поле кристалла может быть сведено к потоку налетающих эквивалентных фотонов. Поскольку описание излучения и рождения пар в поле волны существенно проще, чем в монокристалле, то упомянутая аналогия оказывается весьма полезной. Потенциал кристалла запишем в виде

$$U(\vec{r}) = \sum_{\vec{q}} G(\vec{q}) e^{-i\vec{q}\vec{r}}, \quad (1.1)$$

явный вид  $G(\vec{q})$  зависит от типа решетки и пока нам не понадобится. В системе покоя кристалла имеется только электрическое поле  $\vec{E}$ . В системе отсчета, движущейся со скоростью  $\vec{v}$  вдоль направления влета заряженной частицы (фотона)  $\vec{n}$  ( $\vec{v} = \vec{n}v$ ), возникает магнитное поле  $\vec{H} = \gamma_v [\vec{E}\vec{v}]$  ( $\gamma_v = (1 - v^2)^{-1/2} \gg 1$ ) и результирующее поле в этой системе, как известно, может быть представлено в виде потока эквивалентных фотонов с частотой  $\gamma_v |q_{\parallel}| v$  ( $q_{\parallel} = (\vec{q}\vec{n})$ ), который с релятивистской точностью имеет вид<sup>\*</sup>

$$\vec{J}_q = - \frac{\gamma_v}{4\pi\alpha} \frac{|G(\vec{q})|^2}{|q_{\parallel}|} \vec{q}_{\perp}, \quad (1.2)$$

где  $\vec{q}_{\perp} = \vec{q} - \vec{n}(\vec{q}\vec{n})$ ,  $e^2 = \alpha = 1/137$ . В области взаимодействия, поперечный размер которой порядка  $\lambda_c = 1/m = h/mc$ , а продольный — длина формирования, в ц-системе падающей частицы и эквивалентного фотона  $\sim 2\pi/|q_{\parallel}| \gamma_v$ , находится  $N_q \simeq |\vec{J}_q| \frac{2\pi}{|q_{\parallel}| \gamma_v} \lambda_c^2$  фотонов. Эффективная сила взаимодействия характеризуется параметром

$$\alpha N_{ph} = \alpha \sum_{\vec{q}} N_q \simeq \sum_{\vec{q}} \frac{|G(\vec{q})|^2 \vec{q}_{\perp}^2}{m^2 q_{\parallel}^2}. \quad (1.3)$$

Этот параметр является чисто классическим (не содержит постоянной Планка  $h$ ) и всегда возникает в задачах с внешним электромагнитным полем: такой же смысл имеет параметр  $\xi^2$  в теории процессов в интенсивной плоской волне (см., например, [30—32]) и параметр  $\rho$  в задаче излучения при квазипериодическом движении (см. [10]). При  $\alpha N_{ph} \ll 1$  внешнее поле можно учитывать по

<sup>\*</sup> Используется система единиц  $\hbar = c = 1$ .

теории возмущений, а при  $\alpha N_{ph} \gg 1$  имеем предел постоянного поля. Для оценок можно считать, что  $|G(\bar{q})| \sim V_0$ ,  $q_{\parallel} \sim q_{\perp} \vartheta_0$ , тогда

$$\alpha N_{ph} \sim \left( \frac{V_0}{m\vartheta_0} \right)^2. \quad (1.4)$$

Итак, проведенный анализ показывает, что при  $\vartheta_0 \ll V_0/m$  применимо приближение постоянного поля, а при  $\vartheta_0 \gg V_0/m$  справедлива теория возмущений, первое приближение которой и является теорией когерентного излучения и рождения пар.

Обсудим качественные особенности процесса излучения в ориентированном монокристалле. Хорошо известно (см., например, [33], гл. 1), что характеристики этого процесса существенно зависят от соотношения между характерным углом излучения  $\vartheta_V \equiv m/\varepsilon = 1/\gamma$  ( $\varepsilon$  — энергия электрона) и углом отклонения частицы на траектории  $\Theta^2 \sim \langle (\Delta \bar{v})^2 \rangle = \langle \bar{v}^2 \rangle - \langle \bar{v} \rangle^2$ , где  $\langle \dots \rangle$  означает усреднение по времени. Соответствующий параметр  $\rho$  был введен в [9] (см. также [10]):

$$\rho = 2\gamma^2 \langle (\Delta \bar{v})^2 \rangle. \quad (1.5)$$

Напомним, что при значениях параметра  $\rho \ll 1$  излучение носит дипольный характер и формируется за время порядка периода движения, а при  $\rho \gg 1$  имеет магнитотормозной характер (для частот, дающих вклад в интенсивность) и происходит с небольшого участка траектории.

Движение частицы и, соответственно, параметр  $\rho$  зависят от величины угла влета  $\vartheta_0$  частицы в кристалл по сравнению с характерным углом каналирования  $\vartheta_c \simeq \sqrt{2V_0/\varepsilon}$ . При углах влета  $\vartheta_0 < \vartheta_c$  падающие электроны захватываются в каналы или низкие надбарьерные состояния<sup>\*)</sup>, а при  $\vartheta_0 \gg \vartheta_c$  частицы движутся высоко над барьером. В последнем случае для описания движения можно использовать приближение прямолинейной траектории, с помощью которого из (1.5) получаем оценку (ср. (1.4))

$$\rho(\vartheta_0) \approx \left( \frac{2V_0}{m\vartheta_0} \right)^2. \quad (1.6)$$

Для углов влета  $\vartheta_0 \leq \vartheta_c$  значение поперечной (к оси, плоскости) скорости частицы  $\vartheta_{\perp} \leq \vartheta_c$  и параметр  $\rho \leq \rho_c$ , где

<sup>\*)</sup> При этом происходит перераспределение потока заряженных частиц — эффект важный, в частности, в задаче излучения.

$$\rho_c = \frac{2V_0\varepsilon}{m^2}. \quad (1.7)$$

Из (1.6) мы снова видим, что в задаче возникает упомянутый выше характерный угол  $\vartheta_V \equiv V_0/m$ , причем  $\rho_c = (2\vartheta_V/\vartheta_c)^2$ .

В работе авторов [10] показано, что при заданной частоте движения  $\omega_0$  характерные частоты излучаемых фотонов определяются соотношением

$$u \equiv \frac{\omega}{\varepsilon - \omega} \sim \frac{2\omega_0\varepsilon}{m^2} \sqrt{1 + \rho}. \quad (1.8)$$

При движении заряженной частицы вблизи оси (плоскости) кристалла можно для оценки считать, что  $\omega_0 \sim v_{\perp}/a_s \sim V_0/ma_s\sqrt{\rho}$ , где  $a_s$  — размер области действия непрерывного потенциала. Тогда из (1.8) получаем  $u \sim (1 + 1/\rho)^{1/2} \chi_s$ , где появился второй важный параметр  $\chi_s$

$$\chi_s = \frac{V_0\varepsilon}{m^3 a_s}, \quad (1.9)$$

который характеризует квантовые эффекты при излучении. Действительно, из полученной оценки (справедливой вплоть до значений  $\chi_s \sim 1$ ) следует, что соотношение  $\omega/\varepsilon \ll 1$  для характерных излучаемых частот, позволяющее пренебречь отдачей и пользоваться классической теорией излучения, может выполняться лишь при условии  $\chi_s \ll 1$ . Однако и в этом случае применимость классического описания излучения нарушается при  $\sqrt{\rho} \leq \chi_s$ , т. е. при  $\vartheta_0 \geq V_0/m\chi_s = ma_s/\gamma \equiv \vartheta_m$ . Отметим, что в кристаллах типичное значение величины  $ma_s \sim 10^2 \gg 1$ .

Для достаточно больших углов влета  $\vartheta_0$  оказывается справедливой теория когерентного тормозного излучения — КТИ (см. [1], гл. 1—2; [2]; а также [34], гл. 8; критерий применимости КТИ обсуждался в [35]), которая, как отмечалось, является борновским приближением по потенциалу кристалла и для своей применимости требует (в наших терминах) одновременного выполнения условия дипольности и возможности использования приближения прямолинейной траектории.

Обсудим теперь зависимость картины излучения от энергии частиц. Для малых энергий (до нескольких МэВ в осевом и до нескольких десятков МэВ в плоскостном случае) излучение определяется переходами между уровнями энергии в соответствующей потенциальной яме. Мы будем рассматривать область энергий,

когда число этих уровней велико и движение частицы можно описывать классически.

До тех пор, пока выполняется условие  $\rho_c \ll 1$  (при этом  $\vartheta_V \ll \vartheta_c \ll \vartheta_Y \ll \vartheta_m$ ) излучение является дипольным для всех углов влета частицы в кристалл. Параметр  $\chi_s$  мал:  $\chi_s = \rho_c / 2ma_s \ll \rho_c \ll 1$  и  $\chi_s / \sqrt{\rho_c} \ll 1$ , т. е. справедливо классическое описание излучения, которое нарушается для углов  $\vartheta_0 \sim \vartheta_m$ , но для таких углов уже применима теория КТИ, справедливая в этом случае при  $\vartheta_0 \gg \vartheta_c$ . Когда при дальнейшем увеличении энергии начинает выполняться условие  $\rho_c \sim 1$ , т. е.  $\vartheta_V \sim \vartheta_c \sim \vartheta_Y \ll \vartheta_m$ , все сказанное выше о характере излучения сохраняет силу, за исключением того, что теперь для малых углов влета  $\vartheta_0 \leq \vartheta_c$  излучение перестает быть дипольным. Наконец, при  $\rho_c \gg 1$ , когда  $\vartheta_Y \ll \vartheta_c \ll \vartheta_V$  для углов влета  $\vartheta_0 \ll \vartheta_V$  справедливо магнитотормозное описание излучения ( $\rho \gg 1$ ), а теорию КТИ можно применять в противоположном случае  $\vartheta_0 \gg \vartheta_V$  (при  $\vartheta_0 \sim \vartheta_V$  из (1.6) имеем  $\rho \sim 1$  и нарушается условие дипольности). Для таких энергий параметр  $\chi_s$  уже нельзя считать малым (так, уже при  $\chi = 0,1$  вычисленное классически значение полной интенсивности примерно в 1,5 раза превышает правильный результат) и становится необходимым точный учет квантовой отдачи при излучении.

Приведем еще оценку длины формирования излучения  $l_f$  для углов влета  $\vartheta_0 \leq \vartheta_c$ . Поскольку  $l_f \sim \varepsilon / m^2 u$ , то, используя (1.8), получаем следующую картину: при  $\rho_c \ll 1$ ,  $l_f \sim l_0 \sqrt{\rho_c} \sim 1/\omega_0$ , где  $l_0 = a_s / \vartheta_V$  и длина  $l_f$  растет:  $l_f \propto \sqrt{\varepsilon}$ ; когда начинает выполняться условие  $\rho_c \sim 1$ , этот рост прекращается и пока  $u \sim \chi_s$ , т. е. вплоть до  $\rho_c \approx 10^2$  длина формирования остается приблизительно постоянной:  $l_f \sim l_0$ ; при дальнейшем увеличении энергии имеем  $u \sim 1$  и  $l_f \sim \varepsilon / m^2$ ; при энергиях  $\varepsilon \sim 10$  ТэВ и выше этот закон меняется на более медленный:  $l_f \sim l_0 \chi_s^{1/3}$ . Величина  $l_0$  больше для легких кристаллов и, например, для оси  $\langle 111 \rangle$  меняется от  $5,7 \cdot 10^{-5}$  см в алмазе до  $2,6 \cdot 10^{-6}$  см в вольфраме. При энергии  $\varepsilon \sim 10$  ТэВ длины формирования в различных веществах становятся одного порядка:  $l_f \sim 10^{-3}$  см. Ниже мы будем предполагать, что толщина кристалла  $L$  удовлетворяет условию  $L \gg l_f$ .

Обсудим теперь рождение пар частиц фотоном. При  $\vartheta_0 \ll V_0/m$  применимо приближение постоянного поля, в котором поведение вероятности рождения пары определяется параметром

$$\kappa = \frac{e}{m^3} \sqrt{|F_{\mu\nu} K^\nu|^2} \xrightarrow{\vec{p}=0, \vec{E} \perp \vec{K}} \frac{\omega}{m} \frac{E}{E_0}, \quad (1.10)$$

где  $K^\nu(\omega, \vec{K})$  — 4-импульс фотона,  $E$  — локальное значение электрического поля на данном расстоянии от оси (плоскости),  $E_0 = m^2/e = m^2 c^3 / e \hbar = 1,32 \cdot 10^{16}$  В/см — критическое поле. Аналогичный параметр в задаче излучения

$$\chi = \frac{e}{m^3} \sqrt{|F_{\mu\nu} p^\nu|^2} \xrightarrow{\vec{p}=0, \vec{E} \perp \vec{p}} \frac{\varepsilon}{m} \frac{E}{E_0}, \quad (1.11)$$

где  $p^\nu(\varepsilon, \vec{p})$  — 4-импульс падающей частицы. Отметим, что  $\varepsilon E/m = E_{r.s.}$  есть электрическое поле в системе покоя частицы<sup>\*)</sup>. Формула (1.5) дает значение  $\chi$  на типичных для задачи излучения расстояниях. При  $\kappa \ll 1$  вероятность рождения пар в постоянном поле экспоненциально мала ( $\propto \exp(-8/3\kappa)$ ) и в монокристаллах специфическим эффектом является только когерентное рождение пар. При  $\kappa \sim 1$  вероятность рождения пар в постоянном поле  $W_e^{CF}$  быстро нарастает и сравнивается с вероятностью механизма Бете — Гайтлера  $W_{BH}$  при энергии фотона  $\omega = \omega_r$ . При дальнейшем увеличении энергии величина  $W_e^{CF}$  продолжает расти и при  $\kappa \gg 1$  достигает значений, существенно превышающих  $W_{BH}$  (см. табл. 2).

Вероятность когерентного рождения максимальна при углах влета фотона

$$\vartheta_0 \sim \vartheta_{\max} = \frac{m^2 \Delta}{\pi \omega} \quad (1.12)$$

где  $\Delta$  — типичное расстояние между осями, плоскостями. С ростом энергии фотона положение максимума смещается в сторону меньших углов и, когда достигается угол  $\vartheta_{\max} \sim V_0/m$ , теория когерентного рождения пар становится неприменимой в области своего максимума (и левее его). В этом смысле эта теория совершенно недостаточна в области высоких энергий.

При выводе основных закономерностей будем считать кристалл тонким, т. е. пренебрегать изменением функции распределения в поперечном фазовом пространстве при прохождении частиц через кристалл. Для справедливости этого приближения необходимо, чтобы (см. обсуждение [36]) толщина кристалла была меньше характерной длины деканализирования и характерной длины потерь энергии  $L_{ch}$ :

<sup>\*)</sup> Максимальное электрическое поле оси  $\langle 111 \rangle$  в вольфраме при  $T = 77$  К составляет около  $E = 10^{12}$  В/см, а при  $T = 293$  К около  $5 \cdot 10^{11}$  В/см. В кремнии и алмазе поля примерно на порядок величины слабее. Соответственно в вольфраме параметры  $\kappa$  и  $\chi$  достигают 1 при энергии 10—20 ГэВ, так что эффекты сильного электрического поля в кристалле вполне доступны экспериментальному исследованию.

$$L_{ch}^{-1} = \frac{I(\varepsilon)}{\varepsilon}, \quad (1.13)$$

где  $I(\varepsilon)$  — полная интенсивность излучения. Анализ (см. [36] и раздел 3 ниже) показывает, что область толщин, для которых кристалл можно считать тонким и одновременно  $L \gg l_f$ , существует при любых энергиях. С другой стороны, для рассматриваемой области энергий ( $\rho_c \gg 1$ ) в толстом кристалле при  $\theta_0 \ll \theta_V$  с необходимостью развивается специфический электромагнитный ливень (см. [13, 21]). Тогда описание излучения в терминах одной частицы становится неадекватным и следует решать соответствующие уравнения каскадной теории, ядрами которых служат приведенные ниже выражения, описывающие излучение и рождение пар фотоном.

## 2. ИЗЛУЧЕНИЕ ФОТОНА ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЕЙ И РОЖДЕНИЕ ПАРЫ ФОТОНОМ В МОНОКРИСТАЛЛЕ

Наиболее адекватным подходом к задаче об излучении релятивистских частиц и рождении пары частиц фотоном большой энергии является формализм, использующий операторный квазиклассический метод, развитый двумя из авторов (см. [33]), поскольку он применим во всех типах внешних полей, включая неоднородные и переменные. В случае больших квантовых чисел движения (квазиклассичность) этот метод позволяет, исходя из точных квантовых выражений, перейти, после серии преобразований, к величинам на классической траектории частицы, отдача при излучении фотона (закон сохранения энергии) при этом учитывается точно, как и при рождении пары фотоном. Общая формула для потери энергии частицей (см. [33, 10, 3, 4])

$$\Delta E = -\frac{\alpha m^2}{4\pi^2} \int \frac{d^3k}{\varepsilon \varepsilon'} \int \frac{d^3r}{V} F(\vec{r}, \theta_0) \int dt_1 \int dt_2 \left\{ 1 + \frac{\varepsilon^2 + \varepsilon'^2}{4\varepsilon \varepsilon'} \gamma^2 (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 \right\} e^{-iA}, \quad (2.1)$$

где

$$A = \frac{\omega \varepsilon}{2\varepsilon'} \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \frac{1}{\gamma^2} + (\vec{v} - \vec{v}(t))^2 \right], \quad (2.2)$$

здесь  $\alpha = e^2 = 1/137$ ;  $K^\mu = (\omega, \vec{K})$  — 4-импульс излученного в точке  $\vec{r}$  фотона,  $\vec{v} = \vec{K}/\omega$ ;  $\vec{v}(t)$  — скорость частицы,  $\vec{v}_{1,2} \equiv \vec{v}(t_1, t_2)$ ;  $\varepsilon' = \varepsilon - \omega$ ;  $V$  — объем кристалла.

При  $\rho_c \gg 1$  в области, где траектории существенно непрямолинейны ( $\theta_0 \ll \theta_c$ ,  $v_\perp \sim \theta_c$ ), механизм излучения является магнитотормозным и его вероятность выражается через локальные характеристики движения. Тогда для усреднения достаточно знать только функцию распределения в поперечном фазовом пространстве  $dN(\vec{\rho}, \vec{v}_\perp)$ , которая для тонкого кристалла непосредственно задается начальными условиями влета частиц в кристалл. При заданном угле влета  $\theta_0$  (угол между импульсом падающей частицы и кристаллической осью или плоскостью) имеем  $dN/N = d^3r/V \cdot F(\vec{r}, \theta_0)$ , где  $V$  — объем кристалла,  $N$  — полное число частиц. Функция  $F(\vec{r}, \theta_0)$  в осевом случае имеет вид

$$F_{ax}(\vec{\rho}, \theta_0) = \int \frac{d^2\rho_0}{S(\varepsilon_\perp(\vec{\rho}_0))} \vartheta(\varepsilon_\perp(\vec{\rho}_0) - U(\vec{\rho})), \quad (2.3)$$

где  $U(\vec{\rho})$  — непрерывный потенциал оси, зависящий от поперечной координаты  $\vec{\rho}$ , нормированный так, что  $U(\vec{\rho}) = 0$  на границе ячейки;  $U_0$  — глубина потенциальной ямы;  $S(\varepsilon_\perp(\vec{\rho}_0)) = \int d^2\rho \vartheta(\varepsilon_\perp(\vec{\rho}_0) - U(\vec{\rho}))$ ,  $\varepsilon_\perp(\vec{\rho}_0) = \frac{1}{2} \varepsilon \theta_0^2 + U(\vec{\rho}_0)$ ;  $\vartheta(x)$  — функция Хевисайда:  $\vartheta(x) = 0$  при  $x < 0$  и  $\vartheta(x) = 1$  при  $x > 0$ . Отметим, что распределение (2.3) при  $\varepsilon_\perp(\rho_0) > U_0$  (для надбарьерных частиц) становится в осевом случае равномерным, т. е. множитель  $F(\vec{r}, \theta_0)$ , учитывающий перераспределение потока, обращается в единицу.

Вероятность рождения пары получается из вероятности излучения фотона с частотой  $\omega$  (см. [2.1])

$$\omega_\gamma = \Delta E / \omega \quad (2.4)$$

с помощью правил подстановки

$$\omega \rightarrow -\omega, \quad \varepsilon \rightarrow -\varepsilon, \quad \varepsilon' \rightarrow \varepsilon_f = \omega - \varepsilon, \quad d^3k \rightarrow d^3p, \quad (2.5)$$

причем, поскольку при взаимодействии ультрарелятивистских частиц с фотонами все конечные частицы летят в малый угол вперед, то правила справедливы и в случае, когда по части переменных проведено интегрирование. Кроме того, в (2.1) следует опустить фактор  $F(\vec{r}, \theta_0)$ , описывающий перераспределение потока.

В формуле (2.1) можно выполнить интегрирование по углам вылета фотона. В случае  $\theta_0 \gg \theta_c$  частицы движутся высоко над барьером и для вычисления приращения скорости в (2.1) можно воспользоваться приближением прямолинейной траектории. Важно, что при выполнении условия  $\rho_c \gg 1$  всегда можно выбрать такие

углы  $\theta_0$ , что  $\theta_c \ll \theta_0 \ll \theta_V$ , т. е. применимо как магнитотормозное описание, так и приближение прямолинейной траектории. Однако формулы, полученные в указанном интервале  $\theta_0$ , остаются справедливыми вплоть до  $\theta_0 = 0$ . Это обусловлено тем, что магнитотормозной подход дает единое описание для всех углов  $\theta_0 \ll \theta_V$ . Что же касается области  $\theta_0 \gg \theta_V$ , то в ней при  $\rho_c \gg 1$  заведомо применимо приближение прямолинейной траектории.

Итак, общее выражение для интенсивности излучения, справедливое при любых углах  $\theta_0$ , имеет вид [3, 4]

$$I \equiv \frac{dE}{dt} = \frac{i\alpha m^2}{2\pi\epsilon^2} \int \omega d\omega \int \frac{d^3r}{V} F(\vec{r}, \theta_0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau - i0} B(\zeta) e^{-iA_1}, \quad (2.6)$$

где

$$B(\zeta) = 1 - \zeta \varphi(\epsilon) \left( \sum_{\vec{q}} \frac{G(\vec{q}) \vec{q}_{\perp}}{mq_{\parallel}} e^{-iq\tau} \sin q_{\parallel} \tau \right)^2,$$

$$A_1 = \frac{m^2 \omega \tau}{\epsilon \epsilon'} \left[ 1 + \sum_{\vec{q}, \vec{q}'} \frac{G(\vec{q}) G(\vec{q}') (\vec{q}_{\perp} \vec{q}'_{\perp})}{m^2 q_{\parallel} q'_{\parallel}} \exp(-i(\vec{q} + \vec{q}') \vec{r}) \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{\sin(q_{\parallel} + q'_{\parallel})\tau}{(q_{\parallel} + q'_{\parallel})\tau} - \frac{\sin q_{\parallel} \tau}{q_{\parallel} \tau} \frac{\sin q'_{\parallel} \tau}{q'_{\parallel} \tau} \right) \right], \quad (2.7)$$

$$\varphi(\epsilon) = \frac{\epsilon}{\epsilon'} + \frac{\epsilon'}{\epsilon}, \quad \zeta = 1.$$

В (2.6) мы перешли к переменным  $t_1 = t - \tau$ ,  $t_2 = t + \tau$ , использован потенциал кристалла в форме (1.1),  $q_{\parallel} = (\vec{q} \vec{v}_0)$ ,  $\vec{q}_{\perp} = \vec{q} - \vec{v}_0 (\vec{q} \vec{v}_0)$ ,  $\vec{v}_0$  — средняя скорость частицы. Мы считаем, что толщина кристалла существенно больше длины формирования фотона  $l_f$ , что позволяет перейти к интенсивности  $I = dE/dt$ . Выражение (2.6) дает описание излучения для неполяризованных фотонов и электронов.

Формула (2.6) описывает спектральные свойства излучения (для этого надо опустить интеграл по  $\omega$ ) при  $\theta_0 \gg \theta_c$  для любых значений  $\rho_c$ , а при  $\theta_0 \leq \theta_c$  при выполнении условия  $\rho_c \gg 1$ . Однако для полной интенсивности излучения область применимости выражения (2.6) гораздо шире и совпадает с областью применимости квазиклассического приближения. Это обусловлено тем, что при энергиях, когда  $\rho_c \leq 1$  и перестает действовать магнитотормозное описание, для углов  $\theta_0 \leq \theta_c$  справедлива классическая теория излучения, полная интенсивность которого также зависит только от локальных характеристик движения. Общее выражение для веро-

ятности рождения электрон-позитронной пары в единицу времени  $W_e$  получается из (2.6) с помощью описанной выше процедуры (см. (2.4), (2.5)), при этом  $\omega^2 d\omega \rightarrow \epsilon^2 d\epsilon$ . Выражение для  $W_e$  справедливо при любых энергиях и углах влета [5—8] и описывает рождение пар для неполяризованных электронов и фотонов:

$$\frac{dW_e}{dt} = W_e = \frac{i\alpha m^2}{2\pi\omega^2} \int \frac{d^3r}{V} \int d\epsilon \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau + i0} B_e e^{iA_1}, \quad (2.8)$$

где (см. (2.7))  $B_e = B(\zeta = -1)$ .

В случае рождения пар в поле плоскостей (в задаче имеется выделенное направление) могут проявляться эффекты поляризации фотонов. Рождение пар в этом случае рассмотрено в работе авторов [37].

### 3. ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПРИ $\theta_0 \ll V_0/m$ , ПОПРАВКИ К ПРИБЛИЖЕНИЮ ПОСТОЯННОГО ПОЛЯ

В предельных случаях общее выражение (2.6) значительно упрощается. Для оценок мы будем предполагать, что  $G(\vec{q}) \sim V_0$ ,  $|\vec{q}_{\perp}| \sim 1/a_s$ ,  $q_{\parallel} \sim \theta_0/a_s$  ( $V_0$ ,  $a_s$  определены во Введении). Тогда порядок величины двойной суммы в  $A_1$  (2.7) есть  $(V_0/m\theta_0)^2$ . Рассмотрим сначала случай относительно малых углов, когда  $\theta_0 \ll V_0/m \equiv \theta_V$  (пока будем предполагать по-прежнему, что  $\theta_0 \gg \theta_c$ , что возможно благодаря условию  $\rho_c \gg 1$ ). Выберем ось  $z$  вдоль кристаллической оси, относительно которой отсчитывается угол  $\theta_0$ . Тогда для векторов  $\vec{q}$ , лежащих в плоскости  $(x, y)$ , имеем  $q_{\parallel} \tau \sim m\theta_0/V_0 \ll 1$ , а для любых других  $\vec{q}$  будет  $q_{\parallel} \tau \sim m/V_0 \gg 1$  и в двойной сумме в  $A_1$  (2.7) следует сохранить только члены с  $q_z = q'_z = 0$ , вклад же остальных членов с  $q_z \neq 0$  подавлен степенным образом по параметру  $(V_0/m)$ . Отбрасывая члены с  $q_z \neq 0$ , мы переходим к потенциалу оси, зависящему только от поперечной координаты  $\vec{\rho}$ :

$$U(\vec{\rho}) = \sum_{\vec{q}} G(\vec{q}) e^{-iq\vec{\rho}}, \quad (3.1)$$

где как  $\vec{q}$ , так и  $\vec{\rho}$  лежат в плоскости  $(x, y)$ . Проводя соответствующие разложения в формуле (2.6), получим общее выражение [3, 4] для интенсивности излучения в потенциале  $U(\vec{\rho})$ .

