

62

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

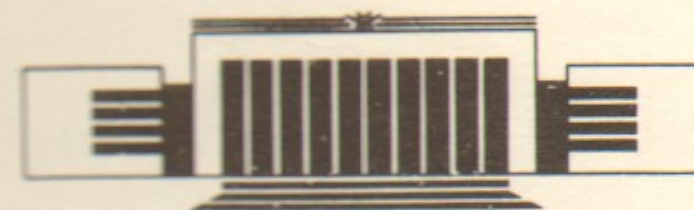


А.Л. Герасимов, Н.С. Диканский

ФАЗОВАЯ КОНВЕКЦИЯ
ПРИ ВСТРЕЧНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ
И ВРЕМЯ ЖИЗНИ ПУЧКОВ
В ЭЛЕКТРОН-ПОЗИТРОННЫХ НАКОПИТЕЛЯХ

II. ОГРАНИЧЕНИЕ ВРЕМЕНИ ЖИЗНИ
ОТДЕЛЬНЫМИ НЕЛИНЕЙНЫМИ
РЕЗОНАНСАМИ

ПРЕПРИНТ 88-97



НОВОСИБИРСК

1. ВВЕДЕНИЕ

В части I настоящей работы был приведен «каталог» нелинейных резонансов, возбуждаемых полем встречного пучка. В части II, следующей ниже, проведено численное исследование влияния отдельных резонансов различных порядков, из числа приведенных в части I, на функцию распределения частиц и время жизни пучка при условиях достаточно высокого вакуума, когда однократным рассеянием на остаточном газе можно пренебречь. Метод расчета равновесной функции распределения (РФР) и времени жизни пучка будет соответствовать работе [1]. Основным эффектом, приводящим к сильному влиянию изолированных нелинейных резонансов на РФР и время жизни пучка, является новое явление фазовой конвекции, возможное только при учете обеих поперечных степеней свободы — вертикальной и горизонтальной [1].

В разделе 2, на основе результатов работы [1], сформулирован общий метод построения функции Φ , определяющей асимптотику слабого шума $\eta \rightarrow 0$ РФР $\rho = Z \exp(-\Phi/\eta)$ (см. [1] и Введение к части I). В разделах 3, 4 описаны различные аспекты численной реализации этого метода для общего асимптотического случая и для исследуемой системы взаимодействующих пучков, где асимптотика слабого шума, вообще говоря, нарушается и для вычисления Φ приходится привлекать дополнительные соображения. Непосредственное изложение результатов расчетов приведено в разделе 5. В целом можно сказать, что разделы 2—4 носят методический характер.

2. ОБЩИЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ Φ В ПРОСТРАНСТВЕ ДЕЙСТВИЙ

В § 3.1, 3.4 работы [1] были рассмотрены все возможные варианты «локального» изменения функции Φ вдоль резонансных линий при асимптотически слабом шуме и фиксированных ширинах резонансов. Используя эти результаты, можно сформулировать общий подход к решению задачи построения распределения Φ в плоскости I_x, I_z в общем асимптотическом случае, когда имеется либо конечное число резонансных линий, либо бесконечное число линий с конечной плотностью (т. е. когда любая конечная область плоскости I_x, I_z содержит конечное число отрезков резонансных линий). Для простоты рассмотрим только первый случай, обобщение же метода для второго случая достаточно очевидно.

Множество всех резонансных линий мы будем называть «резонансной сетью». В качестве исходных данных можно рассматривать также и величины $\Delta\Phi(I), \Delta\bar{\Phi}(I_1, I_2), \Delta\Phi_i(I_{i_1}, I_{i_2})$, где I обозначает вектор (I_x, I_z) , величина $\Delta\Phi$ — невозмущенное распределение Φ_0 (3.23')*) в точке I , величина $\Delta\bar{\Phi}(I_1, I_2)$ — минимум $\Delta\Phi$ (2.38'б,в) при переходе из точки I_1 в точку I_2 для невозмущенного уравнения для Φ (3.20'), вычисленный в явном виде в Приложении С' (С13'), и величина $\Delta\Phi_i$ — вычисленная в §3.1, 3.4' величина $\Delta\Phi$ для перехода из точки I_{i_1} на резонансной линии номер i в точку I_{i_2} на этой же линии при экстремали, соединяющей точки вдоль этой линии. Величина $\Delta\Phi_i$ однозначно определяется формулами для производных Φ вдоль резонансной линии $\frac{\partial\Delta\Phi_0}{\partial I_2}$ (3.27'), (3.75') в каждой точке линии вместе с заданным направлением экстремали и с формулами (3.81') для критических значений резонансной гармоники $(|V_{lm}|)_{1,2}$.

Рассмотрим задачу о распределении Φ в плоскости I_x, I_z , ограничиваясь рассмотрением конечной области Γ плоскости I_x, I_z содержащую конечное число резонансных линий n (например, для решения задачи о времени выхода за границы области Γ). Такая задача естественным образом разбивается на две части. Первая из них состоит в нахождении распределения Φ вдоль всех n линий, а вторая — в нахождении распределения Φ в пространстве

между линиями. Рассмотрим сначала первую часть.

В соответствии с общим асимптотическим представлением функции Φ в виде минимума интеграла по траекториям (2.39'), для нахождения функции Φ в некоторой точке на резонансной линии мы должны минимизировать значение функционала (интеграла по траектории) $\Delta\Phi$ по всем возможным траекториям, соединяющим центр $I_x, I_z=0$ с рассматриваемой точкой. В свете результатов работы [1], от полной вариационной формулировки (2.39') мы можем перейти к редуцированной минимизационной формулировке, где каждая траектория указанного типа и величина $\Delta\Phi$ на ней однозначно определяются конечным набором чисел. Действительно, отрезки экстремали, проходящие в невозмущенном пространстве между линиями, однозначно задаются начальной и конечной точкой и им соответствует величина $\Delta\bar{\Phi}$, а отрезкам экстремали, идущим вдоль резонансных линий соответствуют величины $\Delta\Phi_i$. Тогда экстремали и пробные траектории для минимизации функционала $\Delta\Phi$ (2.39') однозначно задаются последовательностью векторов P_n вида

$$\begin{aligned} P_0 &= (0, 0, 0), \\ P_1 &= (x_1, i_1, s_1), \\ &\vdots \\ P_n &= (x_n, i_n, s_n), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где x_k — скалярный параметр, определяющий положение точки на резонансной линии номер i_k , а s_k принимает значения 0 и 1, и показывает, каким путем соединены последовательные точки (x_{k-1}, i_{k-1}) и (x_k, i_k) . Если это соединение идет по невозмущенному пространству, то $s=0$, а если $i_{k-1} = i_k$ (т. е. точки номер $k-1$ и k лежат на одной линии номер i_k), то значение $s=1$ означает, что соединение идет вдоль резонансной линии. Если $i_{k-1} \neq i_k$, то всегда $s=0$. В последовательности (2.1) вектор P_0 всегда является центром $I_x, I_z=0$, а вектор P_n всегда относится к заданной конечной точке (x_n, i_n) . Вводя обозначение I_k для вектора (I_x, I_z) в точке (x_k, i_k) , для величины $\Delta\Phi(P_1, \dots, P_n)$ соответствующей переходу вдоль последовательности P_0, P_1, \dots, P_n (2.1), получим

$$\Delta\Phi(P_1, \dots, P_n) = \sum_{k=1}^n \overline{\Delta\Phi(P_{k-1}, P_k)}, \quad (2.2)$$

*) Здесь и далее все обозначения формул и параграфов со штрихом относятся к работе [1].

где величина $\overline{\Delta\Phi}$ определяется выражением

$$\overline{\Delta\Phi}(P_{k-1}, P_k) = \begin{cases} \Delta\Phi(I_1) & k=1 \\ \Delta\tilde{\Phi}(I_{k-1}, I_k) & i_k \neq i_{k-1}, \quad k \neq 1 \\ \Delta\Phi_{ik}(I_{k-1}, I_k) & i_k = i_{k-1}, \quad s_k = 1, \quad k \neq 1 \\ \Delta\tilde{\Phi}(I_{k-1}, I_k) & i_k = i_{k-1}, \quad s_k = 0, \quad k \neq 1 \end{cases} \quad (2.3)$$

Введем в рассмотрение величину минимума $\Delta\Phi$ (2.2) по всем возможным последовательностям P_1, \dots, P_l при заданной конечной точке (x_{0l}, i_{0l}) и при заданном максимальном числе звеньев $l \leq N$:

$$\Delta\Phi_N = \min_{\substack{P_1, \dots, P_l \\ (x_{0l}, i_{0l}) = (x_{0l}, i_{0l}) \\ l \leq N}} \Delta\Phi(P_1, \dots, P_l). \quad (2.4)$$

Вектор (P_1, \dots, P_l) , дающий минимум (2.4), обозначим $(\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_l)$.

Далее представляется естественным предположить, что при достаточно гладких резонансных линиях экстремаль, соединяющая центр с точкой (x_{0l}, i_{0l}) , имеет конечное число звеньев N_0 . Тогда для нахождения экстремали, задаваемой последовательностью $\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_{N_0}$, достаточно найти минимум (2.4) для любого $N \geq N_0$, так как при этом последовательность $\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_N$, «вырождается» (в ней встречаются пары одинаковых точек $(x_k, i_k) = (x_{k-1}, i_{k-1})$, и $\Delta\Phi_N = \Delta\Phi_{N_0}$. Единственная трудность заключается в том, что число N_0 *a priori* неизвестно. Определить его из невозрастающей последовательности $\Delta\Phi_N$ (2.4), вычисляя последовательно $\Delta\Phi_1, \Delta\Phi_2, \dots$ (величина N_0 является индексом N , начиная с которого последовательность $\Delta\Phi_N$ постоянна: $\Delta\Phi_N = \Delta\Phi_{N_0}$ для любого $N \geq N_0$), строго говоря, также невозможно, так как ничто в принципе не запрещает этой последовательности иметь ряд повторяющихся значений на отдельных участках $[N_1, N_2]$ с $N_1, N_2 < N_0$. Мы не будем стого исследовать эту задачу, а ограничимся предложением некоторого практического способа отыскания N_0 и его качественным обоснованием.

Представляется естественным, что при наличии в рассматриваемой области Γ конечного числа n достаточно гладких резонансных линий и числа точек пересечения между этими линиями $n_1 \sim n^2$ искомое число N_0 будет величиной $\sim n_1 \sim n^2$. Представляется также чрезвычайно маловероятным, чтобы на протяжении $k \sim n^2$ членов отрезка последовательности $\Delta\Phi_{j+1}, \Delta\Phi_{j+2}, \dots, \Delta\Phi_{j+k}$ все они были бы одинаковы, а после номера $j+k$ последовательность снова стала бы убывать. Поэтому практическим методом отыскания N_0 , а, следовательно, и искомой экстремали $\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_{N_0}$, может служить, по нашему убеждению, следующая процедура: вычисляем последова-

тельность величин $\Delta\Phi_l$ (2.4) для $l=1, \dots, N$, где $N \gg n^2$. Если в конце этого отрезка последовательности, начиная с некоторого l_1 , величина $\Delta\Phi_l$ постоянна, то $N_0 = l_1$. Значение $\Delta\Phi$ в рассматриваемой точке (x_{0l}, i_{0l}) дается тогда значением $\Delta\Phi_{N_0}$, а экстремаль однозначно определяется последовательностью $\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_{N_0}$.

Построенный метод отыскания величины Φ в одной точке на резонансной линии может быть точно также использован для определения распределения Φ вдоль всех резонансных линий. Действительно, если считать, что конечная точка для последовательности чисел $\Delta\Phi_N$ (2.4) может свободно двигаться вдоль всех резонансных линий (является функцией одного параметра), то эта последовательность также зависит от этого параметра, т. е. является не числовой, а функциональной. Однако вся описанная выше процедура нахождения экстремали и величины $\Delta\Phi$ осуществима в аналитическом виде и при наличии зависимости от параметра. Таким образом, распределение Φ вдоль всех резонансных линий может быть найдено путем минимизации функции многих переменных по всем переменным, кроме одной (положению конечной точки). Заметим, что экстремали, ведущие в разные точки резонансной сети, вследствие положительной определенности величин $\Delta\Phi_l, \Delta\Phi, \tilde{\Phi}$, при прохождении по одним участкам резонансной сети всегда направлены в одну сторону. Поэтому вся резонансная сеть разбивается на отрезки резонансных линий с приписанным направлением экстремалей вдоль них, и «пустые» отрезки, которые «не используются» экстремалами и не оказывают никакого влияния на распределение Φ .

После вычисления распределения Φ вдоль резонансных линий можно найти распределение Φ в пространстве между линиями. Для этого следует сначала выделить все те отрезки резонансных линий, вдоль которых идут экстремали. Каждый такой отрезок номер i определяет свое распределение $(\Phi_s)_i$ в некоторой области Γ_{si} плоскости I_x, I_z . Эта область Γ_{si} и распределение $(\Phi_s)_i$ находятся стандартным методом характеристик из невозмущенного уравнения Гамильтона—Якоби для функции Φ (3.20') с заданными граничными условиями на рассматриваемом отрезке кривой. Можно сказать, что распределение $(\Phi_s)_i$ «приносится» характеристиками (экстремалами) с рассматриваемого отрезка. Затем следует найти набор распределений $(\Phi_p)_k$, определяемых каждой «концевой» точкой отрезков i , т. е. точкой I_k границы таких отрезков с «пустыми» отрезками. Эти распределения $(\Phi_p)_k$ определяются суммой значения Φ в точке I_k и величины $\Delta\Phi$ для перехода по невоз-

мущенному пространству из точки I_k в точку I , т. е. $\Delta\tilde{\Phi}(I_k, I)$ (С13'), где I — рассматриваемая точка пространства между линиями. Можно сказать, что распределение $(\Phi_p)_k$ «приносится» экстремалью из точки I_k . В итоге распределение $\Phi(I)$ определяется минимальным значением

$$\Phi(I) = \min_{i: I \in (\Gamma)_i} \begin{cases} \Delta\Phi(I) \\ (\Phi_p)_k(I) \\ (\Phi_s)_i(I) \end{cases} \quad (2.5)$$

где минимизация по индексу i производится только для тех значений i , при которых точка I попадает в область $(\Gamma)_i$. Таким образом, полное распределение $\Phi(I)$ в плоскости I_x, I_z определяется формулой (2.5). При этом вся плоскость I_x, I_z разбивается на отдельные области, распределения Φ в которых определяется согласно формуле (2.5) различными источниками — центром $(I_x, I_z) = 0$, отрезками i и «концевыми» точками k . Существенно заметить, что границы между этими областями проходят по некоторым кривым, не совпадающим с резонансными линиями, и что производные функции Φ на этих границах претерпевают разрыв (см. [1]).

