

60

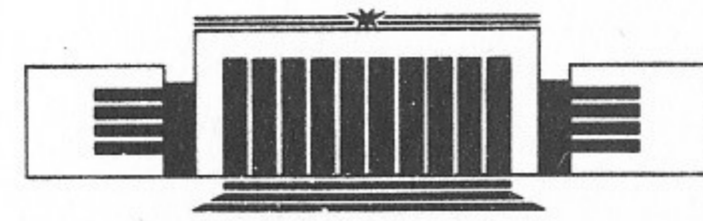


ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

А.Р. Житницкий

**ТОРОНЫ И НАРУШЕНИЕ  
КИРАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ  
В СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ ГЛЮОДИНАМИКЕ**

**ПРЕПРИНТ 88-95**



НОВОСИБИРСК

Тороны и нарушение киральной симметрии  
в суперсимметричной глюодинамике

А.Р. Житницкий

Институт ядерной физики  
630090, Новосибирск 90, СССР

АННОТАЦИЯ

Рассматривается новый класс самодуальных решений в калибровочных  $SU(2)$  теориях. Решение обладает половинным топологическим зарядом  $Q=1/2$ , действием  $S=\frac{8\pi^2}{g^2}Q$  и характеризуется конусной сингулярностью. Вычислен вклад соответствующих флуктуаций в конденсат глюино  $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$  в суперсимметричной глюодинамике. Результат оказывается конечным, что означает спонтанное нарушение киральной симметрии.

Обсуждается связь с аналогичными расчетами в суперсимметричной  $O(3)\sigma$ -модели. Рассматриваются возможные способы описания флуктуаций с дробными  $Q$ —аналитическое продолжение в комплексное пространство содержащее несколько римановых поверхностей или переход к описанию на орбифолдах.

© Институт ядерной физики СО АН СССР

1. ВВЕДЕНИЕ

Цель настоящей работы—описать флуктуации с дробным топологическим зарядом  $Q$  в калибровочных теориях и проанализировать физические следствия, связанные с их существованием на примере 4-мерной суперсимметричной глюодинамики с калибровочной группой  $SU(2)$ .

Аналогичная задача для 2-мерной суперсимметричной  $O(3)\sigma$ -модели рассматривалась в [1]. В этой работе было показано, что флуктуации с половинным топологическим зарядом дают конечный вклад в конденсат фермионов  $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$  и тем самым обеспечивают спонтанное нарушение киральной симметрии в модели. Ниже мы увидим, что аналогичный эффект возникает и в суперсимметричной глюодинамике. Именно, будет показано, что флуктуации с  $Q=1/2$  дают ненулевой вклад в конденсат глюино  $\langle\bar{\psi}\psi\rangle\neq 0$ , причем применение квазиклассического приближения оправдано параметрически.

Прежде чем подробно описывать флуктуации с  $Q=1/2$ , напомним, что целочисленность  $Q$  для инстантона [2, 3] связана с компактификацией физического пространства в сферу, т. е. с отождествлением всех бесконечно удаленных точек. Выбор других граничных условий может привести к дробным топологическим зарядам. В частности, в глюодинамике с калибровочной группой  $SU(2)$  введение так называемых твистованных граничных условий [4] позволило получить решение классических уравнений—торонов [5], имеющих  $Q=1/2$  и действие  $S=\frac{8\pi^2}{g^2}\frac{1}{2}$ . Фундаменталь-

ная причина допустимости таких решений связана с нетривиальностью первой гомотопической группы  $\pi_1\left(\frac{SU(2)}{Z_2}\right) = Z_2$ , что в свою очередь обусловлено существованием элементов центра  $Z_2 = \exp\{i\pi\sigma_3 k\}$ ,  $k=0, 1$ , принадлежащих группе и не изменяющих вида полей присоединенного представления, глюонов:  $A'_\mu = Z_2 A_\mu Z_2^{-1} = A_\mu$ . Так что по существу группой является  $SU(2)/Z_2$  и нетривиальность  $\pi_1(SU(2)/Z_2) = Z_2$  означает существование новых (неинстантонных) решений классических уравнений.

Кроме твистованных граничных условий, возможны и другие способы описания флуктуаций с дробными  $Q$  — аналитическое продолжение в комплексное пространство, содержащее несколько римановых поверхностей или переход к описанию на орбифолдах. Именно последние подходы эксплуатировались при анализе  $O(3)\sigma$ -модели [1].

В этой статье уравнения самодуальности в калибровочной теории будут сформулированы в терминах, аналогичных соответствующим условиям Коши—Римана для  $O(3)\sigma$ -модели. Именно в таких терминах удастся описать самодуальное решение с  $Q=1/2$  и полностью следовать логике работы [1] при вычислении конденсата глюино  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ .

Несколько слов собственно о суперсимметричной глюодинамике. Имеется ряд серьезных аргументов [6—11] в пользу того, что в модели действительно имеет место спонтанное нарушение дискретной киральной симметрии и возникает отличный от нуля конденсат  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle \neq 0$ . Напомним, что теория обладает наивной  $U(1)$ -симметрией:  $\psi^a \rightarrow \exp\{i\alpha\}\psi^a$ , нарушаемой аномалией  $\partial_\mu a_\mu \sim G\tilde{G}$ . Однако дискретная  $Z_2 \times Z_2$  симметрия при этом сохраняется. Отличие от нуля  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  означает спонтанное нарушение этой дискретной симметрии до  $Z_2$  в согласии с индексом Виттена [6], равного двум.

Далее, аргументы работ [7, 8] основаны на вычислении вклада инстантона в коррелятор  $\Pi = \langle \bar{\psi}\psi(x), \bar{\psi}\psi(0) \rangle = \text{const}$ . Используя кластеризацию при  $x \rightarrow \infty$ , можно было бы заключить, что  $\Pi = \langle \bar{\psi}\psi \rangle^2 \neq 0$ . Эти аргументы, однако, не имеют доказательной силы, так как выяснилось [9], что теоретически неконтролируемый вклад больших расстояний в принципе может компенсировать вклад инстантона малого размера.

Заметим, что хотя инстантонный вклад в  $\Pi$  отличен от нуля, соответствующий вклад непосредственно в величину  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  равен

нулю и поэтому прямое вычисление  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  с помощью инстантонных расчетов невозможно. Причина такого зануления тривиальна и обусловлена существованием четырех нулевых мод глюино в соответствии с теоремой индекса. Это приводит к тому, что инстантонное решение меняет киральный заряд на четыре единицы и соответствующий вакуумный переход обязательно сопровождается рождением ровно двух пар глюино  $\langle \bar{\psi}\psi, \bar{\psi}\psi \rangle$ .

Отметим также, что последовательный расчет  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  был проведен в [10]. Однако соответствующее, очень косвенное вычисление, неспособно ответить на вопрос о флуктуациях, определяющих этот конденсат.

И, наконец, последний аргумент, на котором мы остановимся подробнее, связан с прямым вычислением  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  [11], основанном на торонном решении [5]. В этом случае топологический заряд  $Q$  равен  $1/2$ , количество глюинных нулевых мод равно двум (а не четырем, как для инстантона с  $Q=1$ ) в соответствии с индексом и выражением для аномалии. Тем самым торонный вакуумный переход изменяет киральный заряд на две единицы и сопровождается рождением пары  $\bar{\psi}\psi$ , что и продемонстрировано явным расчетом [11].

Отметим, что торонное решение [5] определено в ящике размером  $L$  и равномерно «размазано» по всему объему:  $G_{\mu\nu} \sim 1/L^2$ . Однако величина  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  конечна при  $L \rightarrow \infty$ . Ясно, что вычисление [11] имеет лишь эвристическую ценность, так как буквально стандартное квазиклассическое приближение, использованное в этой работе, несправедливо в режиме сильной связи,  $g(L \rightarrow \infty) \rightarrow \infty$ . Кроме того, решение [5] существует лишь при определенных соотношениях между длинами сторон ящика.

В настоящей работе предлагается другая формулировка торонного решения<sup>\*)</sup>, навеянная соответствующим анализом [1]  $O(3)\sigma$ -модели. В этом случае вместо «размазанного» по всему объему поля  $G_{\mu\nu} \sim 1/L^2$ , мы получим, как и в [1], решение, определенное в бесконечном пространстве  $R^4$  с  $G_{\mu\nu}^2$ , сконцентрированным в малой окрестности  $\Delta \rightarrow 0$ . Тем самым квазиклассическое вычисление  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ , рассмотренное ниже, становится полностью оправданным ввиду асимптотической свободы:  $g(\Delta) \rightarrow 0$ . Отметим, что, как

<sup>\*)</sup> Мы сохраняем термин «торон», введенный в [5], как для самодуального решения  $O(3)\sigma$ -модели [1], так и для построенного ниже решения в калибровочной теории. Этим подчеркиваем тот факт, что решение минимизирует действие и имеет  $Q=1/2$ , т. е. обладает свойствами, присущими торону [5].