Дальнейшие упрощения возможны, если потенциал оси можно

считать аксиально-симметричным. В некоторых случаях, например, для оси  $\langle 111 \rangle$  в кристаллических структурах типа  $fcc(d)$ ,  $bcc$ , потенциал с хорошей точностью является аксиально-симметричным относительно выделенной оси во всей области  $S$ , приходящейся на эту ось. Но даже если потенциал не является аксиально-симметричным во всей области  $S$ , он, во всяком случае, обладает этим свойством при  $|\vec{q}| \ll a_s$ , где  $a_s$  — эффективный радиус экранирования потенциала цепочки,  $\vec{\rho}$  отсчитывается от оси. Напряженность электрического поля и, следовательно, ускорение частицы максимальны как раз в области  $|\vec{\rho}| \ll a_s$ . Считая, что  $U = U(\vec{\rho}^2)$ , можно провести интегрирование по углам вектора  $\vec{\rho}$ . В итоге имеем для спектрального распределения интенсивности [4] в пределе  $\theta_0 \ll \theta_V$

$$dI^F = \frac{\alpha m^2 \omega d\omega}{\sqrt{3} \pi \varepsilon^2} \int_0^{x_0} \frac{dx}{x_0} \left[ R_1(\zeta) - \frac{1}{6} \left( \frac{m\theta_0}{V_0} \right)^2 R_2(\zeta) \right], \quad (3.2)$$

где

$$R_1(\zeta) = \int_0^{x_0} \frac{dy \theta(\varepsilon_{\perp}(y) - U(x))}{y_0(\varepsilon_{\perp}(y))} r_1(\zeta), \quad r_1(\zeta) = \varphi(\varepsilon) K_{2/3}(\lambda) - \zeta \int_{\lambda}^{\infty} dy K_{1/3}(y);$$

$$R_2(\zeta) = \varphi(\varepsilon) \frac{xg'' + 2g'}{xg^3} \left( K_{2/3}(\lambda) - \frac{2}{3\lambda} K_{1/3}(\lambda) \right) -$$

$$- \frac{\zeta}{20g^4 x^2} (2x^2 g'^2 + g^2 + 14gg'x + 6x^2 gg'') \left[ \lambda K_{1/3}(\lambda) - \frac{4}{3} K_{2/3}(\lambda) + \right.$$

$$\left. + \zeta \varphi(\varepsilon) \left( 4K_{2/3}(\lambda) - \left( \lambda + \frac{16}{9\lambda} \right) K_{1/3}(\lambda) \right) \right]. \quad (3.3)$$

Здесь мы перешли к переменной  $x = \vec{\rho}^2/a_s^2$ ,  $x_0^{-1} = \lambda a_s^2 n d$ ,  $d$  — среднее расстояние между атомами цепочки, образующей ось,  $n$  — плотность атомов в кристалле; в задаче излучения  $\zeta = 1$ ,  $K_\nu(z)$  — функции Макдональда,

$$y_0(\varepsilon_{\perp}(y)) = \int_0^{x_0} dx \theta(\varepsilon_{\perp}(y) - U(x)), \quad \varepsilon_{\perp}(y) = \frac{\varepsilon \theta_0^2}{2} + U(y), \quad \varphi(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}.$$

В формуле (3.2) введено обозначение  $U'(x) = V_0 g(x)$ , тогда

$$\lambda = \frac{m^3 \omega a_s}{3\varepsilon \varepsilon' V_0 \sqrt{x} |g|} = \frac{u}{3\chi_s \sqrt{x} |g|}, \quad \chi_s = \frac{V_0 \varepsilon}{a_s m^3}, \quad u = \frac{\omega}{\varepsilon'}. \quad (3.4)$$

Полученное выражение (3.2) дает спектральное распределение интенсивности излучения (после интегрирования по  $\omega$  — интенсив-

ность излучения) для произвольной формы аксиально-симметричного потенциала оси. Член с  $R_1(\zeta)$  в (3.2) представляет собой спектральное распределение интенсивности магнитотормозного излучения\* (ср., например, [33] § 10), с учетом перераспределения потока заряженных частиц (см. формулу (2.3)), член с  $R_2$  является поправкой  $\propto \theta_0^2$  (см. формулу (4.16) работы [10]). В формуле (3.2) учтено, что при  $\theta_0 \sim \theta_c$  величина  $(m\theta_0/V_0)^2 \sim 1/\rho$ , а сохранение таких членов в (3.2) было бы превышением точности, так как они отбрасывались при выводе формулы (2.6). Поэтому поправки  $\sim (m\theta_0/V_0)^2$  нужно учитывать только при  $\varepsilon_{\perp} > U_0$ , когда  $F(\vec{r}, \theta_0) = 1$ , так что в  $R_2(\zeta)$  перераспределение потока не учитывается.

Спектральное распределение вероятности рождения пары фотоном может быть получено из (3.2) с помощью правил подстановки (2.4), (2.5). Его явный вид есть

$$dW_e = \frac{\alpha m^2 d\varepsilon}{\pi \sqrt{3} \omega^2} \int_0^{x_0} \frac{dx}{x_0} \left[ R_{1e} - \frac{1}{6} \left( \frac{m\theta_0}{V_0} \right)^2 R_{2e} \right], \quad (3.5)$$

где (см. (3.3))

$$R_{1e} = r_1(\zeta = -1), \quad R_{2e} = R_2(\zeta = -1). \quad (3.6)$$

Здесь снова член с  $R_{1e}$  представляет собой вероятность рождения пары в постоянном поле, член с  $R_{2e}$  — поправка  $\propto \theta_0^2$ . Для конкретных расчетов мы будем использовать потенциал, который оказался вполне адекватным в задаче излучения и в задаче рождения пар (см. [40]):

$$U(x) = V_0 \left[ \ln \left( 1 + \frac{1}{x+\eta} \right) - \ln \left( 1 + \frac{1}{x_0+\eta} \right) \right]. \quad (3.7)$$

Для оценок можно считать, что  $V_0 \approx Ze^2/d$ ,  $\eta \approx 2u_1^2/a_s^2$ , где  $u_1$  — амплитуда тепловых колебаний. Фактически же параметры потенциала находились в помощь подгоночной процедуры (см. детали в [40]), исходя из модели потенциала решетки, основанного на потенциале Мольер для изолированного атома (параметры приведены в табл. 1). Для потенциала (3.7)

$$g(x) = \frac{1}{x+\eta} - \frac{1}{1+x+\eta} = \frac{1}{(x+\eta)(x+\eta+1)},$$

\* Описание излучения в монокристаллах в магнитотормозном пределе обсуждалось в работах [9, 10], причем в [10] были получены поправки  $\sim 1/\rho$ , а затем в [38, 39].



$$\chi(x) = \frac{eE(x)\gamma}{m^2} = \frac{2V_0\epsilon}{m^3 a_s} \sqrt{x} g(x) = \chi_s 2\sqrt{x} g(x). \quad (3.8)$$

Здесь  $\chi(x)$  — локальное значение квантового параметра  $\chi$  (на расстоянии  $x = \bar{r}^2/a_s^2$  от оси). Электрическое поле  $E(x)$  в (3.8) обращается в 0 при  $x=0$  (из-за тепловых колебаний), достигает максимума при  $x = x_m = \frac{1}{6} [\sqrt{1 + 16\eta(\eta + 1)} - 1 - 2\eta]$ , а затем спадает.

В дальнейшем мы будем использовать  $\chi_m \equiv \chi(x_m)$  и  $\chi_s = V_0\omega/a_s m^3$ .

Таблица 1

Параметры потенциала

Кристалл	Ось	$T$	$u_1(\text{Å})$	$V_0$ (эВ)	$\eta$	$a_s(\text{Å})$	$x_0$	$l_1(\eta)$	$l_2(\eta)$
C <sub>(d)</sub>	111	293	0,040	29	0,025	0,326	5,5	0,301	0,686
Si	111	293	0,075	54	0,150	0,299	15,1	0,883	1,31
Si	110	293	0,075	70	0,145	0,324	15,8	0,866	1,29
Ge	111	293	0,085	91	0,130	0,300	16,3	0,814	1,24
Ge	110	280	0,083	110	0,115	0,337	15,8	0,758	1,18
Ge	110	100	0,054	114,5	0,063	0,302	19,8	0,531	0,949
W	111	293	0,050	417	0,115	0,215	39,7	0,758	1,18
W	111	77	0,030	348	0,027	0,228	35,3	0,316	0,704

$T$  — температура в шкале Кельвина;  $u_1$  — амплитуда тепловых колебаний;  $V_0$ ,  $\eta$ ,  $a_s$ ,  $x_0$  — параметры потенциала (3.7);  $l_1(\eta)$ ,  $l_2(\eta)$  — функции, входящие в формулу (3.10).

Формула (3.2) получена из интенсивности (2.6) в области применимости последней ( $\vartheta_0 \gg \vartheta_c$ ). Однако при дальнейшем уменьшении угла  $\vartheta_0$  интенсивность меняется незначительно, как это очевидно вытекает из формулы (3.2). Отсюда следует, что формула (3.2), а тем самым и формула (2.6), справедлива вплоть до  $\vartheta_0 = 0$ .

В этом разделе во всех конкретных расчетах и оценках для простоты считается, что распределение по поперечным координатам является равномерным (это справедливо для больших углов падения  $\vartheta_0 > \vartheta_c$  и приближенно правильно для пучков с большим угловым разбросом  $\Delta\vartheta_0 \sim \vartheta_c$ ). Численные расчеты проводились для потенциала (3.7). Влияние перераспределения потока на ориентационную зависимость обсуждается ниже (раздел 5).

Полученные результаты иллюстрируются на рис. 1, 2. На рис. 1 приведена обратная характерная длина потери энергии час-

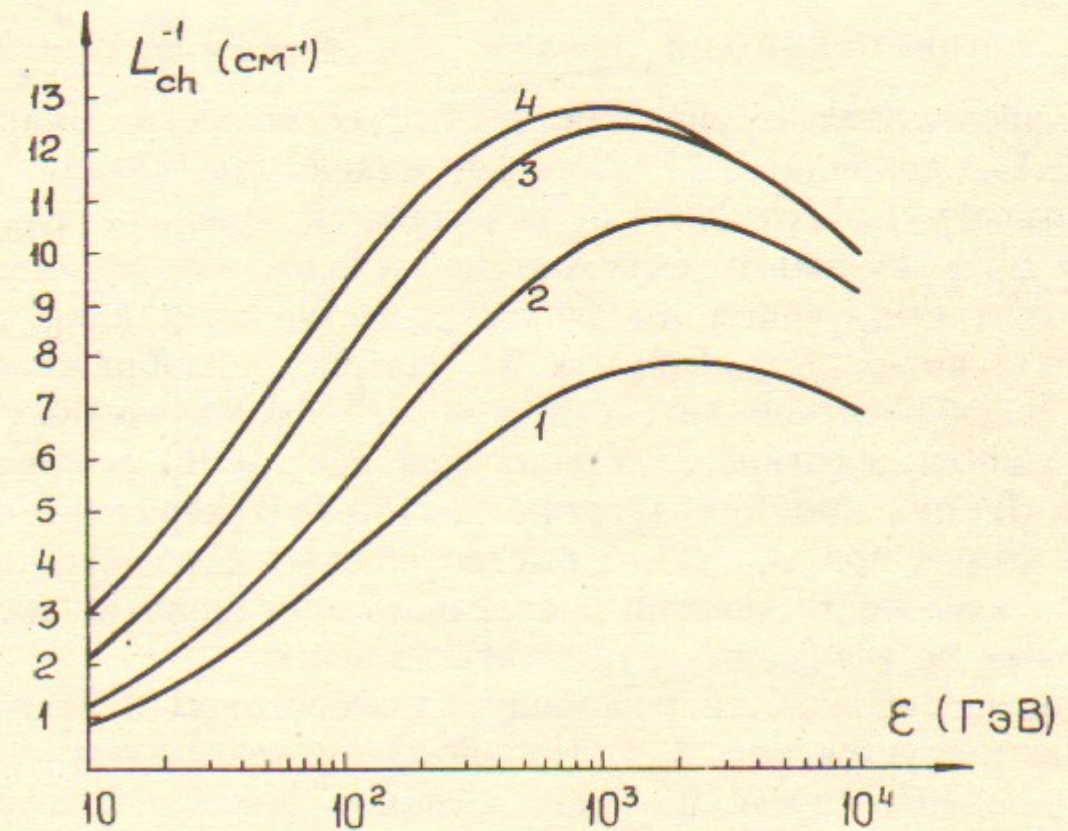


Рис. 1. Зависимость от энергии обратной характерной длины потерь энергии  $L_{ch}^{-1} = I(\epsilon)/\epsilon$  в Si<110> ( $T=293\text{K}$ ) — кривая 1, в алмазе<111> ( $T=293\text{K}$ ) — кривая 2, в Ge<110> ( $T=280\text{K}$ ) — кривая 3, Ge<110> ( $T=100\text{K}$ ) — кривая 4.

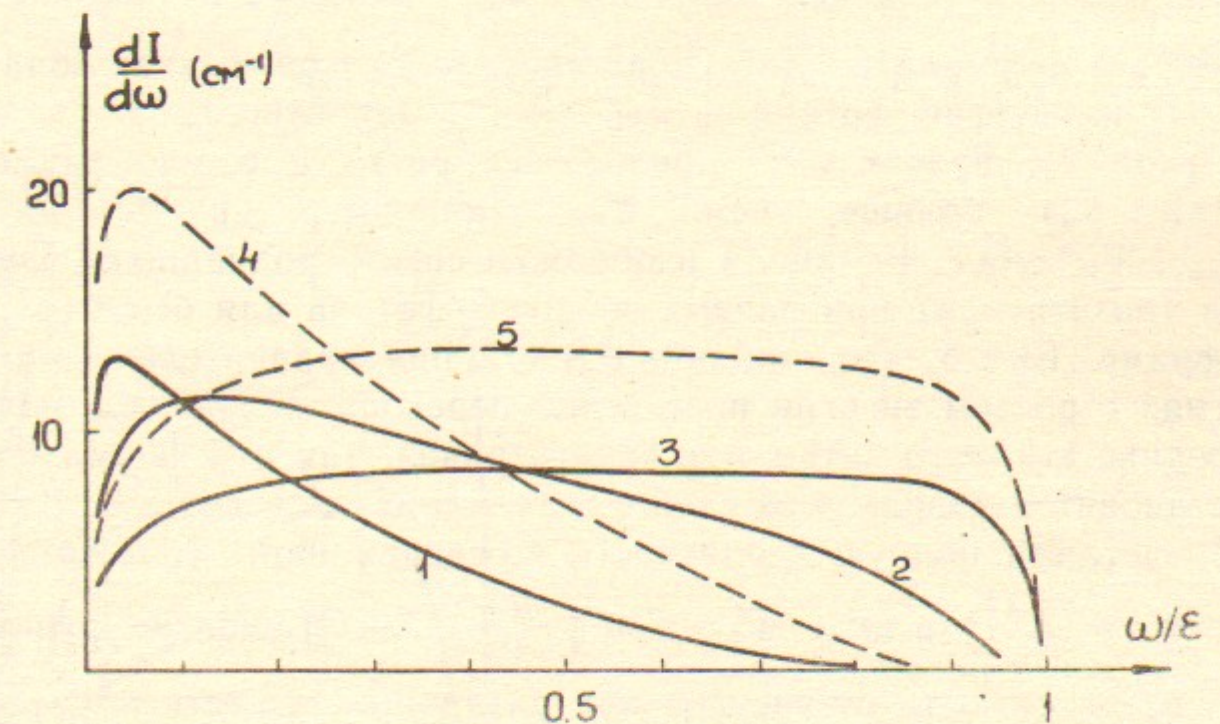


Рис. 2. Спектральная интенсивность излучения при заданной энергии в Si<110> ( $T=293\text{K}$ ),  $\epsilon=100$  ГэВ — кривая 1,  $\epsilon=700$  ГэВ — кривая 2,  $\epsilon=5$  ТэВ — кривая 3; и в Ge<110> ( $T=280\text{K}$ ),  $\epsilon=100$  ГэВ — кривая 4 и  $\epsilon=3$  ТэВ — кривая 5.

тицей в магнитотормозном пределе  $L_{ch}^{-1} = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dl} = \frac{I^M(\varepsilon)}{\varepsilon}$  как функция энергии электрона для некоторых веществ. Видно, что при  $\varepsilon \approx 1$  ТэВ величина  $L_{ch}^{-1}$  достигает максимума, вблизи которого зависимость  $L_{ch}^{-1}$  от энергии оказывается довольно слабой, а величина  $L_{ch}$  в несколько десятков раз меньше, чем радиационная длина в соответствующем аморфном веществе (например, для Si (ось  $\langle 111 \rangle$ ) имеем  $(L_{rad}/L_{ch})_{max} \approx 75$ ). На рис. 2 изображено спектральное распределение интенсивности  $dI^M/d\omega$  излученных фотонов при разных энергиях электрона для оси  $\langle 110 \rangle$  в кремнии и германии. Видно, что при энергии  $\varepsilon = 100$  ГэВ величина  $dI^M/d\omega$  имеет максимум при  $\omega/\varepsilon \ll 1$  и быстро спадает с ростом частоты. Однако по мере роста энергии распределение становится все более равномерным по всему спектру, вплоть до  $\omega \approx \varepsilon$ .

Поведение вероятности рождения пары фотоном в постоянном поле иллюстрируется рис. 3, 4. На рис. 3 приведена полная вероятность рождения пары  $W_e^{CF}$  как функция энергии фотона для некоторых веществ. При малых энергиях ( $\varkappa \ll 1$ ) величина  $W_e^{CF}$  экспоненциально мала:

$$W_e = \frac{9\sqrt{\pi}}{16\sqrt{2}} \frac{\alpha V_0}{ma_s x_0} \left[ \frac{\varkappa_m x^{3/2} g^3}{(\sqrt{x} g)''} \right]_{x=x_m}^{1/2} e^{-8/3\varkappa_m},$$

причем эта формула вполне удовлетворительно описывает область  $\varkappa \ll 1$ . При энергии фотона  $\omega = \omega_l$  ( $\varkappa \sim 1$ ) вероятность  $W_e^{CF} = W_{BH}$  (см. табл. 2), причем  $W_e^{CF}$  продолжает расти и в максимуме в десятки раз больше, чем  $W_{BH}$  (например, в Si имеем  $W_e^{CF}|_{max}/W_{BH} \approx 66$ ). На рис. 4 изображен спектр родившихся электронов (позитронов) при разных энергиях фотона для оси  $\langle 111 \rangle$  в вольфраме. Видно, что пик при  $\varepsilon \approx \omega/2$  при сравнительно малых энергиях с ростом энергии постепенно переходит в широкое плато, в середине которого затем возникает провал, так что форма спектра становится довольно схожей с бете-гайтлеровской.

Представим полную вероятность рождения пары (интеграл по энергии от (3.5)) в виде  $W_e^f = F_1 + \left(\frac{m\vartheta_0}{V_0}\right)^2 F_2$ . Отношение функций  $F_2/F_1$  в зависимости от энергии для различных веществ приведено на рис. 5. При тех значениях  $\omega$ , когда  $F_2 > 0$  вероятность  $W_e^f$  имеет минимум при  $\vartheta_0 = 0$ . При  $\varkappa_s \approx (5,1 \div 5,3)\sqrt{\eta}$  функция  $F_2$  меняет знак и при больших значениях  $\varkappa_s$  вероятность  $W_e^f$  имеет максимум при  $\vartheta_0 = 0$ . При дальнейшем увеличении  $\omega(\varkappa_s)$  высота этого макси-

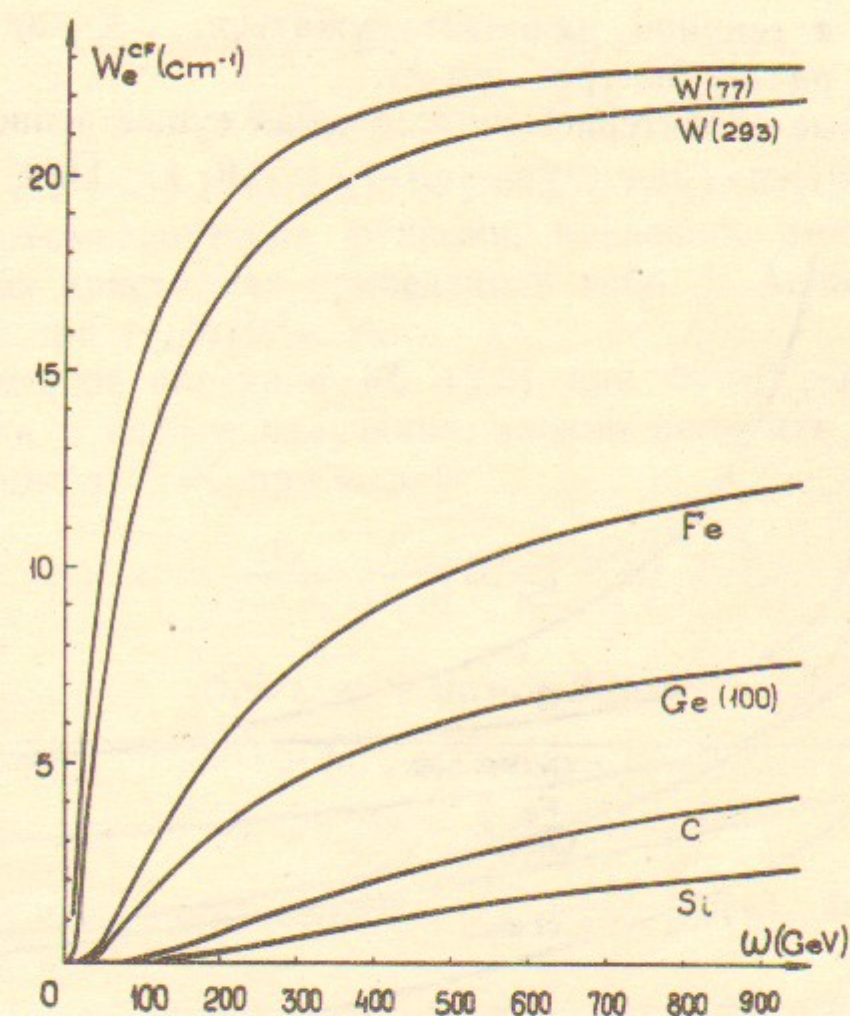


Рис. 3. Вероятность рождения пары фотоном при угле влета  $\vartheta_0 = 0$  относительно оси  $\langle 111 \rangle$  (для Ge ось  $\langle 110 \rangle$ ). Цифры в скобках означают температуру кристалла, там, где они отсутствуют  $T = 293$  К.

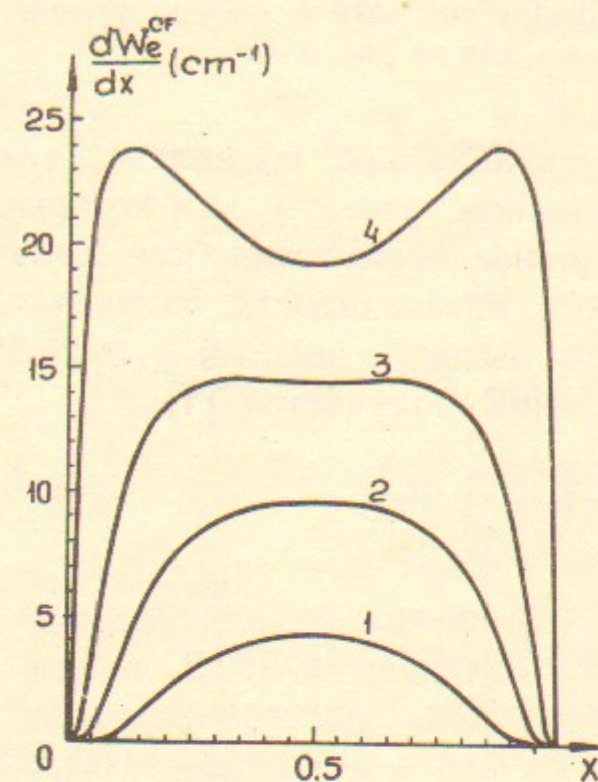


Рис. 4. Распределение по энергии  $\varepsilon$  одной из частиц родившейся пары ( $x = \varepsilon/\omega$ ) для оси  $\langle 111 \rangle$  в вольфраме,  $T = 293$  К,  $\vartheta_0 = 0$ ; для  $\omega = 25$  ГэВ (1), 50 ГэВ (2), 100 ГэВ (3), 500 ГэВ (4).

мура растет, а ширина начинает сужаться, так как при  $\chi_s \gg 1$  величина  $|F_2|$  растет быстрее чем  $F_1$ .

Спектральные характеристики излучения существенно зависят от соотношения между значениями  $u = \omega/\varepsilon'$  и  $\chi_s$ . При выполнении

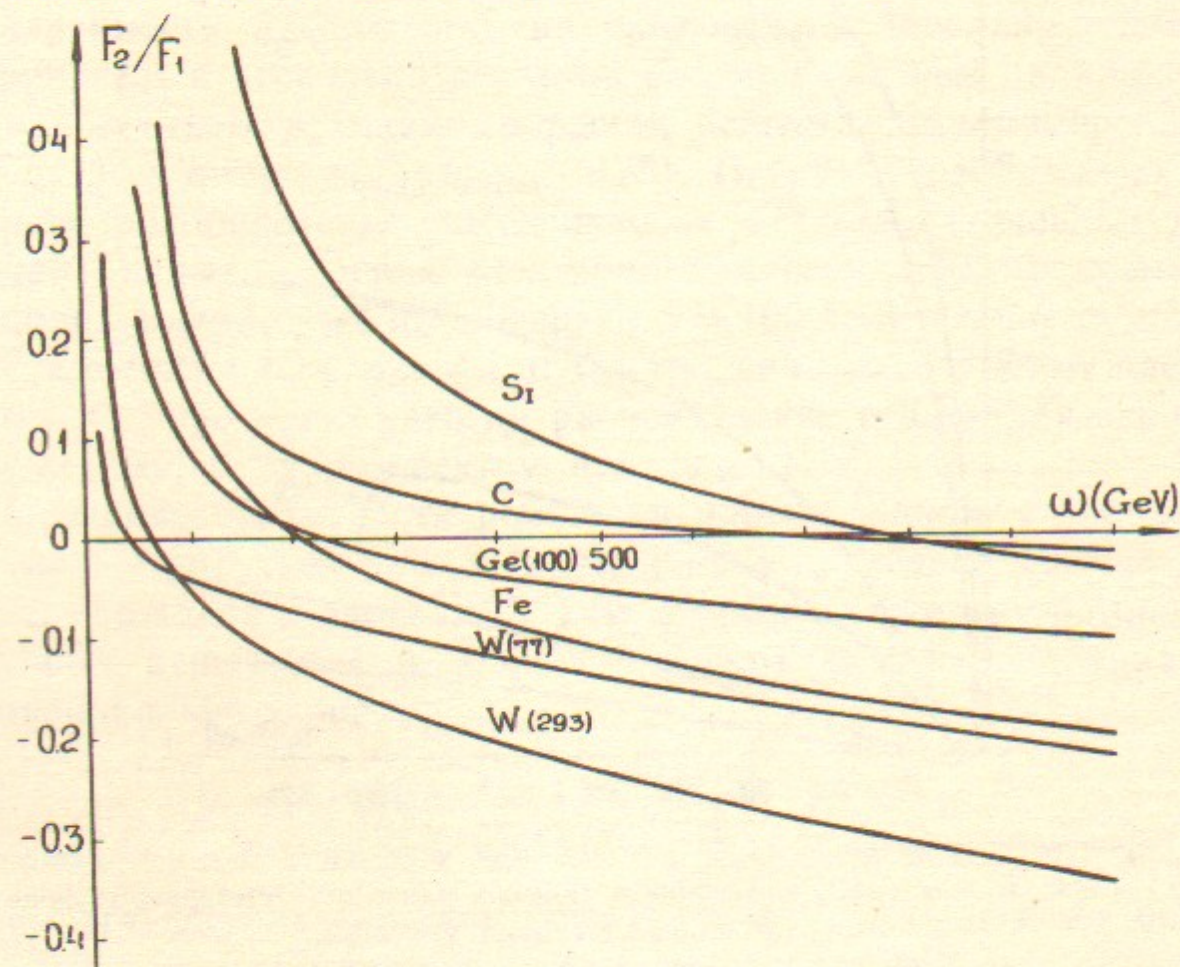


Рис. 5. Отношение  $F_2/F_1$ , характеризующее величину поправки к пределу постоянного поля. Обозначения такие же, как на рис. 3.