3. ЧИСЛЕННОЕ ПОСТРОЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ Φ

Описанный в разделе 2 общий метод построения функции Φ легко может быть реализован численно. Для этого все k линий резонансной сети представим упорядоченными вдоль линий наборами N_i точек (индекс i нумерует линии). Общее число точек сети

$N = \sum_{i=1}^k N_i$. Каждой линии соответствуют свои индексы резонансных гармоник l, m, n . В каждой из N точек I_i (где $I = (I_x, I_z)$) должны быть вычислены величины амплитуд резонансных гармоник $|V_{lm}|$, критические значения $(|V_{lm}|)_1, (|V_{lm}|)_2$ (3.81'), а также приращения ΔJ_2 действия $J_2 = -I_x + \frac{l}{m} I_z$ (3.13A') до ближайшей соседней

^{*} Кроме того, могут быть использованы дополнительные «топологические» соображения, позволяющие уменьшить число перебираемых индексов k и i в (2.5). Так, если точка I ограничена со всех сторон отрезками линий, вдоль которых проходят экстремали, то в формуле (2.5) достаточно рассматривать только распределения $(\Phi_s)_i$, «приносимые» с этих отрезков.

точки слева и справа на той же линии. Первая часть численного алгоритма заключается в нахождении Φ во всех N точках. Для этого будем искать точки с последовательно возрастающими значениями Φ , нумеруя их индексом n в этой последовательности. Тогда:

1) Точкой номер 1 будет центр $I_x, I_z = 0$, где $\Phi_1 = 0$ (Φ_n — значение Φ в точке n).

2) Точка номер 2 находится из условия, что величина $\Delta\Phi$ (С13') для невозмущенного перехода из центра $I_x, I_z = 0$ в эту точку минимальна. Поскольку $\Delta\tilde{\Phi}(0, 0; I_{x1}, I_{z1})$ есть просто невозмущенное значение Φ_0 (3.23') в точке I_{x1}, I_{z1} , то это условие есть требование минимальности невозмущенного значения Φ_0 в точке номер 2.

3) Дальнейшее построение делается по индукции. Пусть значения Φ в некоторых k точках уже найдены. Для того, чтобы найти, какая из оставшихся $(N+1-k)$ точек будет $(k+1)$ -й, и значение Φ_{k+1} следует перебирать все оставшиеся $(N+1-k)$ точек, вычисляя для каждой из них некоторую величину $\tilde{\Phi}_i$ ($i \in [k+1, N+1]$) по нижеследующему алгоритму, и выбрать точку с наименьшей $\tilde{\Phi}_i$. Эта точка будет $(k+1)$ -й, и $\Phi_{k+1} = \tilde{\Phi}_i$.

Алгоритм вычисления $\tilde{\Phi}_i$

Величина $\tilde{\Phi}_i$ есть минимум по l суммы значения Φ_l в l -й точке из уже найденных ($l \in [1, k]$) и некоторой специально определенной величины $\Delta\tilde{\Phi}_{li}$ для перехода из l -й точки в рассматриваемую i -ю

$$\tilde{\Phi}_i = \min_{l=1, \dots, k} (\Phi_l + \Delta\tilde{\Phi}_{li}). \quad (3.1)$$

Величина $\Delta\tilde{\Phi}_{li}$ определяется следующим образом:

а) если точки l и i лежат на разных резонансных линиях, либо на одной, но не являются соседними (между ними есть еще точки), то величина $\Delta\tilde{\Phi}_{li}$ отождествляется с величиной $\Delta\tilde{\Phi}$ для невозмущенного перехода между точками l и i

$$\Delta\tilde{\Phi}_{li} = \Delta\tilde{\Phi}(I_l, I_i); \quad (3.2)$$

б) если точки l и i лежат на одной резонансной линии номер j и являются соседними, то в качестве значения $\Delta\tilde{\Phi}_{li}$ следует брать минимум из величины $\Delta\tilde{\Phi}(I_l, I_i)$ для невозмущенного перехода между l -й и i -й точкой (когда резонанс на отрезке между l -й и i -й

точкой «игнорируется» и экстремаль идет по невозмущенному пространству, а не по резонансной линии) и величиной $\Delta\tilde{\Phi}_j(I_l, I_i)$ (когда экстремаль, соединяющая точки l, i , идет по резонансной линии (см. раздел 2)):

$$\Delta\tilde{\Phi}_i = \min(\Delta\tilde{\Phi}(I_l, I_i), \Delta\Phi_j(I_l, I_i)). \quad (3.3)$$

Для нахождения величины $\Delta\Phi_j(I_l, I_i)$ сначала надо найти величину ΔJ_2 — разницу между значениями действий J_2 (3.13А') в соседних точках l и i . Далее мы будем считать, что величины ΔJ_2 для всех таких точек достаточно малы и при вычислении $\Delta\Phi_j(I_l, I_i)$ ограничимся линейным приближением по ΔJ_2 . Затем следует сравнить знаки величин J_2 и ΔJ_2 . В зависимости от того, совпадают они или нет (идет ли экстремаль «по» или «против трения»), для нахождения приращения $\Delta\Phi_j(I_l, I_i)$, следует воспользоваться либо формулами (3.27'б), (3.76'б), либо формулами (3.27'а), (3.76'а). Так, при совпадении знаков (это соответствует направлению экстремали «против трения»), надо найти величины резонансной гармоники $|V_{lm}|$ и ее порогового значения $(|V_{lm}|)_2$ (3.81'б) (в линейном приближении по ΔJ_2 они могут считаться одинаковыми в точках l и i), и в «надпороговом» случае $|V_{lm}| \geq (|V_{lm}|)_2$ следует воспользоваться формулой для $\frac{\partial\Phi}{\partial J_2}$ (3.27'б), из которой, в первом порядке по малости ΔJ_2 , для приращения $\Delta\Phi_j(I_l, I_i)$ получим

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_j(I_l, I_i) &= \frac{J_2 \Delta J_2}{\omega_x \sigma_x^2 (-J_2 + I_1) + \omega_z \sigma_z^2 \frac{l^2}{m} J_{10}} = \\ &= \frac{\left(-I_x + \frac{l}{m} I_{20}\right) \left(-1 + \frac{l}{m} \frac{dI_{20}}{dI_x}\right) \Delta I_x}{\omega_x \sigma_x^2 I_x + \omega_z \sigma_z^2 \frac{l^2}{m^2} I_{20}}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Во втором равенстве (3.4) мы воспользовались эквивалентной (3.27'б) формулой (3.29') и выразили величину $\Delta\Phi_j(I_l, I_i)$ в переменных I_x, I_z . В «подпороговом» случае $(|V_{lm}|) < (|V_{lm}|)_2$ следует воспользоваться формулой для $\frac{\partial\Phi}{\partial J_2}$ (3.76'б), из которой аналогичным образом получим

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_j(I_l, I_i) &= \{\kappa a_{11}(\alpha J_{10} + sV_{lm}) + a_{21}(\kappa \alpha J_2 + \alpha J_{10} + sV_{lm}) + a_{22} \alpha J_2 + \\ &+ [(a_{11} \kappa^2 + 2a_{21} \kappa + a_{22})(a_{11}(\alpha J_{10} + sV_{lm})^2 + 2a_{21} \alpha J_2(\alpha J_{10} + sV_{lm}) + \end{aligned}$$

$$+ a_{22} \alpha^2 J_2^2)]^{1/2}\} \Delta J_2, \quad (3.5)$$

где знак $s = \pm 1$ выбирается так, чтобы величина $\Delta\Phi_j$ была наименьшей. При противоположных знаках J_2 и ΔJ_2 (экстремаль идет «по трению») следует сравнить величины резонансной гармоники $|V_{lm}|$ и другого порогового значения $(|V_{lm}|)_1$ (3.81'а). В случае $|V_{lm}| > (|V_{lm}|)_1$, когда $\frac{\partial\Phi}{\partial J_2} = 0$ (см. (3.32'а)), будем иметь

$$\Delta\Phi_j(I_l, I_i) = 0. \quad (3.6)$$

В случае $|V_{lm}| < (|V_{lm}|)_1$ воспользуемся формулой для $\frac{\partial\Phi}{\partial J_2}$ (3.76'а), что даст

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_j(I_l, I_i) &= \{\kappa a_{11}(\alpha J_{10} + sV_{lm}) + a_{21}(\kappa \alpha J_2 + \alpha J_{10} + sV_{lm}) + a_{22} \alpha J_2 - \\ &- [(a_{11} \kappa^2 + 2a_{21} \kappa + a_{22})(a_{11}(\alpha J_{10} + sV_{lm})^2 + 2a_{21} \alpha J_2(\alpha J_{10} + sV_{lm}) + \\ &+ a_{22} \alpha^2 J_2^2)]^{1/2}\} \Delta J_2, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где знак $s = \pm 1$ выбирается так, чтобы величина $\Delta\Phi_j$ (3.7) была наименьшей.

Таким образом, величина $\Delta\Phi_j(I_l, I_i)$ определяется, в зависимости от указанных условий, одной из формул (3.4) — (3.7). Выбирая затем меньшую из величин $\Delta\tilde{\Phi}(I_l, I_i), \Delta\Phi_j(I_l, I_i)$, найдем величину $\Delta\tilde{\Phi}_i$ (3.3). Окончательно можно сказать, что построив алгоритм индукционного шага для нахождения $(k+1)$ -й точки и значения функции Φ в ней, если k точек уже известны, мы построили полный численный алгоритм нахождения распределения Φ вдоль резонансных линий, пригодный для реализации на ЭВМ. Следует отметить, что этот алгоритм не является оптимальным по той причине, что он не использует «топологическую» информацию, т. е. условие, что экстремаль невозмущенного перехода не может пересекать тех отрезков резонансной сети, относительно которых уже известно, что экстремали идут вдоль них. Поэтому перебор всех k точек в формуле (3.1) является, вообще говоря, излишним, и, в принципе, можно не рассматривать те точки l из числа $l=1, \dots, k$, которые отделены от i -й точки замкнутым (либо оканчивающимся на границах $I_x=0$ или $I_z=0$) контуром из уже найденных отрезков экстремалей, идущих вдоль отрезков резонансных линий между точками из числа $l=1, \dots, k$. Очевидно, что для большого числа точек N отбрасывание части точек в переборе (3.1) может дать значительное ускорение алгоритма.

Существенным вопросом является определение числа точек N , необходимого для достижения требуемой точности. Не входя в подробности, заметим, что это число определяется только тем условием, что отрезки резонансных линий между точками должны являться почти прямыми, и не связано с шириной резонанса, которая может быть много меньше характерных радиусов кривизны резонансных линий.

Представляется чрезвычайно важным указать преимущества предложенного численного метода вычисления функции Φ и, соответственно, РФР, перед традиционными методами. Здесь мы предположим, что все резонансы с порядком $Q = |l| + |m|$, большим некоторого Q_0 , уже не оказывают влияния на функцию Φ (этот вопрос будет обсуждаться в части III). Полное число вычислений приведенного алгоритма без «топологических ограничений» определяется, в основном, тем, что требуется вычислять $\Delta\Phi$ для невозмущенных переходов из каждой точки из N возможных в каждую. Полное число вычислений пропорционально, таким образом, N^2 и, в свою очередь, пропорционально Q_0^2 . Из «прямых» методов можно рассмотреть несколько наиболее простых и естественных. Так, для нахождения РФР можно проводить численные итерации исходных уравнений движения (3.1'). При малом трении α и коэффициенте диффузии $\sim \sigma_{x0}^2, \sigma_{z0}^2$ изменение динамических переменных может быть приближенно записано в виде отображения (со случайными слагаемыми), и итерации этих отображений в течение достаточно большого времени дадут РФР. Этот метод однако, требует экспоненциально большого количества итераций (по параметру силы шума $\eta \sim \sigma_{x0}^2, \sigma_{z0}^2$, т. е. необходимое число итераций $K \sim \exp(G/\eta)$, где $(G \sim 1)$) для набора достаточной статистики в «хвостах» РФР и для достаточно малого шума η (больших бетатронных амплитуд A_x, A_z) всегда невыгоден.

Другим, более совершенным, методом нахождения РФР может быть решение многомерного уравнения Фоккер—Планка типа (2.23') в окрестности изолированного резонанса методом сеток. К числу осложняющих факторов для этого метода надо отнести то обстоятельство, что уравнение (2.23') относится только к окрестности одного резонанса, и поэтому при наличии резонансной сети придется разбивать фазовое пространство на области около отдельных резонансов, в каждой из них решать свое уравнение типа (2.23'), а затем сшивать решения между собой, согласовывая граничные условия. По-видимому, уже это обстоятельство значительно усложнит алгоритм. Кроме того, необходимая величина

шага сетки по I_x, I_z должна быть меньше характерного масштаба изменения РФР $\Delta I_x, \Delta I_z \sim 1/\eta$, и число узлов сетки будет пропорционально $1/\eta^2$. При малых η число вычислений в этом методе будет также несоизмеримо большим, чем в предлагаемом нами асимптотическом методе, где число вычислений не зависит от η .

Исследование асимптотики слабого шума $\eta \rightarrow 0$ может проводиться и прямым численным решением уравнения для функции Φ , которое в окрестностях каждого выделенного резонанса имеет вид (3.61'). Существенной трудностью при этом будет, как и в предыдущем методе, необходимость сшивки решений для разных резонансов и согласование граничных условий. Объем вычислений будет определяться числом узлов сетки в трехмерном пространстве действий I_x, I_z и резонансных фаз (различных) φ . В окрестностях резонансов шаг по I_x, I_z , как нетрудно понять, должен быть меньше ширины резонанса ΔI_x , и общий объем вычислений будет также значительно превышать аналогичный объем в предлагаемом нами методе.

4. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО МАЛЫХ «ХВОСТОВ» РФР И ВРЕМЕНИ ЖИЗНИ ЭЛЕКТРОН-ПОЗИТРОННЫХ ПУЧКОВ

Целью настоящей работы является применение предложенного в [1] метода вычисления экспоненциально малых «хвостов» РФР в системе с трением, шумом и изолированными нелинейными резонансами, возбуждаемыми встречным взаимодействием, к задаче о РФР и времени жизни встречных электрон-позитронных пучков. Существенно заметить, что несмотря на то, что для исследования задачи о времени жизни пучков РФР вполне может считаться экспоненциально малой (так, невозмущенная резонансами РФР $\rho = \exp(-A_x^2/2 - A_z^2/2)$ экспоненциально мала при бетатронных амплитудах $A_x, A_z \gg 1$), применение метода работы [1] наталкивается на принципиальные трудности. Дело заключается в том, что сила шума η , являющаяся асимптотически малым параметром в теории [1], в задаче о взаимодействии электрон-позитронных пучков фактически входит также и в потенциал встречного взаимодействия $V(x, z)$, так что ширины резонансов $\Delta A_x^{lm}, \Delta A_z^{lm}$ пропорциональны η . Действительно, электромагнитное поле встречного пучка зависит от его поперечных размеров, которые, в свою очередь, определяются шумом η и диссипацией α . Поэтому, строго

говоря, асимптотика слабого шума в задаче о взаимодействии встречных электрон-позитронных пучков неприменима. Однако, основываясь на результатах работы [2], где предложен полуфенологический метод вычисления возмущений экспоненциальных «хвостов» РФР резонансами произвольно малой ширины (не описываемых асимптотической теорией), мы предлагаем численный метод решения и этой задачи. Этот метод не является по указанным причинам формально обоснованным и не обладает гарантированной точностью. Однако поскольку и сама модель описываемого явления содержит, по сравнению с реальной экспериментальной ситуацией, ряд существенных упрощений, то точности метода, по нашему убеждению, вполне достаточно для выявления основных особенностей нового эффекта — ограничения времени жизни пучка изолированными резонансами при принципиально двумерном характере статистического равновесия, соответствующего наличию конвективных потоков в фазовом пространстве.