и в [11], значение  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  не зависит от регулятора  $\Delta$  и определяется единственным размерным параметром теории —  $\Lambda$ ; при этом автоматически воспроизводится правильное ренормгрупповое соотношение.

Из сказанного выше ясно, что полученное в настоящей работе утверждение о  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle \neq 0$  не является новым. Цель работы в другом — найти самодуальное решение с  $Q=1/2$  и описать методы работы с этим решением на примере  $SU(2)$  суперсимметричной глюодинамики. Можно надеяться, что аналогичные решения существуют в широком классе теорий — всюду, где группа  $\pi_1$  нетривиальна. В этом случае должны существовать точечные сингулярности с нетривиальными значениями петли Вильсона, см. [1]. Кроме упомянутой выше и настоящей работы, в пользу такой точки зрения свидетельствует и анализ  $CP^{N-1}$  теорий [12].

И, наконец, последнее замечание о параметре  $\Delta \rightarrow 0$ , фигурирующем в определении классического самодуального решения как настоящей работы, так и работы [1]. Как будет видно ниже, решение определяется как предел при  $\Delta \rightarrow 0$ . Причем  $\Delta$  полагается равной нулю лишь в конце вычислений. Если изначально положить  $\Delta=0$  мы получим тривиальное значение  $G_{\mu\nu}=0$ . Такая ситуация, связанная с предельным переходом, видимо, является общей при описании решений с дробными  $Q$ . Например, торонному решению 'т Хофта [5] отвечает напряженность  $G_{\mu\nu}=1/L^2$ , равная нулю при  $L=\infty$ , однако конденсат  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  оказывается конечным [11].

Геометрическая интерпретация параметра  $\Delta \rightarrow 0$  подробно обсуждается в Приложении работы [1] и связана с регуляризацией (в литературе «blowing up») фиксированных точек орбифолда — сингулярного многообразия специального вида. Так как введение параметра  $\Delta$  не является принципиально новым моментом по сравнению с [1] не будем подробно останавливаться на этом вопросе, отсылая читателя к упомянутой выше работе.

План настоящей статьи следующий. В разделах 2, 3 получено решение уравнения дуальности, которое выражается через произвольную аналитическую функцию. Это позволяет следовать логике работы [1] и доопределить теорию на двух листах Римана и получить самодуальное решение с  $Q=1/2$ . В разделе 4 сформулированы результаты  $O(3)\sigma$ -модели в терминах, содержащих локальную калибровочную инвариантность. Соответствующий анализ поможет сформулировать в разделе 5 правильные критерии отбора мод, которые необходимо учитывать при вычислении соответствующего

функционального интеграла. В разделе 6 в виде приложения упомянутых идей вычислена торонная мера в суперсимметричной глюодинамике и показано возникновение конденсата  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  за счет флуктуаций с  $Q=1/2$ .

## 2. САМОДУАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ С $Q=1/2$

Стартуем с аксиально-симметричного анзаца Виттена [13] для калибровочных  $A_\mu^a(r, t)$  полей:

$$\begin{aligned} A_0^a &= A_0 n^a, \\ A_i^a &= \varepsilon^{iak} n^k \frac{1+\Phi_2}{r} + (\delta^{ai} - n^a n^i) \frac{\Phi_1}{r} + n^a n^i A_1, \\ n^a &= x^a/r, \quad r = \sqrt{x_i x_i}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $A_0, A_1, \Phi_1, \Phi_2$  — функции, зависящие от  $r, t$ . Подставляя анзац (1) в выражение для напряженности  $G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - \varepsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$  приходим к следующим дуальным уравнениям, записанным в двумерных обозначениях:

$$\begin{aligned} D_\mu \Phi &= i \varepsilon_{\mu\nu} D_\nu \Phi, \quad D_\mu \Phi \equiv (\partial_\mu + i A_\mu) \Phi, \quad \Phi \equiv \Phi_1 - i \Phi_2, \quad \mu=0,1 \\ \partial_\mu \partial_\mu \ln \frac{|\Phi|}{r} &= \frac{|\Phi|^2}{r^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь и ниже  $\partial_\mu = (\partial_0, \partial_1) = \left( \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial r} \right)$  — производные, действующие в двумерном пространстве  $(t, r)$ . В данном случае, как и при анализе 2-мерных теорий, удобно перейти к комплексным обозначениям [13, 14]:

$$\begin{aligned} z &= r + it, \quad \partial = \partial/\partial z = \frac{1}{2}(\partial_1 - i\partial_0), \\ A &= A_1 - iA_0, \quad \bar{z} = r - it, \quad \bar{\partial} = \frac{1}{2}(\partial_1 + i\partial_0) \end{aligned} \quad (3)$$

и выразить решение уравнений дуальности (2) через произвольную аналитическую функцию  $g(z)$  [13]:

$$\Phi = \Phi_1 - i\Phi_2 = f e^\Psi, \quad A = A_1 - iA_0 = -2i \partial \Psi = -2i \partial \ln \bar{\Phi},$$

$$f = \frac{dg}{dz}, \quad \Psi = \ln \left( \frac{z + \bar{z}}{1 - \bar{g}g} \right), \quad g = g(z). \quad (4)$$

Для того, чтобы решение было конечным при  $r \rightarrow 0$ , необходимо наложить дополнительное требование регулярности  $\Psi$ , что, в свою очередь, приводит к ограничению на  $g(z)$ :

$$|g| = 1 \quad \text{при } r = 0; \quad |g| < 1 \quad \text{при } r > 0. \quad (5)$$

Итак, выражения (4) для  $\Phi = \Phi_1 - i\Phi_2$  и  $A = A_1 - iA_0$  вместе с дополнительным условием (5) решают поставленную задачу. Именно, условия самодуальности для калибровочных теорий сформулированы в тех же терминах аналитичности  $g(z)$ , что и для  $O(3)\sigma$ -модели [3] с дополнительным требованием (5). Последнее обстоятельство связано с тем, что в отличие от двумерной  $\sigma$ -модели теория определена лишь на полуплоскости  $\text{Re } z \geq 0$ .

Для того, чтобы найти аналитическую функцию  $g(z)$ , отвечающую  $Q = 1/2$ , необходимо обратиться к явному выражению для топологического заряда, записанному в 2-мерных обозначениях (13):

$$Q = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dr \int_{-\infty}^\infty dt \left[ \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + i \varepsilon_{\mu\nu} \partial_\mu (\bar{\Phi} D_\nu \Phi) \right] = \frac{1}{2\pi i} \oint ds \frac{d}{ds} \ln f; \quad (6)$$

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

Из выражения (6) видно, что топологический заряд определяется фазой, приобретаемой аналитической функцией  $f$  при обходе по контуру, охватывающему физическое пространство  $\text{Re } z \geq 0$ .

Теперь мы подготовлены, следуя логике работы [1], описать самодуальное решение, определенное на двух римановых поверхностях и обладающее  $Q = 1/2$ . Как и для  $O(3)\sigma$ -модели, решение определяется с помощью предельного перехода  $\Delta \rightarrow 0$ , отвечающего регуляризации фиксированных точек орбифлекса (см. Приложение [1]). Учитывая вышесказанное, запишем аналитическую функцию  $g(z)$ , определенную на двух поверхностях Римана, удовлетворяющую требованию конечности (5) и обеспечивающую  $Q = 1/2$  в следующем виде:

$$g(z) = \lim_{a+\bar{a} \rightarrow 0} \left( \frac{a-z}{\bar{a}+z} \right)^{3/2} = \left[ \frac{\Delta - r + i(t_0 - t)}{\Delta + r + i(t - t_0)} \right]^{3/2}, \quad \begin{array}{l} a = \Delta + it_0 \\ \text{Re } a = \Delta > 0 \end{array}$$

$$f = \frac{dg}{dz} = -\frac{3}{2} \frac{a+\bar{a}}{(\bar{a}+z)^2} \left( \frac{a-z}{\bar{a}+z} \right)^{1/2}. \quad (7)$$

Характерной чертой решения (7), как и для  $O(3)\sigma$ -модели [1] является существование разреза. Здесь  $\text{Im } a = t_0$  имеет физический смысл локализации псевдокастичного решения вдоль временной оси.