неравенства  $u \gg \chi_s/\sqrt{\eta}$  излучение экспоненциально подавлено, так что в спектре излучения имеются, в основном, частоты, для которых  $u \ll \chi_s/\sqrt{\eta}$ . При  $u \ll \chi_s$  можно получить явное асимптотическое выражение для спектрального распределения интенсивности излучения, особенно удобное для анализа области высоких энергий  $\chi_s \gg 1$ . В результате довольно громоздких вычислений, получается [4]

$$\frac{dI^F}{\omega d\omega} = \frac{\alpha m^2}{3\sqrt{3} \pi \chi_0 \varepsilon^2} \left[ \Phi_1^M - \left( \frac{m\theta_0}{V_0} \right)^2 \Phi_2 \right], \quad (3.9)$$

где

$$\Phi_1^M = \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{6\chi_s}{u}\right)^{2/3} \varphi(u) \left[ \ln \frac{\chi_s}{u} + 1,96 - \frac{3}{2\varphi(u)} - l_1(\eta) \right],$$

$$\Phi_2^M = \frac{4\Gamma(1/3)}{405} (1+2\eta) \left(\frac{6\chi_s}{u}\right)^{4/3} \varphi(u) \left[ \ln \frac{\chi_s}{u} + 4,14 - \frac{21}{4\varphi(u)} - l_2(\eta) \right], \quad (3.10)$$

$$l_1(\eta) = B_1(0) - B_1(\eta), \quad B_1(0) = -0,374,$$

$$l_2(\eta) = B_2(0) - B_2(\eta), \quad B_2(0) = 3,70.$$

Здесь  $\varphi(u) = 1 + u + 1/(1+u)$ . Функции  $l_1(\eta)$ ,  $l_2(\eta)$  выражаются через гипергеометрические функции, численное значение их для используемых кристаллов приведено в табл. 1. Асимптотика (3.9) справедлива при  $(\chi_s/u)^{2/3} < x_0$ .

Максимальное значение  $W_e^F$  (3.5) при  $\theta_0 = 0$  достигается при  $\chi_s \gg 1$ . Как и в случае излучения, можно получить асимптотическое выражение для  $W_e^F$  при  $\chi_s \gg 1$ :

$$W_e = \frac{\alpha V_0}{3\sqrt{3} \pi} \frac{1}{m a_s x_0} \left[ D_1 - \left( \frac{m\theta_0}{v_0} \right)^2 D_2 \right], \quad (3.11)$$

где

$$D_1 = C_1 \chi_s^{-1/3} (\ln \chi_s + B_1(\eta)),$$

$$D_2 = (1+2\eta) C_2 \chi_s^{1/3} (\ln \chi_s + B_2(\eta)), \quad (3.12)$$

$$C_1 = 6,558, \quad C_2 = 0,097.$$

Согласно (3.10)  $B_{1,2}(\eta)$  выражается через  $l_{1,2}(\eta)$ . Формула (3.11) справедлива при  $\chi_s^{2/3} < x_0$ .

Полная интенсивность излучения может быть получена из формулы (3.2):

$$I^F = i_1^M(\chi_s) - \frac{1}{\rho(\theta_0)} i_2(\chi_s) = \frac{\alpha m^2}{3\sqrt{3} \pi \chi_0} \int_0^\infty \frac{u du}{(1+u)^4} \times \\ \times \int dx \left\{ \int d^2\rho_0 \frac{\theta(\varepsilon_\perp(\rho_0) - U(\vec{\rho}))}{S(\varepsilon_\perp(\vec{\rho}_0))} (4u^2 + 5u + 4) K_{2/3}(\lambda) - \right. \\ \left. - \left( \frac{m\theta_0}{V_0} \right)^2 \frac{3\chi_s}{10} \frac{\sqrt{x}}{(1+u)^2} K_{1/3}(\lambda) \left[ 5a(u) + \frac{1+2\eta}{x} b(u) + \frac{g(x)}{2} c(u) \right] \right\}, \quad (3.13)$$

где

$$a(u) = 4u^3 - u^2 + 14u - 1, \quad b(u) = -4u^3 + 27u^2 - 2u + 27,$$

$$c(u) = 16u^3 - 43u^2 + 38u - 43, \quad \rho(\theta_0) = \left( \frac{2V_0}{m\theta_0} \right)^2.$$

Как уже отмечалось, область применимости формулы (3.13) совпадает с областью применимости квазиклассического приближения. В области низких энергий (в классическом пределе), как хорошо известно,  $I(x) \propto \chi^2(x)$  (см., например, [33]) независимо от  $\theta_0$  и это остается справедливым вплоть до углов, когда становится существенным излучение частот  $\omega \sim \theta_0 \gamma^2 / a_s \sim \varepsilon$  и классическая тео-

рия перестает быть справедливой. Отсюда следует, что при относительно малых энергиях, когда  $\chi_s \ll 1$  должно иметь место  $i_2/i_1 \ll 1$  и для ориентационной зависимости интенсивности излучения применимы формулы работы [40], полученные в классической теории, тогда как член с  $i_2$  представляет собой квантовую поправку.

В области высоких энергий ( $\chi_s \gg 1$ ) также можно получить асимптотические формулы для интенсивности излучения. Для  $L_{ch}^{-1} = I^F(\varepsilon)/\varepsilon$  имеем

$$L_{ch}^{-1} \approx \alpha \frac{V_0}{m x_0 a_s} \left[ F(\chi_s) - \frac{8\chi_s}{9\rho(\theta_0)} \right], \quad F(\chi_s) = \frac{g_1}{\chi_s^{1/3}} (\ln \chi_s + g_0), \quad (3.14)$$

где  $g_1 \approx 0,393$ ,  $g_0 \approx 0,676 - l_1(\eta)$ . Из (3.14) следует, что при  $\chi_s \gg 1$  магнитотормозное описание излучения справедливо в области, где величина  $\chi_s^{4/3}/\rho(\theta_0) \ll 1$ .

Величина  $F(\chi_s)$  (3.14) достигает максимума в точке  $\chi_s^0 = \exp(3 - g_0)$ , вблизи которого она меняется очень плавно. Поскольку  $\chi_s^0 \gg e^3 \gg 1$ , это оправдывает использование выражения (3.14) в районе максимума. Ввиду плавного изменения  $F(\chi_s)$  в районе максимума, значение энергии  $\varepsilon_0$ , получаемой из  $\chi_s^0$ , является лишь оценкой. Величина же  $L_{ch}^{-1}|_{\max}$  дается формулой (3.14) вполне удовлетворительно и находится в хорошем согласии с результатами численного расчета по формуле (3.2):

$$L_{ch}^{-1}|_{\max} \approx 0,543 \frac{\alpha V_0 e^{-l_1(\eta)/3}}{m x_0 a_s}. \quad (3.15)$$

Вероятность рождения пары достигает максимума при  $\chi = \chi_s^0 = \exp(3 - B_1(\eta))$ , причем поведение ее вблизи максимума аналогично поведению  $L_{ch}^{-1}$ :

$$W_e^{F_{\max}} \approx k \frac{\alpha}{\sqrt{3} \pi} \frac{V_0}{m a_s x_0}. \quad (3.16)$$

Здесь коэффициент  $k = C_1 \exp\left(\frac{B_1(\eta)}{3} - 1\right)$  зависит от вещества и меняется (для обычно используемых веществ) в интервале 1,93—1,59 при изменении  $\eta$  от 0,025 (алмаз) до 0,15 (кремний).

Из (3.15) и (3.16) имеем соотношение  $W_e^{F_{\max}} L_{ch}^{\max} \approx 0,72$ , следует, однако, иметь в виду, что характеристики рождения пар и излучения достигают максимума при разных энергиях. При очень высоких энергиях величины  $W_e$  и  $L_{ch}^{-1}$  становятся очень близкими друг к другу (при одинаковой энергии) независимо от вещества:  $W_e L_{ch} \approx 5 \cdot 3^6 \Gamma^3(2/3) \cdot (7 \cdot 2^7 \pi^2)^{-1} \approx 1,023$ . Хотя произведение этих

величин, как и в бете—гайтлеровском случае, есть константа (значения констант отличаются: 1,023 и 0,778), сами величины  $W_e$  и  $L_{ch}^{-1}$ , в отличие от бете—гайтлеровских, существенно зависят от энергии. Отметим еще, что фактор  $\exp(-l_1(\eta)/3)$  в формуле (3.15) слабо зависит от вещества и меняется (для обычно используемых веществ) в интервале 0,90—0,75 при изменении  $\eta$  от 0,025 (алмаз) до 0,15 (кремний), т. е. изменяется в узком интервале, как и коэффициент  $k$  в (3.16).

Значительный интерес представляет максимальное превышение  $L_{rad}$  в соответствующем аморфном веществе над  $L_{ch}$ :

$$r_{\gamma}^{\max} \equiv \left( \frac{L_{rad}}{L_{ch}} \right)_{\max} \approx 0,426 \frac{V_0 m a_s d e^{-l_1(\eta)/3}}{Z^2 \alpha^2 \ln(183 Z^{-1/3})} \sim \frac{a_s m}{3 Z \alpha \ln(183 Z^{-1/3})}, \quad (3.17)$$

где вторая (упрощенная) оценка является довольно грубой. Отсюда видно, что  $r_{\gamma}^{\max}$  тем больше, чем меньше  $Z$  и чем больше  $a_s$ . Наибольший выигрыш (среди используемых веществ) достигается в алмазе ( $r_{\gamma}^{\max} \sim 160$ ), величины  $r_{\gamma}^{\max}$  приведены в табл. 2.

Таблица 2

Некоторые величины, характеризующие излучение и рождение пар

Кристалл	Ось	$T$	$\chi_s$ ( $\varepsilon = 100$ ГэВ)	$\rho_c$ ( $\varepsilon = 10$ ГэВ)	$r_{\gamma}^{\max}$	$\omega_i$	$r_{\max}$
C <sub>(d)</sub>	111	293	0,13	2,22	168	90	156
Si	111	293	0,27	4,14	71	150	68
SI	110	293	0,32	5,36	81	120	78
Ge	111	293	0,45	5,97	26	100	25
Ge	110	280	0,48	8,43	30	70	29
Ge	110	100	0,56	8,77	30	50	29
W	111	293	2,87	31,94	11	22	10,5
W	111	77	2,26	26,65	11	13	10,8

$\chi_s$ —параметр, характеризующий величину квантовых эффектов (1.3);  $\rho_c$ —параметр, определяющий мультипольность излучения (1.7);  $r_{\gamma}^{\max}$ —оценка по формуле (3.17) максимальной величины эффекта для излучения,  $\omega_i$ —энергия фотона, при которой вероятность процесса в поле осей сравнивается с аморфным значением;  $r_{\max}$ —оценка по формуле (3.18) максимальной величины эффекта для рождения пар.

Аналогично имеем для максимального значения превышения вероятности рождения пары в поле оси над вероятностью рожде-

ния пары в соответствующей аморфной среде (механизм Бете — Гайтлера). Взяв (3.16) и  $W_{BH}$  (см., например, [33]), получим

$$r_e^{\max} \equiv \frac{W_e^{F\max}}{W_{BH}} \approx \frac{3\sqrt{3}k}{28} \frac{V_0 m a_1 d}{Z^2 \alpha^2 \ln(183 Z^{-1/3})} \sim \frac{1}{3} \frac{a_1 m}{Z \alpha \ln(183 Z^{-1/3})}. \quad (3.18)$$

Свойства величины  $r_e^{\max}$  такие же, как у  $r_\gamma^{\max}$ . Здесь уместно отме-

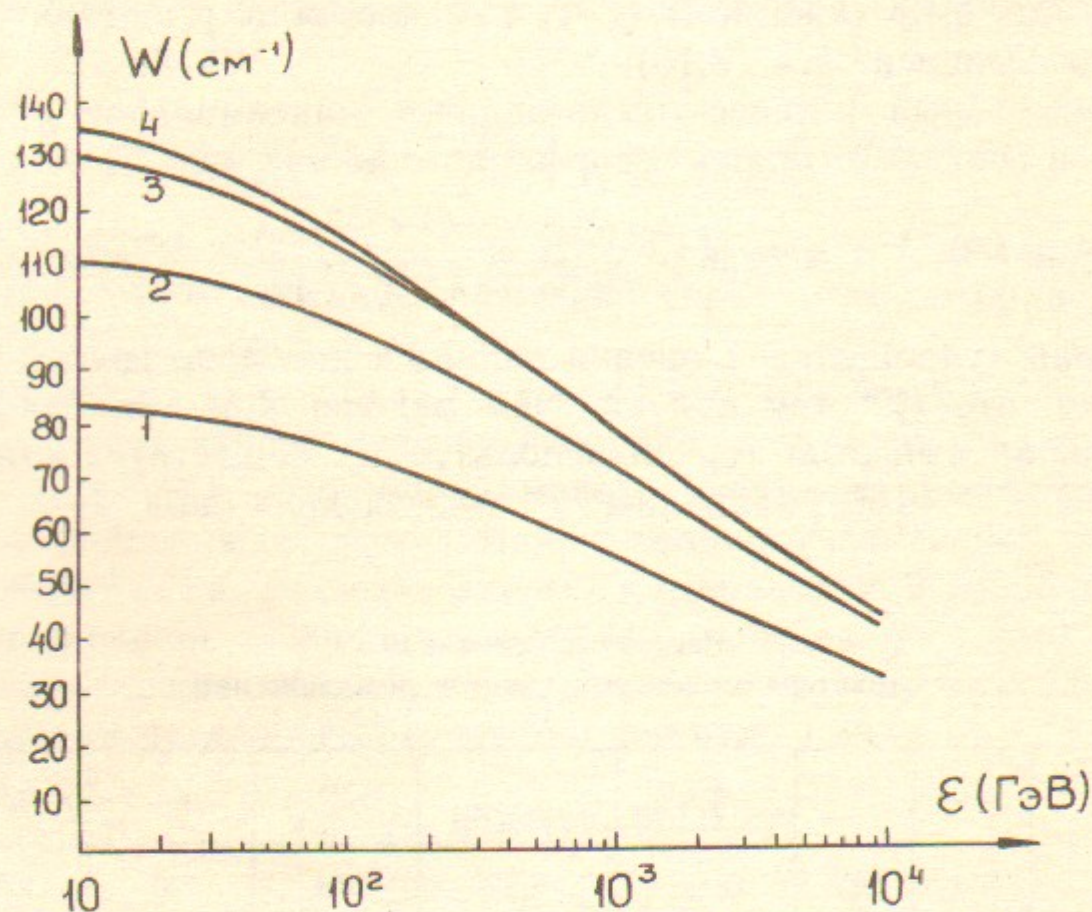


Рис. 6. Зависимость от энергии полной вероятности излучения в Si<110> ( $T=293\text{K}$ ) — кривая 1, в алмазе<111> ( $T=293\text{K}$ ) — кривая 2, в Ge<110> ( $T=280\text{K}$ ) — кривая 3 и в Ge<110> ( $T=100\text{K}$ ) — кривая 4.

тить, что эффект рождения пары в поле оси становится заметным при  $\chi_m \sim 1$ , грубая оценка соответствующей энергии есть [11]

$$\omega \sim \frac{m^3 u_1 d}{Z \alpha}, \quad (3.19)$$

т. е. эффект рождения пары проявляется с ростом энергии фотона раньше всего в веществах с максимальным значением  $Z$  и минимальными  $u_1$  и  $d$ . Из используемых кристаллов эффект проявляется при минимальной энергии в вольфраме, где оценка (3.19) дает  $\omega \sim 10$  ГэВ, энергия фотона, при которой  $W_e^{CF} = W_{BH}$  (т. е. эффект является значительным), приведена в табл. 2.

Обратимся теперь к полной вероятности излучения, которая

характеризует полное число излученных фотонов, ограничившись магнитотормозным приближением. На рис. 6 приведена зависимость полной вероятности  $W_1^M$  от энергии частиц для разных веществ. Как видно, вероятность в левой части графика выходит на плато (вероятность излучения во внешнем поле при  $\chi \ll 1$  не зависит от энергии). Затем следует область логарифмического спада (где кривая на склоне вполне удовлетворительно аппроксимируется прямой). То, что абсолютная величина вероятности на рис. 6 почти на порядок величины превышает  $L_{ch}^{-1}$  (рис. 1) свидетельствует о том, что излучается большое число мягких фотонов.

#### 4. ИЗЛУЧЕНИЕ И РОЖДЕНИЕ ПАР ПРИ $\theta_0 > V_0/m$ . МОДИФИЦИРОВАННАЯ ТЕОРИЯ КОГЕРЕНТНЫХ ПРОЦЕССОВ

Рассмотрим теперь область относительно больших углов влета частиц (фотонов). Из оценок, сделанных в начале раздела 3, вытекает, что порядок величины двойной суммы в  $A_1$  (2.7) есть  $(V_0/m\theta_0)^2$ . Поэтому член с двойной суммой в  $A_1$  при  $\theta_0 \gg V_0/m$  является малым и  $e^{A_1}$  в (2.7) можно соответственно разложить. В результате спектральное распределение интенсивности излучения (2.6) приобретает вид [4]

$$dI^{mcoh} = \frac{\alpha \omega d\omega}{4\epsilon^2} T(\zeta),$$

$$T(\zeta) = \sum_q |G(\vec{q})|^2 \frac{\bar{q}_\perp^2}{q_\parallel^2} \left[ \varphi(\epsilon) - \zeta \frac{2\omega m^2}{\epsilon \epsilon' q_\parallel^2} \left( |q_\parallel| - \frac{\omega m_*^2}{2\epsilon \epsilon'} \right) \right] \theta \left( |q_\parallel| - \frac{\omega m_*^2}{2\epsilon \epsilon'} \right). \quad (4.1)$$

Здесь

$$\zeta = 1, \quad m_*^2 = m^2 \left( 1 + \frac{\rho}{2} \right), \quad \frac{\rho}{2} = \sum_{q, q_\parallel \neq 0} \frac{|G(\vec{q})|^2 q_\perp^2}{m^2 q_\parallel^2}.$$

После интегрирования по  $\omega$  в (4.1) получаем для полной интенсивности излучения

$$I^{mcoh} = \frac{\alpha}{4} \sum_q |G(\vec{q})|^2 \frac{\bar{q}_\perp^2}{q_\parallel^2} F(z), \quad z = \frac{2\epsilon |q_\parallel|}{m_*^2}, \quad (4.2)$$

где

$$F(z) = \left[ \ln(1+z) - \frac{z(2+3z)}{2(1+z)^2} \right] \left[ 1 - \frac{8(3+z)}{z^2(2+\rho)} \right] + \frac{z}{(1+z)^2} \left( \frac{8}{2+\rho} + \frac{z(3+2z)}{3(1+z)} \right).$$

Вероятность рождения пары фотоном имеет вид [6]

$$dW_e = \frac{\alpha d\varepsilon}{4\omega^2} T_e, \quad (4.3)$$

где  $T_e = T(\zeta = -1)$ , а после интегрирования по  $\varepsilon$  получим

$$W_e^{mcoh} = \frac{\alpha}{\omega} \sum_q \frac{|G(\vec{q})|^2 \bar{q}_\perp^2}{q_\parallel^2} \vartheta\left(q_\parallel - \frac{2m_*^2}{\omega}\right) f(z), \quad z = \frac{2m_*^2}{\omega q_\parallel}, \quad (4.4)$$

где

$$f(z) = \left(1 + \frac{z - z^2/2}{1 + \rho/2}\right) \ln \frac{1 + \sqrt{1-z}}{1 - \sqrt{1-z}} - \left(1 + \frac{z}{1 + \rho/2}\right) \sqrt{1-z}.$$

При  $\rho/2 \ll 1$  полученные выражения переходят в формулы стандартной теории [1, 2, 34] когерентного излучения (из (4.1) и (4.2)) и рождения пар (из (4.3) и (4.4)), которые справедливы (см. [4, 6]) при любых  $\chi_s$  и  $\kappa_s$ . Однако при  $\chi_s \gg 1$ ,  $\kappa_s \gg 1$  область применимости формул (4.1) — (4.4) (модифицированная теория когерентного излучения и рождения пар) значительно шире, чем стандартной когерентной теории, хотя они не сложнее, чем формулы последней. Переход  $m \rightarrow m_*$  соответствует переходу к эффективной массе при рассмотрении задачи излучения в поле плоской электромагнитной волны (см., например, [31, 32]). В задаче излучения учет отличия  $m$  и  $m_*$  необходим, когда  $\rho/2 \gtrsim 1$ , т. е. когда излучение перестает быть дипольным. Входящие в полученные выше формулы величины  $G(\vec{q})$  (см. (1.1)) запишем в виде

$$G(\vec{q}) = \frac{1}{l^3} \varphi(\vec{q}) S_{mnk}, \quad (4.5)$$

где  $l$  — постоянная решетки:  $\vec{q} = \frac{2\pi}{l} (m, n, k)$ ;  $m, n, k$  — целые числа, по которым идет суммирование в  $\sum_q$ ;  $S_{mnk}$  — структурный фактор. Для решетки типа алмазной  $fcc(d)$ , которую имеют, в частности, кристаллы алмаза, кремния (Si) и германия (Ge),

$$S_{mnk}^{(d)} \simeq \left[1 + e^{i\frac{\pi}{2}(m+n+k)}\right] (\cos lk + \cos lm) (\cos ln + \cos lm), \quad (4.6)$$

а для решетки  $bcc$  (W, Fe)

$$S_{mnk}^{(b)} = 1 + \cos \pi (m + n + k). \quad (4.7)$$

Величина  $\varphi(\vec{q})$  в (4.5) — фурье-компонента потенциала отдельного атома с учетом тепловых колебаний. Мы использовали для атома потенциал Мольер, тогда

$$\varphi(\vec{q}) = 4\pi Z e^2 \exp\left(-\frac{u_1^2 \bar{q}^2}{2}\right) \sum_{i=1}^3 \frac{\alpha_i}{\bar{q}^2 + b_i^2}, \quad (4.8)$$

где  $u_1$  — амплитуда тепловых колебаний;  $\alpha_i, b_i$  — параметры потенциала (см., например, [33]). Использование усредненного по тепловым колебаниям потенциала фактически исключает из рассмотрения тормозное излучение по механизму Бете — Гайтлера. Последнее также меняется в кристаллах по сравнению с аморфным веществом (см., например, [1] в теории когерентного тормозного излучения). Входящий в формулы (4.1) — (4.4) параметр  $\rho/2$  вычисляется согласно (4.1), (4.5).

При сравнительно малых энергиях частицы и не слишком больших углах влета частицы в кристалл, когда  $z \ll 1$ , проводя в (4.2) разложение по  $z$  и сохраняя старший член ( $\propto z^2$ ), получаем классическое выражение для полной интенсивности излучения. Следующие члены разложения дают квантовые поправки, по величине которых можно судить об области применимости классического выражения. Оценивая эти поправки, учтем, что члены, содержащие дополнительные степени  $z$ , пропорциональны  $|q_\parallel|$  и будут содержать в сумме (4.2)  $|q_\parallel|$  в числителе. Как видно из формул (4.2), (4.8), это приводит к тому, что вклад в суммы дают, вообще говоря, высшие гармоники\*, вклад которых в сумму (4.2) обрезается на амплитуде тепловых колебаний  $u_1$  ( $|\vec{q}| u_1 \lesssim 1$ ), так что эффективно в указанные поправки входит величина  $\chi_u = \chi_s \frac{a_s}{u_1}$ , а относительная величина поправочных членов будет определяться параметром

$$\lambda_u = \frac{\varepsilon}{m^2} \frac{\vartheta_0}{u_1} = \frac{m}{V_0} \vartheta_0 \chi_u. \quad (4.9)$$

Рассмотрим спектральную интенсивность излучения в сугубо квантовом случае, когда параметр  $\lambda = \frac{2\varepsilon |q_\parallel|_{\min}}{m^2} \sim \frac{\varepsilon \vartheta_0}{m^2 a_s} \gg 1$ . Учитывая, что в случае  $\lambda \gg 1$  и  $\vartheta_0 \sim V_0/m$ ,  $\chi_s \sim \lambda \gg 1$ , удобно использовать модифицированную теорию когерентного излучения, спектральное распределение которого в этом случае принимает вид

\* Тогда суммирование в (4.2) можно приближенно заменить на интегрирование.

$$\frac{dI^{coh}}{d\omega} \approx \frac{\alpha\omega}{4\varepsilon^2} \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right) \sum_{\vec{q}} |G(\vec{q})|^2 \frac{\bar{q}_\perp^2}{q_\parallel^2 v(u_0 - u)}, \quad (4.10)$$

где

$$u_0 = \frac{2\varepsilon|q_\parallel|}{m^2(1+\rho/2)}, \quad u = \frac{\omega}{\varepsilon'}.$$

Спектральная интенсивность (4.10) имеет резко выраженный максимум вблизи конца спектра при  $\omega \simeq \varepsilon\lambda(1+\lambda)^{-1}$  с относительно малой (по  $1/\lambda$ ) шириной  $\Delta\omega \sim \frac{\varepsilon}{\lambda} \left( 1 + \frac{\rho}{2} \right) = \frac{m^2(1+\rho/2)}{2|q_\parallel|_{\min}}$ :

$$\left. \frac{dI}{d\omega} \right|_{\max} \approx \alpha |q_\parallel|_{\min} \frac{\rho}{2(2+\rho)}. \quad (4.11)$$

Видно, что как сама величина максимума спектральной кривой, так и ее эффективная ширина от энергии не зависят. Однако, при вычислении полной интенсивности излучения, как это следует из формулы (4.2), появляется слабая (логарифмическая) зависимость интенсивности от энергии частицы:

$$I \approx \frac{\alpha}{8} \rho m^2 \ln \lambda \quad (4.12)$$

Описанное поведение спектральной и полной интенсивности излучения типично для теории ондуляторного излучения в сугубо квантовом случае и согласуется с результатами авторов [41] (раздел 3, формулы (34) — (38)). Указанные особенности спектра излучения связаны с доминирующим вкладом низших гармоник в спектре эквивалентных фотонов в случае  $\lambda \gg 1$ , при этом существенной становится его дискретность. Такое поведение спектра эквивалентных фотонов коренным образом отличает его от спектра эквивалентных фотонов в бете — гайтлеровском случае, где он непрерывен и простирается до сколь угодно малых частот. В результате, как форма спектра, так и зависимость от энергии полной интенсивности излучения в этих двух случаях существенно различны.

Спектральные кривые, полученные в работе [42] (см. рис. 7, 8 в ней) для различных (больших) значений  $\lambda$  при  $\rho \ll 1$ , прекрасно иллюстрируют указанные особенности спектрального распределения излучения в этой области.

## 5. ОРИЕНТАЦИОННАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ХАРАКТЕРИСТИК ИЗЛУЧЕНИЯ И РОЖДЕНИЯ ПАР

Ориентационная зависимость спектрального распределения и полной интенсивности излучения дается формулой (2.6), а вероятность рождения пар — формулой (2.8). Вычисление по этим формулам является довольно сложной задачей. В то же время расчет сравнительно прост при использовании полученных из (2.6), (2.8) приближенных выражений для малых углов влета — магнитотормозное описание с поправкой (формулы (3.2), (3.13)) и формулы для рождения пары в постоянном поле с поправкой ((3.5), (3.6)) и для больших углов влета — модифицированная теория КТИ (формулы (4.1), (4.2)) и модифицированная теория когерентного рождения пар ((4.3), (4.4)). Поэтому имеет смысл использовать общие формулы (2.6), (2.8), только в промежуточной области углов  $\vartheta_0 \sim V_0/m$ . Более того, в [7] была разработана процедура интерполяции, позволяющая, в первом приближении, ограничиться указанными простыми формулами для нахождения ориентационной зависимости интенсивности излучения и вероятности рождения пары.

В качестве иллюстрации мы приведем здесь ориентационную зависимость вероятности рождения пары  $W_e(\vartheta_0)$  для охлажденного германия (ось  $\langle 110 \rangle$ ,  $T=100\text{K}$ , что соответствует условиям эксперимента [22, 24, 26] см. рис. 7). На рис. 7 ориентационная зависимость  $W_e$  приведена для энергий:  $\omega=30$  ГэВ ( $\kappa_m \simeq 0,6$ ), кривая 1;  $\omega=100$  ГэВ ( $\kappa_m \simeq 2$ ), кривая 2;  $\omega=1000$  ГэВ ( $\kappa_m \simeq 20$ ), кривая 3. Кривая 1 на рис. 7 изображает ситуацию, когда  $\kappa_m < 1$ , при этом эффекты постоянного поля малы и специфика кристалла проявляется в действии механизма когерентного рождения пар. Эффект отличен от 0 при таких  $\vartheta_0$ , когда  $\rho/2 \ll 1$ , так что вероятности описываются стандартными формулами. Кривая 2 отвечает случаю, когда с ростом энергии механизм рождения пар в постоянном поле уже включился. В соответствии с результатами раздела 3, вероятность  $W_e(\vartheta_0)$  имеет минимум при  $\vartheta_0=0$  ( $\kappa_m < 4$ ). При дальнейшем увеличении энергии минимум в вероятности при  $\vartheta_0=0$  переходит в максимум, а затем, по мере роста энергии, ширина этого максимума сужается. Этому случаю отвечает кривая 3. Отметим, что величина  $W_e(0) = W_e^{CF}$  продолжает расти, пока  $\kappa_s < 25$ , причем максимальное значение  $W_e^{CF}|_{\max}$  с хорошей точностью дается формулой (3.16).

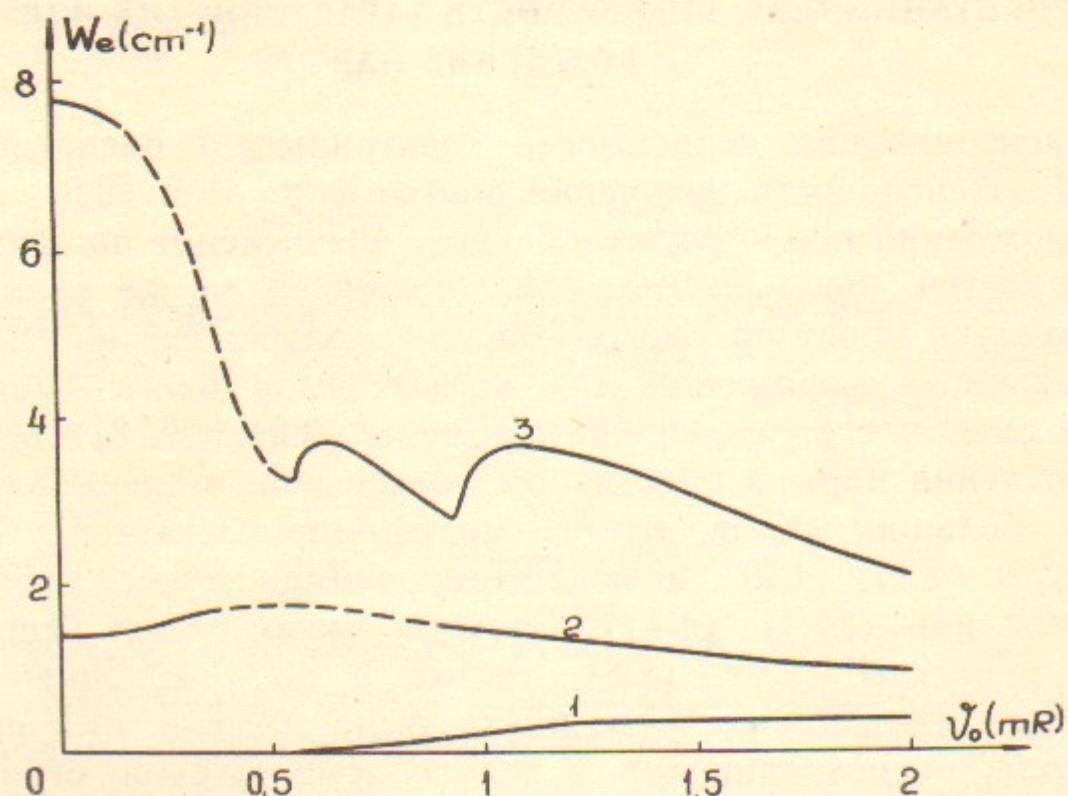


Рис. 7. Ориентационная зависимость вероятности рождения пары фотоном в Ge при  $T=100\text{K}$ , для  $\omega=30\text{ ГэВ}$  (1),  $100\text{ ГэВ}$  (2),  $1000\text{ ГэВ}$  (3). Угол влета фотона  $\theta_0$  отсчитывается от оси  $\langle 110 \rangle$ .

Остановимся теперь на ориентационной зависимости полной интенсивности излучения. Как уже отмечалось, область применимости формулы (2.6) при этом не связана с величиной параметра  $\rho_c$  и совпадает с областью применимости квазиклассического приближения. При  $\theta_0 \ll \theta_c$  ориентационная зависимость в тонком кристалле связана с перераспределением потока падающих частиц, иначе говоря, с изменением функции распределения  $F(\vec{r}, \theta_0)$  (см. (2.3)) в зависимости от угла  $\theta_0$ . Это распределение оказывается разным для электронов (-) и позитронов (+), поэтому и излучение при  $\theta_0 \ll \theta_c$  зависит от знака заряда частицы. При  $\theta_0=0$  находим из (2.3) для произвольного аксиально-симметричного потенциала (см. [40])

$$F_{ax}^{(-)}(\vec{\rho}^2, 0) = \ln \frac{x_0}{x}, \quad F_{ax}^{(+)}(\vec{\rho}^2, 0) = \ln \frac{x_0}{x_0 - x}, \quad x = \frac{\vec{\rho}^2}{a_s^2}. \quad (5.1)$$

При  $\chi_s \ll 1$  вклад в полную интенсивность дает интервал значений  $\eta \ll x \ll 1$ , для которого  $F_{ax}^{(-)} \gg \ln x_0$ ,  $F_{ax}^{(+)} \sim 1/x_0$ , откуда следует, что по сравнению со случаем равномерного распределения по поперечной координате интенсивность  $I^{(-)}$  усилена при  $\theta_0=0$  примерно в

$\ln x_0$  раз, а интенсивность  $I^{(+)}$  ослаблена примерно в  $x_0$  раз. При увеличении угла  $\theta_0$  распределение  $F_{ax}^{(-)}(\vec{\rho}^2, \theta_0)$  быстро приближается к равномерному, тогда как  $F_{ax}^{(+)}(\vec{\rho}^2, \theta_0)$  меняется довольно мед-

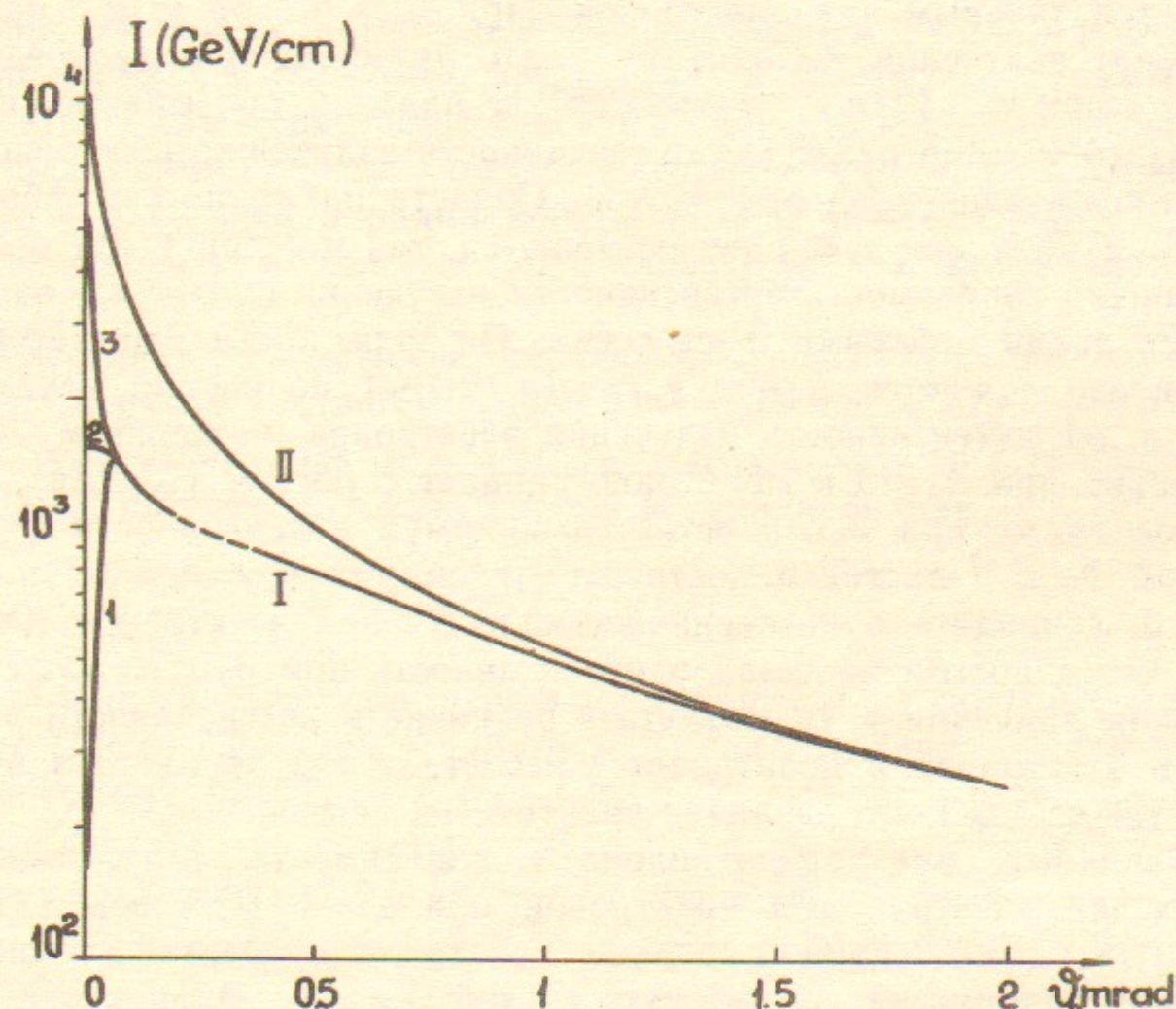


Рис. 8. Ориентационная зависимость интенсивности излучения в Ge $\langle 110 \rangle$ , ( $T=100\text{K}$ ),  $\epsilon=150\text{ ГэВ}$ . Кривая I получена в соответствии с формулами настоящей работы: в соответствии с формулой (4.2) справа от штриховой линии, в соответствии с (3.13) слева: 1 — для позитронов, 3 — для электронов, 2 — для равномерного распределения. Кривая II получена по формулам стандартной теории когерентного излучения.

ленно. Область  $\chi_s \ll 1$  изучена в работе [40], где показано, что  $I^{(-)}$  максимальна при  $\theta_0=0$  и при увеличении угла влета быстро приближается к величине  $I^{as}$ , тогда как  $I^{(+)}$  при  $\theta_0=0$  имеет минимум и сравнивается с  $I^{as}$  вблизи  $\theta_0=\theta_c$ . Характер изменения распределения  $F(\vec{r}, \theta_0)$  существенно проявляется при рассмотрении излучения пучка электронов, имеющего конечную угловую ширину  $\Delta\theta_0$ , так как уже при  $\Delta\theta_0 \approx \theta_c/2$  примерно 80% электронов находятся в надбарьерных состояниях и, следовательно, равномерно распределены по поперечным координатам. Кроме того, следует учитывать также, что ввиду отмечавшегося выше пере-



распределения потока многократное рассеяние электронов усиливается, а позитронов ослабляется при  $\vartheta_0 < \vartheta_c$ , так что возможна ситуация, когда кристалл является тонким для позитронов и не является таковым для электронов. При  $\vartheta_0 \geq \vartheta_c$  при  $\chi_s \ll 1$  интенсивность излучения выходит на плато (равномерное распределение), а при  $\vartheta_0 \sim V_0/m\chi_s$  начинается\* ее падение, описываемое формулой (4.2) (при  $\rho/2 \ll 1$ ). Интенсивность излучения электронов и позитронов одинакова при  $\vartheta_0 > \vartheta_c$ . Области применимости формул (3.13) и (4.2) при  $\chi_s \ll 1$  перекрываются, так что при  $\chi_s \ll 1$  ориентационная зависимость интенсивности излучения полностью описывается этими простыми формулами. По мере роста параметра  $\chi_s$  это плато сужается и при  $\chi_u = \chi_s(a_s/u_1) \sim 1$  полностью исчезает. При  $\chi_s \geq 1$  интенсивность излучения электронов по-прежнему максимальна при  $\vartheta_0 = 0$  и монотонно спадает с ростом  $\vartheta_0$ . Для позитронов также при  $\vartheta_0 = 0$  остается минимум интенсивности  $I^{(+)}$ , с ростом  $\vartheta_0$   $I^{(+)}$  растет и достигает максимума при  $\vartheta_0 \approx \vartheta_c$ , а при  $\vartheta_0 \geq \vartheta_c$  совпадает с интенсивностью излучения электронов. Отметим, что с ростом  $\chi_s$  вклад в интенсивность при  $\vartheta_0 < \vartheta_c$  дают все большие значения  $\chi$ . В результате различие в интенсивности излучения электронов и позитронов убывает, а при достаточно больших  $\chi_s \sim \chi_0^{3/2} \gg 1$  это различие практически исчезает.

Типичный вид ориентационной зависимости интенсивности излучения электронов и позитронов при  $\chi_s \sim 1$  (Ge, ось  $\langle 110 \rangle$ ,  $T = 100\text{K}$ ,  $\varepsilon = 150$  ГэВ) в тонком кристалле приведен на рис. 8. Кривая  $I$  получена по формулам этой работы. Видно, что при  $\vartheta_0 < \vartheta_c$  интенсивность существенно зависит от сорта частиц и угловой ширины пучка  $\Delta\vartheta_0$ : кривые 1 и 3, соответственно, описывают интенсивности излучения позитронов и электронов (при  $\Delta\vartheta_0 = 0$ ). Кривая 2 описывает случай равномерного распределения по координатам, что соответствует большому угловому разбросу в падающем пучке ( $\Delta\vartheta_0 \sim \vartheta_c$ ). При  $\vartheta_0 > \vartheta_c$  все три кривые сливаются в одну. Кривая  $II$  на рис. 8 построена по стандартной теории КТИ. Из сравнения ее с  $I$  можно судить об области применимости этой теории.

\* Как видно из проведенного в разделе 4 обсуждения, фактически параметром в этом случае является величина  $\lambda_u$ , определенная формулой (4.9).

## 6. ИЗЛУЧЕНИЕ В ТОЛСТЫХ КРИСТАЛЛАХ

Выше рассмотрение излучения проводилось для тонких кристаллов, в которых, по определению, изменением функции распределения (ФР) частиц можно пренебречь. В толстых кристаллах ФР меняется с глубиной проникновения  $l$  частиц в кристалл. Основными процессами, определяющими изменение ФР, являются многократное рассеяние и радиационные потери энергии. Мы рассмотрим излучение в толстых кристаллах при малых углах влета  $\vartheta_0 \ll V_0/m$ .

Расстояние, на котором среднеквадратичный угол многократного рассеяния в соответствующей аморфной среде становится равным углу Линдхарда  $\vartheta_c = \sqrt{2U_0/\varepsilon}$ , где  $U_0$  — глубина потенциальной ямы, принято называть длиной деканализирования

$$l_d \simeq \frac{\alpha}{2\pi} \frac{U_0 \varepsilon}{m^2} L_{rad}. \quad (6.1)$$

Анализ кинетики многократного рассеяния на больших толщинах  $l$  ( $l \gg l_d$ ) проведен в работе [36], где показано, что ФР имеет асимптотический вид

$$dF(\vec{v}_\perp, \vec{\rho}, l) = \frac{d^2\rho}{S} \frac{d^2v_\perp}{\pi g(l)}, \quad g(l) = \int_0^l \dot{\vartheta}_s^2 dl + \Delta_0^2, \quad (6.2)$$

где  $S$  — площадь, приходящаяся на одну ось,  $\Delta_0$  определяется угловой шириной падающего пучка,  $\dot{\vartheta}_s^2$  — скорость изменения квадрата угла многократного рассеяния в соответствующей аморфной среде. Таким образом, на большой толщине распределение в поперечном фазовом пространстве оказывается равномерным.

Интенсивность излучения в толстом кристалле, где применима ФР (6.2), в случае коллимации фотонов в телесный угол  $\Omega = \pi\vartheta_{ph}^2$  ( $\vartheta_{ph} \ll \vartheta_s$ ) имеет вид [36]

$$I(\Omega, l) = \frac{\Omega}{\pi g(l)} \bar{I}, \quad \bar{I} = \int I(\rho) \frac{d^2\rho}{S}; \quad (6.3)$$

например, в классическом пределе ( $I \propto \chi^2(\rho)$ ) имеем из (3.13)

$$\bar{I} = I_{as}^{cl} = I_0 \varphi(\eta), \quad (6.4)$$

$$I_0 = \frac{8\alpha m^2 \chi_s^2}{3x_0}, \quad \varphi(\eta) = (1+2\eta) \ln \frac{1+\eta}{\eta} - 2. \quad (6.5)$$

Отметим, что (6.4) учитывает излучение всей совокупности частиц, а не только надбарьерных, а появление  $I_{as}$  в (6.4) обусловлено равномерностью распределения в поперечном фазовом пространстве.

Поскольку  $l_d(\varepsilon) \propto \varepsilon$ , а  $L_{ch}(\varepsilon) = (\bar{I}/\varepsilon)^{-1} \propto \varepsilon^{-1}$  (в классическом пределе) и падает с энергией до  $\varepsilon \sim 1$  ТэВ (см. рис. 1), то при некоторой энергии [36]  $\varepsilon = \varepsilon_{cr}$

$$l_d(\varepsilon_{cr}) = L_{ch}(\varepsilon_{cr}). \quad (6.6)$$

Для Ge, например,  $\varepsilon_{cr} \simeq (40 \div 60)$  ГэВ в зависимости от оси и температуры. При  $\varepsilon < \varepsilon_{cr}$  в кинетике доминируют эффекты многократного рассеяния, а при  $\varepsilon > \varepsilon_{cr}$  — эффекты радиационных потерь энергии.

Если известна ФР  $\Phi(\varepsilon, \vec{\rho}, l)$  на глубине  $l$ , то спектральное распределение интенсивности излучения на глубине  $l$  в магнитотормозном пределе есть

$$\frac{dI}{d\omega} = \int \frac{dI(\rho, \varepsilon)}{d\omega} \Phi(\varepsilon, \rho, l) d^2\rho d\varepsilon, \quad (6.7)$$

где (см. (3.2))

$$\frac{dI(\vec{\rho}, \varepsilon)}{d\omega} = \frac{\alpha m^2 \omega}{\sqrt{3} \pi \varepsilon^2} r_1(\zeta=1); \quad (6.8)$$

вид ФР  $\Phi(\varepsilon, \rho, l)$  существенно зависит от конкретных условий, а для нахождения ее необходимо решить достаточно сложную кинетическую задачу. Мы начнем с простейшего случая, когда ФР является равномерной по поперечной координате:

$$\Phi(\varepsilon, \rho, l) = g(\varepsilon, l)/S. \quad (6.9)$$

Это справедливо, в частности, если угловая ширина падающего пучка  $\Delta\theta_0$  не мала по сравнению с  $\theta_c$ . Тогда с самого начала заселяются, в основном, надбарьерные состояния, для которых распределение равномерно. Например, в условиях эксперимента [23—25]  $\Delta\theta_0 = \pm 30$  мкрад ( $\theta_c \simeq 66$  мкрад) имеем в надбарьерных состояниях 80% частиц, а с учетом максимальной возможной мозаичности (10 мкрад) это число возрастает до 88%. Итак, даже без учета кинетики, имеем в условиях эксперимента [23—25] равномерное распределение для большинства электронов.

Если принять (6.9), то в (6.7) можно без труда провести интегрирование для любого потенциала.

Для изменения средней энергии электрона имеем уравнение [12]

$$d\langle \varepsilon(l) \rangle / dl = -\langle \bar{I}(\varepsilon) \rangle, \quad (6.10)$$

где  $\bar{I}$  определено в (6.3), обозначение

$$\langle f(\varepsilon) \rangle \equiv \int d\varepsilon g(\varepsilon, l) f(\varepsilon)$$

означает усреднение по энергиям на данной глубине. В некотором интервале энергий можно аппроксимировать  $\bar{I}(\varepsilon)$  более простой функцией. Так, если средняя энергия частиц на выходе из кристалла достаточно велика, то с хорошей степенью точности  $\bar{I}(\varepsilon) = a\varepsilon(1 + b\varepsilon/\varepsilon_0)$ , где  $\varepsilon_0$  — начальная энергия,  $a$  и  $b$  — подгоночные параметры. Например, в интервале  $1 < \chi < 15$  имеем

$$\frac{I(\chi)}{\chi} \simeq \frac{2}{15} \alpha m^2 \quad (6.11)$$

с точностью не хуже 10%. Тогда  $L_{ch}$  — также константа с указанной точностью. Для указанной аппроксимации  $\bar{I}(\varepsilon)$  уравнение (6.10) принимает вид

$$dy/dl = -a[y + b(y^2 + \Delta^2)], \quad (6.12)$$

где  $y(l) = \langle \varepsilon(l) \rangle / \varepsilon_0$ ,  $\Delta^2(l) = (\langle \varepsilon^2(l) \rangle - \langle \varepsilon(l) \rangle^2) / \varepsilon_0^2$  — дисперсия распределения по  $\varepsilon$ ,  $y(0) = 1$ . Для монохроматического пучка  $\Delta^2(0) = 0$ , с ростом  $l$  величина  $\Delta^2(l)$  нарастает, а при  $y(l) \rightarrow 0$ ,  $\Delta^2(l) \rightarrow 0$ . Максимальная оценка дисперсии (для равномерного распределения)  $\Delta_{max}^2 = 1/12$ . Проведенный анализ показал, что учет дисперсии слабо меняет вычисленную согласно (6.12) среднюю относительную потерю энергии  $\Delta\varepsilon(L)/\varepsilon_0 = 1 - y(L)$ , например, в эксперименте [23, 24] учет  $\Delta^2$  меняет результат на 2—3%. Если в уравнении (6.12) опустить  $\Delta^2$ , то оно решается элементарно. На рис. 9 приведена средняя относительная потеря энергии  $\Delta\varepsilon(L)/\varepsilon_0$  для разных кристаллов, осей и энергий в зависимости от толщины кристалла  $L$ , вычисленная при  $\Delta^2 = 0$ . В соответствии со сказанным, относительные потери слабо зависят от энергии (ср. кривые 4 и 5). Кривая 8 вычислена для тех же самых условий, что и кривая 4 (это условия эксперимента [23, 24]), но по классическим формулам. Их резкое отличие демонстрирует величину квантовых эффектов в этом случае. С другой стороны, кривые 3 и 4 хорошо согласуются с экспериментом. Это согласие подтверждает, в известной степени, наше предположение (6.9). Для равномерного распределения (6.9) спектральное распределение интенсивности излучения вычисляется согласно (6.7). Потеря энергии электроном приводит к изменению спектра  $dI/d\omega$ , для нахождения его на глубине  $l$  необходимо усреднить  $dI/d\omega$  (6.7) с ФР  $g(\varepsilon, l)$  (6.9). Вычисление спектра излучения в пренебрежении дисперсией прове-

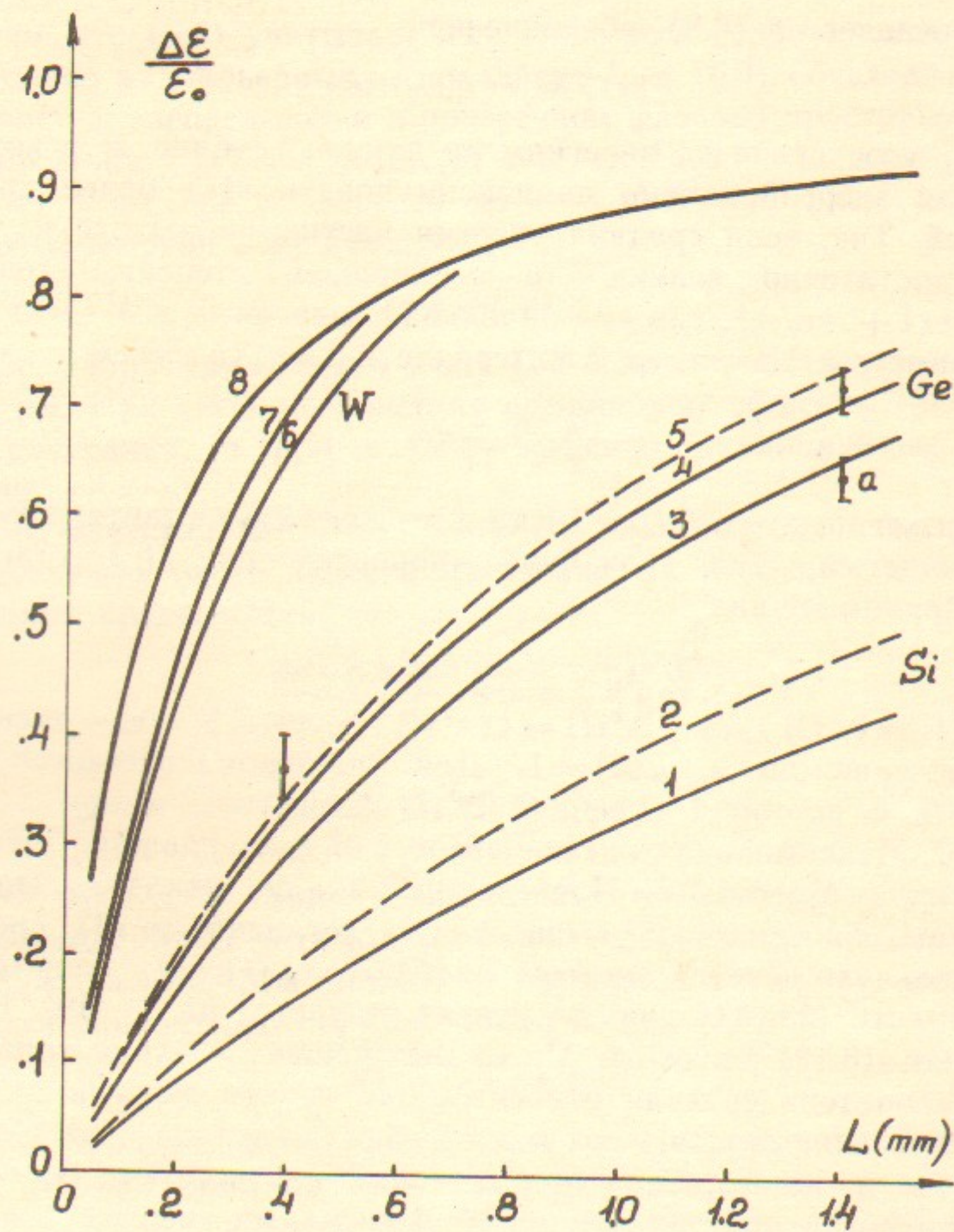


Рис. 9. Усредненная относительная потеря энергии электрона как функция толщины кристалла  $L$ :

1 — Si  $\langle 111 \rangle$ ,  $T=293\text{K}$ ,  $\varepsilon_0=200$  ГэВ;

2 — Si  $\langle 110 \rangle$ ,  $T=293\text{K}$ ,  $\varepsilon_0=200$  ГэВ;

3 — Ge  $\langle 110 \rangle$ ,  $T=280\text{K}$ ,  $\varepsilon_0=150$  ГэВ;

4 — Ge  $\langle 110 \rangle$ ,  $T=100\text{K}$ ,  $\varepsilon_0=150$  ГэВ.