В части I были приведены возможные расположения резонансов различного порядка в плоскости нормированных бетатронных амплитуд A_x, A_z . Из этих рисунков, а также из общих формул из работы [3] видно, что резонансные линии имеют стандартный нормированный вид именно в переменных A_x, A_z . Поэтому и радиусы кривизны резонансных линий так же, как и их ширины, являются величинами порядка A_x, A_z . В работе [2] показано, как может быть приближенно вычислено изменение экспоненциальных «хвостов» РФР вдоль резонансных линий с шириной $|\Delta A_x, \Delta A_z|$ порядка силы шума η . При этом предполагалось, что 1) трение слабо возмущает внутррезонансные колебания на периодах этих колебаний, и 2) расположение резонансной линии, в отличие от ее ширины, не зависит от силы шума η , который считается асимптотически малым. В нашей системе нарушаются оба этих условия. Однако, по нашему мнению, при решении задачи о времени жизни $T(\eta) = R \exp(G/\eta)$ встречных пучков в пределе больших времен затухания, когда первое условие выполнено, с использованием метода [2], будет давать несмотря на нарушение второго условия довольно высокую точность вычисления показателя экспоненты G . Действительно, характерные радиусы кривизны резонансных линий являются величинами порядка A_x, A_z . Для тех же отрезков резонансных линий, которые сильно влияют на РФР, обычно выполняется условие (как следует из приведенных далее результатов), что $A_x \gg 1$ или $A_z \gg 1$. Поэтому и радиусы кривизны этих отрезков

много больше единицы, что является уже достаточно хорошим условием применимости подхода [2].

Более трудным является вопрос о нарушении первого условия. В такой ситуации уравнение Фоккер—Планка нельзя усреднять вдоль траекторий колебаний на резонансе, как это делалось в [2] для слабого трения, и оно остается двумерным. Поскольку из-за малой ширины резонанса $\Delta I_r \sim \eta$ нельзя также применять и асимптотический метод [1], то получить решение в замкнутом виде не представляется возможным. Для получения оценочных значений приращений функции Φ вдоль резонансных линий мы будем пользоваться формулой

$$\overline{\Delta\Phi_{ii}(\alpha, \eta)} = \Delta\Phi'_{ii}(\alpha) + \Delta\Phi''_{ii}(\eta) - \Delta\Phi'_{ii}(0), \quad (4.1)$$

где $\overline{\Delta\Phi_{ii}(\alpha, \eta)}$ — значение приращения функции Φ между соседними точками l и i на резонансной линии, $\Delta\Phi''_{ii}(\eta)$ — приращение функции Φ между теми же точками, вычисленное для конечного отношения (ширина резонанса ΔI) / (сила шума η) и малого трения α , согласно работе [2], и $\Delta\Phi'_{ii}(\alpha)$ — величина асимптотического $\eta \rightarrow 0$ приращения $\Delta\Phi_j(I_l, I_i)$ как функция от силы трения α . Обозначение $\Delta\Phi'_{ii}(0)$ введено для величины $\Delta\Phi_j(I_l, I_i)$ при трении α ниже порогового, когда величина $\Delta\Phi_j$ либо равна нулю, либо дается выражением (3.4). Смысл выражения (4.1) состоит в том, что влияние конечности трения и шума увеличивают величину $\Delta\Phi_{ii}$ независимым образом, так что, например, включение конечной силы шума η при заданном трении α увеличивает приращение $\Delta\Phi_{ii}$ на столько же, на сколько оно увеличивалось бы при нулевом (очень малом) трении α . В силу того, что точное значение $\Delta\Phi_{ii}$ физически очевидным образом должно быть монотонно увеличивающейся функцией аргументов α и η , а также в силу ограниченности диапазона изменения $\Delta\Phi_{ii}$ (имеет смысл рассматривать только значения $\Delta\Phi_{ii}$, меньшие, чем величина $\Delta\bar{\Phi}$ для перехода между теми же точками по невозмущенному резонансом пространству, см. раздел 3), представляется естественным предположить, что оценка (4.1) является довольно точной.

Таким образом, для численного решения задачи о времени жизни встречных пучков мы будем формально считать параметр силы шума η (или пропорциональный ему размер пучка σ в переменных действия) малым по сравнению с характерными «длинами» (например, радиусами кривизны) резонансных линий. Учет же

конечности силы шума по сравнению с ширинами резонансов будет производиться согласно формуле (4.1). Тогда для решения задачи можно воспользоваться численным методом раздела 3 с заменой в формуле (3.3) «асимптотической» величины $\Delta\Phi_j(I_l, I_l)$ величиной $\Delta\Phi_{ii}$ из (4.1).

Существенно напомнить также, что описанный метод расчета функции Φ , основанный на теории [1], пренебрегает вкладами в Φ порядка ширины резонанса ΔI_r . Для нашей почти линейной задачи взаимодействия пучков ширины резонансов $\Delta A_x, \Delta A_z$, однако, не зависят от силы встречного пучка (параметра возмущения, см. [4]). Единственным условием, обеспечивающим малость $\Delta A_x, \Delta A_z$ по сравнению с A_x, A_z , является достаточно большая величина индексов гармоник $|l|, |m|$ (реально достаточно иметь $N = |l| + |m| \geq 6$, см. часть I). Поэтому погрешность расчета функции Φ , вносимая этим обстоятельством, будет больше для резонансов низкого порядка.

Предлагаемый метод численного решения задачи опирается таким образом на некоторые качественные соображения и поэтому является довольно грубым. Однако, поскольку в реальном эксперименте всегда имеется ряд дополнительных эффектов, не учитываемых исходной математической моделью, то такая точность представляется достаточной. При этом следует иметь в виду, что фактически будет решаться задача не предсказания времени жизни пучка при заданных параметрах установки (ввиду экспоненциально сильной чувствительности этой величины от различных возмущений такая постановка представляется нереальной), а выявления качественных особенностей зависимости времени жизни пучка от различных параметров.

5. ОПИСАНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

5.1. Вычислительная программа

Численный метод вычисления функции Φ разделов 2—4 был реализован программно. Основной модуль этой программы находит значения функции Φ в наборе точек на резонансной линии с заданными индексами гармоник l, m . Этот набор находится (по заданной рабочей точке ν_{x0}, ν_{z0}) другой программой построения резонансной линии и ее ширины $\Delta A_x, \Delta A_z$, описанной в части I. Затем, в соответствии с методом раздела 2, функция Φ строится

также и на прямоугольной сетке в плоскости амплитуд A_x, A_z . При найденном таким образом распределении Φ в плоскости A_x, A_z , вычислялись величины

$$\begin{aligned} G_{30} &= \min_{A_x} \Phi, \\ &\quad A_z = 30 \\ G_{50} &= \min_{A_x} \Phi, \\ &\quad A_z = 50 \end{aligned} \quad (5.1)$$

которые определяют основной, экспоненциальный фактор во времени жизни T при апертуре $A_z = 30$: $T_{30} = Z_{30} \exp(G_{30})$ и при апертуре $A_z = 50$: $T_{50} = Z_{50} \exp(G_{50})$. Такие значения апертур были взяты из соображения соответствия, по порядку величины, используемым в экспериментальных условиях. Затем отдельный программный модуль находил, для заданных индексов гармоник l, m , такие значения частот ν_{x0}, ν_{z0} при которых величина G_{30} или G_{50} , с учетом влияния только одного резонанса, минимальна. Иными словами, отыскивалось такое расположение резонанса, при котором его индивидуальное воздействие на время жизни (его уменьшение) максимально. Результат приводится в виде линий уровня (маркированных значением функции Φ на линии) функции Φ в плоскости A_x, A_z совместно с показом самого резонанса в форме, описанной в части I, для такого «оптимизированного» положения резонанса.

5.2. Результаты

Линии уровня невозмущенного распределения

$$\Phi = \frac{A_x^2}{2} + \frac{A_z^2}{2} \quad (5.2)$$

вплоть до значения $\Phi = 50$ показаны на рис. 1. На рис. 2—21 показаны распределения Φ при максимальном понижении резонансом величины G_{30} (минимальном времени жизни при апертуре $A_z = 30$) для всех резонансов с порядком $N = |l| + |m| \leq 10$. Параметры линейных сдвигов частот на всех рисунках $\xi_x = 0.03$; $\xi_z = 0.06$, декремент затухания $\alpha = 0.33 \cdot 10^{-3}$, параметр эллиптичности $\kappa = \sigma_x / \sigma_z = 100$. Все параметры приблизительно соответствуют использовавшемуся режиму ВЭПП-4 (см. [5]).

Из рассмотрения рис. 2—21 видно, что минимум функции Φ по A_z при любом фиксированном A_x всегда приходится на значение $A_z = 0$ и совпадает с невозмущенным (рис. 1). Это свойство сохраняется, как показал дополнительный анализ, для всех резо-

нансов при любых, а не только «оптимизированных» рабочих точках v_{x0} , v_{z0} (положения резонансов). Таким образом, первый вывод о характере влияния резонансов на РФР и время жизни пучка можно сформулировать в следующем виде:

1) рассматриваемый механизм фазовой конвекции влияния изолированных резонансов на РФР пучка, связанный с движением частиц вдоль резонансных линий, может приводить к увеличению плотности частиц в «хвостах» РФР только в вертикальном направлении. При этом если резонанс приводит к уменьшению времени жизни, то частицы гибнут на вертикальной апертуре.

Наглядное физическое объяснение такой асимметрии может быть дано, если заметить, что горизонтальная температура пучка (средняя энергия горизонтальных бетатронных колебаний) много выше, чем вертикальная, и образующаяся фазовая конвекция соответствует передаче тепловой энергии от «горячей» степени свободы к «холодной».

Подчеркнем, что приведенные рассуждения относятся только к механизму фазовой конвекции и не опровергают возможности влияния резонансов на время жизни при уходе частиц на горизонтальную апертуру за счет другого механизма — большой амплитуды резонансных колебаний, либо комбинации обоих. Из рассмотрения рис. 2—21 и данных части I о возможных расположениях резонансов, однако, представляется маловероятным, чтобы какой-нибудь из резонансов связи с $m \neq 0$ мог приводить, при рассматриваемом значении $\kappa = 100$, к гибели частиц на горизонтальной апертуре даже и с учетом конечности амплитуды резонансных колебаний, поскольку при $A_z \ll \kappa$ резонансные колебания направлены почти по вертикали (см. часть I). По-видимому, понижать время жизни пучка посредством вывода частиц на горизонтальную апертуру могут только резонансы с $m = 0$ — одномерные по x (показанные на рис. 6, 15 части I), поскольку они имеют, при $A_x \sim 6 \div 8$ довольно большую амплитуду резонансных колебаний $\Delta A_x \sim 1 \div 2.5$. Механизм влияния таких резонансов на РФР и время жизни является чисто одномерным и может быть хорошо описан в рамках теории [6].

Перейдем теперь к анализу данных рис. 2—21 о влиянии на РФР и время жизни резонансов с $m \neq 0$, когда основной эффект заключается в «вытягивании» «хвостов» РФР в вертикальном направлении. Можно заметить относительно всех этих рисунков, что плоскость A_x , A_z на них разбивается на две области: первую, где функция Φ совпадает с невозмущенной рис. 1, и вторую, где она

сильно возмущена (более подробно см. [1]). Наиболее вероятные траектории прихода частиц в точки второй области частично проходят по резонансной линии

Данные о максимальном влиянии различных резонансов на время жизни — минимизированные величины G_{30} и G_{50} — собраны в табл. 1. Чтобы оценить значимость этих данных, заметим, что время жизни пучка, которое оценивается (в единицах времени затухания) формулой $T \sim \exp(G)$, при $G = 16$ соответствует времени жизни в 1 час на установке ВЭПП-4 на энергии 5 Гэв (см. [5]). Поэтому можно сказать, что в «идеальной» установке со встречными пучками время жизни может существенно (менее 10 часов) ограничиваться отдельными резонансами только с порядком $N \leq 6$. Отсюда не следует, однако, что влиянием высших резонансов всегда можно пренебречь, поскольку на время жизни могут одновременно влиять несколько резонансов, что существенно усиливает эффект (такая ситуация рассмотрена в части III), а также поскольку дополнительные «неидеальности» машины могут изменить ситуацию. Некоторые из этих неидеальностей (остаточное разведение пучков, машинная нелинейность) рассматриваются здесь же далее. Другой «неидеальностью», не рассматриваемой в настоящей работе, но которая также может, по-видимому, существенно усиливать влияние резонансов на время жизни, является синхротронная модуляция. В целом, можно сказать таким образом, что данные рис. 2—21 и табл. 1 носят предварительный характер и показывают, в основном, только главные особенности и характерный масштаб эффекта.

Довольно простым и естественным выводом из данных табл. 1 является следующее:

2) влияние резонансов на время жизни быстро падает с ростом индексов гармоник $|l|$, $|m|$.

Важный с практической точки зрения вопрос о зависимости времени жизни от величины вертикальной апертуры может быть проанализирован сравнением величин G_{30} и G_{50} в табл. 1, откуда можно заключить следующее:

3) в рассматриваемой «идеальной» модели время жизни, при максимальном влиянии резонансов, сильно увеличивается при увеличении вертикальной апертуры. Этот эффект увеличения времени жизни (величины G) выражен более ярко для резонансов более высокого порядка N по сравнению с резонансами более низкого порядка, и (для резонансов одного порядка) для суммовых резонансов (с положительными m) по сравнению с разностными.

При сравнении величин G_{30} у разных резонансов одного порядка N видно, что величина G_{30} почти одинакова (с точностью порядка 1) у всех суммовых резонансов (с $m \geq 0$), и почти одинакова, но заметно большая у разностных резонансов. Различие между двумя типами резонансов усиливается с увеличением порядка N . Таким образом, можно сделать следующий вывод:

4) суммовые резонансы гораздо опаснее, с точки зрения ограничения времени жизни, чем разностные. Между собой «опасность» суммовых резонансов различается слабо.

Вывод (4) соответствует экспериментальным результатам с ВЭПП-4 [5], хотя наше объяснение эффекта принципиально отличается. Действительно, в [5] такое отличие объясняется привычным в физике ускорителей обстоятельством, когда амплитуда колебаний поперечных энергий на разностном резонансе ограничена, а происходит только «перекачка» энергий, в то время как на суммовом резонансе обе энергии могут неограниченно расти. На самом же деле, как видно из данных части I, для исследуемых «пучковых» резонансов колебания амплитуд как на суммовых, так и на разностных резонансах ограничены и приблизительно одинаковы по величине. Различие же во влияниях на время жизни объясняется тем, что суммовые резонансы имеют отрицательный наклон, и частицы, двигаясь внутри резонансов только под влиянием (достаточно слабого) трения, могут выходить на большие амплитуды (явление «streaming» а», см. [1]). Увеличение трения выше порогового частично, но не полностью ослабляет влияние резонанса на РФР (см. [1]). Для того же, чтобы попасть на большие амплитуды A_z по разностному резонансу, частицы должны двигаться «против трения», что является более маловероятным событием и соответствует большим значениям G_{30} , G_{50} .