В дальнейшем, без ограничения общности положим  $t_0 = 0$ . Отметим, что требование  $\text{Re } a = \Delta > 0$  автоматически обеспечивает условие регулярности (5). Кроме того, при обходе по контуру, охватывающему физическое пространство  $\text{Re } z \geq 0$ , функция  $f$  приобретает фазу равную  $\pi$ , что в соответствии с (6) означает  $Q = 1/2$ \*). В следующем разделе мы убедимся в этом явно при калибровочно-инвариантном вычислении  $\int a^4 x G_{\mu\nu} \tilde{G}_{\mu\nu}$ . Отметим, что, полагая  $\Delta = 0$  в конце вычислений, мы восстанавливаем однозначность на одном физическом листе для потенциала  $A_\mu^a$ ; величина же  $G_{\mu\nu}^2$  однозначна при любых  $\Delta$  (см. раздел 3).

Полученное решение будем называть торонном, так же, как и аналогичное решение в  $O(3)\sigma$ -модели [1], (см. сноску на стр. 5).

### 3. ДЕТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ТОРОННОГО РЕШЕНИЯ

Итак, равенство (4) с аналитической функцией  $g(z)$  (7) в принципе решает поставленную задачу. Однако получаемые при этом выражения для  $A$ ,  $\Phi$  слишком громоздки для дальнейшего анализа. В этом разделе будет введено несколько технических упрощений (введение новых координат, выбор удобной калибровки и т. д.), которые обеспечат возможность дальнейшей «работы» с торонным решением.

Прежде всего опишем качественное поведение  $G_{\mu\nu}^2$  в зависимости от  $r$ ,  $t$ . Явное вычисление дает

$$G^2 = G\tilde{G} = \frac{4}{r^2} |D_\mu \Phi|^2 + F_{\mu\nu}^2 + \frac{2}{r^4} (1 - |\Phi|^2)^2. \quad (8)$$

\* Обратим внимание, что инстантону отвечает  $g(z) = \prod_{i=1}^2 \left( \frac{a_i - z}{\bar{a}_i + z} \right)$ , а пустому пространству  $g(z) = \frac{a-z}{\bar{a}+z}$  [13], так что выражение  $g(z)$  (7) располагается точно между этими решениями, как и должно быть по смыслу.

Выразим все величины, входящие в (8), через  $|\Phi|$ , а затем введем новые координаты, в которых  $|\Phi|$  имеет достаточно простой вид:

$$\begin{aligned} |D_\mu \Phi|^2 &= |D_0 \Phi|^2 + |D_1 \Phi|^2 = 2|\Phi|^2 \partial \ln |\Phi|^2 \bar{\partial} \ln |\Phi|^2 = \\ &= \frac{1-|\Phi|^2}{r^2} |\Phi|^2 + 2\partial \bar{\partial} |\Phi|^2, \end{aligned} \quad (9)$$

$$F_{\mu\nu}^2 = 2F_{01}^2 = 2(-4\partial \bar{\partial} \Psi)^2 = 2\left[\frac{1-|\Phi|^2}{r^2}\right]^2. \quad (10)$$

При получении соотношений (9), (10) были использованы уравнения дуальности (2) и их решения в параметризации (4). Следующий этап упрощения состоит во введении вместо  $z$  новой комплексной переменной  $\omega$ :

$$\frac{z}{\Delta} = -i \operatorname{ctg} \omega, \quad \omega = u + iv, \quad \frac{\partial}{\Delta} = -\frac{i}{\Delta^2 - z^2} \frac{\partial}{\partial \omega} = -i \frac{\sin^2 \omega}{\Delta^2} \frac{\partial}{\partial \omega}. \quad (11)$$

Физическому пространству  $\operatorname{Re} z \geq 0$  отвечают значения параметров  $-\infty < v \leq 0$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq u < \frac{\pi}{2}$ . Более подробное соответствие между координатами  $(r, t)$  и  $(u, v)$  показано на рис. 1, где параметр  $\Delta$  без ограничения общности положен равным единице. Так что все величины измеряются в масштабе параметра  $\Delta$ , зависимость от которого может быть легко восстановлена в окончательных выражениях.

В терминах  $\omega$  можно найти величину  $|\Phi|$  и убедиться, что она зависит лишь от « $v$ » и не зависит от угла « $u$ » (в этом и состоит удобство замены (11)):

$$|\Phi| = \frac{3}{2} \frac{\operatorname{sh} 2v}{\operatorname{sh} 3v}, \quad |\Phi|_{v \rightarrow 0} = 1 - \frac{5}{6} v^2 \rightarrow 1, \quad |\Phi|_{v \rightarrow -\infty} = \frac{3}{2} e^v \rightarrow 0. \quad (12)$$

Теперь нетрудно качественно описать поведение  $G^2$  на границе физической области:  $r \rightarrow 0$  и  $|z| \rightarrow \infty$ , см. рис. 1, отвечающей параметру  $v \rightarrow 0$ :

$$\operatorname{th} 2v \simeq 2v = \frac{-2r}{1+|z|^2}, \quad v \rightarrow 0. \quad (13)$$

Для этого подставим соотношения (9) — (13) и (8) при  $v \rightarrow 0$  и убедимся, что  $G_{\mu\nu}^2$  в этой области — регулярная быстро падающая

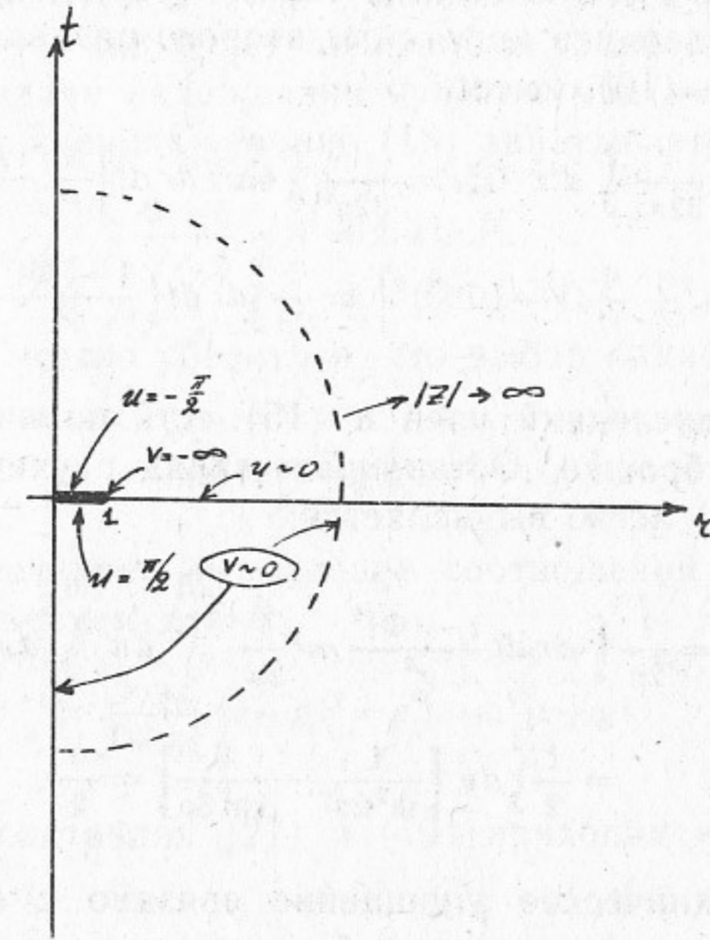


Рис. 1.

функция:  $G_{\mu\nu}^2(r \rightarrow 0) \sim 1/(1+t^2)^4$ ,  $G_{\mu\nu}^2(|z| \rightarrow \infty) \sim |z|^{-8}$ . Отметим также, что при  $r \rightarrow 0$ ,  $|\Phi|(r \rightarrow 0) = 1$  (12). Это означает, что существует калибровочное преобразование, при котором  $\Phi(r=0) = \Phi_1 - i\Phi_2 = i$ . В свою очередь выбор такой калибровки обеспечивает регулярность потенциала  $A_\mu^a$  (1) при  $r=0$ . Хотя в параметризации (4)  $\Phi(r=0) \neq i$ ; ниже приведена калибровка, в которой условие  $\Phi(r=0) = i$  выполнено.

Что касается поведения в окрестности разреза, то как легко проверить  $G_{\mu\nu}^2$  здесь является однозначной функцией, имеющей интегрируемую особенность при  $z \rightarrow 1$  ( $v \rightarrow -\infty$ ):

$$G_{\mu\nu}^2(z \rightarrow 1) \sim \frac{|\Phi|^2}{(1-z^2)(1-\bar{z}^2)} \sim \frac{e^{2v}}{|1-z|^2} \sim \frac{1}{\sqrt{(1-z)(1-\bar{z})}}. \quad (14)$$

Эта особенность является отражением дробности топологического заряда классического решения.

Перечисленные выше свойства будут использованы в разделе 5 при анализе нулевых мод в поле торона.