Экспериментальные данные из работы [23],  $a$  — при  $T=280\text{K}$ , остальные при  $T=100\text{K}$ :

5 — Ge  $\langle 110 \rangle$ ,  $T=100\text{K}$ ,  $\varepsilon_0=200$  ГэВ;

6 — W  $\langle 111 \rangle$ ,  $T=293\text{K}$ ,  $\varepsilon_0=100$  ГэВ;

7 — W  $\langle 111 \rangle$ ,  $T=77\text{K}$ ,  $\varepsilon_0=100$  ГэВ;

8 — вычисления по классической теории для Ge  $\langle 110 \rangle$ ,  $T=100\text{K}$ ,  $\varepsilon_0=150$  ГэВ.

дено в работе [12], для этого в (6.7) достаточно заменить

$$\varepsilon \rightarrow \langle \varepsilon(l) \rangle, \text{ тогда наблюдаемый спектр будет } \frac{1}{L} \int_0^L dl \frac{dI(\langle \varepsilon(l) \rangle)}{d\omega}.$$

Результат вычислений приведен на рис. 10. Видно, что с ростом толщины кристалла спектр сужается, а максимум его сдвигается влево (кривые 4, 3 и 2). Более точные расчеты показали, что такое описание оказывается вполне удовлетворительным.

Однако возможна ситуация, когда распределение по поперечной координате уже не может считаться равномерным. Это выяснилось при анализе эксперимента [25]. Для определенности приведем условия этого эксперимента. Изучалось излучение в Ge (ось  $\langle 110 \rangle$ ) при  $T=100\text{K}$  и  $\varepsilon_0=150$  ГэВ, тогда  $\rho_c \approx 132$ , т. е. излучение носит магнитотормозной характер,  $l_d=0,51$  см,  $L_{ch}=0,1$  см. Следует однако иметь в виду, что эти значения  $l_d$  и  $L_{ch}$  получены, строго говоря, для надбарьерного движения, когда  $\varepsilon_{\perp} > U_0$ , т. е. любые расстояния от осей доступны, а распределение по поперечным координатам равномерное. Рассмотрим частицы в канале с  $\varepsilon_{\perp} < U_0$ , тогда их движение происходит в области  $x \leq x_1$  (используем потенциал (3.7), (3.8), причем  $x_0=19,8$ ;  $\eta=0,063$ ), где  $x_1$  определяется равенством  $U(x_1)=\varepsilon_{\perp}$ . Предполагая распределение по  $x$  равномерным во всей доступной области движения, убеждаемся, что по мере уменьшения  $\varepsilon_{\perp}(x_1)$  многократное рассеяние возрастает  $\propto (x_0+\eta)/(x_1+\eta)$  за счет увеличения средней плотности ядер и при  $x_1 \sim 1$  может в десятки раз ( $x_0 \gg 1$ ,  $\eta \ll 1$ ) превосходить аналогичную величину для надбарьерных электронов. Увеличивается, хотя и не столь быстро, интенсивность излучения, например, при  $x_1=1$  в 12,5 раза по сравнению с надбарьерным значением. Таким образом, кристалл может оказаться тонким для надбарьерных электронов и толстым для части канализованных частиц. Для позитронов при уменьшении  $\varepsilon_{\perp}$  от значения  $U_0$  уменьшается как многократное рассеяние на ядрах, так и интенсивность излучения, так как область координат вблизи осей становится для них все менее доступной. Отвлекаясь пока от случая очень тонких кристаллов, в которых не успевают сработать указанные факторы, видим, что необходимо рассмотреть сложную кинетическую задачу, не решенную до сих пор даже без учета излучения. Здесь мы проведем качественный анализ ситуации, проследив за изменением среднего значения  $z = \langle \varepsilon_{\perp} \rangle / U_0$ , считая, что в начальный момент частицы были сосредоточены при  $z = z(0) < 1$ . Изменение  $z$  и  $\varepsilon$

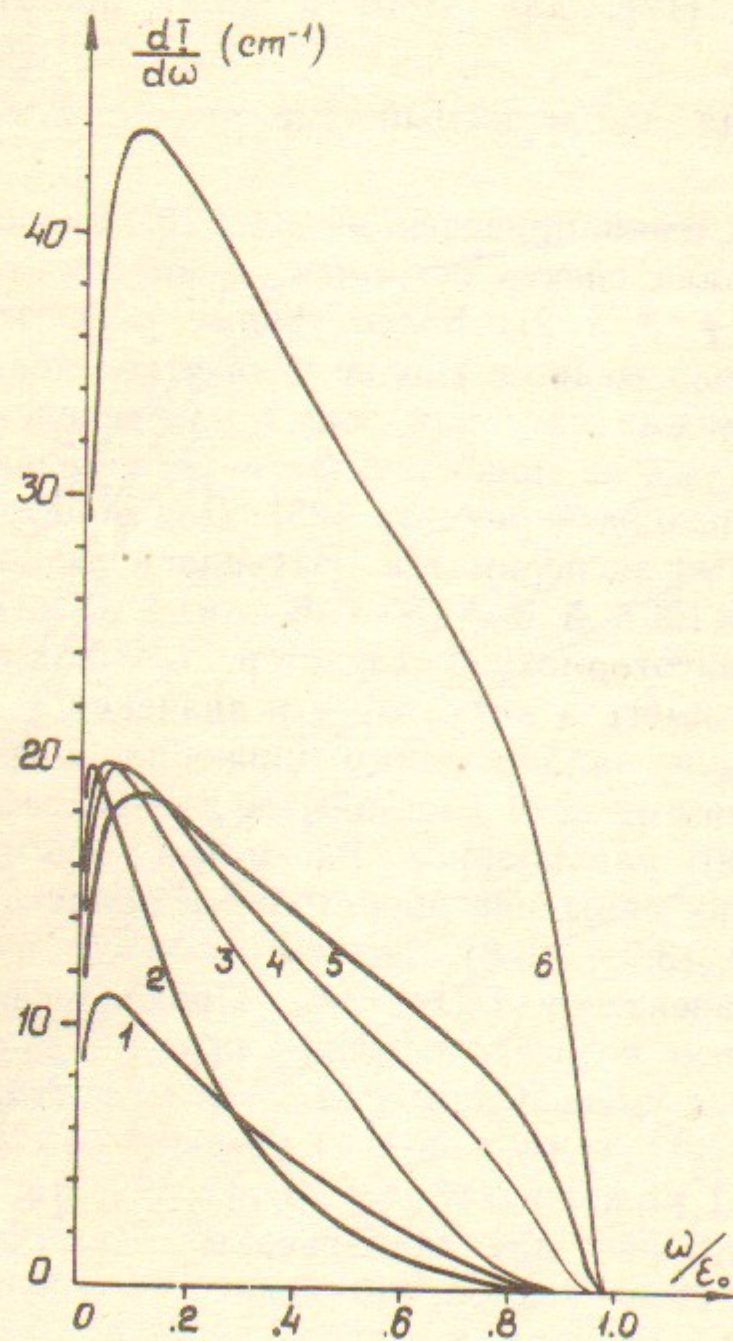


Рис. 10. Спектральное распределение интенсивности при фиксированной энергии:

- 1 — Si <111>,  $T=293\text{K}$ ,  $\varepsilon_0=200$  ГэВ;
- 4 — Ge <110>,  $T=100\text{K}$ ,  $\varepsilon_0=150$  ГэВ;
- 5 — Ge <110>,  $T=100\text{K}$ ,  $\varepsilon_0=300$  ГэВ;
- 6 — W <111>,  $T=293\text{K}$ ,  $\varepsilon_0=100$  ГэВ.

Спектральное распределение интенсивности, усредненное по толщине кристалла, с учетом потерь энергии: Ge <110>,  $T=100\text{K}$ ,  $\varepsilon_0=150$  ГэВ,  $L=1,4$  мм — кривая 2;  $L=0,4$  мм — кривая 3.

описывается системой уравнений (ср. (6.10))

$$\frac{dz}{dl} = \frac{1}{l_d(\varepsilon)} \frac{x_0 + \eta}{x_1 + \eta} - f_1(\varepsilon, z),$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dl} = -f_2(\varepsilon, z), \quad (6.13)$$

где

$$f_1(\varepsilon, z) = \int_0^{x_1} \frac{dx}{x_1} \left( z - \frac{U(x)}{U_0} \right) \frac{I(x)}{\varepsilon}, \quad f_2(\varepsilon, z) = \int_0^{x_1} \frac{dx}{x_1} \frac{I(x)}{\varepsilon}. \quad (6.14)$$

Напомним, что  $I(x)$  — локальное значение полной интенсивности излучения в поле оси, удобно перейти в (6.13) к переменной  $x_1$ , согласно равенству  $z = U(x_1)/U_0$ . Система уравнений (6.13) решалась нами при ряде упрощающих предположений. Например, функции  $f_1$ ,  $f_2$ , слабо зависят от  $\varepsilon$  (см. (6.11)) и в рассматриваемом интервале изменения энергии можно в первом приближении пренебречь этой зависимостью. При  $\varepsilon_0 = \varepsilon(0) = 150$  ГэВ первый член в (6.13), учитывающий влияние многократного рассеяния, превосходит  $f_1$  для  $x_1(0) < 1,3$  ( $z(0) < 0,81$ ), поэтому для частиц, имеющих меньшее значение  $x_1(0)$ , сразу (при  $l=0$ ) начинается увеличение средней поперечной энергии. Для больших значений  $x_1(0)$  величина  $x_1(z)$  сначала уменьшается за счет излучения, однако затем вследствие уменьшения  $x_1$  и, главным образом, из-за потери полной энергии  $\varepsilon$  на некоторой глубине  $l$  начинается возрастание  $x_1(z)$ . В результате решения системы уравнений (6.13) оказалось, что для частиц, теряющих заметную долю полной энергии, в относительно тонком кристалле «траектории»  $x_1(l)$  проходили в области значений  $x$ , ограниченной для всех  $l \leq L$ . Например, в кристалле толщиной  $L_1 = 1,85 \cdot 10^{-2}$  см электроны, потерявшие  $\Delta\varepsilon > 0,6\varepsilon_0$ , имели  $x_1(l) < 4,2$ , а для  $L_2 = 4 \cdot 10^{-2}$  см при таких же потерях энергии  $x_1(l) < 11$ .

Таким образом, существует группа электронов, которые все время находятся на заметно меньшем, чем  $x_0$ , расстоянии от оси, в области больших напряженностей поля  $E$ . Для них заметно усилена интенсивность излучения, например, при  $x_1 = 2,5$  и  $\varepsilon = 150$  ГэВ — в 7 раз и полная вероятность излучения — в 5 раз (при тех же значениях  $x$  и  $\varepsilon$ ). Спектр излучения в этой группе несколько жестче, чем для надбарьерных частиц, однако большие потери обусловлены не этим, а высокой кратностью излучения. Из-за большой величины многократного рассеяния и возникающей в процессе

излучения заметной дисперсии распределения по  $\epsilon$ , частицы этой группы сильно «перемешиваются», так что результирующее распределение по  $x$  оказывается для них равномерным. Хотя доля частиц, входящих в эту группу, относительно невелика (в обсуждаемом случае менее 20%), тем не менее их вклад в спектр потерь энергии оказывается весьма существенным для некоторого интервала толщин.

## 7. ЭЛЕКТРОН-ФОТОННЫЕ ЛИВНИ В ОРИЕНТИРОВАННЫХ КРИСТАЛЛАХ

Как показано в разделах 3, 4, при высокой энергии вероятности рождения пары фотоном и интенсивности излучения частиц в ориентированных кристаллах существенно превышают эти величины в соответствующем аморфном веществе. Это означает, что в кристаллах могут развиваться специфические электрон-фотонные ливни [13, 21]. Описание этих ливней много сложнее, чем в аморфном веществе, поскольку механизм рождения пар и излучения зависит от угла влета  $\theta_0$ , а характеристики процессов существенно зависят от энергии. В интересной области энергий многократное рассеяние частиц оказывается подавленным, а характерные углы разлета частиц в каскаде около  $1/\gamma$ , поэтому ливень развивается вдоль скорости начальной частицы, и поскольку  $V_0/m \gg 1/\gamma$ , то можно рассматривать развитие ливня для каждого из механизмов отдельно. Особый интерес представляют электрон-фотонные ливни в полях осей, поскольку здесь эффекты усиления максимальны.

Теория каскадных ливней в аморфном веществе была сформулирована и развита в работах [44—46]. В этих работах были выписаны кинетические уравнения, описывающие развитие каскада, и найдено аналитическое решение уравнений в случае, когда учитывались только процессы излучения и рождения пар [46], т. е. в качестве ядер в уравнениях использовались бете—гайтлеровские характеристики процессов. В последующие годы было опубликовано большое число работ, посвященных развитию этой теории (их обзор см., например, в [47]).

Обсудим отличительные особенности ливня в монокристаллах. 1). Как уже отмечалось, характерные длины излучения и рождения пар здесь могут быть значительно меньше, чем в соответствующем аморфном веществе (разориентированном кристалле).

2). Существует резкая граница (порог)  $\omega_t$  по частотам фотона, ниже которой вероятность фоторождения пары в поле оси падает экспоненциально. Мы выбираем ее так, что вероятность фоторождения в поле  $W_e^F(\omega_t) = W_e^{BH}$  (конкретные значения  $\omega_t$  приведены в табл. 2). В то же время, если энергия частицы  $\epsilon \sim \omega_t$ , то она интенсивно излучает за счет обсуждаемого механизма. 3). В области энергий  $\omega > \omega_t$  как вероятность рождения пары  $W_e^F(\omega)$ , так и характерная длина потерь энергии  $L_{ch}(\epsilon) = \epsilon/I(\epsilon)$  ( $I(\epsilon)$  — интенсивность излучения) зависят от энергии, тогда как для бете—гайтлеровского процесса соответствующие величины  $W_e^{BH}$  и  $L_{rad}$  — константы. 4). При  $\epsilon \ll \omega_t$ , как отмечалось выше, испускается большое число относительно мягких фотонов, не влияющих на энергетические потери излучающей их частицы. Тем не менее, эти фотоны могут рождать пары за счет бете—гайтлеровского механизма (т. е. с относительно малой вероятностью). В результате развивается особый ливень, обусловленный смешанным механизмом, в котором большое число фотонов может родить заметное число пар, несмотря на малую вероятность процесса фоторождения. При этом, естественно, число фотонов в ливне будет заметно превышать число заряженных частиц. Следует различать жесткие ливни, когда энергия  $\epsilon \gg \omega_t$ , и мягкие ливни, когда  $\epsilon \ll \omega_t$ . 5). В некоторых случаях, когда механизмы усреднения не успевают сработать, может оказаться важным перераспределение потока, а также эффекты, обсуждавшиеся в разделе 6.

Анализ электрон-фотонных ливней\* в полях осей кристаллов в случае равномерного распределения был проведен в работе [21]. Для жесткого ливня удалось получить аналитическое решение кинетических уравнений. Как известно, число частиц в ливне с энергией выше некоторой экспоненциально нарастает вплоть до толщины  $t = t_{op}$ . Мы приведем здесь только явные выражения для решений вблизи  $t_{op}$ , которая дается выражением

$$t_{op} = \frac{2}{5} \int_0^{\eta} dy \left( \frac{1}{a(y)} + \frac{1}{b(y)} \right), \quad (7.1)$$

где введены следующие переменные и функции

\* Обсуждались также ливни в когерентной области, см. [43] и цитированную там литературу.

$$\eta = \ln \frac{\omega_0}{\omega}, \quad \zeta = \ln \frac{\omega_0}{\varepsilon}, \quad a(\zeta) = L_{ch}^{-1}(\omega_0 e^{-\zeta}),$$

$$b(\eta) = W(\omega_0 e^{-\eta}), \quad N(\omega, t) = \frac{1}{\omega_0} N(\eta, t), \quad (7.2)$$

здесь  $\omega_0$  — энергия начальной частицы, например, фотона. Вблизи  $t = t_{op}$  число фотонов (электронов) с энергией  $\eta$   $N_\gamma(\eta, t)$  ( $N_e(\eta, t)$ ) имеет вид гауссова распределения по времени (глубине):

$$N_\gamma(\eta, t) = \frac{2e^{2\eta}}{5 \cdot 2\pi d \cdot b(\eta)} \exp \left[ -\frac{(t-t_{op})^2}{2d(\eta)} \right], \quad N_e(\eta, t) = \frac{b(\eta)}{a(\eta)} N_\gamma(\eta, t),$$

$$d(\eta) = \frac{4}{125} \int_0^\eta dy \left( \frac{7}{a^2(y)} - \frac{1}{a(y)b(y)} + \frac{17}{b^2(y)} \right). \quad (7.3)$$

При решении задачи был сделан ряд упрощающих предположений, позволивших в адиабатическом приближении учесть зависимость вероятностей от энергии. Это приводит к погрешности  $\leq 15\%$ .

Для электрон-фотонных ливней в аморфном веществе ( $b/a = 7/9$ ,  $a^{-1} = L_{rad}$ ) имеем из (7.1) — (7.3)

$$t_{op} = \frac{32}{35} \eta L_{rad}, \quad N_\gamma(\eta, t_{op}) = \frac{0,197}{\sqrt{\eta}} e^{2\eta}, \quad N_e(\eta, t_{op}) = \frac{0,153}{\sqrt{\eta}} e^{2\eta}, \quad (7.4)$$

что хорошо согласуется (отличие  $\simeq 10\%$ ) со стандартной теорией ливней [46, 47]. Отметим здесь, что проведенное нами численное моделирование жесткого каскада находится в хорошем согласии с приведенными выше результатами аналитического расчета.

Наряду с жестким каскадом, (когда энергия частиц и фотонов  $\varepsilon_f(\omega_f) \ll \omega_f$ , возможна ситуация, когда нижняя граница энергии  $\varepsilon_f(\omega_f) \ll \omega_f$ . В этом случае при энергии фотонов  $\omega \ll \omega_f$  действует в основном бете-гайтлеровский механизм рождения пар, однако излучение частиц в поле монокристалла все еще остается достаточно интенсивным ( $b \sim W_e^{BH}$ ,  $a \gg L_{rad}^{-1}$ ).

Ясно, что основное число фотонов излучается на характерной длине

$$l \sim \int_0^\eta dy \frac{1}{a(y)} = \int_0^\eta dy L_{ch}(\varepsilon_0 e^{-y}) \ll t_{op}.$$

Затем имеется довольно широкий интервал  $t$ , на котором число

фотонов остается практически постоянным (плавно падая из-за поглощения) вплоть до длины  $l \sim (W_e^{BH})^{-1}$ , на которой их поглощение, обусловленное превращением в  $e^+e^-$ -пару, становится заметным. В рассматриваемой ситуации следует различать два существенно разных случая. В первом случае начальная энергия  $\omega_0(\varepsilon_0) \gg \omega_f$  и развивается смешанный каскад. Во втором  $\omega_0(\varepsilon_0) \sim \omega_f$  и развивается мягкий каскад.

Смешанный каскад удастся рассмотреть только с помощью численного моделирования. Мы провели его для кристалла кремния, (ось  $\langle 110 \rangle$ ,  $T = 293\text{K}$ ). На рис. 11 приведена зависимость числа заряженных частиц и фотонов от глубины  $l$  развития ливня в кристалле для разных энергий начального фотона. Нижняя граница энергии фотонов в каскаде была выбрана  $\omega_f = 100$  МэВ, что примерно соответствует эффективному порогу фоторождения электрон-позитронной пары в веществе. На рис. 11 видно, в соответствии со сказанным выше, что число фотонов выходит на плато. Нижняя граница энергии заряженных частиц была взята  $\varepsilon_f = 10$  ГэВ. С одной стороны, этот выбор обеспечивает применимость используемого нами магнитотормозного приближения. С другой, при энергии  $\varepsilon < 10$  ГэВ излучаются в основном фотоны с энергиями  $\omega < \omega_f = 100$  МэВ. На рис. 12 приведена зависимость числа фотонов ( $N_\gamma$ ) с энергией  $\omega > 100$  МэВ и полного числа заряженных частиц ( $N_e$ ) от энергии начального фотона  $\omega_0$ , влетающего в монокристалл кремния толщиной  $L = 1$  см под малым углом  $\vartheta_0 \ll V_0/m$  к оси  $\langle 110 \rangle$ . Интересно, что отношение числа фотонов  $N_\gamma$  к числу заряженных частиц  $N_e$  практически не зависит от начальной энергии и составляет  $N_\gamma/N_e \simeq 11$ . Представленные на рис. 12 зависимости позволяют при детектировании сверхжестких фотонов [48] определять их энергии с хорошей точностью.

В случае, когда начальная энергия частиц (фотонов) порядка пороговой энергии  $\omega_f$ , развивается мягкий каскад, в котором, как уже отмечалось, испускание большого числа фотонов приводит к рождению заметного числа  $e^+e^-$ -пар несмотря на малую величину  $W_e^{BH}$ . В этом случае для  $l \ll L_{ch} \ll L_{rad}$  в аналитическом расчете можно использовать метод последовательных приближений, поскольку относительное число вторичных частиц мало. Например, для начального электрона в рамках принятого подхода находим число фотонов на глубине  $l$ :

$$N_\gamma^{(e)}(l) = \int_0^l W_\gamma(t) dt = \int_{\varepsilon(l)}^{\varepsilon_0} W_\gamma(\varepsilon) L_{ch}(\varepsilon) \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} =$$

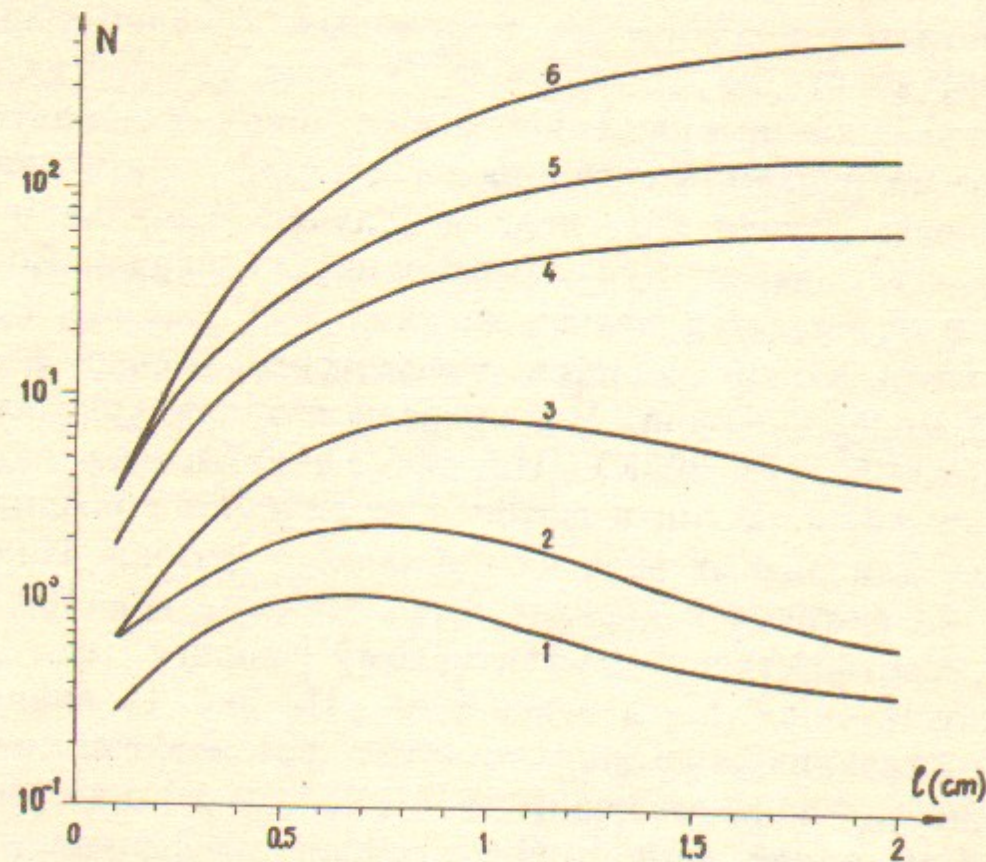


Рис. 11. Число заряженных частиц с энергией  $\epsilon > 10$  ГэВ в монокристалле кремния (ось  $\langle 110 \rangle$ ,  $T=293\text{K}$ ) в случае, когда на кристалл падает фотон с энергией  $\omega_0=0,4$  ТэВ (1),  $\omega_0=1$  ТэВ (2) и  $\omega_0=4$  ТэВ (3). Число фотонов с энергией  $\omega > 100$  МэВ для тех же условий — кривые 4, 5, 6, соответственно.