В некоторых графах табл. 1 приведены (внизу графы) некоторые дополнительные величины, которые мы обозначим G'_{30} , G'_{50} . Эти величины определяются так же, как и G_{30} , G_{50} (5.1) с тем отличием, что коэффициент диффузии для частиц исследуемого пучка считается пропорциональным параметру η , стремящемуся к нулю, и функция Φ будет определяться стандартной асимптотикой слабого шума РФР (см. [1])

$$\rho(\eta) = Z \exp(-\Phi/\eta) (1 + O(\eta)). \quad (5.3)$$

Размеры «встречного» пучка, определяющие потенциал встречного взаимодействия, считаются неизменными (не зависящими от η).

Таким образом, величины G'_{30} , G'_{50} соответствуют «чистой» асимптотике слабого шума, когда нет нужды в усложняющей формуле (4.1), и вместо величины $\Delta\Phi_{ii}(\alpha, \eta)$ следует брать просто $\Delta\Phi'_{ii}(\alpha)$. Иными словами, при вычислении величин G'_{30} , G'_{50} выбрасывается один из факторов, приводящих к росту функции Φ вдоль направления экстремали, проходящей по резонансной линии, — возможность «выпадения» частиц из сепаратрисы резонанса при реальном значении η из-за сравнимости ширины резонанса и характерного масштаба изменения РФР. Второй фактор, связанный с зависимостью от силы трения α , остается неизменным. Примеры распределения Φ , соответствующего величине G'_{30} , приведены на рис. 22, 23. Таким образом, сравнивая в табл. 1 величины G'_{30} и G_{30} , G'_{50} и G_{50} , а также рис. 22, 23 с рис. 14, 16 можно сделать заключение о том, какая из величин $\Delta\Phi'_{ii}(\alpha)$ и $\Delta\Phi_{ii}^m(\eta)$ обычно превалирует в сумме (4.1) и, соответственно, какой из двух факторов наиболее существен в подавлении резонансов высоких гармоник.

Из данных табл. 1 видно, что разница величин G_{30} и G'_{30} , G_{50} и G'_{50} для разностных резонансов приблизительно равна 7 и меньше, чем для суммовых того же порядка N (приблизительно равна 15). Таким образом, если говорить об уменьшении максимально возможного влияния резонанса на время жизни фактором конечности силы шума η , то можно сделать следующий вывод:

5) эффект сравнимости ширины резонанса ΔI , относительно характерного масштаба изменения РФР σ_I , приводящий к уменьшению влияния резонанса на время жизни, проявляется более сильно для разностных резонансов.

Если говорить о влиянии второго фактора — конечности силы трения α на уменьшение влияния резонанса на время жизни, то для суммовых резонансов основная информация может быть получена из приведенных для примера рис. 22, 23. Из этих рисунков видно, что для суммовых резонансов порядка $N \leq 10$ функция Φ практически постоянна вдоль резонансной линии при $A_z < 30$, что и соответствует максимально возможному (при таком расположении резонанса) влиянию на функцию Φ . С другой стороны, из сравнения рис. 2—21 для резонансов с разным порядком N , но приблизительно одинаковым расположением резонансных линий, определяемым отношением l/m , видно, что резонансы с большим N «отступают» в область больших амплитуд A_x , и именно за счет этого имеют большие значения G_{30} (напомним, что рисунки соот-

ветствуют расположению резонанса, отвечающему минимальному G). Это «отступление» связано, в основном, с тем, что при меньших амплитудах A_x , A_z трение α делается больше критического (амплитуда гармоники $|V_{lm}|$ делается меньше критической) и функция Φ уже не постоянна вдоль резонансной линии. Аналогичная картина наблюдается, как показывают дополнительные численные данные, и для разностных резонансов. Эти данные свидетельствуют о том, что на рис. 2—21 трение меньше порогового вдоль всех резонансных линий и для разностных резонансов (непосредственно из рисунков этого не видно, так как при движении на экстремали «против трения» функция Φ увеличивается и при трении, меньшем порогового). Таким образом, можно сделать вывод:

6) *величина декремента затухания α сильно влияет на максимальное ограничение времени жизни отдельными нелинейными резонансами. Резонансы более высокого порядка для реализации максимального ограничения «отходят» в сторону больших амплитуд, где амплитуды резонансных гармоник делаются больше критических.*

Непосредственная проверка первого утверждения вывода (6) показана на рис. 24, 25, где показано максимальное влияние некоторых резонансов на G_{30} при большем декременте затухания $\alpha = 1 \cdot 10^{-3}$. Величины G_{30} для этих рисунков составляют, соответственно, 43.6, 55.4 (ср. табл. 1).

На рис. 26—28 показано несколько резонансов с $N=8$ для $\xi_z/\xi_x=4$ при рабочей точке, соответствующей минимальному значению G_{30} (все прочие параметры оставались без изменения). Данные о минимизированных величинах G_{30} , G_{50} в сравнении с аналогичными значениями при $\xi_z/\xi_x=2$ приведены в табл. 2. Видно, что увеличение отношения ξ_z/ξ_x может как увеличивать, так и уменьшать значения G_{30} , G_{50} . Таким образом, можно сделать вывод:

7) *зависимость времени жизни от отношения ξ_z/ξ_x является довольно сложной и зависит от многих других параметров.*

На рис. 29—31 показано несколько резонансов с $N=8$ для $\kappa=30$ при рабочей точке, соответствующей минимальному значению G_{30} (все прочие параметры равнялись исходным). Данные о минимизированных величинах G_{30} , G_{50} в сравнении с аналогичными значениями при исходном $\kappa=100$, приведены в табл. 3. Видно, что уменьшение κ приводит к увеличению величин G_{30} и G_{50} для всех приведенных резонансов, причем это увеличение выражено сильнее для резонансов с большим отношением $|l/m|$. Кроме того,

увеличение величины G_{50} больше, чем G_{30} . Эти особенности могут быть поняты из приведенных рисунков и сохраняются, по нашему убеждению, и для других резонансов. Действительно, как отмечено в части I, резонансные линии слабо зависят от параметра κ (при сохранении условия $\kappa \gg 1$). Резонансные же векторы ΔA_x , ΔA_z в области $A_z \gg \kappa$ существенно зависят от параметра κ , причем наклон этих векторов определяется соотношением [3]

$$\frac{\Delta A_x}{\Delta A_z} = \frac{l}{m} \frac{A_z \xi_x}{A_x \kappa \xi_z}. \quad (5.4)$$

Поскольку для разностных резонансов механизм сильного влияния на функцию Φ связан с тем, что колебания на резонансе ΔA_x , ΔA_z при не слишком больших A_z направлены почти по вертикали: $\Delta A_x \ll \Delta A_z$, а сама резонансная линия также идет почти по вертикали, в результате чего функция Φ почти постоянна вдоль резонансной линии, то влияние этих резонансов на величины G_{30} , G_{50} увеличивается при увеличении параметра κ из-за уменьшения угла между резонансной линией и вектором $(\Delta A_x, \Delta A_z)$. Для суммовых резонансов, по-видимому, большее влияние на G_{30} , G_{50} для большего κ связано все-таки с увеличением протяженности резонансных линий в области больших A_z и малых A_x (см. также рисунки к части I). Таким образом, можно сделать вывод:

8) *при условии одинаковых вертикальных апертур в нормировке на вертикальный размер пучка резонансы более сильно ограничивают время жизни при больших значениях параметра эллиптичности κ .*

На рис. 32—34 показаны резонансы с нечетным l , возникающие при разведении по горизонтали $\Delta x=0.1$, и с порядком $N=|l|+|m|=5$ при рабочей точке, соответствующей минимальному значению G_{30} . Данные о минимизированных значениях G_{30} , G_{50} в сравнении с аналогичными значениями для резонансов с удвоенными значениями l , m , возникающими без разведения, приведены в табл. 4. Из этих данных видно, что величины G_{30} в некоторых случаях могут быть меньше у нечетных резонансов, в то время как G_{50} у нечетных резонансов очень велика (намного больше, чем у удвоенных четных). Такое отличие связано с тем, что, как отмечено в части I, резонансы с нечетными l имеют ширину ΔA_x , ΔA_z , большую, чем у соответствующих «удвоенных» резонансов, только при относительно небольших значениях $A_x < 2 \div 4$. Поскольку при малых $A_x \ll 1$ ширины ΔA_x , ΔA_z также малы, то получается, что резонанс может иметь значительную ширину, и, следо-

вательно, сильно влиять на РФР только на относительно небольшом участке своей длины. Для сильного же ограничения величины G_{50} необходимо сильное влияние резонанса на всем участке от $A_z \sim 5 \div 10$ до $A_z = 50$, что по указанной причине невозможно для нечетного резонанса.

Для любого l -нечетного резонанса l, m, n , существует удвоенный четный резонанс $2l, 2m, 2n$, который имеет такую же резонансную линию. Из приведенных данных представляется естественным предположить, что одновременный учет обеих гармоник может значительно усилить эффект ограничения G_{30}, G_{50} , поскольку исходная нечетная гармоника велика при малых A_x , а удвоенная — при больших A_x . Таким образом, можно сделать вывод:

9) наличие остаточного горизонтального разведения может значительно усиливать ограничение времени жизни. При относительно небольших вертикальных апертурах $A_z \sim 30$ ответственными за ограничение времени жизни могут быть «чисто нечетные» резонансы, при больших $A_z \sim 50$ вклад в эффект будут давать как нечетные, так и их «удвоенные» резонансы.

Кроме l -нечетных, были исследованы также m -нечетные резонансы, возникающие при остаточном вертикальном разведении $\Delta z = 0.1$. Однако, как было обнаружено, для порядка $N = |l| + |m| = 5$ и выше, они не дают никакого возмущения величин G_{30}, G_{50} . Такая ситуация не является удивительной, так как из приведенных в части I рисунков видно, что m -нечетные резонансы имеют достаточно большую ширину $\Delta A_x, \Delta A_z$ только в узкой области $A_z \sim 3 \div 6$. Можно предположить, однако, что аналогично l -нечетным, m -нечетные резонансы могут играть существенную роль при учете их «сложения» с соответствующими удвоенными. В целом, по-видимому, можно предположить следующее:

10) остаточное горизонтальное разведение сильнее ограничивает время жизни, чем вертикальное.

На рис. 35—43 показаны резонансы порядка $N=10$ и соответствующие распределения Φ при минимальном значении G_{30} в случае наличия положительной машинной нелинейности с параметрами $C = 2.4 \cdot 10^{-5}$ и $\beta_x/\beta_z = 2.5$ (см. Часть I). Данные о минимизированных значениях G_{30}, G_{50} в сравнении с аналогичными значениями при $C=0$ приведены в табл. 5. Из этих данных следует, что:

11) введение положительной машинной нелинейности почти всегда усиливает ограничение времени жизни отдельными резонансами.

Механизм влияния машинной нелинейности может быть понят из рассмотрения рис. 35—43, а также рис. 54—64 части I, где приведены все возможные расположения резонансов. Видно, что для суммовых и одномерного резонансов $l=0, m=10$ основным эффектом является смещение резонансных линий при больших амплитудах A_z (их приближение к вертикали). Для разностных резонансов влияние машинной нелинейности приводит к появлению, кроме основной, линии положительного наклона, дополнительной линии отрицательного наклона (см. часть I).

Для резонансов $(4, -6), (2, -8)$ «работающей» (т. е. ответственной за понижение G_{30}, G_{50}) является эта вторая линия. Для резонансов же $(8, -2)$ и $(6, -4)$ дополнительная линия попадает в область слишком больших A_x , и «работающей» является основная линия положительного наклона, влияние положительной нелинейности на которую приводит к некоторому повышению величины G_{50} .

ЛИТЕРАТУРА

1. Герасимов А.Л. Тепловое равновесие осциллятора при возбуждении изолированных нелинейных резонансов. — Препринт ИЯФ СО АН СССР 87-100. Новосибирск, 1987.
2. Герасимов А.Л. О влиянии резонансов на функцию распределения осциллятора. — Препринт ИЯФ СО АН СССР 88-34. Новосибирск, 1988.
3. Gerasimov A., Izrailev F., Tennison J. Nonlinear Resonances and Beam—Beam Effects for Elliptical Beams, In: Proc. of the XIII Intern. Accel. Conf. Novosibirsk, 1987.
4. Izrailev F.M. Nearly Linear Mappings and their Applications. — Physica, 1980, v.1D, p.243.
5. Темных А.Б. Диссертация на соискание уч. степени кандидата физ.-мат. наук. ИЯФ СО АН СССР. Новосибирск, 1987.
6. Shonfeld J. Statistical Mechanics of Colliding Beams. — Ann. of Phys., 1985, v.160, p.149—193.

Таблица 1

l	0		2		4		6		8	
	G_{30}	G_{50}	G_{30}	G_{50}	G_{30}	G_{50}	G_{30}	G_{50}	G_{30}	G_{50}
m										
-10	40.0	86.								
-8	34.0	75.	72.3	81.						
-6			65.1	72.	39.5 33.1	57. 47.				
-4			40.5	50.	28.3	44.	36.5 27.7	67. 57.		
-2					19.1	35.6	25.7 19.	51.	45.2 39.3	108. 105.
0					450.	1250.	450.	1250.	450.	1250.
2					16.7	25.4	21.3 10.5	33.	26.7	43.
4			17.5	23.9	22.5	31.2	29.4 14.8	40.		
6			23.3	30.	28.7	38.5				
8	34.0	75.	28.5 13	36.4 19.1						
10	40.0	86								

Таблица 2

(l, m)	(2, 6)		(6, 2)		(2, -6)		(6, -2)	
	G_{30}	G_{50}	G_{30}	G_{50}	G_{30}	G_{50}	G_{30}	G_{50}
$\xi_z/\xi_x=2$	23.3	30.	21.3	33.	65.1	72.	25.7	52.
$\xi_z/\xi_x=4$	24.9	452.	20.1	29.	158.	416.	24.7	45.

Таблица 3

(l, m)	(2, 6)		(6, 2)		(2, -6)		(6, -2)	
	G_{30}	G_{50}	G_{30}	G_{50}	G_{30}	G_{50}	G_{30}	G_{50}
$\kappa=100$	23.3	30.	21.3	33.	65.1	72.	25.7	51.
$\kappa=30$	28.5	47.	33.5	89.	67.9	83.	57.9	215.