Далее, имея выражение для величины  $G_{\mu\nu}^2$  можно явно вычислить действие и топологический заряд калибровочноинвариантным образом и подтвердить аргументы второго раздела. Действительно, используя (8) — (10), имеем:

$$Q = \frac{Sg^2}{8\pi^2} = \frac{1}{32\pi^2} \int d^4x G_{\mu\nu}^2 = \frac{1}{32\pi^2} \int 4\pi r^2 dr dt \left[ \frac{4}{r^2} \frac{1-|\Phi|^2}{r^2} |\Phi|^2 + \right. \\ \left. + \frac{8}{r^2} \partial\bar{\partial}|\Phi|^2 + \frac{4}{r^4} (1-|\Phi|^2)^2 \right] = \frac{1}{2\pi} \int dr dt \left( \frac{1-|\Phi|^2}{r^2} + 2\partial\bar{\partial}|\Phi|^2 \right). \quad (15)$$

Заметим, что последний член в (15) есть полная производная и может быть отброшен. Оставшийся вклад с учетом явного выражения  $|\Phi|$  (12) легко вычисляется:

$$Q = \frac{Sg^2}{8\pi^2} = \frac{1}{2\pi} \int dr dt \frac{1-|\Phi|^2}{r^2} = \frac{4}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} du \int_{-\infty}^0 dv \frac{1-|\Phi|^2}{\text{sh}^2 2v} = \\ = \frac{1}{2} \int dv \left[ \frac{4}{\text{sh}^2 2v} - \frac{9}{\text{sh}^2 3v} \right] = \frac{1}{2}. \quad (16)$$

Следующее техническое упрощение связано с выбором удобной калибровки, которая позволила бы изучать не только классическое решение само по себе, но и дала бы возможность анализировать флуктуации в поле торонного бэкграунда. Выше уже упоминалось, что уравнения дуальности (2) сохраняют  $U(1)$  калибровочную свободу:  $\Phi' = \Phi e^{i\alpha}$ ,  $A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \alpha$ , которая может быть записана в терминах произвольной аналитической функции  $h(z)$  следующим образом [13]:

$$f'(z) = f(z)h(z), \quad \Phi' = \Phi \frac{h(z)}{|h(z)|} = \Phi e^{i\alpha(z, \bar{z})}, \\ \psi' = \psi - \frac{1}{2} \ln h\bar{h}, \quad A' = A + i\partial \ln |h|^2. \quad (17)$$

Можно ли подобрать  $h(z)$  так, чтобы поле  $A_\mu^a$  (1) было представимо в виде

$$A_\mu^a = -\bar{\eta}_{\mu\nu}^a \partial_\nu \ln P(r, t) \\ \bar{\eta}_{0i}^a = \delta^{ai}, \quad \bar{\eta}_{i0}^a = -\delta^{ai}, \quad \bar{\eta}_{ij}^a = -\varepsilon^{aij}, \\ \bar{\eta}_{\mu\nu}^a = -\frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} \bar{\eta}_{\lambda\sigma}^a, \quad \varepsilon_{0123} = 1. \quad (18)$$

Здесь  $P(r, t)$  зависит от  $r, t$ ;  $\bar{\eta}_{\mu\nu}^a$  — символы 'Т Хофта<sup>\*)</sup>. Если такой выбор возможен, то, как будет показано в разделе 5, это существенно облегчит задачу нахождения нулевых мод в поле торона. В комплексных обозначениях условие (18) записывается в виде

$$\frac{\Phi' - i}{r} = A' = 2i\partial \ln P. \quad (19)$$

Явной проверкой можно убедиться, что выбор калибровочной функции  $h(z)$  в виде

$$h(z) = [i + g(z)]^{-2} \quad (20)$$

в точности обеспечивает выполнение соотношений (18), (19) со следующим выражением для  $P$ :

$$P^{-1} = \frac{z + \bar{z}}{1 - g\bar{g}} |i + g|^2 = e^{\psi'} = e^\psi |i + g|^2. \quad (21)$$

Действительно, подставляя (21) в (19) приходим к цепочке соотношений:

$$A' = -2i\partial\psi - 2i\partial \ln(i + g) = -2i\partial\psi - 2i \frac{1}{i + g} \partial g = \\ = -\frac{2i}{2r} + 2i \left[ \frac{-\bar{g}}{1 - \bar{g}g} - \frac{1}{i + g} \right] \partial g = -\frac{i}{r} + 2 \frac{|i + g|^2}{(1 - \bar{g}g)(i + g)^2} \partial g = \\ = -\frac{i}{r} + (fe^\psi) \frac{1}{r} \frac{|i + g|^2}{(i + g)^2} = -\frac{i}{r} + \frac{\Phi'}{r}. \quad (22)$$

Равенство (22) демонстрирует, что вектор-потенциал  $A_\mu^a$  действительно может быть записан в форме (18) — факт совершенно нетривиальный, так как четыре функции, входящие в (1), выражаются через одну вещественную  $P$  (21). В дальнейшем штрихи будем опускать, подразумевая, что все результаты относятся именно к калибровке (18).

Отметим (см., например, обзор [15]), что условие дуальности для анзаца (18) имеет вид

$$P^{-1} \square P = 0. \quad (23)$$

<sup>\*)</sup> Отличие с общепринятыми обозначениями  $\bar{\eta}_{\mu\nu}^a$  обусловлено нестандартным выражением для  $G_{\mu\nu}$  (см. (1)), содержащим знак  $(-)$  перед  $\varepsilon_{abc} A_\mu^b A_\nu^c$  слагаемым.

Здесь  $\square$  — четырехмерный лапласиан. Проверим, что наше выражение для  $P$  (21) действительно удовлетворяет уравнению (23). Для этого рассмотрим цепочку соотношений

$$\begin{aligned} P^{-1}\square P &= P^{-1}\left(\partial_0^2 + \partial_1^2 + \frac{2}{r}\partial_1\right)P = 4P^{-1}\partial\bar{\partial}P + \frac{2}{r}P^{-1}(\partial + \bar{\partial})P = \\ &= 4(\partial\bar{\partial}\ln P + \partial\ln P \cdot \bar{\partial}\ln P) + \frac{2}{r}\partial\ln P + \frac{2}{r}\bar{\partial}\ln P = \\ &= \frac{1}{r^2}(1 - |\Phi|^2) + \frac{(\Phi - i)(\bar{\Phi} + i)}{r^2} + \frac{\Phi - i}{ir^2} - \frac{(\bar{\Phi} + i)}{ir^2} = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

При получении последнего из равенств мы использовали (19), из которого следует соотношение  $F_{01} = 4\partial\bar{\partial}\ln P$ , а затем воспользовались формулой (10).

Последний пункт, завершающий настоящий, чисто технический раздел, связан с анализом  $P$  и поля  $\Phi$  в калибровке (18). В терминах переменной  $\omega$  (11) запишем  $P$ ,  $\Phi$  в виде:

$$\begin{aligned} P^{-1} &= \frac{2\sin(\omega - \bar{\omega})}{\sin\frac{3}{2}(\omega - \bar{\omega})} \frac{\sin\frac{3}{2}\omega \sin\frac{3}{2}\bar{\omega}}{\sin\omega \sin\bar{\omega}}, \\ \Phi &= \frac{3}{2}i \frac{\sin(\omega - \bar{\omega})}{\sin\frac{3}{2}(\omega - \bar{\omega})} \frac{\sin\omega \sin\frac{3}{2}\bar{\omega}}{\sin\bar{\omega} \sin\frac{3}{2}\omega}. \end{aligned} \quad (25)$$

Перечислим некоторые, необходимые для дальнейшего анализа свойства функций  $P$ ,  $\Phi$ . Во-первых, отметим, что  $P$  — регулярная функция, однозначная на разрезе (рис. 1) и стремящаяся к постоянной величине в асимптотике  $|z| \rightarrow \infty$ . Что касается  $\Phi$ , то на границе области (рис. 1)  $\Phi = i$ , что, как обсуждалось выше, обеспечивает регулярность потенциала  $A_\mu^a$  при  $r = 0$ . Кроме того, мнимая величина  $\Phi$  ( $\text{Im}\Phi = -\Phi_2$ ) однозначна на разрезе, а реальная ( $\text{Re}\Phi = \Phi_1$ ) испытывает скачок — меняет знак, сохраняя неизменным абсолютное значение величины. Отсюда следует, что выражение

$$\bar{A}A = \left(\frac{\Phi - i}{r}\right) \left(\frac{\bar{\Phi} + i}{r}\right) = \frac{1}{r^2} [\Phi_1^2 + (1 + \Phi_2)^2]$$

однозначно, регулярно и не испытывает скачков на разрезе.

Перечисленные в данном разделе свойства величин  $G_{\mu\nu}^2$ ,  $P$ ,  $\Phi$  играют исключительно важную роль при отборе «правильных» нулевых мод. Для того, чтобы сформулировать эти правила, на время прервем изложение калибровочной теории и обратимся в следующем разделе к анализу соответствующих вопросов в  $O(3)\sigma$ -модели [1].