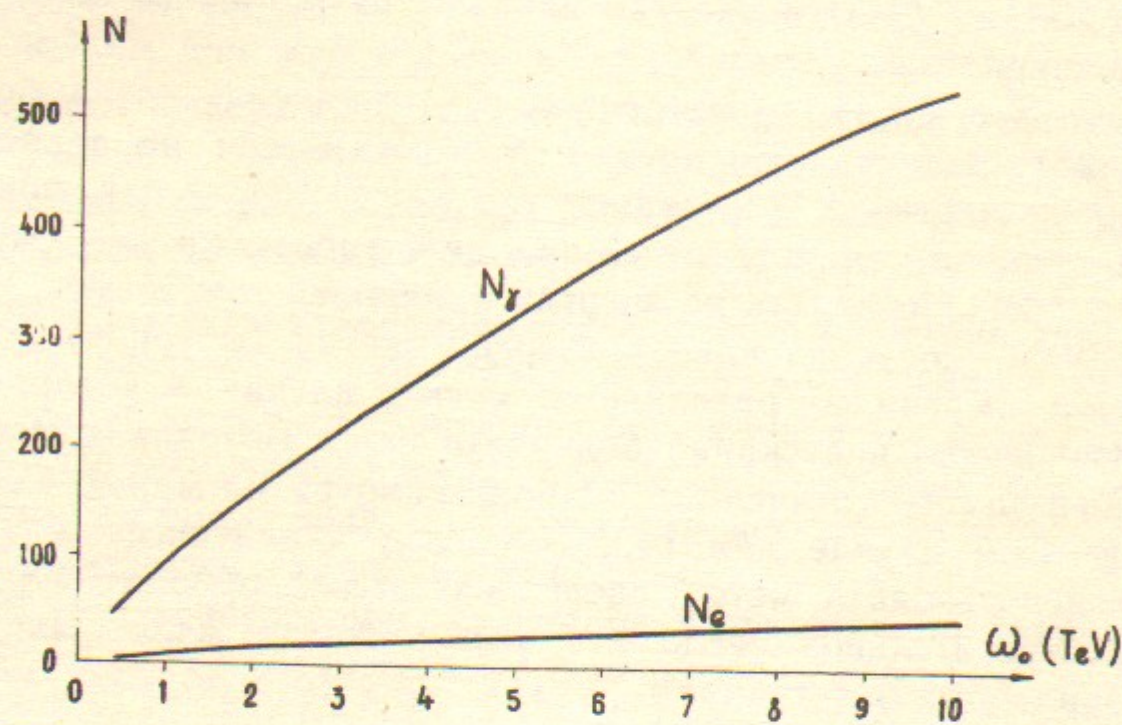


Рис. 12. Полное число заряженных частиц ( $N_e$ ) и фотонов с энергией  $\omega > 100$  МэВ ( $N_\gamma$ ) на глубине 1 см монокристалла кремния (ось  $\langle 110 \rangle$ ,  $T=293\text{K}$ ) в зависимости от энергии начального фотона  $\omega_0$ .

$$= \int_0^\eta \frac{W_\gamma(\epsilon_0 e^{-y})}{a(y)} dy = \bar{W}_\gamma l, \quad \eta = \ln \frac{\epsilon_0}{\epsilon(l)}. \quad (7.5)$$

Последнее равенство в формуле (7.5) выполняется с хорошей точностью в силу слабой зависимости полной вероятности излучения  $W_\gamma$  от  $\epsilon$  в рассматриваемой области энергий. В этой области справедливо магнитотормозное описание, а квантовые эффекты для полной вероятности еще относительно малы. Для числа вторичных заряженных частиц соответственно получаем

$$N_e^{(e)}(l) = 2 \int_0^l W_e^{BH} N_\gamma(t) dt = 2 W_e^{BH} \int_0^l W_\gamma(t)(l-t) dt \simeq W_e^{BH} \bar{W}_\gamma l^2 \simeq W_e^{BH} N_\gamma^{(e)}(l) l. \quad (7.6)$$

В принципе можно вычислить и члены следующих приближений. Однако при  $l \ll L_{ch}$  эти члены малы, а при  $l \gg L_{ch}$  вторичные частицы рождаются, в основном, с энергией, более низкой, чем обсуждавшийся выше порог  $\epsilon_f$ .

В последнее время были проведены эксперименты по излучению электронов и рождению пар фотонами в монокристалле при достаточно высокой энергии частиц [23, 24], когда может проявляться обсуждавшийся нами специфический ливень. В [23, 24] использовались охлажденные до температуры  $T=100\text{K}$  монокристаллы германия толщиной  $L=0,4$  мм и  $L=1,4$  мм. Начальные электроны с энергией  $\epsilon_0=150$  ГэВ и фотоны с энергией  $\omega_0 < 155$  ГэВ падали на монокристалл в направлении, близком к оси  $\langle 110 \rangle$ . С учетом того, что для этих условий  $\omega_f=50$  ГэВ (см. табл. 2), данная экспериментальная ситуация относится к случаю мягкого каскада.

Обсудим сначала случай, когда начальной частицей является электрон. Детальный анализ характеристик излучения с учетом потерь энергии был проведен в [12] (см. раздел 6). Однако там не учитывалось рождение вторичных частиц, число которых можно оценить по формулам (7.5) — (7.6). Для  $L=1,4$  мм имеем  $\bar{W}_\gamma=120 \text{ см}^{-1}$ ,  $W_e^{BH}=0,28 \text{ см}^{-1}$ . Тогда из (7.5) и (7.6) имеем

$$N_\gamma^{(e)}(L) \simeq 16,8, \quad N_e^{(e)}(L) \simeq 0,67. \quad (7.7)$$

Учитывая, что для  $L=0,4$  мм,  $\bar{W}_\gamma=111 \text{ см}^{-1}$ , найдем число фотонов и вторичных электронов для этой толщины:

$$N_\gamma^{(e)}(L) \simeq 4,4; \quad N_e^{(e)}(L) \simeq 1/20. \quad (7.8)$$

Был проведен численный расчет каскада для условий эксперимента [23, 24], который дал для числа фотонов с энергией, большей  $\omega_f = 100$  МэВ,  $N_\gamma(1,4) \simeq 13,9$  и  $N_\gamma(0,4 \text{ мм}) \simeq 3,9$ , а для полного числа фотонов —  $N_\gamma(1,4 \text{ мм}) \simeq 17,3$  и  $N_\gamma(0,4 \text{ мм}) \simeq 4,4$ , что очевидно хорошо согласуется с оценками (7.7), (7.8). Столь же хорошее согласие имеет место для числа вторичных частиц.

Полученная с помощью численного моделирования спектральная интенсивность излучения хорошо согласуется с работой [12] (см. рис. 10). Как видно из оценок (7.7) и (7.8), в использованных кристаллах частица излучает несколько фотонов, а детектор в эксперименте [23] регистрировал суммарную энергию фотонов, поэтому фактически измерялось не спектральное распределение излучения, а распределение по потере энергии падающими электронами. На рис. 13 приведены результаты расчета распределения заряженных частиц по энергии для  $\epsilon > 5$  ГэВ. Отметим, что несмотря на заметное число вторичных частиц (см. (7.7)), большинство из них имеют энергию  $\epsilon < 5$  ГэВ и поэтому они практически не влияют на спектр для  $\epsilon > 5$  ГэВ. Поэтому результаты, приведенные на рис. 13, можно непосредственно сравнивать с распределением на рис. 2 в [23] (сделав замену  $x \rightarrow 1 - x$ ). Результаты расчета хорошо согласуются с экспериментом [23] для  $L = 1,4$  мм, тогда как для  $L = 0,4$  мм имеется расхождение при  $x < 0,4$ . Мы вернемся к этому вопросу в разделе 9. Используя найденные распределения, находим для средней энергии электронов с  $\epsilon > 5$  ГэВ на выходе из кристалла при  $L = 1,4$  мм  $\epsilon = 0,26\epsilon_0$  и, соответственно, при  $L = 0,4$  мм  $\epsilon = 0,66\epsilon_0$ . Эти значения практически совпадают с результатами работы [12] и эксперимента [23, 24].

Был рассмотрен также случай, когда на кристалл падает фотон с энергией  $\omega_0$  и изучается рождение электрон-позитронных пар в условиях эксперимента [24]. Кривые 1 и 2 на рис. 14 представляют спектральное распределение электронов (позитронов), рожденных фотоном с  $\omega_0 = 150$  ГэВ и  $\omega_0 = 100$  ГэВ, если не учитывать их последующего излучения. Расчет этого же распределения в рамках каскадной теории для тех же начальных фотонов (кривые 3, 4 на рис. 14) показывает разительное отличие спектра рожденных частиц в кристалле толщиной  $L = 1,4$  мм, по сравнению с тем, который наблюдался бы в очень тонком кристалле (кривые 1, 2). Если рассматривать излучение фотонов с энергией  $\omega > 100$  МэВ, то при  $\omega_0 = 150$  ГэВ имеем  $N_\gamma = 4,8$ , а для  $\omega_0 = 100$  ГэВ имеем  $N_\gamma = 3,4$ . Полное же число фотонов равно,

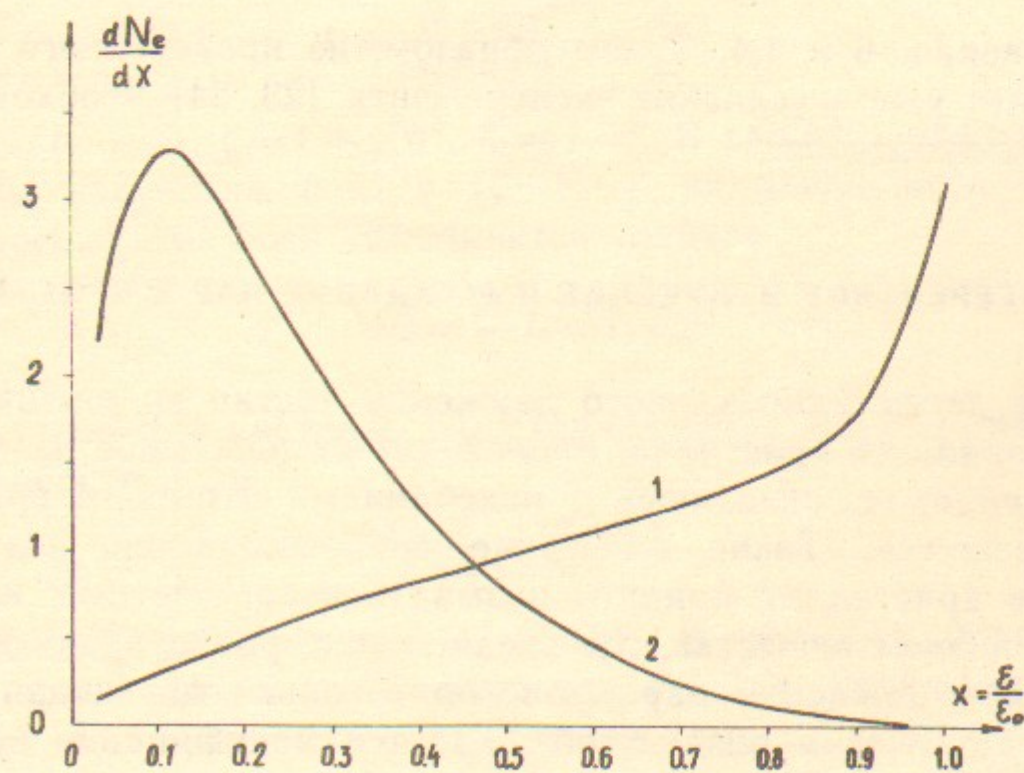


Рис. 13. Распределение по энергии вышедших из кристалла заряженных частиц в случае начального электрона с  $\epsilon_0 = 150$  ГэВ для монокристалла Ge (ось  $\langle 110 \rangle$ ,  $T = 100$  К); толщина  $L = 0,4$  мм (1) и  $L = 1,4$  мм (2).

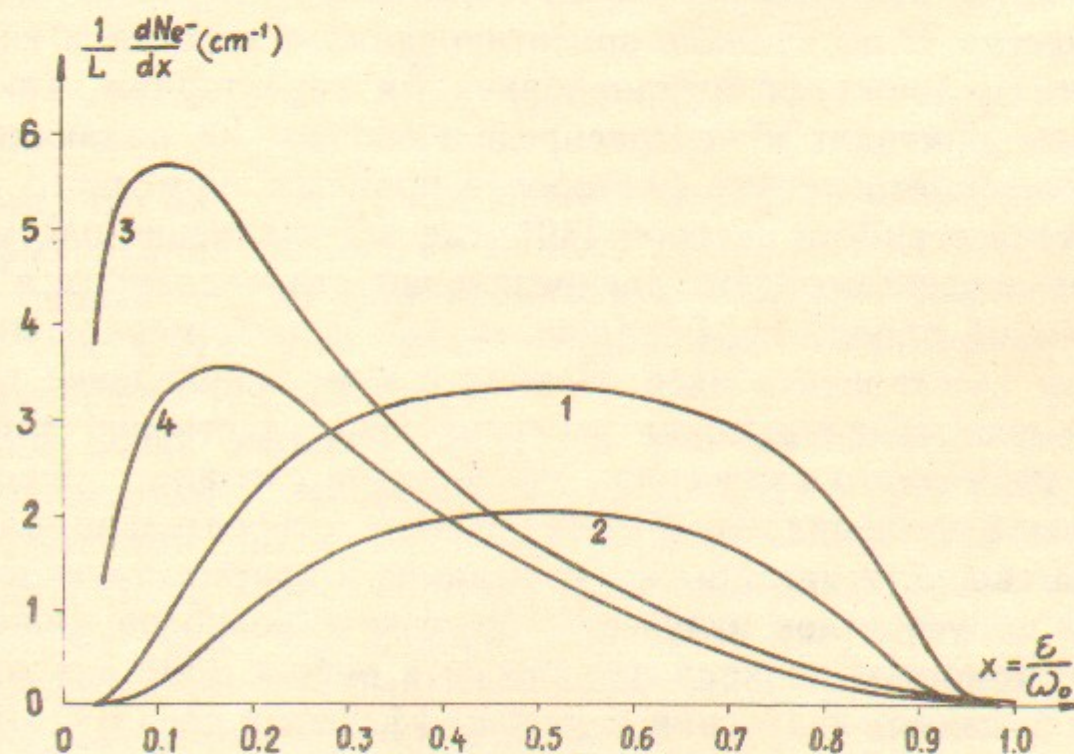


Рис. 14. Распределение по энергии электронов при выходе из монокристалла Ge (ось  $\langle 110 \rangle$ ,  $T = 100$  К, толщина  $L = 1,4$  мм), если начальный фотон имеет энергию  $\omega_0 = 150$  ГэВ (3) и  $\omega_0 = 100$  ГэВ (4). Для сравнения приведено то же распределение непосредственно в процессе рождения  $e^+e^-$ -пары для  $\omega_0 = 150$  ГэВ (1) и  $\omega_0 = 100$  ГэВ (2).



соответственно, 6 и 4,4. Таким образом, из проведенного анализа следует, что уже в условиях эксперимента [23, 24] необходим учет каскадных процессов.

### 8. НЕКОГЕРЕНТНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ И РОЖДЕНИЕ ПАР В КРИСТАЛЛАХ

Кроме детерминированного движения частиц во внешнем поле ориентированного кристалла, происходит их рассеяние на флуктуациях потенциала, связанных с колебаниями атомов в кристаллической решетке. Такое рассеяние сопровождается излучением, которое в кристаллах принято называть некогерентным излучением. В аморфном веществе, где среднее поле равно нулю, процессы излучения и рождения пар происходят только благодаря рассеянию частиц. В этом разделе обсуждается модификация процессов некогерентного излучения и рождения пар в ориентированных монокристаллах по сравнению с аморфным веществом.

Рассмотрим характерные особенности некогерентного излучения в кристаллах, отличающие его от тормозного излучения в аморфном веществе. В потенциале ориентированного кристалла заряженные частицы движутся по криволинейным траекториям, что непосредственно приводит к перераспределению потока падающих частиц. Роль геометрических факторов в процессе тормозного излучения изучена в работе авторов [49], где это излучение рассмотрено с учетом неравномерности распределения сталкивающихся частиц в поперечной плоскости. В нашем случае неравномерной является плотность электронов и ядер. Наряду с этим искривление траектории при достаточно высоких энергиях непосредственно влияет на процесс тормозного излучения. Это влияние связано с уменьшением длины формирования фотона за счет относительно большого поворота скорости частицы на этой длине и соответствующего расширения конуса углов излучения. Этот круг вопросов может быть изучен с помощью подхода, развитого в работе [50] для рассмотрения тормозного излучения с учетом эффектов среды и внешнего поля.

Проведем качественный анализ свойств длины формирования. Если фотон с частотой  $\omega$  излучается электроном (позитроном) с энергией  $\epsilon$  под углом  $\theta$  к направлению его скорости, то длина формирования этого фотона определяется соотношением (см., например, [33])

$$l_{\omega} \sim \frac{(\epsilon - \omega)\gamma^2}{\epsilon\omega(1 + \gamma^2\theta^2)} \equiv \frac{\gamma\tilde{\lambda}_c}{u\zeta}, \quad (8.1)$$

где  $u = \omega/(\epsilon - \omega)$ ,  $\zeta = 1 + \gamma^2\theta^2$ ,  $\tilde{\lambda}_c = 1/m$ . В слабых полях характерные углы излучения  $\theta \sim 1/\gamma$  ( $\zeta \sim 1$ ) и влиянием внешнего поля можно пренебречь, если выполняется условие

$$\omega l_{\omega} = \frac{eE}{\epsilon} l_{\omega} \ll 1/\gamma, \quad (8.2)$$

где  $\omega$  — ускорение частицы. Подставляя (8.1) в (8.2), имеем критерий слабости поля

$$\gamma \frac{eE}{\epsilon} \frac{\gamma^2}{\epsilon u} = \frac{\chi}{u} \ll 1, \quad (8.3)$$

где параметр  $\chi$  определен в (1.11). В сильных полях, когда  $\chi/u \gg 1$ , характерные углы излучения  $\theta \gg 1/\gamma$ . Эффективный угол излучения  $\theta_{ef}$  определяется из условия самосогласованности определения  $\theta_{ef}$ : угол отклонения частицы в поле на длине формирования не превышает  $\theta_{ef}$  (этот вопрос проанализирован в [50]):

$$\omega l_{\omega}(\theta_{ef}) \sim \theta_{ef}, \quad \theta_{ef} \sim \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\chi}{u} \right)^{1/3},$$

$$\zeta \sim \left( \frac{\chi}{u} \right)^{2/3}, \quad l_{\omega}(\theta_{ef}) \sim \frac{\gamma\tilde{\lambda}_c}{u} \left( \frac{u}{\chi} \right)^{2/3}. \quad (8.4)$$

Отметим, что при  $\chi/u \gg 1$  ни характерный угол излучения, ни длина формирования фотона не зависят от массы излучающей частицы. Поскольку длина формирования фотона при больших  $\chi/u \gg 1$  падает как  $(u/\chi)^{2/3}$ , то таким же образом падает сечение тормозного излучения (см. [50]).

Из-за очень большой плотности ядер вблизи оси, где существенно проявляются некогерентные процессы, при больших энергиях электронов мог бы проявляться эффект Ландау — Померанчука (см., например, [33]). Поэтому для последовательной оценки  $\theta_{ef}$  необходимо учесть еще расширение углов излучения за счет многократного рассеяния. Учитывая изменение угла отклонения частицы на длине формирования фотона как за счет внешнего поля, так и за счет многократного рассеяния, получаем из условия самосогласования:

$$\frac{\chi^2}{u^2\zeta^2} + \frac{4\pi Z^2\alpha^2\gamma n}{m^3u\zeta} \ln \frac{\zeta}{\gamma^2\theta_1^2} \ll \zeta, \quad (8.5)$$

где  $Z$  — заряд ядра;  $n$  — плотность ядер в среде;  $\theta_1 = (\epsilon u_1)^{-1}$

— угол, отвечающий нижней границе переданных импульсов  $q_{\min} = u_1^{-1}$ , где  $u_1$  — амплитуда тепловых колебаний. Учитывая, что

$$\chi(u_1) \sim \frac{V_0 \gamma}{m^2 u_1} \sim \frac{Z \alpha \gamma}{m^2 d u_1}, \quad n \sim \frac{1}{4 \pi u_1^2 d}, \quad (8.6)$$

где  $V_0$  — масштаб потенциала оси,  $d$  — среднее расстояние между атомами в цепочке, образующей ось, имеем для отношения вкладов многократного рассеяния и внешнего поля в левую часть формулы (8.5)

$$k = \frac{\theta_s^2 l_\omega}{(\omega l_\omega)^2} \sim \frac{u \zeta}{\gamma} \frac{d}{\lambda_c} \ln \frac{\zeta}{\gamma^2 \theta_s^2}. \quad (8.7)$$

При больших энергиях, когда параметр  $\chi \gg 1$ , это отношение всегда мало, поскольку оно мало при  $\chi(u_1) \simeq 1$ , а при  $\chi(u_1) \gg 1$  величина  $\zeta_{ef} \propto \gamma^{2/3}$  (8.4). Максимальная оценка для  $k$  дает ( $\chi(u_1) \simeq 1$ ,  $u \sim 1$ )

$$k_{\max} \sim \frac{Z \alpha \lambda_c}{u_1} \ln \left( \frac{u_1}{\lambda_c} \right)^2 \ll 1. \quad (8.8)$$

Условие  $k \ll 1$  позволяет при расчете вероятностей некогерентных процессов использовать теорию возмущений по рассеянию и пренебречь эффектом Ландау — Померанчука [51, 52].

В интересующем нас случае взаимодействия электронов с ориентированным кристаллом состояние электрона не является плоской волной, а представляет собой волновой пакет, в котором распределение по поперечной координате является неоднородным. Кроме того, распределение атомов в цепочке (для определенности рассматривается осевой случай) также характеризуется определенной плотностью в поперечной плоскости, связанной с амплитудой тепловых колебаний. При таких условиях нельзя пользоваться стандартной теорией тормозного излучения. Теория тормозного излучения, учитывающая неоднородность распределения частиц, была развита в работе авторов [49], где использован пространственно-временной подход, в котором естественно может быть учтена неоднородность плотности частиц. В простейшем случае равномерного распределения электронов, если плотность ядер в поперечной плоскости есть  $n_a(\vec{x}) = \exp(-\vec{x}^2/2u_1^2)/(2\pi u_1^2)$ , имеем для сечения тормозного (некогерентного) излучения [52]:

$$d\sigma_\gamma(\omega) = \frac{4Z^2 \alpha^3}{m^2} \frac{\varepsilon - \omega}{\varepsilon} \frac{d\omega}{\omega} \left\{ \left( \frac{\varepsilon - \omega}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon - \omega} - \frac{2}{3} \right) \times \right.$$

$$\left. \times (\ln 183 Z^{-1/3} - g(\delta_0) - f(Z\alpha)) + \frac{1}{9} \right\}, \quad (8.9)$$

где функция  $f(Z\alpha)$  определяет кулоновские поправки, а функция  $g(\delta)$  учитывает неоднородность распределения атомов:

$$f(x) = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n^2 + x^2)}, \quad g(\delta) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{x dx e^{-\delta x}}{(1+x)^2}, \quad \delta_0 = \frac{u_1^2}{a^2}, \quad (8.10)$$

в потенциале Мольера  $a \simeq 111 Z^{-1/3} \lambda_c$ . Если распределение электронов неравномерно, но градиенты плотности существенны только при  $\rho \gg u_1$  сечение (8.9) необходимо умножить на фактор  $n_e(0)$  ( $n_e(\vec{x})$  — отношение плотности электронов к плотности равномерно распределения).

При достаточно больших энергиях частиц, когда квантовый параметр  $\chi(\rho) = \gamma E(\rho)/E_0$  становится сравнимым с единицей, внешнее поле начинает влиять на процесс тормозного излучения. Поскольку подавляющая часть некогерентного излучения происходит на расстояниях  $\rho$  таких, где плотность ядер заметно отлична от нуля  $\rho \lesssim u_1$ , введем параметр  $\chi_1 = \varepsilon V_0/m^3 u_1$  ( $V_0$  — характерный масштаб потенциала). Отметим, что поскольку электрические поля осей максимальны при  $\rho \sim u_1$ , величина  $\chi_1$  является максимальной оценкой для квантовых эффектов в поле кристалла. Введем также граничную энергию  $\varepsilon_1$ , при которой параметр  $\chi_1$  равен единице ( $\chi_1(\varepsilon_1) = 1$ ). Таким образом, для энергий  $\varepsilon \ll \varepsilon_1$  влиянием поля на процесс некогерентного излучения можно пренебречь, а при  $\varepsilon \gg \varepsilon_1$  появляется фактор подавления некогерентного излучения  $\sim (u/\chi_1)^{2/3}$  за счет уменьшения длины формирования фотона. Прямое вычисление с логарифмической точностью дает для вклада в интенсивность излучения некогерентного процесса [52]

$$\frac{I^{\text{ncoh}}}{\varepsilon} = \frac{8 \cdot 29 \pi n}{5 \cdot 3^{53/16}} \Gamma(1/3) A n_e(0) \frac{Z^2 \alpha^3}{m^2 \chi_1^{2/3}} \ln(mu_1 \chi_1^{1/3}), \quad A = 1,508. \quad (8.11)$$

Сравним полученную интенсивность (8.11) с интенсивностью излучения в поле отдельной цепочки (см. формулу (3.14)) для равномерного распределения электронов ( $n_e = 1$ ) при больших  $\chi_s \gg 1$  ( $\chi_s/\chi_1 = u_1/a_s < 1$ ):

$$\frac{I^{\text{ncoh}}}{I^F} = 3,41 \frac{AZ^2 \alpha^2 n x_0 a_s}{V_0 m} \frac{\chi_s^{1/3}}{\chi_1^{2/3}} \frac{\ln(mu_1 \chi_1^{1/3})}{\ln \chi_s} \leq 10^{-2} \frac{Z \alpha}{\chi_1^{1/3}} \frac{\ln(mu_1 \chi_1^{1/3})}{\ln \chi_s}. \quad (8.12)$$

Из (8.12) следует, что при больших энергиях электронов, когда

параметр  $\chi_s \gg 1$ , вклад некогерентного излучения пренебрежимо мал.

Аналогично получаем с логарифмической точностью для полного сечения рождения пары на флуктуациях потенциала следующее выражение:

$$\sigma_p = A \frac{8 Z^2 \alpha^3 \Gamma^3(1/3)}{25 m^2 \Gamma(2/3)} \frac{\ln(mu_1 \chi_1^{1/3})}{(3\chi_1)^{1/3}} \quad (8.13)$$

Интересно сравнить вероятность некогерентного рождения пар с вероятностью рождения в эффективном поле цепочки при больших  $\chi_s \gg 1$  ( $\chi_s/\chi_1 = u_1/a_s < 1$ , ср. формулу (3.12)):

$$R_p = \frac{W_p^{incoh}}{W_p^F} = \frac{\sigma_p n}{W_p^F} \simeq A \frac{28 \cdot 2^{1/3}}{125 \cdot 3^{5/6}} \left( \frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma(2/3)} \right)^4 Z \alpha \frac{\chi_c}{a_s} \frac{\chi_s^{1/3}}{\chi_1^{2/3}} \frac{\ln(mu_1 \chi_1^{1/3})}{\ln \chi_s} \ll \ll \frac{10^{-2} Z \alpha \ln(mu_1 \chi_1^{1/3})}{\chi_1^{1/3} \ln \chi_s} \quad (8.14)$$

Таким образом, при энергиях фотонов, когда параметр  $\chi_s \gg 1$  вкладом некогерентной части в образование пар можно пренебречь.

## 9. СРАВНЕНИЕ ТЕОРИИ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ

В настоящее время две экспериментальные группы (Франция, США) I и (Дания, Великобритания, Франция) II ведут экспериментальные исследования рождения пар и излучения в кристаллах, используя ускоритель SPS в CERN (Швейцария), на котором имеются пучки электронов (позитронов) и фотонов с энергией до 150 ГэВ. Ниже мы сравним результаты эксперимента с теорией, изложенной выше.

**А. Рождение пар.** В экспериментах [22, 24, 26, 27] измерялись зависимость полной вероятности рождения пары от энергии фотона  $\omega$ :  $W_e^F(\omega)$  и ориентационная зависимость  $W_e(\theta_0)$  для нескольких интервалов  $\omega$  в монокристаллах Ge, ориентированных вблизи оси  $\langle 110 \rangle$  при  $T \simeq 100$  К. В этой ситуации (см. табл. 2)  $\omega_1 = 50$  ГэВ, а перестройка картины ориентационной зависимости (при  $F_2 = 0$ , см. рис. 5) происходит при  $\omega \simeq 230$  ГэВ.

Функция  $W_e^F(\omega)$  приведена на рис. 3. Эта же кривая приведена на рис. 15 (с добавлением модифицированного некогерентного

вклада\*)  $W_{BH}^M = 0,28 \text{ см}^{-1}$ , тогда как  $W_{BH} = 0,32 \text{ см}^{-1}$ ). Экспериментальные точки взяты из работ [26, 27]. Видно хорошее согласие теории и эксперимента.

На рис. 16 приведены кривые ориентационной зависимости, вычисленные на основании работ [6, 7] (см. рис. 7), дополнительно усредненные по интервалам энергии как в эксперименте [26]. На рис. 17 аналогичная процедура проведена для эксперимента [27]. В целом видно вполне удовлетворительное согласие теории и эксперимента. Правда, на рис. 16 для интервалов 40—60 и 120—150, а на рис. 17 для интервалов 40—50 и 50—75 ГэВ в когерентной области и остальных интервалах энергии в области малых углов, имеется небольшое расхождение (не превышающее 20%). Здесь необходимо дальнейшее уточнение как экспериментальных данных, так и теоретических расчетов. На рис. 16, 17 хорошо видно смещение с ростом энергии влево максимума кривой  $W_e(\theta_0)$ , что, как отмечалось, обусловлено более быстрым ростом с энергией вероятности рождения пар в поле по сравнению с когерентным рождением пар.