Таблица 4

(l, m)	(2, 8)		(6, 4)		(2, -8)		(6, -4)	
	G_{30}	G_{50}	G_{30}	G_{50}	G_{30}	G_{50}	G_{30}	G_{50}
$\Delta x=0$	28.5	36.	29.4	40.	72.3	81.	36.5	67.
$\Delta x=0.1$	37.9	415.	25.2	390.	154.	570.	42.2	453.
(l, m)	(1, 4)		(3, 2)		(1, -4)		(3, -2)	

Таблица 5

(l, m)	C=0		C=2.4·10 ⁻⁵	
	G ₃₀	G ₅₀	G ₃₀	G ₅₀
(0, 10)	39.5	86.	29.0	30.
(2, 8)	28.5	36.	26.5	28.
(4, 6)	28.7	38.	27.5	35.
(6, 4)	29.4	40.	27.3	35.
(8, 2)	26.7	43.	25.9	38.
(10, 0)	450.	1250.	450.	1250.
(8, -2)	45.2	108.	44.1	110.
(6, -4)	36.5	67.	38.9	77.
(4, -6)	39.5	57.	36.6	53.
(2, -8)	72.3	81.	38.3	51.

Подписи к рисункам

Рис. 1. Невозмущенное распределение $\Phi = \frac{A_x^2}{2} + \frac{A_z^2}{2}$

Рис. 2—21. Линии уровня функции Φ при максимальном воздействии резонанса на величину G_{30} . Линейные сдвиги частот $\xi_x=0.03$, $\xi_z=0.06$, параметр эллиптичности $\kappa =$ время затухания (в числе столкновений со встречным пучком) $N=3 \cdot 10^3$.

Рис. 22, 23. Линии уровня функции Φ в абстрактном асимптотическом случае $\eta \rightarrow 0$. Параметры $\xi_x=0.03$, $\xi_z=0.06$, $\kappa=100$, $N=3 \cdot 10^3$.

Рис. 24, 25. Линии уровня функции Φ для меньшего времени затухания $N=10^3$ (реальное значение η). Параметры $\xi_x=0.03$, $\xi_z=0.06$, $\kappa=100$.

Рис. 26—28. Линии уровня функции Φ для большего отношения $\xi_z/\xi_x=4$. Параметры $\xi_x=0.015$, $\xi_z=0.06$, $\kappa=100$, $N=3 \cdot 10^3$.

Рис. 29—31. Линии уровня функции Φ для меньшего значения параметра эллиптичности $\kappa=3$. Параметры $\xi_x=0.03$, $\xi_z=0.06$, $N=3 \cdot 10^3$.

Рис. 32—34. Линии уровня функции Φ для нечетных резонансов, возникающих при наличии остаточного горизонтального разведения $\Delta x=0.1$. Параметры $\xi_x=0.03$, $\xi_z=0.06$, $\kappa=100$, $N=3 \cdot 10^3$.

Рис. 35—43. Линии уровня функции Φ при наличии положительной машинной нелинейности с параметрами $C=2.4 \cdot 10^{-5}$, $\beta_x/\beta_z=2.5$. Параметры $\xi_x=0.03$, $\xi_z=0.06$, $\kappa=100$, $N=3 \cdot 10^3$.

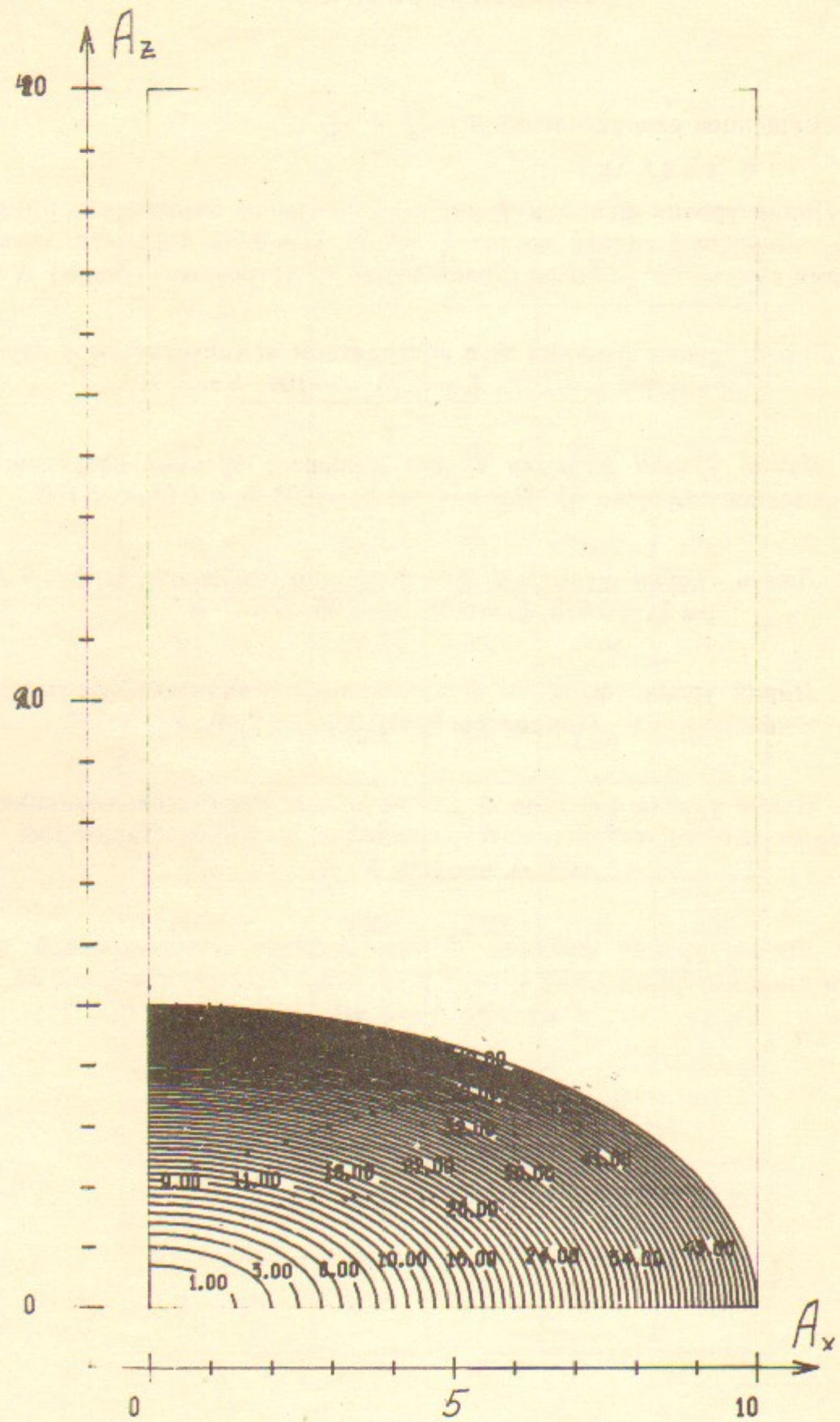


Рис. 1.

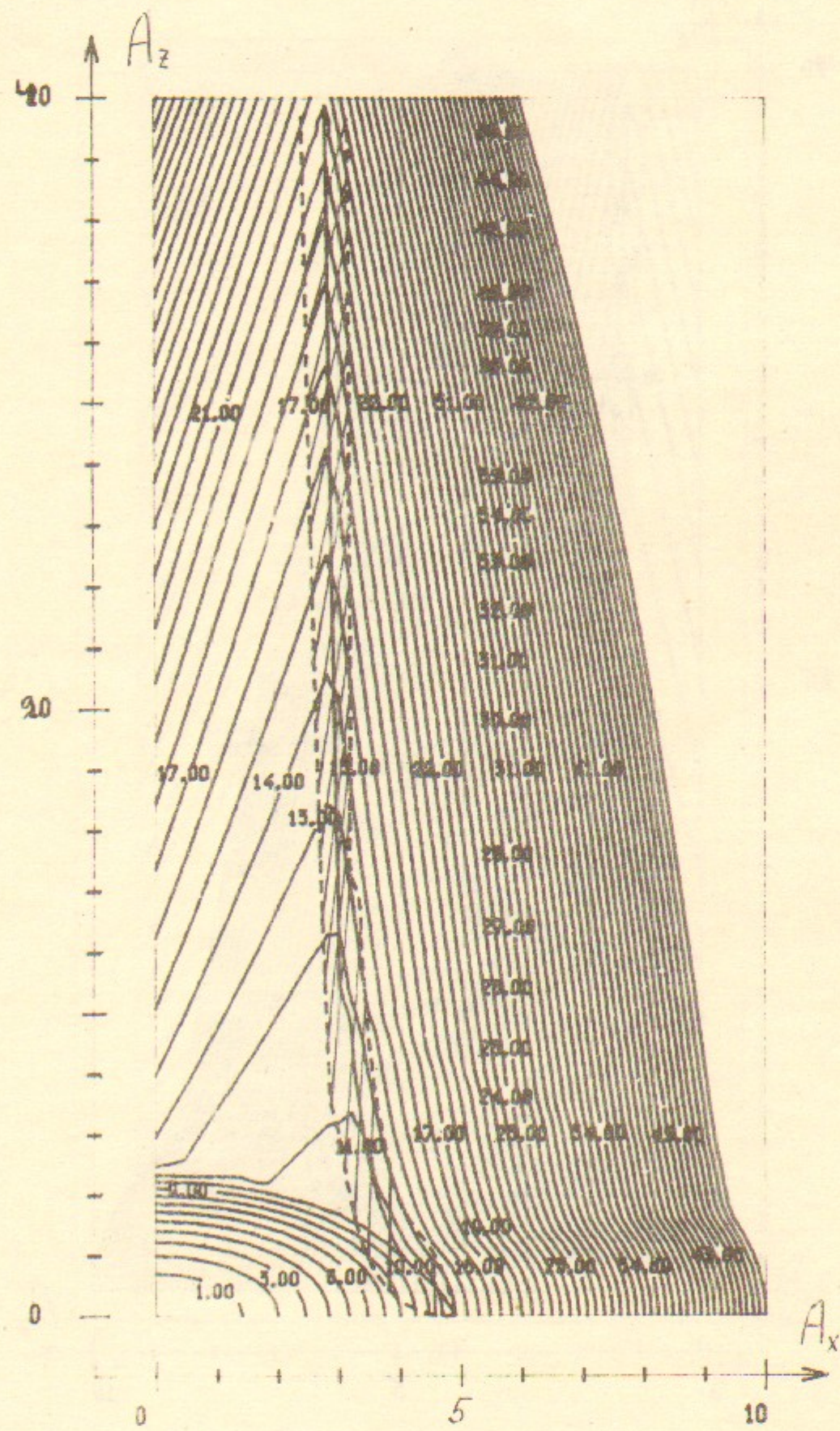
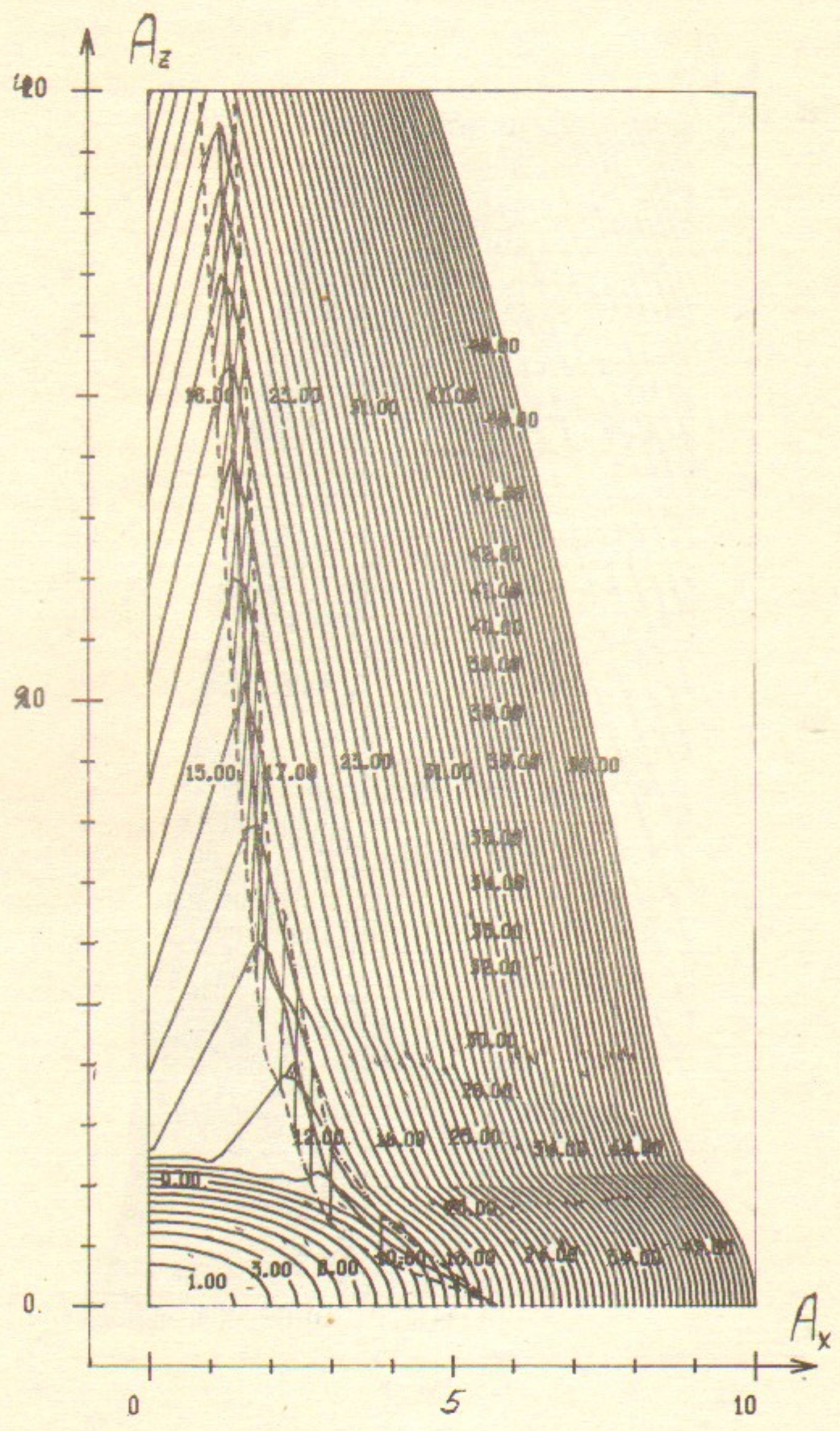
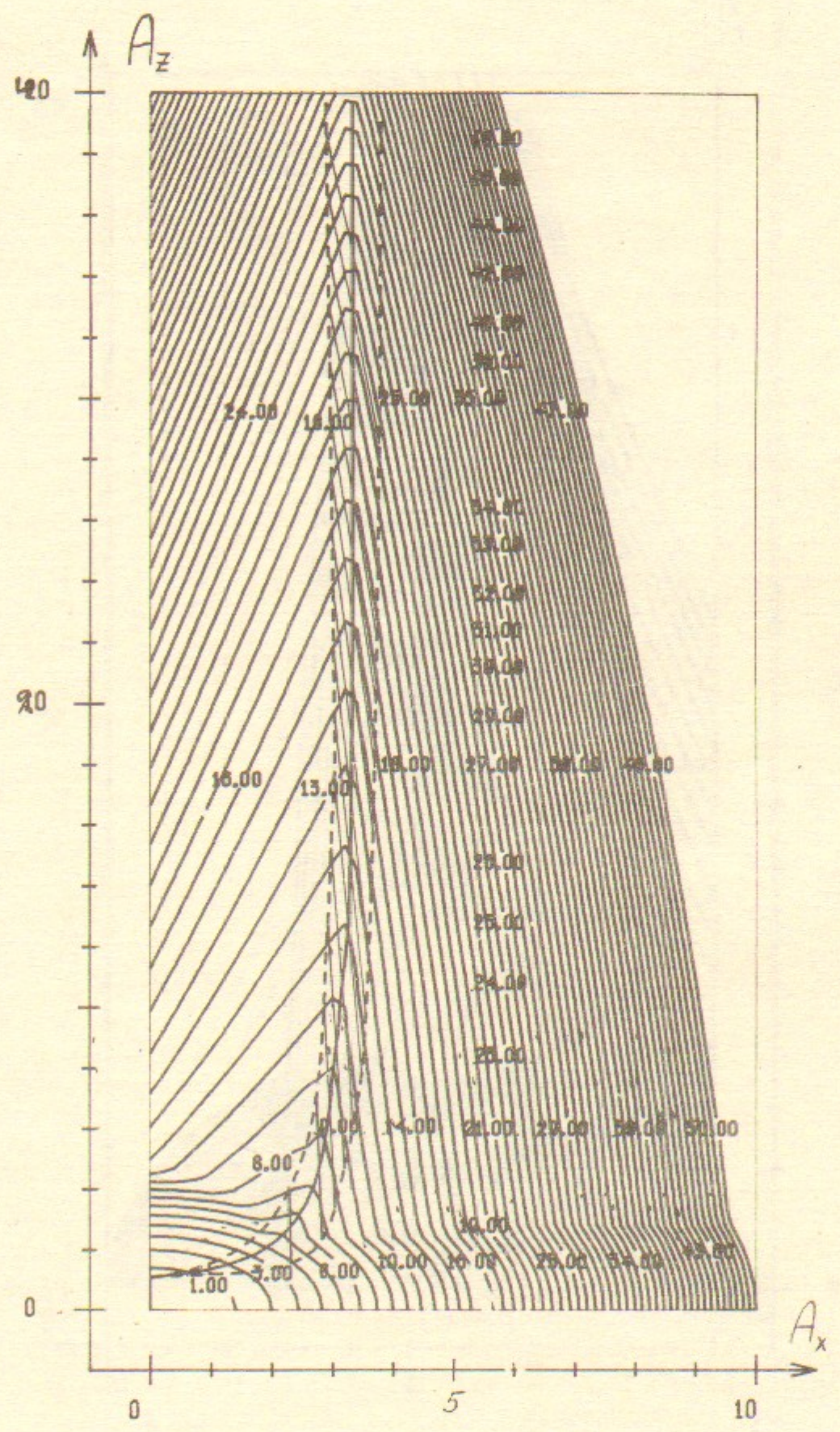