Ниже будет сформулирована  $O(3)\sigma$ -модель в терминах, содержащих локальную калибровочную инвариантность. Благодаря этому мы сможем переформулировать критерии отбора мод так, чтобы они сохраняли свою силу и для калибровочных теорий.

#### 4. $O(3)\sigma$ -МОДЕЛЬ. О ТРЕБОВАНИЯХ, ПРЕДЪЯВЛЯЕМЫХ К МОДАМ

Стартуем с лагранжиана  $O(3)\sigma$ -модели, записанного в терминах одного, неограниченного связью, комплексного поля  $\varphi$ :

$$S = \frac{1}{f} \int d^2x \frac{|\partial_\mu \varphi|^2}{(1 + \bar{\varphi}\varphi)^2}. \quad (26)$$

Торонному самодуальному решению с  $Q = 1/2$  и  $S_{\text{кл}} = \frac{2\pi}{f} Q$  отвечает функция  $\varphi = \sqrt{\Delta/z}$  [1], определенная на двух римановых поверхностях. Здесь параметр  $\Delta \rightarrow 0$  имеет тот же смысл, что и в (7), и связан с регуляризацией фиксированных точек орбифолда (см. Приложение [1]). Напомним, что в этих терминах уравнение на нулевую моду  $\delta\varphi_0$  есть просто условие Коши — Римана, т. е. произвольная аналитическая функция  $\delta\varphi_0(z)$  есть решение. Важное условие, ограничивающее этот произвол, связано с требованием конечности, которое для  $\sigma$ -модели выглядит следующим образом:  $|\delta\varphi_0|^2 (1 + \varphi_{\text{кл}}\bar{\varphi}_{\text{кл}})_{z \rightarrow 0}^{-2} = \text{const}$  [16]. Это условие, наряду с требованием однозначности на физической плоскости (или, что то же самое, на одном Римановом листе) приводит к существованию лишь одной комплексной нулевой моды  $\delta\varphi_0 \sim 1/z$  [1].

Как эти условия выглядят в формулировке, содержащей локальную калибровочную инвариантность? Чтобы ответить на этот вопрос, запишем лагранжиан  $CP^1$  теории, эквивалентной  $O(3)\sigma$ -модели, в следующем виде [17—20]:

$$S = \frac{1}{f} \int d^2x |D_\mu u|^2, \quad \bar{u}_\alpha u_\alpha = 1,$$



$$D_\mu = \partial_\mu + ia_\mu, \quad a_\mu = -i\bar{u}\partial_\mu u. \quad (27)$$

Здесь  $u_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ , -единичный двухкомпонентный комплексный спинор. Локальная калибровочная инвариантность в формулировке (27) выглядит очевидной и отвечает преобразованиям:  $u' = ue^{i\alpha}$ ,  $a'_\mu = a_\mu + \partial_\mu \alpha$ . Эквивалентность с исходной формулировкой проверяется с помощью соотношения:

$$\varphi = \frac{u_2}{u_1}. \quad (28)$$

Торонному решению со стандартным граничным условием ( $\varphi(z \rightarrow \infty) = 0$ ) отвечает спинор [1]:

$$u_{\kappa\lambda} = \left( \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{\Delta}} \right) \frac{1}{\sqrt{|\Delta| + |z|}}. \quad (29)$$

В дальнейшем без ограничения общности положим  $\Delta = 1$ .

Как обычно, для квазиклассического вычисления необходимо разложить поле  $u_\alpha$  в окрестности решения (29):

$$u_\alpha = (u_\alpha)_{\text{кл}} + \delta u_\alpha, \quad \delta u_\alpha = t_\alpha \Sigma F_n c_n \quad (30)$$

$$t_\alpha = \frac{\delta_{\alpha 1} - \delta_{\alpha 2} \sqrt{z}}{\sqrt{1 + |z|}}, \quad t_\alpha \bar{t}_\alpha = 1, \quad t_\alpha (\bar{u}_\alpha)_{\text{кл}} = 0.$$

Отметим, что  $\delta u_\alpha$  имеет структуру  $\sim t_\alpha$ , ортогональную классическому решению. Далее, необходимо решить задачу на собственные значения и получить соответствующие собственные функции. Полный анализ всех этих вопросов увел бы нас далеко в сторону, поэтому на примере нулевых мод сформулируем требования, предъявляемые к собственным функциям  $F_n$ . Для этого запишем нулевые моды в спинорных обозначениях [1, 12]:

$$\delta u_\alpha = t_\alpha d_{|-1}(\eta) e^{i\varphi} \sim t_\alpha (1 + \eta) e^{i\varphi} \quad (31a)$$

$$\delta u_\alpha = t_\alpha d_{|1}(\eta) \sim t_\alpha (1 - \eta) \quad (31b)$$

$$\eta = \frac{|z| - 1}{|z| + 1}, \quad \varphi = \arctg \frac{x_2}{x_1}, \quad -1 \leq \eta \leq 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Отметим, что ненулевые моды, как и нулевые (31), выражаются через ортонормированную систему  $d$ -функций с мерой  $\int_{-1}^1 d\eta \int_0^{2\pi} d\varphi$ ,

покрывающей (после проекции плоскости  $(x_1, x_2)$  на сферу  $(\eta, \varphi)$ ) физическое пространство. Тем самым мы требуем ортонормированность на одном римановом листе, хотя классическое решение определено на двух. Отметим, что именно это условие выделяет величину  $Q = 1/2$  от других дробных значений  $Q$ . Именно для  $Q = 1/2$  моды (31a) и (31b) ортогональны на одном листе.

Другое требование состоит в отсутствии сингулярностей у собственных функций во всей области определения. Именно это условие привело к решению в виде регулярных  $d$ -функций.

Теперь найдем связь между флуктуациями  $\delta\varphi$  в формулировке (26) и  $\delta u_\alpha$  в формулировке (27). Для этого воспользуемся соотношением (28):

$$\delta\varphi = \frac{(\delta u_2)(u_1)_{\text{кл}} - (\delta u_1)(u_2)_{\text{кл}}}{(u_1)_{\text{кл}}^2}. \quad (32)$$

Решению (31a) отвечает нулевая мода  $\delta\varphi_0 = 1$ , а (31b), соответственно,  $\delta\varphi_0 \sim 1/z$ . Что касается моды  $\delta\varphi_0 = 1$ , то она тривиальна и связана с изменением граничных условий (аналогичная мода существует и в отсутствие торона, т. е. в пустом вакууме). Другая, нетривиальная мода  $\delta\varphi_0 \sim 1/z$  была уже получена независимым образом.

Урок, который следует извлечь из приведенного выше анализа состоит в следующем. Мода  $\delta\varphi_0 \sim 1/z$  в формулировке (26) является однозначной. Та же самая мода, но в формулировке (27) с локальной калибровочной инвариантностью не является таковой ( $t_\alpha$  содержит фактор  $\sqrt{z}$ ). Однако инвариантная величина  $\delta u_\alpha \cdot \delta u_\alpha$  является однозначной функцией.

Таким образом, требование, которое следует наложить на собственные функции для теорий с лишними степенями свободы (типа калибровочных (27)), состоит в однозначности инвариантных величин. Именно такие величины имеют физический смысл. Наряду с требованием регулярности это позволит в следующем разделе выяснить количество нулевых мод и однозначно восстановить их в калибровочной SU(2) теории.

## 5. НУЛЕВЫЕ МОДЫ В СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ ГЛЮОДИНАМИКЕ

Как известно, суперсимметричные модели выгодно отличаются от обычных, так как требуют анализа лишь нулевых мод. Ненулевые моды как обычно, сокращаются между бозонами и фермионами и не дают вклада в производящий функционал. Этот факт существенно облегчит вычисление торонной меры в разделе 6.