**Б. Излучение.** Полные потери энергии, в условиях, когда распределение является равномерным, вычислялись в разделе 6 и приведены на рис. 9, там же приведены экспериментальные данные [24], хорошо согласующиеся с расчетом.

Ориентационная зависимость полных потерь энергии рассмотрена в работе [4]. Результат приведен на рис. 18, данные эксперимента из работ [23, 24] (Ge,  $T = 100$  К, ось  $\langle 110 \rangle$ ,  $\varepsilon_0 = 150$  ГэВ, толщина кристалла  $L = 0,14$  см). Используемый в эксперименте кристалл для электронов является уже достаточно толстым, даже для надбарьерных частиц, так как в соответствующей аморфной среде угол многократного рассеяния  $\langle \theta_s \rangle \simeq 35$  мкрад  $\approx 0,5\theta_c$ . Кроме того, угловая ширина падающего пучка  $\Delta\theta_0 \approx \pm 30$  мкрад и большинство электронов сразу попадает в надбарьерные состояния, а усиленное многократное рассеяние быстро выводит из канала оставшиеся электроны, поэтому распределение электронов  $F(\vec{r}, \theta_0)$  считалось равномерным при всех углах падения. Напротив, для позитронов в первом приближении многократным рассеянием можно пренебречь и расчет проводился для тонкого кристалла с учетом эффективной ширины падающего пучка.

Наряду с полной интенсивностью изучались также спектраль-

\*) Эта модификация определяется членом  $g(\delta_0)$  в формуле (8.9), если с помощью правил подстановки перейти к рождению пар.

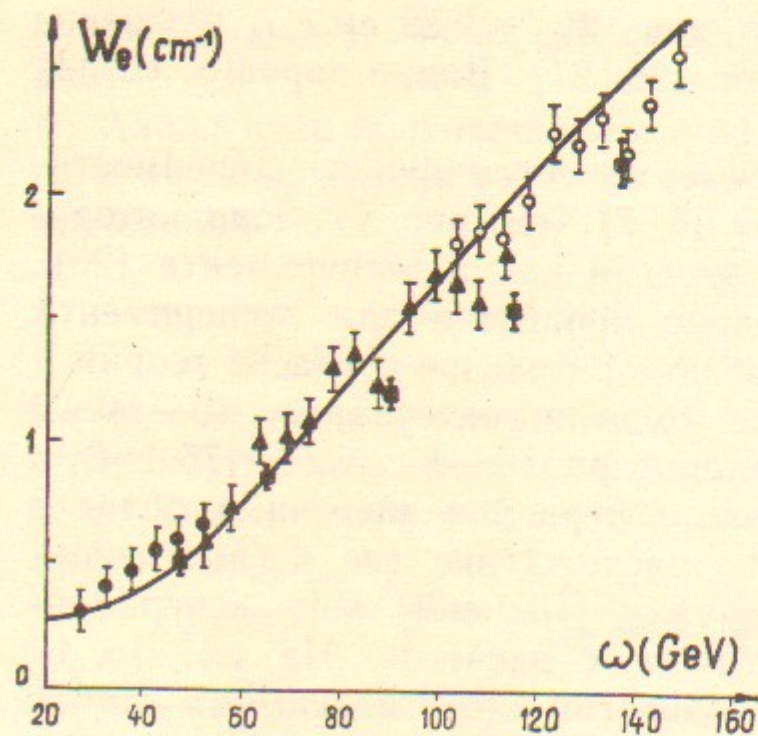


Рис. 15. Полная вероятность рождения пары в Ge<110> ( $T=100\text{K}$ ) как функция энергии. Экспериментальные данные из работы [26] (кроме квадратов), квадраты — из работы [27], теоретическая кривая из работ [5—7].

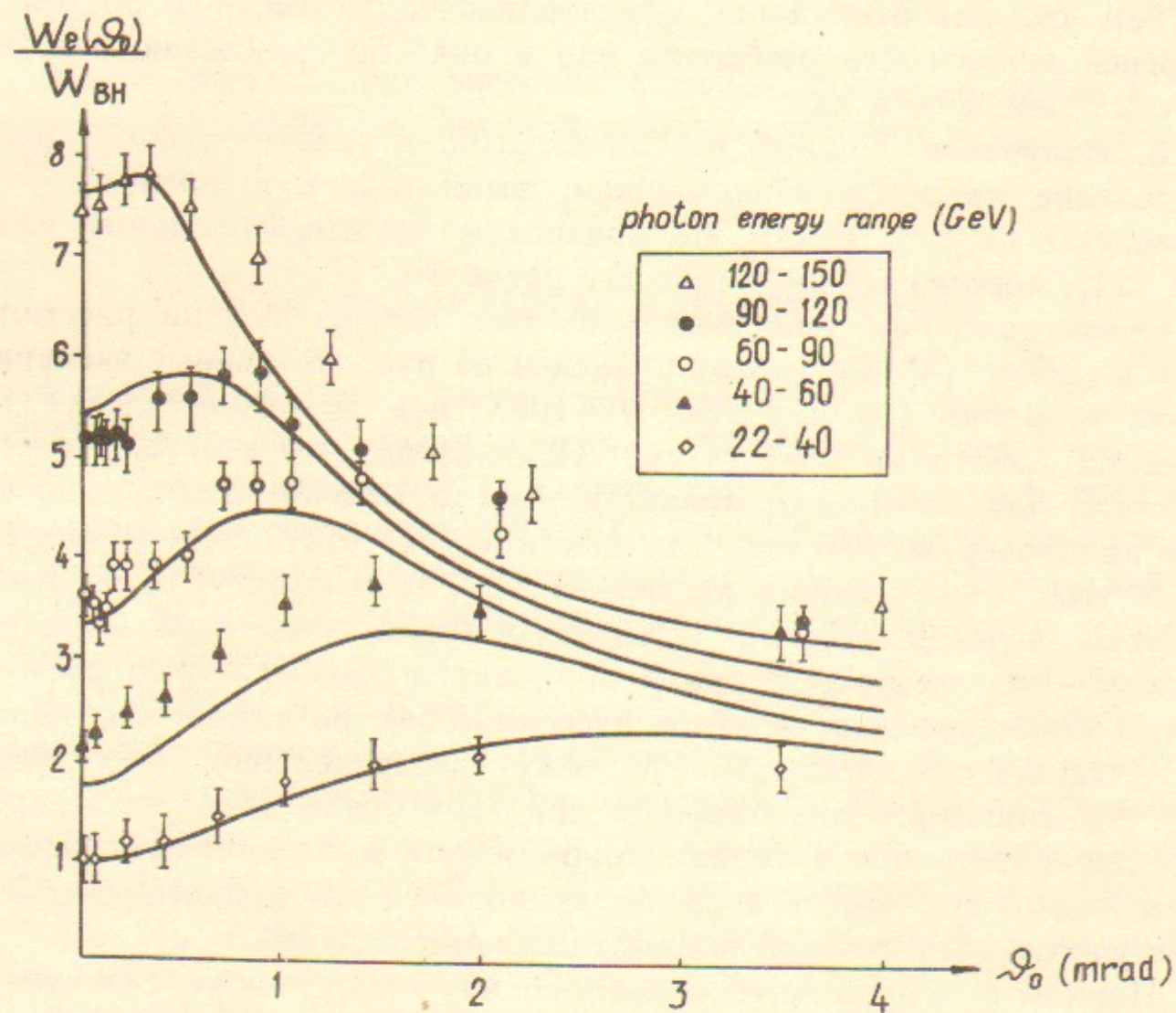


Рис. 16. Ориентационная зависимость полной вероятности рождения пары в Ge<110> ( $T=100\text{K}$ ) для фотонов с энергией в указанных энергетических интервалах. Экспериментальные данные из работы [26].

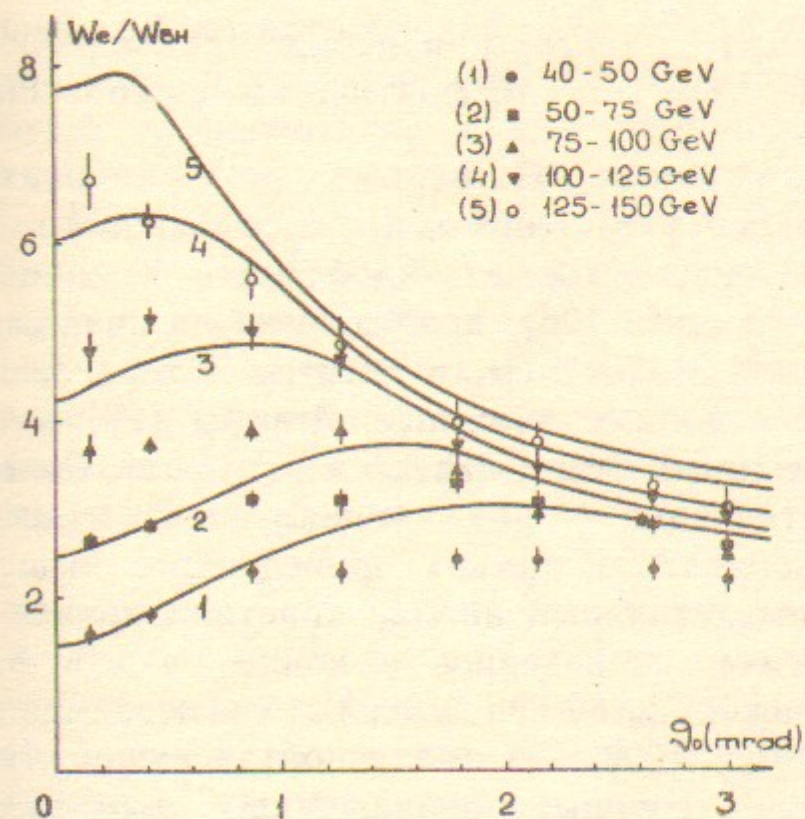


Рис. 17. То же, что на рис. 16, для других интервалов энергии фотона. Данные из работы [27].

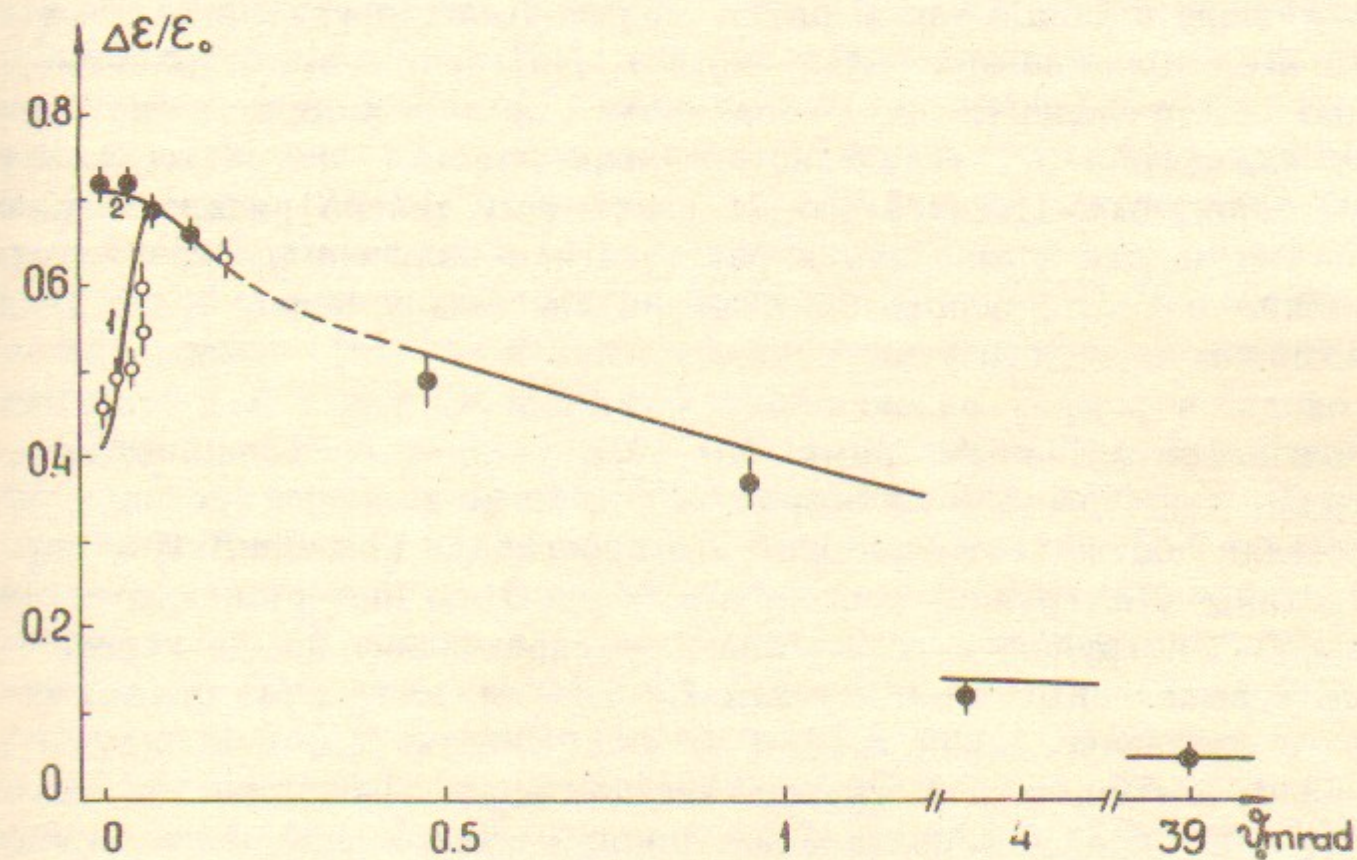


Рис. 18. Относительные потери энергии в зависимости от угла влета относительно оси <110> кристалла Ge ( $T=100\text{K}$ , начальная энергия  $\epsilon_0=150\text{ГэВ}$ ,  $L=1,4\text{мм}$ ). Номера кривых обозначают то же, что и на рис. 8. Экспериментальные данные взяты из работ [23, 24]: ● — электроны, ○ — позитроны.

ные распределения. Поскольку детекторы измеряют суммарную энергию излученных фотонов  $\Delta\varepsilon = \sum_n \omega_n$ , то фактически измерялось распределение по потерям энергии. В первых экспериментах [23, 24] измерения проводились в сравнительно толстых кристаллах ( $L=0,14$  см и  $L=0,04$  см), которые обсуждались в конце раздела 7. В недавнем эксперименте [26], проведенном на сравнительно тонком кристалле  $L=1,85 \cdot 10^{-2}$  см, в спектре потерь был обнаружен пик, привлечший всеобщее внимание. Авторы [26] посчитали даже, что обнаруженный ими эффект «не может быть объяснен никакой из существующих теорий». Как будет показано ниже, этот эффект можно описать в рамках приведенного выше подхода, если провести более детальный анализ кинетики процесса. Опираясь на рассмотрение, проведенное в конце раздела 6, была предложена следующая простейшая модель, учитывающая влияние излучения на кинетику [29]. По начальной заселенности разделим частицы на две группы: первая, для которых  $x_1(0) < x_b < x_0$ , и вторая, куда входят все остальные частицы, как попавшие в канал, так и надбарьерные. Далее предполагается, что на всей толщине кристалла частицы 1-й группы имеют равномерное распределение по координате при некотором значении  $x_1 = x_{ef} < x_b$ , а распределение остальных частиц — такое же, как у надбарьерных. После этого по известному теперь распределению частиц можно вычислить характеристики излучения. Значение  $x_b$  можно оценить, используя решение системы уравнений (6.13) и возникающую дисперсию распределений по  $\varepsilon_{\perp}$  и  $\varepsilon$ , однако, строго говоря, в рамках развиваемого описания  $x_b$ , как и  $x_{ef}$ , являются подгоночными параметрами. По мере увеличения толщины кристалла величины  $x_b$  и  $x_{ef}$  возрастают и, когда  $x_b$  достигает значения  $x_0$  (для обсуждаемых условий это происходит при  $L \simeq 8 \cdot 10^{-2}$  см), частицы 2-й группы «догоняют» первую по потерям энергии и вклад 1-й группы в спектральное распределение по  $\Delta\varepsilon$  перестает быть выделенным, поэтому для  $L=0,14$  см достаточно рассматривать излучение одной группы частиц. Следует иметь в виду, что число частиц в 1-й группе всегда мало. Так, при  $\vartheta_0=0$  и  $\Delta\vartheta_0=30$  мкрад в канал вначале попадает всего 19% частиц и еще меньше частиц имеют значение  $x_1(0) < x_b$ . При достаточно малых толщинах пик в спектральном распределении по  $\Delta\varepsilon$ , обусловленный частицами 1-й группы, также пропадает из-за уменьшения, с толщиной кристалла, числа частиц в этой группе (уменьшается  $x_b$ ) и, в основном, из-за уменьшения кратности излучения. В усло-

виях [26] это произойдет при  $L \simeq (5 \div 7,5) \cdot 10^{-3}$  см. По мере роста энергии при фиксированной толщине кристалла величина  $x_b$  будет уменьшаться, а для надбарьерных частиц может стать существенным радиационный захват их в канал.

Переходя к сравнению теоретических и экспериментальных данных, напомним, что измерялось распределение по потерям энергии  $y = \Delta\varepsilon/\varepsilon_0$ . Мы будем также приводить вычисленный истинный спектр излученных фотонов, который из-за большой множественности заметно отличается от спектра потерь. В этом случае величина  $y$  будет означать отношение  $\omega/\varepsilon$ , где  $\omega$  — частота фотона. Рассмотрим величину

$$F = \frac{a}{L} y \frac{dN_1}{dy} + \frac{(1-a)}{L} y \frac{dN_2}{dy}, \quad (9.1)$$

где, в соответствии с используемой моделью,  $a$  — число частиц, попавших в 1-ю группу (индекс 1). Для  $L=0,14$  см, как объяснено выше, следует положить  $a=0$ . Расчет ориентационной зависимости полных потерь энергии в таком кристалле приведен в [3] и хорошо согласуется с экспериментом [23, 24]. Распределение  $dN_2/dy$  было найдено в [21], где приведено распределение частиц по энергии, отличающееся от  $dN_2/dy$  только заменой  $y \rightarrow 1-y$  (см. рис. 13). На рис. 19,а мы представили эти результаты и данные эксперимента [23, 24] в форме (9.1). Видно удовлетворительное согласие теоретических и экспериментальных\* данных и разительное отличие истинного спектра фотонов (кривая 1) от спектра потерь энергии (кривая 2), что обусловлено высокой множественностью (см. обсуждение в конце раздела 7).

Для  $L=0,04$  см было взято  $x_b=11$ ,  $x_{ef}=6$ . Тогда при  $\vartheta_0=0$  для расходимости пучка  $\Delta\vartheta=30$  мкрад находим  $a \simeq 0,15$ . Чтобы продемонстрировать вклад частиц 1-й группы, на рис. 19,б построена величина  $F$  при  $a=0$  (кривая 2) и для  $a=0,15$  (кривая 3), а также истинный спектр при  $a=0$  (кривая 1). Экспериментальные данные из [24], также представленные на рис. 19,б, свидетельствуют в пользу существования частиц 1-й группы. Имеется некоторое расхождение абсолютных значений. Возможно, это связано с тем, что нормировка кривой для  $L=0,04$  см на рис. 2 работы [24] заметно отличается от единицы.

Для  $L=1,85 \cdot 10^{-2}$  см мы выбрали  $x_b=4,2$ ,  $x_{ef}=2,5$ . Тогда для

\* Заметим, что на рис. III-15 в [28] положение пика (для  $L=0,14$  см) совпадает с теоретическим на рис. 19,а.

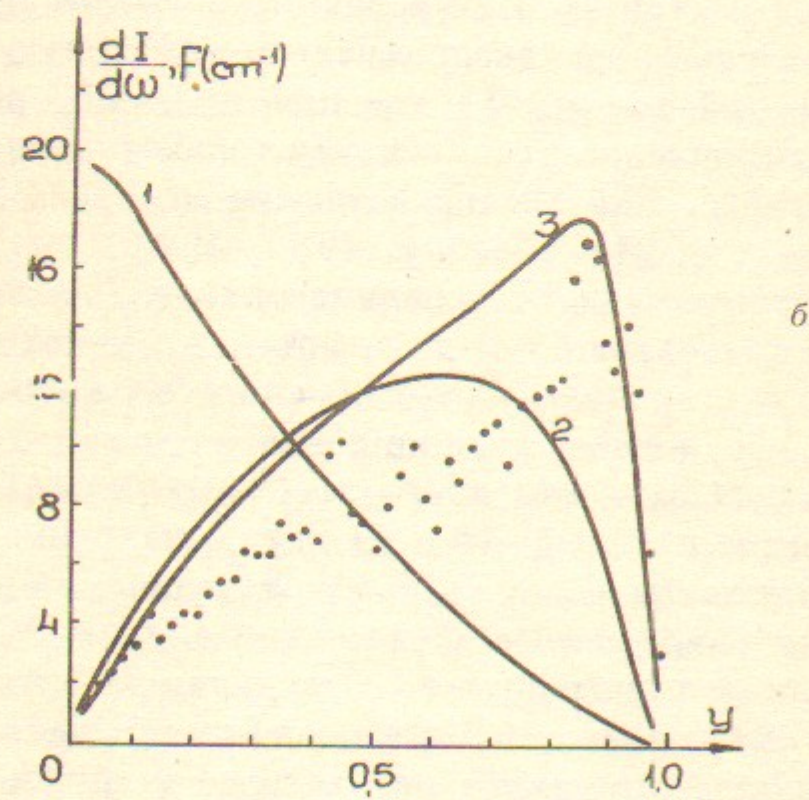
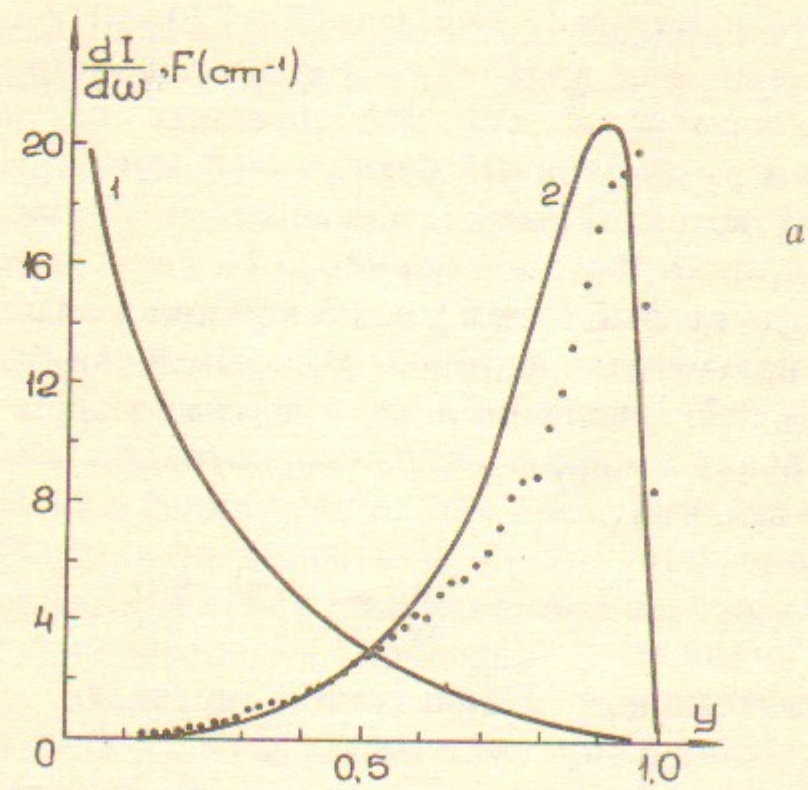


Рис. 19. Спектральное распределение в  $\text{Ge}\langle 110 \rangle$  ( $T=100\text{K}$ ) в виде, задаваемом формулой (9.1): (а) — для толщины  $L=1,4$  мм. 1 — истинный спектр фотонов, 2 — спектр потерь энергии; (б) — для толщины  $L=0,4$  мм. 1 — истинный спектр, 2 — для равномерного распределения, 3 — с учетом вклада частиц первой группы.

$\vartheta_0=0$  ( $\Delta\vartheta_0=30$  мкрад) получилось  $a=0,087$ , а при  $\vartheta_0=17$  мкрад  $a=0,073$ . К сожалению, спектральные распределения на рис. 3 работы [25] представлены без вычитания фона. Поэтому мы сравнили разность экспериментальных значений при  $\vartheta_0=0$  и  $\vartheta_0=96$  мкрад,  $\vartheta_0=17$  мкрад и  $\vartheta_0=96$  мкрад, соответственно. Так как при  $\vartheta_0=96$  мкрад даже с учетом расходимости начального пучка все частицы вначале являются надбарьерными ( $a=0$ ), то эта разность в нашей модели дается выражением

$$\Delta F = \frac{ay}{L} \left( \frac{dN_1}{dy} - \frac{dN_2}{dy} \right). \quad (9.2)$$

Эта величина для  $\vartheta_0$  построена на рис. 20,а (кривая 2), а для  $\vartheta_0=17$  мкрад на рис. 20,б. Расчет достаточно хорошо согласуется с экспериментом. Тем самым подтверждается адекватность предложенной модели кинетики. Само наличие пика\* в распределении по  $\Delta\epsilon$  обусловлено большой множественностью излучения частиц 1-й группы. Это ясно из сравнения этого спектра с истинным спектром фотонов от этой группы (кривая 1 на рис. 20,а) и дополнительно иллюстрируется рис. 21, где изображены результаты расчета зависимости множественности (для  $\omega > 1$  ГэВ) от потерь энергии для частиц 1-й —  $n_1$  (кривая 1) и 2-й —  $n_2$  (кривая 2) групп при  $L=1,85 \cdot 10^{-2}$  см. В эксперименте должно наблюдаться распределение множественности  $n = an_1 + (1-a)n_2$ . На рис. 22 представлены результаты спектрального распределения потерь энергии и истинный спектр фотонов для  $\vartheta_0=96$  мкрад, когда электроны и позитроны должны излучать одинаково (кривые 4, 3). Как уже отмечалось, для позитронов при  $\vartheta_0=0$  кристалл с  $L=1,85 \cdot 10^{-2}$  см является тонким и расчет (кривые 2, 1 на рис. 22) проводился с начальным распределением частиц. Из-за перераспределения потока излучение позитронов при  $\vartheta_0=0$  заметно слабее, чем для надбарьерных частиц.

Таким образом, проведенный анализ показывает, что теория вполне удовлетворительно описывает всю совокупность экспериментальных данных по рождению пар фотоном и излучению частиц в ориентированных кристаллах.

\* Попытка объяснить положение пика для кристаллов с толщиной  $L=1,85 \cdot 10^{-2}$  см на основании анализа средних потерь была предпринята в [53]. Подчеркнем, что изложенный выше подход существенно отличается от принятого в [53].