Рис. 2. $l=4, m=2$.



Puc. 3. $l=2, m=4$.



Puc. 4. $l=4, m=-2$.

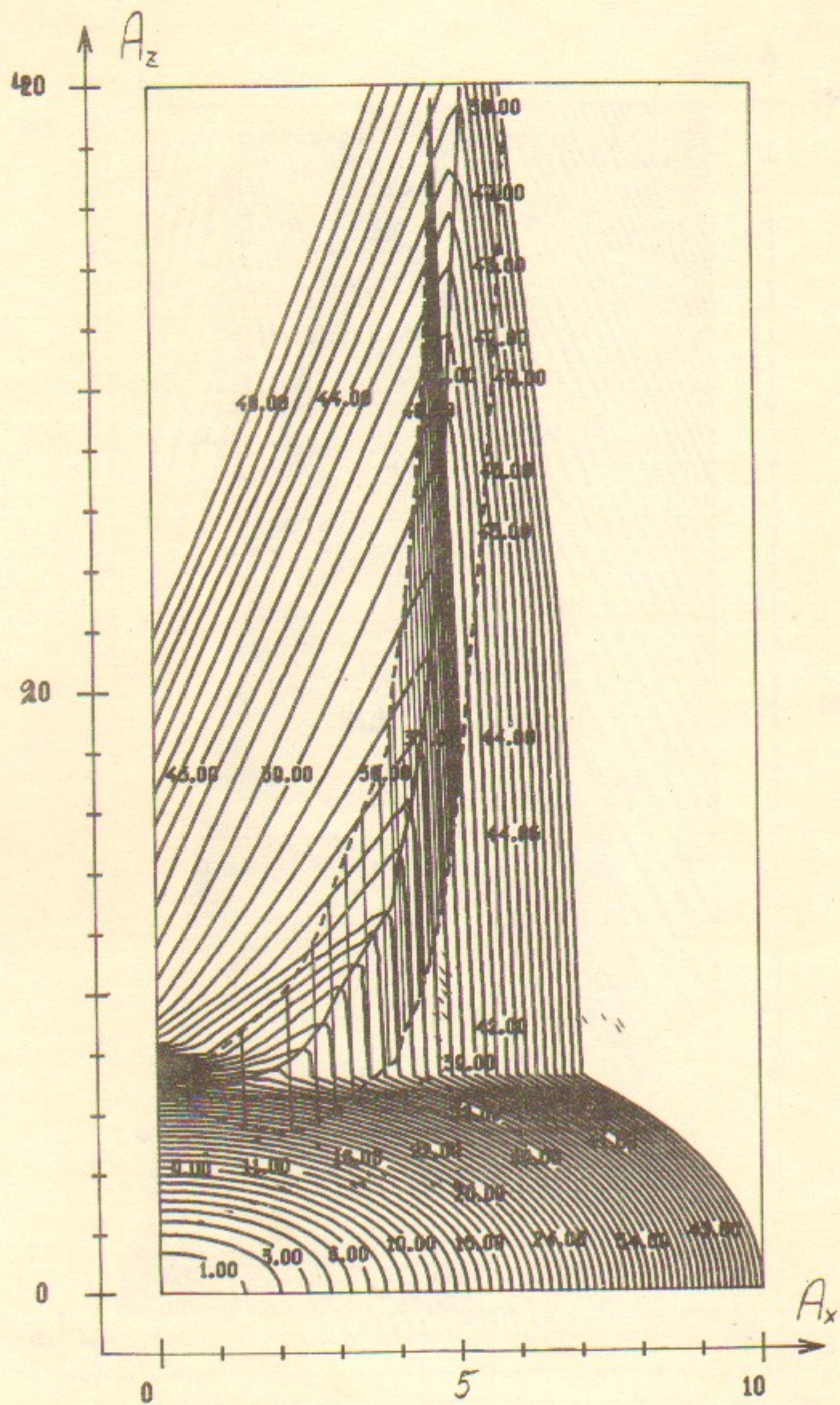


Рис. 5. $l=2, m=-4$.

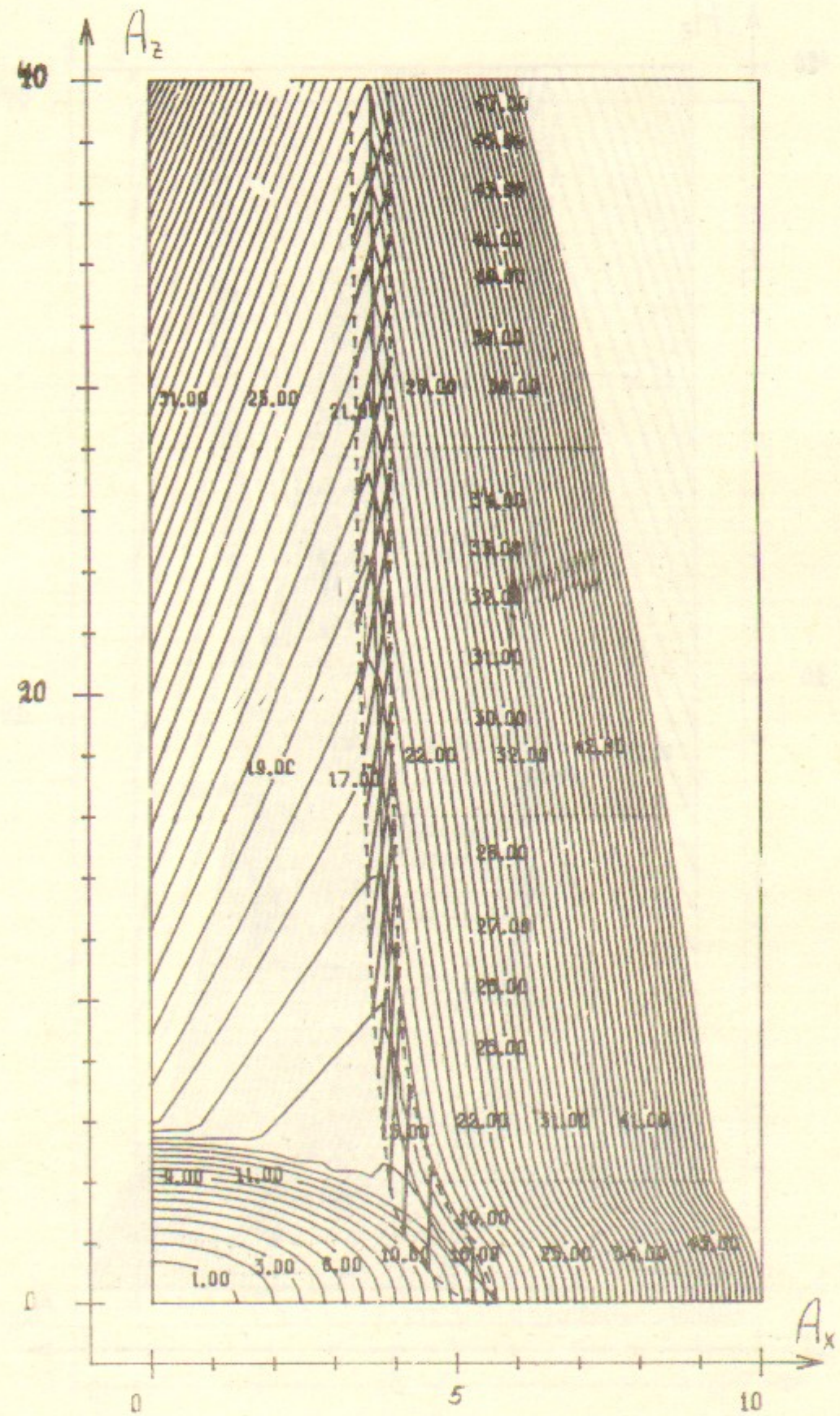


Рис. 6. $l=6, m=2$.

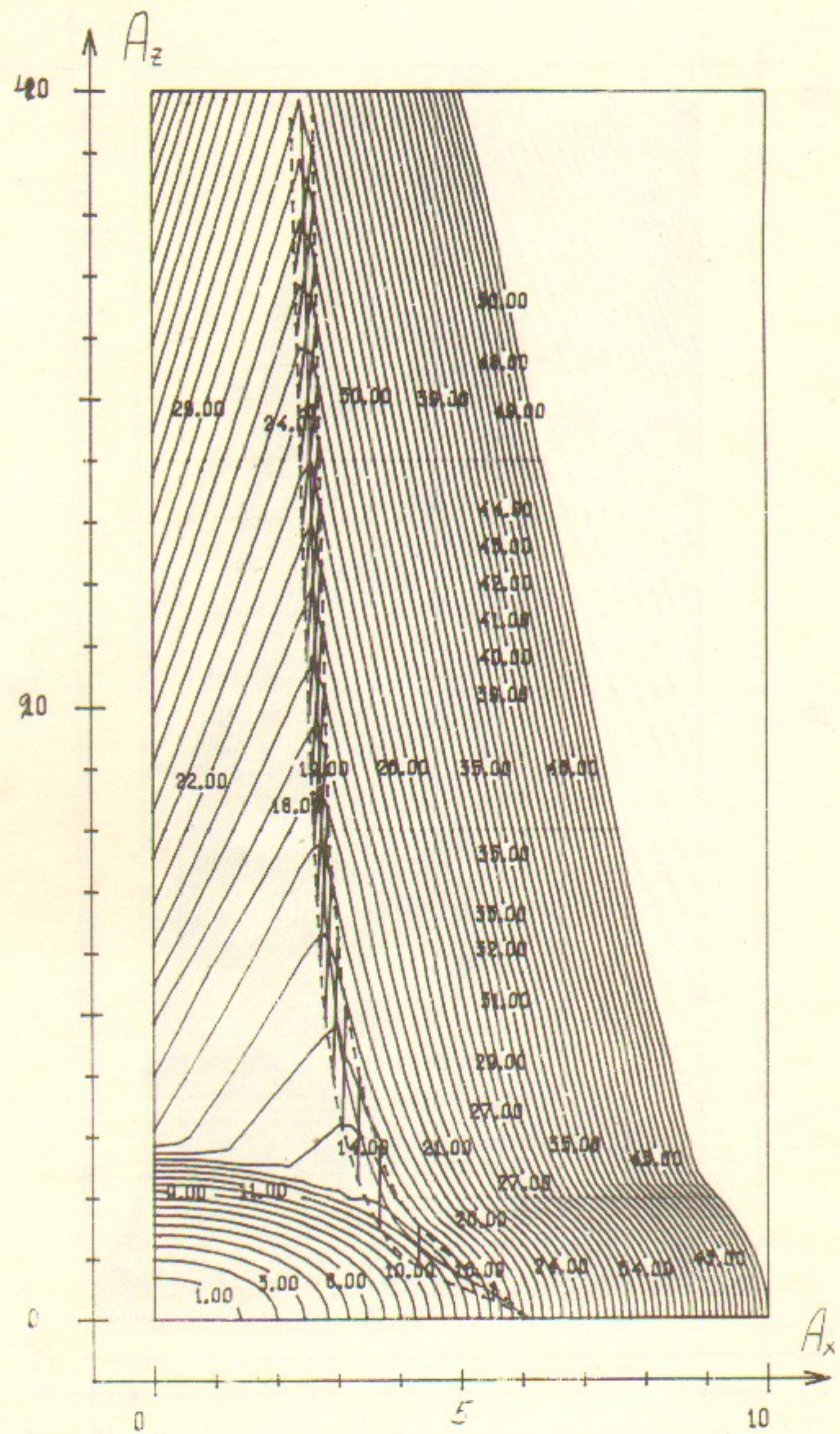


Рис. 7. $l=4, m=4$.