Что касается нулевых мод, то получение их явного выражения в любом самодуальном поле обычно не представляет особых затруднений (в данном случае, это однако не так, см. ниже). Действительно, в так называемой фоновой калибровке  $D_\mu^{ab} a_\mu^b = 0$ , нулевые моды  $a_\mu^b$  могут быть явно выражены через напряженность  $G_{\mu\nu}^a$  классического поля (в настоящем разделе  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$  — обычные лоренцевские индексы). Для того, чтобы продемонстрировать это, напомним [21], что уравнение на нулевые моды  $a_\mu^a$  в фоновой калибровке имеет вид

$$\begin{aligned} [-(D^2)^{ac} g_{\mu\nu} + 2\varepsilon^{abc} G_{\mu\nu}^b] a_\nu^c &= 0, & D_\mu^{ac} a_\mu^c &= 0, \\ D_\mu^{ac} &= \delta^{ac} \partial_\mu - \varepsilon^{abc} A_\mu^b, & [D_\mu D_\nu]^{ac} &= -\varepsilon^{abc} G_{\mu\nu}^b. \end{aligned} \quad (33)$$

Проверим, что четыре трансляционные моды, записанные в виде

$$a_\mu^a(\lambda) = G_{\mu\lambda}^a, \quad \lambda = 0, 1, 2, 3, \quad (34)$$

действительно удовлетворяют (33):

$$\begin{aligned} D_\mu a_\mu &= D_\mu G_{\mu\lambda} = 0, & (35) \\ (-g_{\mu\nu} (D^2)^{ac} + 2\varepsilon^{abc} G_{\mu\nu}^b) G_{\nu\lambda}^c &= -D_\nu^{ad} (D_\nu G_{\mu\lambda})^d + 2\varepsilon^{abc} G_{\mu\nu}^b G_{\nu\lambda}^c = \\ &= D_\nu^{ad} (D_\lambda G_{\nu\mu} + D_\mu G_{\lambda\nu})^d + 2\varepsilon^{abc} G_{\mu\nu}^b G_{\nu\lambda}^c = (-2 + 2)\varepsilon^{abc} G_{\mu\nu}^b G_{\nu\lambda}^c = 0. \end{aligned}$$

При получении соотношения (35) было использовано выражение для коммутатора  $[D_\mu D_\nu]$  (33), уравнения движения  $D_\mu G_{\mu\nu} = 0$  и тождество Бианки  $D_\mu G_{\nu\lambda} + D_\lambda G_{\mu\nu} + D_\nu G_{\lambda\mu} = 0$ .

Столь же просто можно убедиться, что одна конформная и три калибровочных моды, выраженные через  $G_{\mu\nu}$ :

$$a_\mu^a = G_{\mu\lambda}^a x_\lambda, \quad (36)$$

$$a_\mu^a(d) = G_{\mu\nu}^a \bar{\eta}_{\nu\lambda}^d x_\lambda, \quad d = 1, 2, 3, \quad (37)$$

также удовлетворяют соотношениям (33). В частности, в поле

инстантона  $G_{\mu\nu}^a \sim \eta_{\mu\nu}^a \frac{1}{(1+x^2)^2}$ ; формулы (34), (36) воспроизводят хорошо известные восемь глюонных мод [21]:

$$a_\mu^a(\lambda) = \eta_{\mu\lambda}^a \frac{1}{(1+x^2)^2}, \quad a_\mu^a(d) = \eta_{\mu\nu}^a \bar{\eta}_{\nu\lambda}^d \frac{x_\lambda}{(1+x^2)^2}, \quad a_\mu^a = \eta_{\mu\lambda}^a \frac{x_\lambda}{(1+x^2)^2}. \quad (38)$$

Моды эти всюду регулярны и нормируемы, т. е. удовлетворяют требованиям, обсуждавшимся в разделе 4.

В нашем случае для торона, имеющего  $Q = 1/2$  и напряженность  $G_{\mu\nu}^2$  (8), моды (34), (36) продолжают удовлетворять уравнениям (33), однако они не удовлетворяют требованию регулярности, отмеченному в конце раздела 4, и поэтому не являются допустимыми. Действительно, так как  $G_{\mu\nu}^2$  (14) имеет особенность при  $z \rightarrow 1$ , то такую же особенность имеют и моды (34), (36). Описанную ситуацию, как будет показано ниже, следовало ожидать заранее. Напомним, что моды (34), (36) с точностью до калибровочного преобразования, есть производные классического решения по коллективным координатам. Но такие решения, как показывает соответствующий анализ  $O(3)\sigma$ -модели, действительно не удовлетворяют требованию регулярности. В случае  $O(3)\sigma$ -модели торонное решение выглядит как  $\varphi_{кл} = \sqrt{\frac{1}{z-a}}$  (26), а «естественная»

нулевая мода, являющаяся производной по коллективной координате как  $\delta\varphi_0 \sim \partial\varphi/\partial a \sim (z-a)^{-3/2}$ . Хотя  $\delta\varphi_0$  удовлетворяет соответствующему уравнению для нулевых мод ( $\bar{\partial}(\delta\varphi_0) = 0$ ), однако не удовлетворяет критерию регулярности:  $|\delta\varphi_0|^2 (1 + \varphi_{кл} \bar{\varphi}_{кл})^{-2} |_{z \rightarrow a} \neq \text{const}$ , поэтому не является допустимой. Действительно, как показывает анализ [1] (см. также раздел 4 настоящей работы), правильной нулевой модой является  $\delta\varphi_0 = (z-a)^{-1}$ .

Урок из приведенных выше рассуждений состоит в следующем. Хотя «естественные» нулевые моды (34), (36) удовлетворяют уравнению (33), они не являются допустимыми. Для того чтобы найти правильные нулевые моды, необходимо решать уравнение (33) (а не дифференцировать классическое решение по коллективной переменной) и отбирать из множества полученных решений лишь регулярные.

Вместо того, чтобы явно решать уравнения (33) второго порядка, сведем задачу к уравнению Дирака, т. е. к уравнению первого порядка. Фундаментальная причина возможности такой

переформулировки связана, по существу, с киральной природой нулевых мод (см. ниже). Для реализации этой программы, введем тензор  $f_{\mu\nu} = D_\mu a_\nu - D_\nu a_\mu$  и убедимся, что если в фоновой калибровке  $f_{\mu\nu}$  является самодуальным, то уравнения выполняются автоматически [22] (проверка достигается действием оператора  $D_\mu$  на соотношение  $f_{\mu\nu} = \tilde{f}_{\mu\nu}$ ). Учитывая, что равенство  $f_{\mu\nu} = \tilde{f}_{\mu\nu}$  эквивалентно переписывается в виде  $\bar{\eta}_{\mu\nu}^a f_{\mu\nu} = 0$ , запишем уравнения (33) в следующей форме:

$$D_\mu a_\mu = 0, \quad \bar{\eta}_{\mu\nu}^b D_\mu a_\nu = 0, \quad b = 1, 2, 3. \quad (39)$$

Последний этап преобразования состоит во введении  $\sigma_\mu^\pm$ -матриц, удовлетворяющих соотношению:

$$\begin{aligned} \sigma_\mu^\pm &= (\pm i, \vec{\sigma}), \\ \sigma_\mu^- \sigma_\nu^+ &= g_{\mu\nu} - i \bar{\eta}_{\mu\nu}^a \sigma^a, \end{aligned} \quad (40)$$

и проверке с их помощью уравнения, записанного в дираковской форме [22]:

$$\begin{aligned} -i \sigma_\mu^- D_\mu \psi &= \sigma_\mu^- D_\mu (\sigma_\nu^+ a_\nu) = D_\mu a_\mu - \sigma^a i \bar{\eta}_{\mu\nu}^a D_\mu a_\nu = 0, \\ \varphi &= i \sigma_\nu^+ a_\nu, \quad a_\nu = -\frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma_\nu^+ \varphi). \end{aligned} \quad (41)$$

Из (41) следует, что каждому фермионному решению  $\psi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ , удовлетворяющему уравнению

$$D_\mu \sigma_\mu^- \psi = 0, \quad (42)$$

отвечают две глюонные нулевые моды, записанные в спинорных обозначениях, т. е. в терминах  $2 \times 2$  матрицы [22]:

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} a & -b^* \\ b & a^* \end{pmatrix} = (\psi, -i \sigma_2 \psi^*), \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} ia & -ib^* \\ ib & -ia^* \end{pmatrix} = (\psi i, -\sigma_2 \psi^*). \quad (43)$$

В частности, четырем нулевым модам глюино (в вейлевских обозначениях)

$$\psi_{1,2}^a \sim \sigma_\mu^+ G_{\mu 0}^a \varepsilon, \quad \psi_{3,4}^a \sim \sigma_\mu^+ G_{\mu\nu}^a x_{\nu\varepsilon} \quad (44)$$

в поле инстантона отвечают в точности восемь глюонных нулевых мод (34), (36). Здесь  $\varepsilon$  — постоянный двухкомпонентный спинор.

В случае с торонам, моды (44), хотя и удовлетворяют уравне-

нию (42), однако неприемлемы по той же причине, что и обсуждавшиеся выше глюонные (нарушено требование регулярности).

Итак, задача свелась к поиску регулярного решения уравнения Дирака для фермиона присоединенного представления во внешнем поле торона. Однако до всяких вычислений количество таких решений можно предсказать заранее из теоремы об индексе или из вида аксиальной аномалии. Именно, должно быть ровно две нулевых моды в согласии с тем, что торонный вакуумный переход меняет киральный заряд на две единицы и поэтому должен обязательно сопровождаться рождением пары  $\bar{\psi}\psi$ .