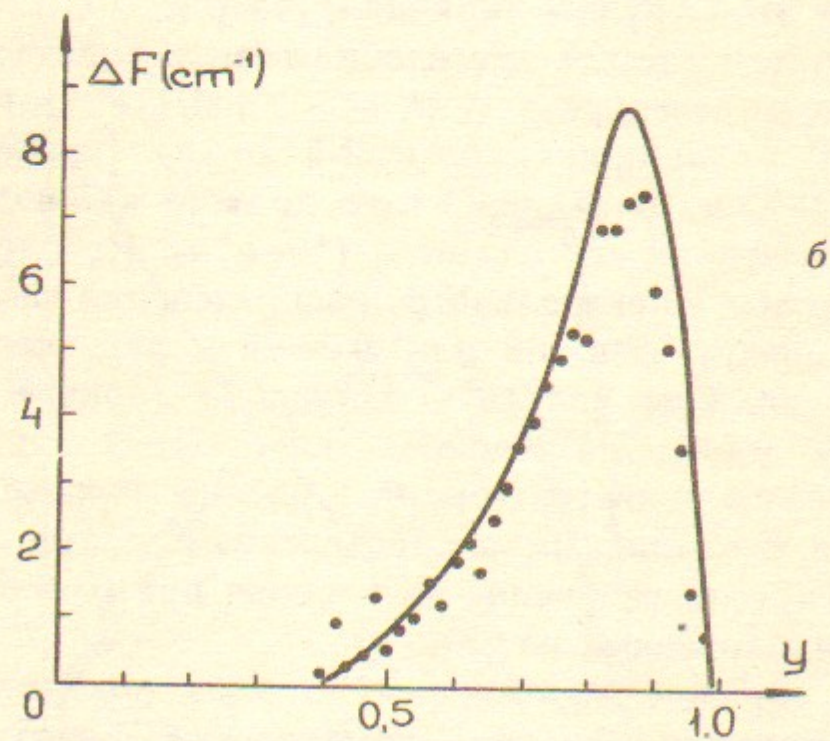
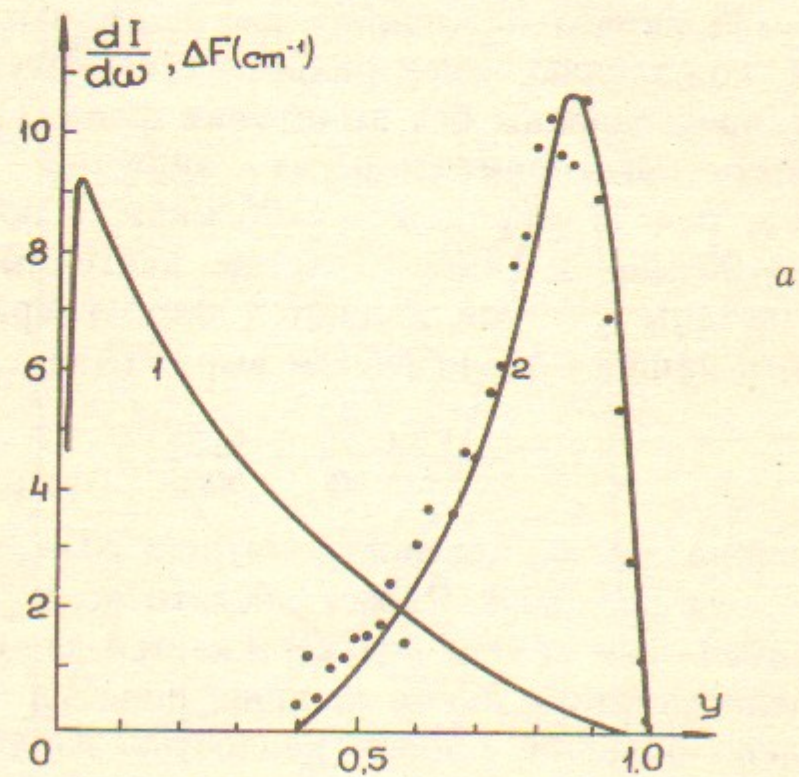


Рис. 20. Спектральное распределение в Ge<110> ( $T=100\text{K}$ ) для  $L=0,185$  мм в форме (9.2): (а) — для угла падения  $\theta_0=0$ : 1 — истинный спектр, 2 — спектр потерь; (б) — для угла падения  $\theta_0=17$  мкрад, только кривая 2. Данные из работы [25].

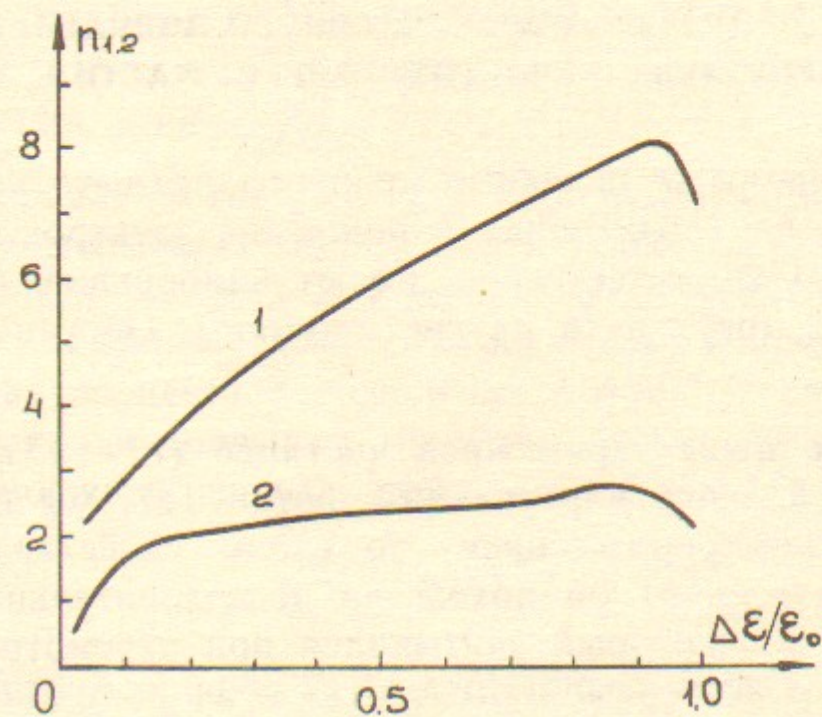


Рис. 21. Зависимость множественности фотонов от потерь энергии. Кривые 1 и 2 есть вклады частиц первой и второй групп, соответственно.

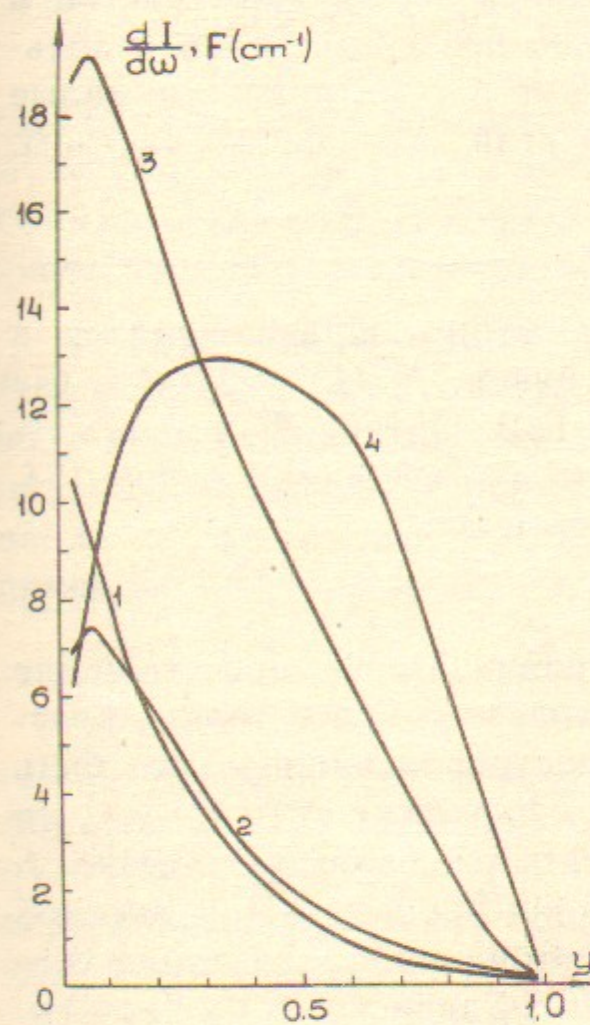


Рис. 22. Спектральные распределения интенсивности в форме (9.1),  $L=0,185$  мм. Истинные фотонные спектры. 1 — для позитронов при  $\theta_0=0$ , 3 — для позитронов и электронов при  $\theta_0=96$  мкрад. Распределение по потерям в тех же условиях — 2 и 4, соответственно.

## 10. ПРОЦЕССЫ БОЛЕЕ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА, ПРОЦЕССЫ С УЧАСТИЕМ ДРУГИХ ЧАСТИЦ

Мы обсудили выше основные процессы низшего порядка — излучения электрона (позитрона) и рождение электрон-позитронной пары фотоном. Они, естественно, имеют наибольшие вероятности. Наряду с ними могут идти другие процессы. Обсудим некоторые из них.

**1. Рождение пары заряженной частицей ( $e^\pm \rightarrow e^\pm e^- e^+$ ).** Этот процесс, идущий через виртуальный фотон ( $\nu$ ), мы будем называть прямым электророждением, по своим свойствам (спектры, угловые распределения) он похож на последовательный процесс:  $e^\pm \rightarrow e^\pm \gamma$ ,  $\gamma \rightarrow e^+ e^-$ , который учитывался при рассмотрении каскада. Поэтому для экспериментального выделения прямого электророждения необходимо найти условия, когда его вероятность превосходит вероятность последовательного процесса. Для определенности рассмотрим этот вопрос в условиях эксперимента [24]. В этом случае, для оценки числа родившихся заряженных частиц в последовательном процессе  $N_e^{(e)}(L)$  можно непосредственно использовать формулу (7.6) и, поскольку будут рассматриваться малые толщины, пренебречь изменением энергии начальной частицы. Имеем из (7.6)

$$N_e^{(e)}(L) \simeq 20 L^2. \quad (10.1)$$

где  $L$  берется в сантиметрах. Число частиц, образовавшихся в процессе прямого электророждения, будет  $N_e^{(e)}(L) = 2W_\nu L$ , где вероятность  $W_\nu$  надо взять при  $\epsilon = 150$  ГэВ. Оценку  $W_\nu$  в рассматриваемой области  $\chi \sim 1$  можно получить на основании работ [54, 55] по электророждению пар во внешнем поле:

$$N_e^{(e)}(L) \simeq L/5. \quad (10.2)$$

Отсюда следует, что  $N_e^{(e)}$  и  $N_e^{(e)}$  сравниваются при толщине  $L = 100$  мкм. Поскольку можно использовать и более тонкие кристаллы, то ясно, что процесс прямого электророждения может быть выделен экспериментально уже сейчас. Поскольку  $N_e^{(e)}/N_e^{(e)} \propto L$ , то с уменьшением толщины выделение его улучшается. Однако  $L$  нельзя брать меньше длины формирования процесса. При высокой энергии ( $\chi \gg 1$ ), когда виртуальность фотона мала, эта длина совпадает с обычной длиной формирования  $l_f$ , зависящей от частоты,  $l_f \sim (\chi/u)^{1/3} \epsilon / (m^2 \chi)$  (см. Введение). Например, для оси  $\langle 110 \rangle$  Ge

при  $\epsilon = 100$  ТэВ, когда  $l_f \simeq 10^{-3}$  см, имеем при  $L = l_f$  максимальное отношение  $N_e^{(e)}/N_e^{(e)} \simeq 120$ , т. е. в этих условиях процесс прямого электророждения доминирует.

**2. Расщепление фотона ( $\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ )** идет через электрон-позитронную петлю в поле кристалла. Этот процесс детально изучен в работах [56, 57]. Здесь также имеет место усиление эффекта в поле оси по сравнению с процессом на изолированном ядре. Однако наблюдение процесса расщепления фотона (кстати, вообще до сих пор не наблюдавшегося) является весьма сложной задачей, поскольку отношение вероятностей

$$\frac{W_{\gamma \rightarrow \gamma\gamma}^f}{W_{\gamma \rightarrow e^+ e^-}} \sim 0,3 \frac{\alpha^2}{\pi^2}. \quad (10.3)$$

**3. Рождение пары нейтрино электроном ( $e \rightarrow e\nu\bar{\nu}$ ).** Процесс во внешнем поле был рассмотрен в работе [58]. В поле кристалла необходимо провести надлежащие усреднения вероятностей (см. раздел 3). В итоге имеем, например, для случая  $\chi_s \gg 1$ :

$$\frac{W_{e \rightarrow e\nu\bar{\nu}}^f}{W_{e \rightarrow e\nu}} \sim 4 \cdot 10^{-4} \frac{G^2 m^4}{\alpha} \chi_s^{4/3} \left[ (1 + 2\eta) \ln \frac{1 + \eta}{\eta} - 2 \right], \quad (10.4)$$

где  $G$  — константа слабого взаимодействия. Входящая в эту формулу комбинация констант очень мала ( $G^2 m^4 / \alpha \sim 10^{-21}$ ), что фактически исключает (сейчас и в обозримом будущем) кристаллы из числа кандидатов в генераторы нейтрино (см., однако, [59]).

**4. Рождение  $\pi^0$ -мезона фотоном ( $\gamma + \gamma$  (поле кристалла)  $\rightarrow \pi^0$ ).** В усредненном поле оси ( $n_z = 0$ ) процесс не идет (электрическое поле не передает импульса нейтральному объекту). Поэтому надо проанализировать когерентные эффекты с  $n_z \neq 0$ . Сечение образования  $\pi^0$  фотоном в кулоновском поле (эффект Примакова), с помощью которого измеряется время жизни  $\pi^0$ -мезона, имеет вид

$$\frac{d\sigma}{dq^2} = \frac{8\pi Z^2 \alpha \Gamma q_\perp^2}{\mu^3 q^4}, \quad (10.5)$$

где  $\vec{q}$  — импульс виртуального фотона,  $\vec{q}_\perp$  (и  $q_\parallel$ ) определены как в формуле (1.2),  $\Gamma$  — ширина распада  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$  ( $\Gamma = 7,6$  эВ),  $\mu$  — масса  $\pi^0$ -мезона. Используя формулу (1.2) для функции распределения виртуальных фотонов в кристалле (в лаб. системе):  $n(q) = |\vec{j}_q|$ , имеем для сечения  $\sigma = \sum_q n(q) \sigma_{\gamma\gamma}(q_\parallel, \omega)$ , где  $\sigma_{\gamma\gamma}$  — сечение образования  $\pi^0$ -мезонов двумя фотонами, имеющего вид резонансного рас-



предела Брейга — Вигнера

$$\sigma = \frac{2\pi}{\mu^2} \frac{4\Gamma^2\mu^2}{(2\omega q_{\parallel} - \mu^2)^2 + \Gamma^2\mu^2} \quad (10.6)$$

Здесь  $\omega$  — энергия падающего фотона. С учетом сказанного имеем для сечения образования  $\pi^0$ -мезона фотоном в кристалле

$$\sigma_{\gamma\gamma \rightarrow \pi^0}^{coh} = \sum_q \frac{|G(q)|^2 q_{\perp}^2}{\alpha \mu^2 q_{\parallel}} \frac{4\Gamma^2\mu^2}{(2\omega q_{\parallel} - \mu^2)^2 + \Gamma^2\mu^2} \quad (10.7)$$

Сечение (10.7) максимально при выполнении резонансного условия

$$\omega = \frac{\mu^2}{2q_{\parallel}}, \quad q_{\parallel} = \bar{q}\bar{\theta}_0 + \frac{2\pi}{d}n_z, \quad n_z = 0, 1, 2, \dots, \quad (10.8)$$

где  $\bar{\theta}_0$  — угол влета фотона относительно направления выбранной оси ( $\bar{\theta}_0 \ll 1$ ),  $d$  — расстояние между атомами в цепочке. Пороговая энергия фотона, как это видно из (10.8), определяется большими значениями  $n_z$ , которые ограничены фактором Дебая — Валлера  $e^{-q^2 u_1^2}$ . Подставив в качестве  $q_{\parallel}$  его оценку для максимального дискретного значения:  $q_{\parallel} \sim 1/u_1$ , получаем для пороговой частоты

$$\omega_{th} \sim \frac{\mu^2 u_1}{2} = \mu \frac{\mu}{2m} \frac{u_1}{\kappa_c} \quad (10.9)$$

Например, для кристалла алмаза при комнатной температуре  $u_1 = 4 \cdot 10^{-10}$  см,  $\omega_{th} = 200$  ГэВ, так что изучение процесса может проводиться уже в настоящее время.

Если разбросы переданных импульсов  $q_{\parallel}$  и энергий фотонов  $\omega$  удовлетворяют требованиям  $\delta q_{\parallel}/q_{\parallel} \sim \bar{\theta}_0 \ll \Gamma/\mu$ ,  $\Delta\omega/\omega \ll \Gamma/\mu$ , то сечение (10.7) оказывается очень большим и не зависящим от  $\Gamma$ . В этом случае по сравнению с сечением (10.5) возникает дополнительный фактор порядка  $\mu/\Gamma$ . Однако, приведенные неравенства являются чрезвычайно сильными и практически не выполняются. Тогда для вычисления сечения необходимо провести усреднение по интервалу углов  $\Delta\bar{\theta}_0$  и энергий  $\Delta\omega$ . Предполагая, что  $\Delta\bar{\theta}_0 \ll \Delta\omega/\omega$ , для равномерного распределения по частотам имеем

$$\bar{\sigma}_{\gamma\gamma \rightarrow \pi^0}^{coh} = \frac{4\pi\Gamma}{\alpha\mu^3} \frac{\omega}{\Delta\omega} \sum_{q_{\perp}} \frac{1}{q_{\parallel}} |G(\vec{q})|^2 \bar{q}_{\perp}^2 \quad (10.10)$$

Подставляя в (10.10) формулы (4.5) — (4.8) и сравнивая с (10.5), видим, что основной фактор усиления есть  $\omega/\Delta\omega$  (процесс обсуждался также в работе [60]).

5. Рождение пар тяжелых частиц в поле осей. Рассмотрим для определенности  $\gamma \rightarrow \mu^+ \mu^-$ . Как видно из (3.19), пороговая энергия пропорциональна массе родившейся частицы в кубе. Поэтому для вольфрама вместо  $\omega_{th} \sim 10$  ГэВ для  $\gamma \rightarrow e^+ e^-$  будем иметь для пороговой энергии  $\mu^+ \mu^-$ -пары  $\omega_{th}(\mu^+ \mu^-) \sim 10$  ГэВ  $(m_{\mu}/m_e)^3 \sim 10^6$  ГэВ, лежащую недостижимо высоко.

## 11. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, в 80-е годы наши знания об основных электромагнитных процессах значительно расширились. Выяснилось, что в зависимости от угла падения начальной частицы действуют разные механизмы излучения и рождения пар. В области высоких энергий наиболее эффективными являются механизмы в полях осей (плоскостей), где они действуют значительно сильнее, чем в аморфном веществе, являясь самым эффективным механизмом перекачки энергии заряженных частиц в фотоны и фотонов в электрон-позитронные пары.

Эти особенности процессов могут найти практическое применение. Одно из приложений — малогабаритные конвертеры, преобразующие энергию заряженных частиц в излучение. Второе возможное приложение — применение кристаллов для детектирования фотонов, электронов и позитронов [61, 48] (предложение использовать кристаллы для получения высокого углового разрешения в астрофизических детекторах высказано в [62]). Из проведенного анализа вытекает, что с использованием кристаллов можно создать сравнительно компактный электромагнитный калориметр, обладающий к тому же высоким угловым разрешением. Оба этих качества могут быть полезны, как в физике высоких энергий, так и в астрофизике.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тер-Микаэлян М.Л. Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях. — Ереван: Издание АН АрмССР, 1969.
2. Diambri-Palazzi G. Rev. Mod. Phys., 1968, v.40, p.611.
3. Baier V.N., Katkov V.M., Strakhovenko V.M. Phys. Lett., Ser. A, 1986, v.117, p.251.
4. Байер В.Н., Катков В.М., Страховенко В.М. ЖЭТФ, 1987, т.92, с.1228.
5. Baier V.N., Katkov V.M., Strakhovenko V.M. Phys. Lett., Ser. A, 1985, v.109, p.179.
6. Байер В.Н., Катков В.М., Страховенко В.М. ЖЭТФ, 1986, т.90, с.801.
7. Baier V.N., Katkov V.M., Strakhovenko V.M. Nucl. Instr. and Meth., Ser. B, 1986, v.16, p.5.
8. Байер В.Н., Катков В.М., Страховенко В.М. ДАН СССР, 1986, т.289, с.75.
9. Байер В.Н., Катков В.М., Страховенко В.М. Излучение релятивистских частиц при плоскостном каналировании. — Препринт ИЯФ СО АН СССР 80-03. Новосибирск, 1980.
10. Байер В.Н., Катков В.М., Страховенко В.М. ЖЭТФ, 1981, т.80, с.1348.
11. Baier V.N., Katkov V.M., Strakhovenko V.M. Phys. Lett., Ser. A, 1984, v.104, p.231.
12. Baier V.N., Katkov V.M., Strakhovenko V.M. Phys. Lett., Ser. A, 1986, v.114, p.511.
13. Байер В.Н., Катков В.М., Страховенко В.М. ДАН СССР, 1985, т.282, с.851.
14. Kimball J.C. and Cue N. Phys. Reports, 1985, v.125, p.69.
15. Belkacem A., Cue N., Kimball J.C. Phys. Lett., Ser. A, 1985, v.111, p.86.
16. Kimball J.C., Cue N., Belkacem A. Nucl. Instr. and Meth., Ser. B, 1986, v.13, p.1.
17. Baryshevskii V.G. and Tichomirov V.V. Phys. Lett., Ser. A, 1985, v.113, p.335.
18. Барышевский В.Г., Тихомиров В.В. ЯФ, 1982, т.36, с.697.
19. Барышевский В.Г., Тихомиров В.В. ЖЭТФ, 1983, т.85, с.232.
20. Kimball J.C., Cue N., Roth L.M., Marsh B.B. Phys. Rev. Lett., 1983, v.50, p.950.
21. Baier V.N., Katkov V.M., Strakhovenko V.M. Nucl. Instr. and Meth., Ser. B, 1987, v.27, p.360.
22. Belkacem A., Bologna G., Chevallier M. et al. Phys. Rev. Lett., 1984, v.53, p.2371; 1985, v.54, p.852 (E).
23. Belkacem A., Bologna G., Chevallier M. et al. Phys. Rev. Lett., 1985, v.54, p.2667.
24. Belkacem A., Bologna G., Chevallier M. et al. Nucl. Instr. and Meth., Ser. B, 1986, v.13, p.9.
25. Belkacem A., Bologna G., Chevallier M. et al. Phys. Lett., Ser. B, 1986, v.117, p.211.
26. Belkacem A., Bologna G., Chevallier M. et al. Phys. Rev. Lett., 1987, v.58, p.1196.
27. Bak J.F., Barbenis D., Brodbeck T.J. et al. Phys. Lett., Ser. B, 1988, v.202, p.615. Preprint CERN-EP/88-07. — Geneva, 1988.
28. Belkacem A. These Docteur-es Science Physique, Universite de Lyon I, 1986.
29. Baier V.N., Katkov V.M., Strakhovenko V.M. Pair Production and Radiation in Oriented Single Crystals: Status of Theory and Experiment. — Preprint INP 88-17. Novosibirsk, 1988.
30. Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Пугачевский Л.П. Квантовая электродинамика. — М.: Наука, 1981.

31. Байер В.Н., Катков В.М., Мильштейн А.И., Страховенко В.М. ЖЭТФ, 1975, т.69, p.783.
32. Ритус В.И., Никишов А.И. Квантовая электродинамика явлений в интенсивном поле. — Труды ФИАН, 1979, т.111.
33. Байер В.Н., Катков В.М., Фадин В.С. Излучение релятивистских электронов. — М.: Атомиздат, 1973.
34. Калашников Н.П. Когерентные взаимодействия заряженных частиц в монокристаллах. — М.: Атомиздат, 1981.
35. Ахиезер А.И., Болдышев В.Ф., Шульга Н.Ф. ЭЧАЯ, 1979, т.10, с.51.
36. Байер В.Н., Катков В.М., Страховенко В.М. ДАН СССР, 1984, т.275, с.1369. Излучение при движении частиц высокой энергии вблизи кристаллических осей в толстых кристаллах. — Препринт ИЯФ СО АН СССР 83-70. Новосибирск, 1983.
37. Байер В.Н., Катков В.М., Страховенко В.М. Рождение электрон-позитронных пар фотонами высокой энергии при влете вблизи кристаллических плоскостей. — Препринт ИЯФ СО АН СССР 87-56. Новосибирск, 1987.
38. Тихомиров В.В. Вестник БГУ, сер. 1, 2, 1983, с.6.
39. Kimball J.C. and Cue N. Phys. Rev. Lett., 1984, v.52, p.1747.
40. Baier V.N., Katkov V.M., Strakhovenko V.M. Nucl. Instr. and Meth., Ser. B, 1984, v.4, p.346.
41. Байер В.Н., Катков В.М., Страховенко В.М. ЖЭТФ, 1972, т.63, с.2121.
42. Bilokon H., Bologna G., Celani F. et al. Nucl. Instr. and Meth., 1983, v.204, p.299.
43. Ахиезер А.И., Шульга Н.Ф. ЖЭТФ, 1983, т.85, с.94.
44. Bhabha H. and Heitler W. Proc. Roy. Soc., 1937, v.159, p.432.
45. Carlson I. and Oppenheimer R. Phys. Rev., 1937, v.51, p.220.
46. Landau L. and Rumer Yu. Proc. Roy. Soc., 1938, v.166, p.213.
47. Россу Б. Частицы больших энергий. — М.: Гостехтеориздат, 1955.
48. Baier V.N., Katkov V.M., Strakhovenko V.M. Nucl. Instr. and Meth., Ser. A, 1986, v.250, p.544.
49. Байер В.Н., Катков В.М., Страховенко В.М. ЯФ, 1982, т.36, с.163.
50. Байер В.Н., Катков В.М., Страховенко В.М. ЖЭТФ, 1988, т.94, с.125.
51. Барышевский В.Г., Тихомиров В.В. ЖЭТФ, 1986, т.90, с.1908.
52. Байер В.Н., Катков В.М., Страховенко В.М. Некогерентное излучение и рождение пар в кристаллах. — Препринт ИЯФ СО АН СССР 87-114. Новосибирск, 1987.
53. Tichomirov V.V. Phys. Lett., Ser. A, 1987, v.125, p.411.
54. Ritus V.I. Nucl. Phys., Ser. B, 1972, v.44, p.236.
55. Байер В.Н., Катков В.М., Страховенко В.М. ЯФ, 1971, т.14, с.1020.
56. Байер В.Н., Мильштейн А.И., Шайсултанов Р.Ж. ЖЭТФ, 1986, т.90, с.1141.
57. Baier V.N., Milstein A.I., Shaisultanov R.Zh. Phys. Lett., Ser. A, 1987, v.120, p.255.
58. Байер В.Н., Катков В.М., ДАН СССР, 1966, т.171, с.313.
59. Lasukov V.V. and Vorobiev S.A. Phys. Lett., Ser. A, v.106, p.179.
60. Kimball J.C. and Cue N. Phys. Rev. Lett., 1986, v.57, p.1935.
61. Байер В.Н., Катков В.М., Страховенко В.М. Труды VIII Междунар. конф. по ускорителям частиц высоких энергий, т.2. Новосибирск, 1986.
62. McVreen B. Astron. Express, 1984, v.1, p.105.

*В.Н. Байер, В.М. Катков, В.М. Страховенко*

**Излучение и рождение пар  
при высоких энергиях  
в ориентированных монокристаллах**

Ответственный за выпуск С.Г.Попов

---

Работа поступила 6 апреля 1988 г.  
Подписано в печать 13.07. 1988 г. МН 00454  
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 4,9 печ.л., 3,0 уч.-изд.л.  
Тираж 200 экз. Бесплатно. Заказ № 91

---

*Набрано в автоматизированной системе на базе фото-  
наборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и  
отпечатано на ротапринтере Института ядерной физики  
СО АН СССР,  
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.*