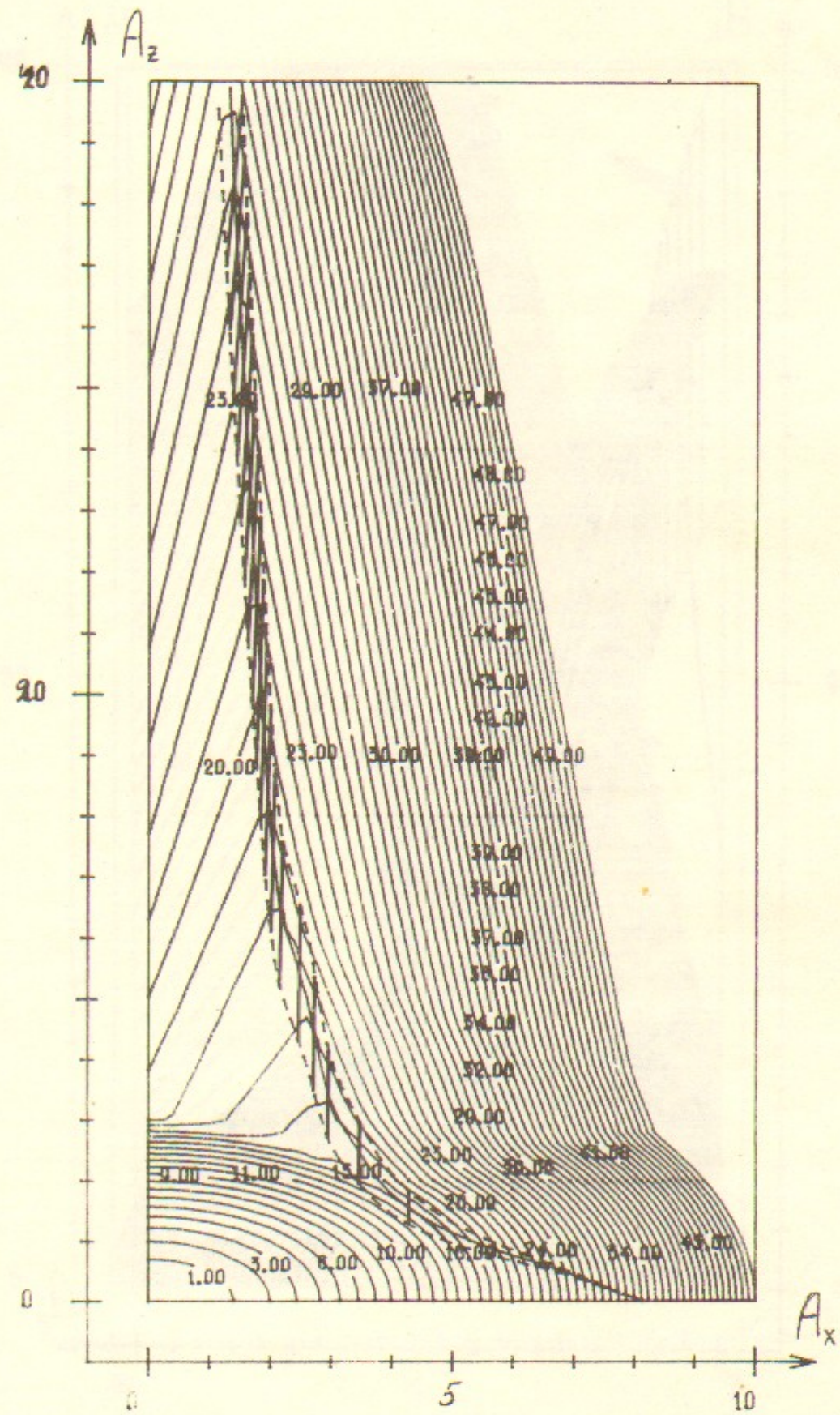


Рис. 8. $l=2, m=6$.

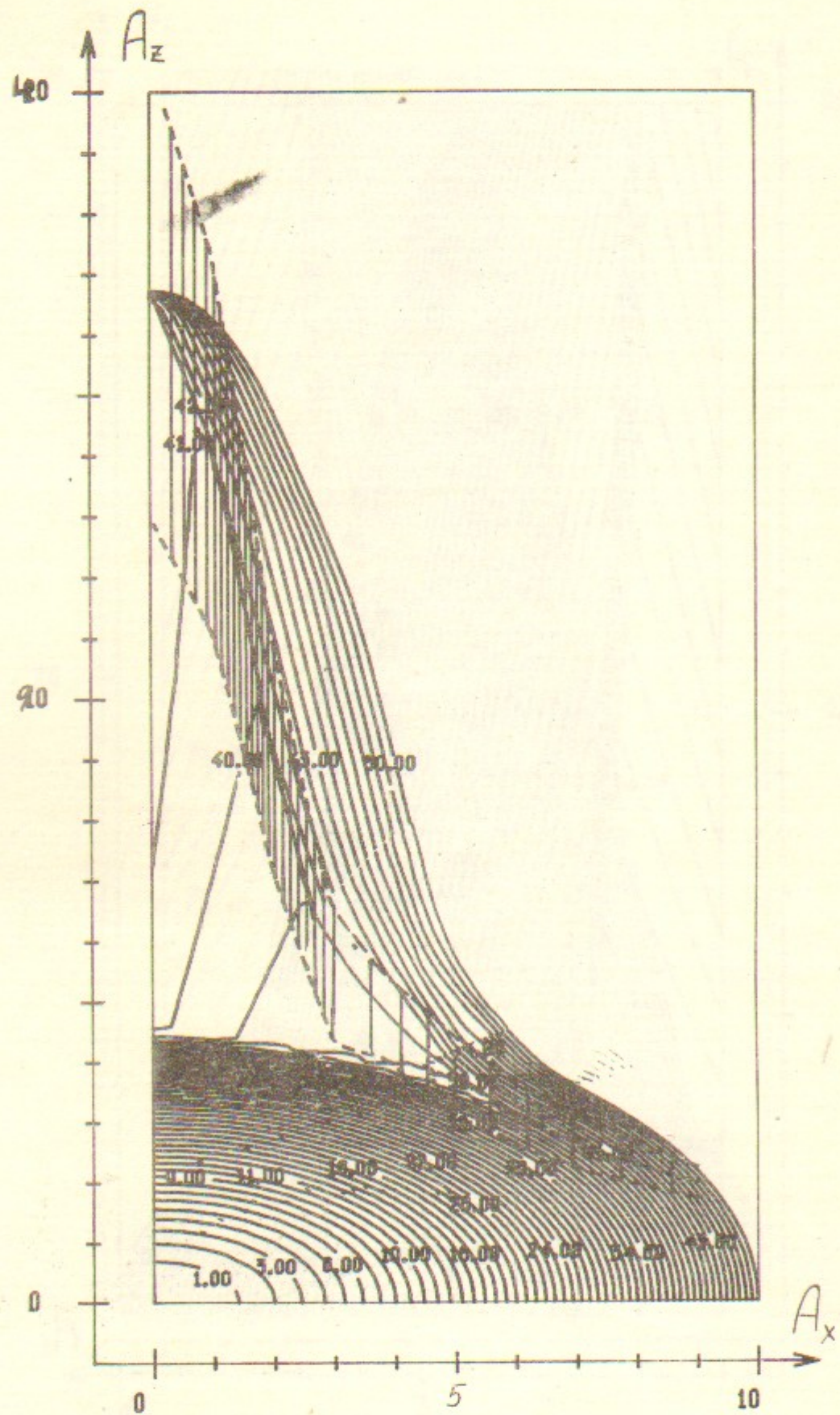


Рис. 9. $l=0, m=8$.

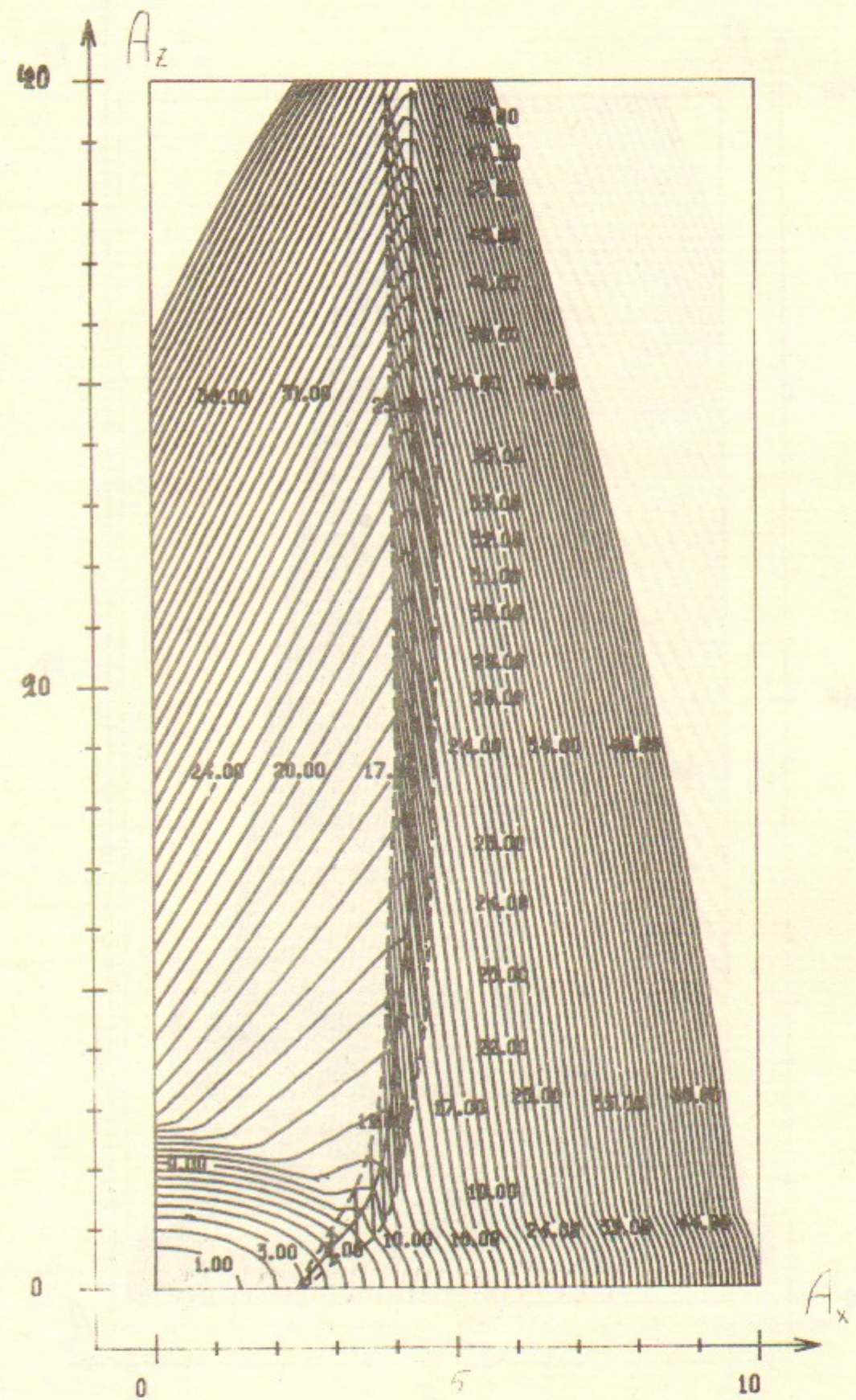


Рис. 10. $l=6, m=-2$.

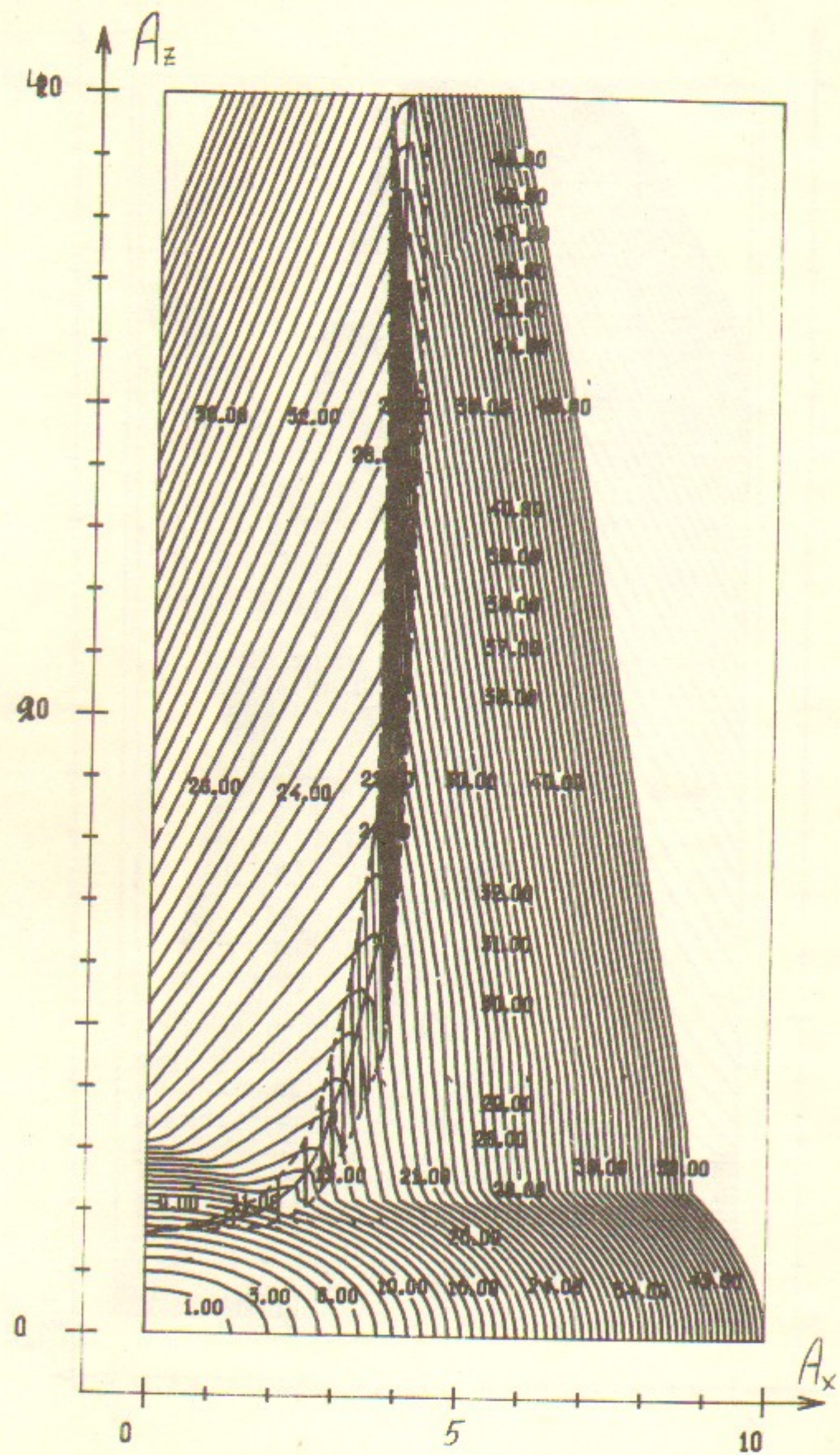


Рис. 11. $l=4, m=-4$.