Вернемся к уравнению (42), анализ которого существенно упрощается в калибровке, где  $A_\mu^a$  представимо в виде (18). В этом случае поле выражается через функцию  $P$ , поэтому естественно искать решение (42) в виде  $\psi^c = \bar{\eta}_{\lambda\mu}^c \sigma_\mu^+ \partial_\lambda P \cdot f(P) \varepsilon$  с постоянным спинором  $\varepsilon$  и произвольной функцией  $f(P)$ . В этом случае уравнение (42) записывается в виде

$$[\partial_\mu \delta^{ac} + \varepsilon^{abc} \bar{\eta}_{\mu\nu}^b \partial_\nu \ln P] \sigma_\mu^- \sigma_\lambda^+ \bar{\eta}_{\lambda\sigma}^c (\partial_\sigma P) \cdot f(P) \cdot \varepsilon = 0. \quad (45)$$

Используя свойства  $\sigma_\mu^\pm$  матриц (40), а также соотношения для  $\bar{\eta}$ -символов

$$\bar{\eta}_{\mu\nu}^a \bar{\eta}_{\mu\lambda}^b = \delta^{ab} g_{\nu\lambda} - \varepsilon^a \bar{\eta}_{\nu\lambda}^c,$$

приходим к уравнению на  $f(P)$ :

$$\square P \cdot f + (\partial_\mu P)^2 \left[ \frac{df}{dP} + \frac{2f}{P} \right] = 0. \quad (46)$$

Учитывая, что  $P$  удовлетворяет уравнению  $\square P = 0$  (23), находим решение для  $f = P^{-2}$ . Окончательно запишем две фермионные нулевые моды в виде

$$\begin{aligned} \psi^a &= -\bar{\eta}_{\lambda\sigma}^a \sigma_\lambda^+ (\partial_\sigma \ln P) P^{-1} \cdot \varepsilon = \sigma_\lambda^+ A_\lambda^a P^{-1} \cdot \varepsilon, \\ \bar{\psi}^a \psi^a &= P^{-2} A_\lambda^a A_\lambda^a = 3P^{-2} \bar{A}A = 3P^{-2} \left| \frac{\Phi - i}{r} \right|^2. \end{aligned} \quad (47)$$

На последнем этапе мы вновь перешли к комплексным обозначениям и калибровочно-инвариантную величину  $\bar{\psi}\psi$  выразили через функции  $\Phi, P$  (25).

Свойства решения (47) будут рассмотрены ниже, а сейчас отметим, что инстантонное поле также может быть представлено в

виде (18) (так называемая сингулярная калибровка) с  $P = \frac{x^2+1}{x^2}$ ,

$A_\lambda^a = +\bar{\eta}_{\lambda\sigma}^a \frac{2x_\sigma}{x^2} (1+x^2)^{-1}$ . В этом случае мода (47) имеет вид  $\psi^a \sim \sigma_\lambda^+ \bar{\eta}_{\lambda\sigma}^a x_\sigma (1+x^2)^{-2} \cdot \varepsilon$  и не является новым решением по сравнению с перечисленными выше модами (44). В случае торона мода (47) не сводится к соотношениям (44) (что видно хотя бы из ее регулярности) и более того, можно показать (используя максимально общий анзац для решения  $\psi^a$ ), что никаких других регулярных решений, кроме выписанного в (47), не существует.

Чтобы продемонстрировать регулярность моды (47), достаточно вспомнить свойства Ф-, P-функций, перечисленные в конце третьего раздела. Из этих свойств следует, что  $|\psi^a|^2$  конечна при  $r \rightarrow 0$ ,  $z \rightarrow 1$ , однозначна на разрезе и стремится быстро к нулю  $|\psi|^2 \sim |z|^{-6}$  при  $|z| \rightarrow \infty$ , что обеспечивает ее нормируемость:

$$\int \bar{\psi}^a \psi^a d^4x = 1. \quad (48)$$

Тем самым, две фермионные моды (47) удовлетворяют всем требованиям; перечисленным в разделе 4, а совпадение  $|\psi|^2$  на обоих берегах разреза означает существование калибровочного преобразования «U» такого, что  $U\psi$  — однозначная функция (буквально в калибровке (18) это условие не выполняется). Явный вид матрицы «U» для нас несуществен и поэтому не будем подробно останавливаться на этом вопросе.

Как объяснялось выше, существование ровно двух фермионных мод в поле торона ожидалось заранее. Интерес представляет лишь конкретная реализация общего утверждения теоремы индекса.

Отметим, что в вычислениях [11] также сохраняются лишь две нулевых моды, однако конкретный путь реализации отличен от нашего. Именно, все моды, перечисленные в (44), оказываются регулярными, однако только две из них  $\psi_{1,2}$  удовлетворяют твистованным граничным условиям, а две другие  $\psi_{3,4}$  отбраковываются по упомянутой причине.

Что касается количества глюонных нулевых мод, то, как объяснялось выше, каждой фермионной моде  $\psi^a$  отвечают две глюонные (43). Подставляя решение (47) с  $\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  и  $\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  в (43), мы получим ровно четыре глюонные нулевые моды, удовлетворяющие требованию регулярности и нормируемости. Действительно, так как  $a_\mu^a a_\mu^a \sim |\psi^a|^2$ , то выполнение упомянутых требований для  $|\psi^a|^2$

обеспечивает их выполнение и для  $(a_\mu^a)^2$ . Процедура получения нулевых мод  $a_\mu^a$  из  $\psi^a$  вполне однозначна, однако из-за громоздкости полученных выражений нет необходимости приводить их явные выражения. Важно то, что их количество равно ровно четырем в соответствии с четырьмя коллективными координатами, отражающими местоположение торона (буквально наше решение описывает торон в начале координат). Параметр  $\Delta$ , присутствующий в решении, как объяснялось во Введении, не является коллективной переменной, и играет роль регулятора. В конце вычислений его следует полагать равным нулю.

Отметим, что в расчетах [11] в суперсимметричной глюодинамике с «размазанным» по всему пространству торонным решением 'т Хофта [5] так же как и в нашем случае, фигурирует ровно четыре глюонных нулевых моды (34); оставшиеся моды (36), хотя и удовлетворяют уравнениям движения, однако не удовлетворяют твистованным граничным условиям. Роль регулятора в [11] выполняет свободный параметр  $L$  (вместо нашего параметра  $\Delta$ ).

## 6. ТОРОННАЯ МЕРА И КОНДЕНСАТ ГЛЮИНО В СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ ГЛЮОДИНАМИКЕ

В настоящем разделе в виде приложения построенного выше решения с  $Q=1/2$  (разделы 2, 3) вычислена торонная мера в суперсимметричной глюодинамике и показано возникновение конденсата  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  за счет этого решения. Как уже объяснялось, вклад ненулевых мод точно сокращается, поэтому требуется анализ лишь нулевых мод, проведенный в разделе 5.

Как обычно, при вычислении производящего функционала  $Z$  в квазиклассическом приближении каждая бозонная нулевая мода приводит к фактору  $M_0 \sqrt{S_{kl}} dx_0$ . Здесь  $M_0$  — ультрафиолетовое обрезание,  $dx_0$  — соответствующий интеграл по коллективной переменной. Каждая фермионная нулевая мода сопровождается множителем  $d\varepsilon/M_0^{1/2}$ , где  $d\varepsilon$  — фактор, связанный с интегрированием по коллективной грасмановой координате.

С учетом вышеизложенного торонная мера принимает следующий вид:

$$Z_{\text{торон}} \sim \frac{M_0^4}{g^4} d^4x_0 \frac{d^2\varepsilon}{M_0} e^{-4\pi^2/g^2} = \Lambda^3 d^4x_0 d^2\varepsilon, \quad (49)$$

$$\frac{1}{g^4} M_0^3 e^{-4\pi^2/g^2} = \Lambda^3.$$

Здесь фактор  $g^{-4} M_0^4 d^4 x_0$  обусловлен четырьмя бозонными нулевыми модами; фактор  $M_0^{-1} d^2 \varepsilon$  — двумя нулевыми модами глюино (47); наконец, множитель  $\exp\{-4\pi^2/g^2\}$  есть вклад классического действия торона. Как и следовало ожидать, торонная мера не зависит от  $\Delta$ , что легко проверяется подсчетом размерностей.

Как и в случае с инстантонными расчетами [7—10], выражение для торонной меры имеет точно ренорминвариантный вид. Легко проследить это явление, стартуя с инстантонных расчетов [7—10]:

$$Z_{\text{инстант}} \sim \frac{M_0^4 d^4 x_0}{g^4} \frac{M_0^4 d^4 p}{g^4} \frac{d^2 \varepsilon_1}{M_0} \frac{d^2 \varepsilon_2}{M_0} e^{-8\pi^2/g^2},$$

$$\Lambda^6 = M_0^6 g^{-8} \exp\left\{-\frac{8\pi^2}{g^2}\right\}. \quad (50)$$

В формуле (50)  $M_0^8 g^{-8}$  отвечает восьми нулевым модам (38) в поле инстантона, а фактор  $(d^2 \varepsilon_1/M_0) \cdot (d^2 \varepsilon_2/M_0)$ , соответственно, четырем нулевым модам (44) глюино; стандартный множитель  $\exp\{-8\pi^2/g^2\}$  связан с классическим действием инстантона. Ренорминвариантность торонной меры теперь легко понять — вместе с уменьшением действия в два раза, уменьшилось количество допустимых нулевых мод ровно вдвое, что точно восстановило правильное ренормгрупповое соотношение.

Теперь все подготовлено для вычисления кирального конденсата  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ . Подставляя вместо  $\psi$  их нулевые моды (47) и учитывая, что интегрирование по коллективным фермионным переменным точно равно единице ( $\int \varepsilon^2 d^2 \varepsilon = 1$ ), убеждаемся, что

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle \sim \Lambda^3 \int d^4 x_0 \bar{\psi}_0^a(x-x_0) \psi_0^a(x-x_0) = \Lambda^3. \quad (51)$$

На последнем этапе мы воспользовались значением нормировочного интеграла (48).

Подведем итог. Инстантон может обеспечить ненулевое значение лишь коррелятора  $\langle \bar{\psi}\psi, \bar{\psi}\psi \rangle$  [7—10] в соответствии с существованием четырех фермионных нулевых мод и интегрированием по четырем грасмановым переменным  $d^2 \varepsilon_1, d^2 \varepsilon_2$  (50). Торонное решение с  $Q=1/2$  меняет киральный заряд на две единицы и имеет две нулевые моды. Так что соответствующий вакуумный

переход обязательно сопровождается рождением пары  $\bar{\psi}\psi$ , что и продемонстрировано явным расчетом (51).

Это вычисление с идейной точки зрения аналогично расчету [11]. Различие состоит в том, что в вычислениях работы [11] использовалось стандартное квазиклассическое приближение, которое несправедливо при увеличении размеров ящика  $L$ :  $g(L \rightarrow \infty) \rightarrow \infty$ . В нашем расчете, использующем торонное решение (18), характерные масштабы  $x^2 \sim \Delta^2 \rightarrow 0$ ,  $g^2(\Delta) \rightarrow 0$  и квазиклассическое приближение оправдано. Кроме того, решение [5], на основе которого проводится расчет [11], существует лишь при определенных соотношениях между длинами сторон четырехмерного ящика. Это бросает тень на реальность соответствующих флуктуаций, так как небольшое изменение размеров ящика не должно приводить к изменению физического содержания теории.

Несколько слов, о том, чем выделено значение  $Q=1/2$  по сравнению с другими дробными  $Q$ . Соответствующая выделенность проявляется в том, что величина  $\bar{\psi}^a \psi^a$  для всех мод (в том числе для нулевых (47)) должна быть одинаковой на берегах разреза, т. е. при значениях координаты  $u = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \dots$ . Это требование выполняется только при  $Q=1/2$ . Описанная ситуация аналогична соответствующему результату  $O(3)\sigma$ -модели [1], где существование трансляционных нулевых мод, удовлетворяющих всем требованиям, однозначно определяло допустимое значение  $Q=1/2$ . В [1] этот факт интерпретировался как устойчивость данного решения и неустойчивость решений с другими дробными топологическими зарядами.

Отметим также, что, как, и в [1] только для  $Q=1/2$  восстанавливается правильная ренормгрупповая зависимость. Кроме того, интересно отметить, что при рассмотрении  $CP^{N-1}$  моделей [17—20] оказываются допустимыми топологические заряды с  $Q \sim 1/N$  [12]. Именно для этих значений  $Q$  существует нулевая мода, удовлетворяющая всем необходимым требованиям, а также восстанавливается ренормгрупповая зависимость.

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основная цель работы состояла в описании самодуального решения с  $Q=1/2$  и анализе физических следствий, связанных с

этим решением, на примере суперсимметричной глюодинамики. Как было показано, соответствующие флуктуации обеспечивают спонтанное нарушение дискретной киральной симметрии и дают ненулевой вклад в киральный конденсат. По-видимому, это новый, независимый вклад, который должен учитываться наряду с инстантонными вычислениями [7—10].

Возможна и альтернативная точка зрения, восходящая к работе [23], о том, что инстантон есть суперпозиция двух объектов с полуцелым топологическим зарядом. В [23] таким образом с  $Q=1/2$  был мерон [24], имеющий бесконечное действие. В каком-то плане описанное выше решение (разделы 2, 3) похоже на мерон—оба имеют нулевой размер (при  $\Delta=0$ ). Есть и разница—торон имеет конечное действие (16), мерон—бесконечное. В пользу этой же интерпретации говорят и инстантонные расчеты [9]. Как видно из этой работы, вычисление различных корреляторов сводится к интегралам, насыщаемым инстантонами нулевого размера (см. формулы (32), (33) работы [9]). Возможно, что этот вклад может интерпретироваться как двухсторонний (напомним, что размер торона равен нулю при  $\Delta=0$ ). По крайней мере, в  $O(3)$ -модели двухсторонний вклад действительно существует и дает ненулевой вклад, наряду с инстантонным, в коррелятор  $\langle \bar{\psi}\psi, \bar{\psi}\psi \rangle$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Житницкий А.Р. ЖЭТФ, 1988, т.94, вып.6, с.19. Препринт ИЯФ СО АН СССР 88-6. Новосибирск, 1988.
2. Belavin A.A., Polyakov A., Schwartz A., Tyupkin Yu. Phys. Lett. B., 1975, v.59, p.85.
3. Белавин А.А., Поляков А.М. Письма в ЖЭТФ, 1975, т.22, с.503.
4. 't Hooft G. Nucl. Phys., 1978, v.B138, p.1; 1979, v.B153, p.141.
5. 't Hooft G. Commun. Math. Phys., 1981, v.81, p.267.
6. Witten E. Nucl. Phys., 1982, v.B202, p.253.
7. Novikov V.A., Shifman M.A., Vainshtein A.I., Zakharov V.I. Nucl. Phys., 1983, v.B229, p.407.
8. Rossi G. and Veneziano G. Phys. Lett, 1984, v.B138, p.195.
9. Novikov V.A., Shifman M.A., Vainshtein A.I., Zakharov V.I. Nucl. Phys., 1985, v.B260, p.157.
10. Shifman M.A. and Vainshtein A.I. Nucl. Phys., 1988, B296, p.445.
11. Cohen E., Gomez C. Phys. Rev. Lett. 1984, v.52, p.237.
12. Житницкий А.Р., Препринт ИЯФ СО АН СССР 88-???. Новосибирск, 1988.
13. Witten E. Phys. Rev. Lett., 1977, v.38, p.121.
14. Lo C.H., Narain K.S., Park S.Y., Wali K.C. Phys. Rev., 1979, v.D20, p.3216.
15. Actor A. Rev. Mod. Phys., 1979, v.51, p.461.

16. Morozov A.Yu., Perelomov A.M. Nucl. Phys., 1986, B271, p.620.
17. D'Adda T.A., Lusher M., Di Vecchia R. Nucl. Phys. B, 1978, v.146, p.63.
18. Eichenherr H. Nucl. Phys. B, 1978, v.146, p.215.
19. Golo V.L., Perelomov A.M. Phys. Lett. B, 1978, v.79, p.112.
20. Witten E. Nucl. Phys. B, 1979, v.149, p.285.
21. 't Hooft G. Phys. Rev. D, 1976, v.14, p.3432.
22. Brown L.S., Carlitz R.D., Lee C. Phys. Rev. D, 1977, v.16, p.147.
23. Callan C.G., Dashen R., Gross D.J. Phys. Rev. D, 1978, v.17, p.2717.
24. De Alfaro V., Fubini S., Furlan G. Phys. Lett. B, 1977, v.65, p.1631.

*А.Р. Житницкий*

*Тороны и нарушение киральной симметрии  
в суперсимметричной глюодинамике*

Ответственный за выпуск С.Г.Попов

---

Работа поступила 27 мая 1988 г.  
Подписано в печать 13.07. 1988 г. МН 00460  
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 2,2 печ.л., 1,8 уч.-изд.л.  
Тираж 200 экз. Бесплатно. Заказ № 95

---

*Набрано в автоматизированной системе на базе фото-  
наборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и  
отпечатано на ротапринтере Института ядерной физики  
СО АН СССР,  
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.*