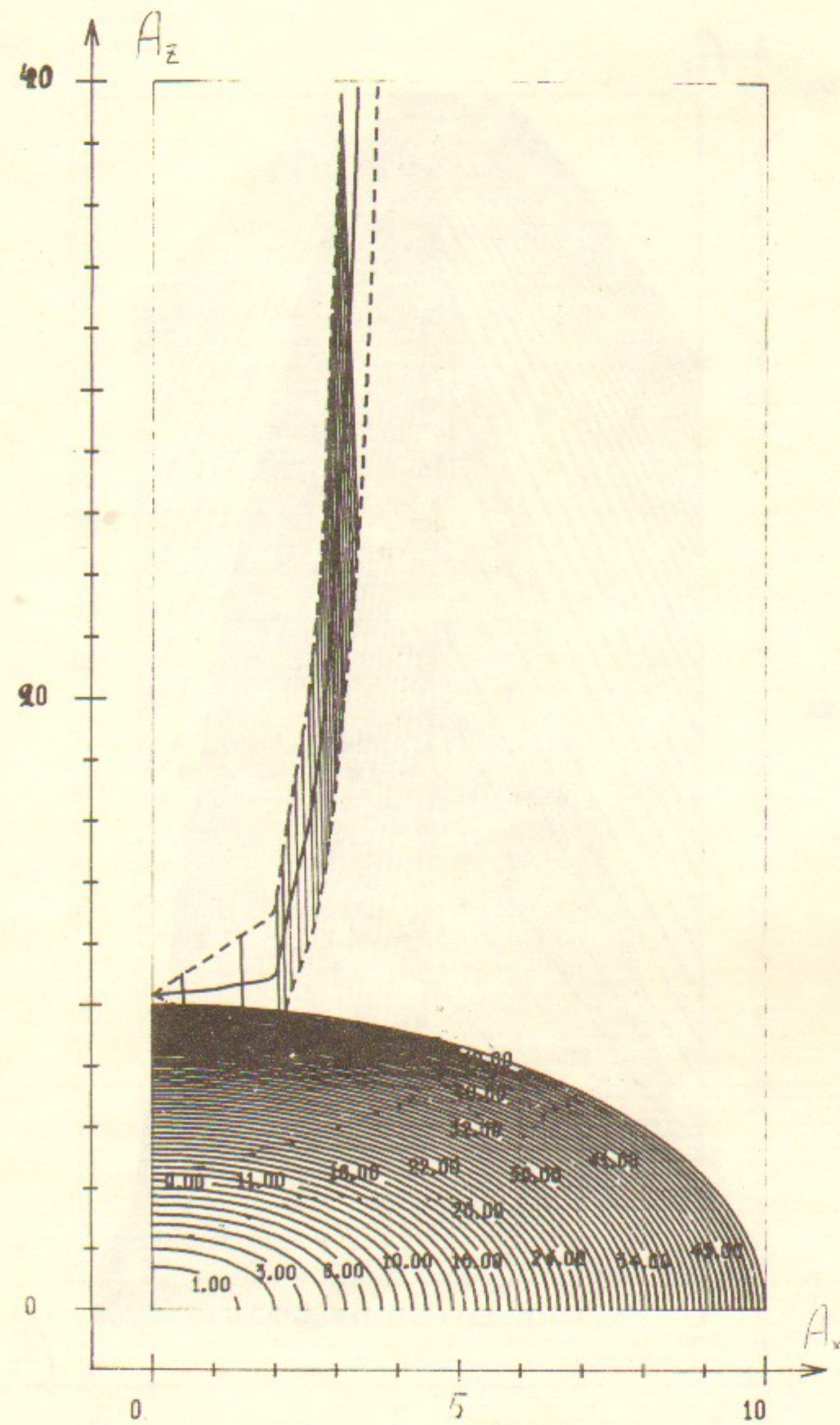


Рис. 12. $l=2, m=-6$.

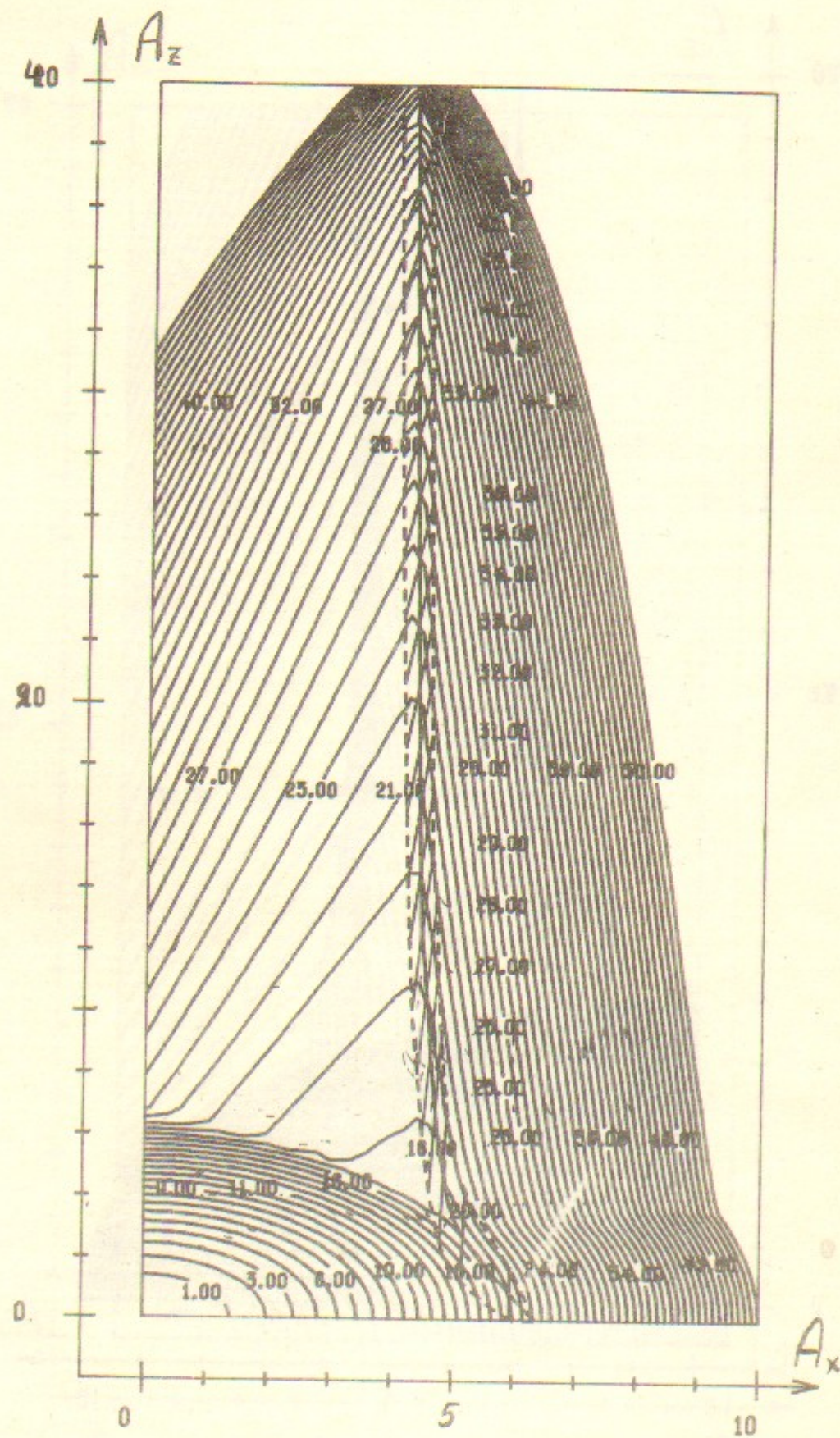


Рис. 13. $l=8, m=2$.

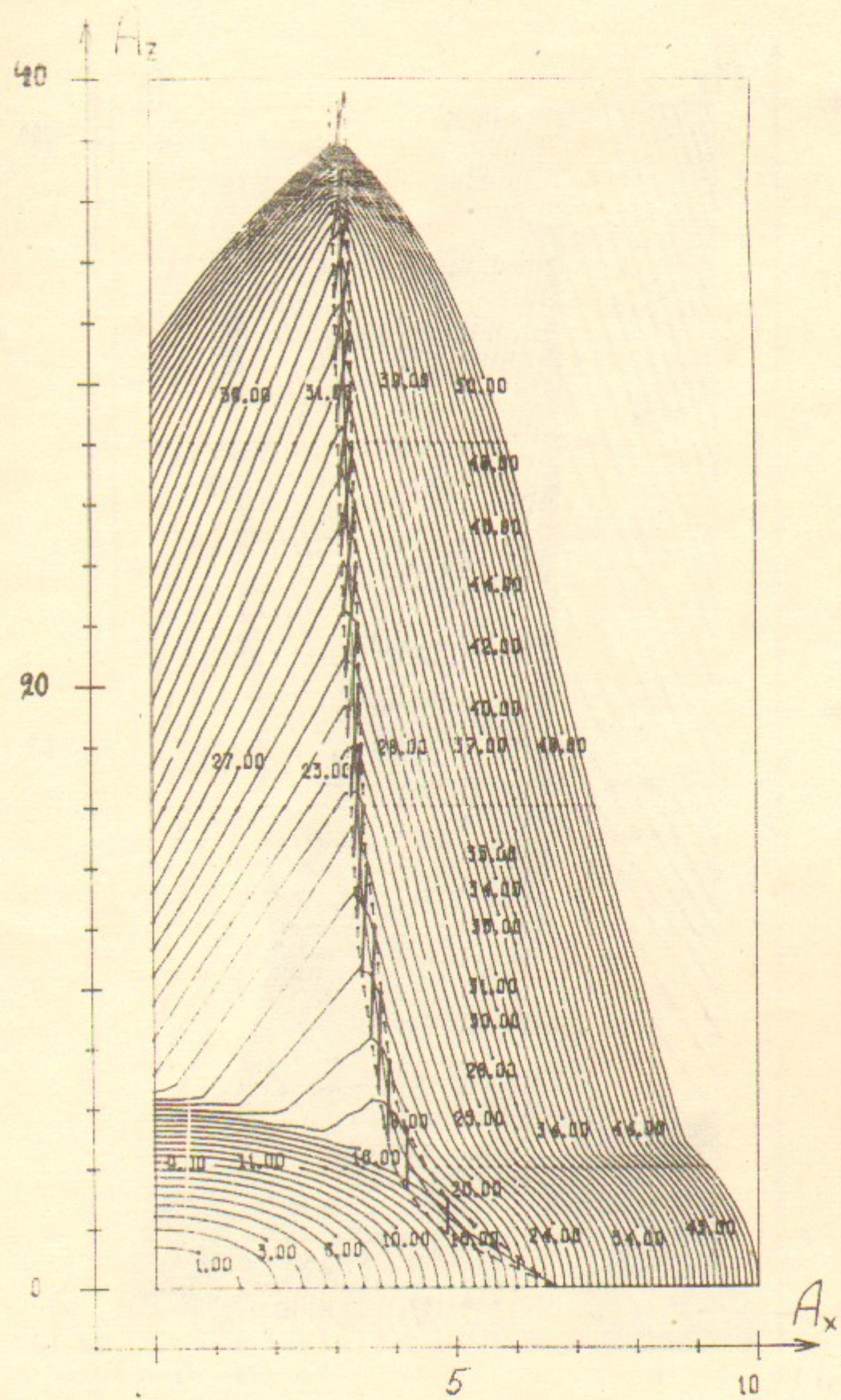


Рис. 14. $l=6, m=4$.

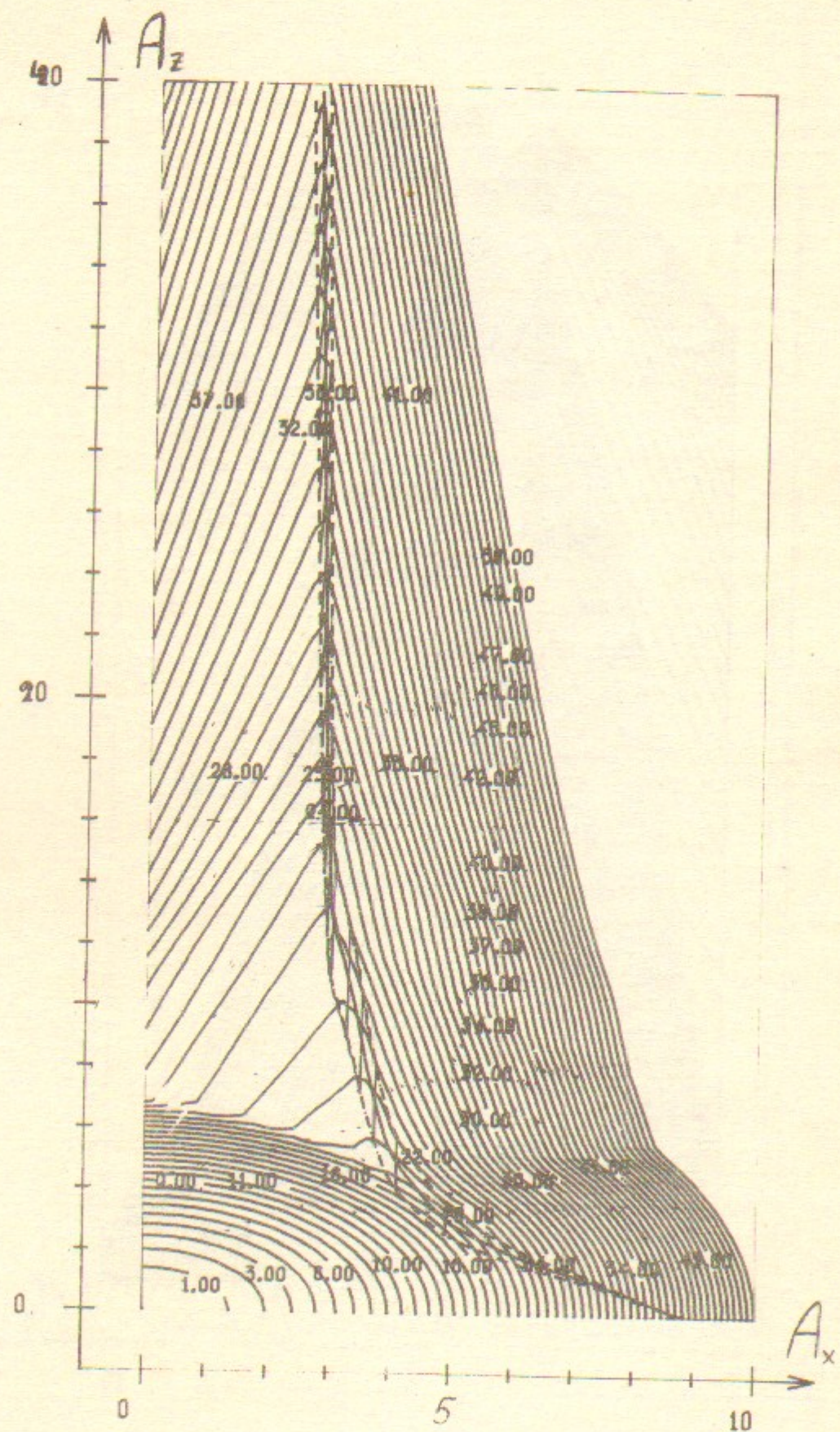


Рис. 15. $l=4, m=6$.

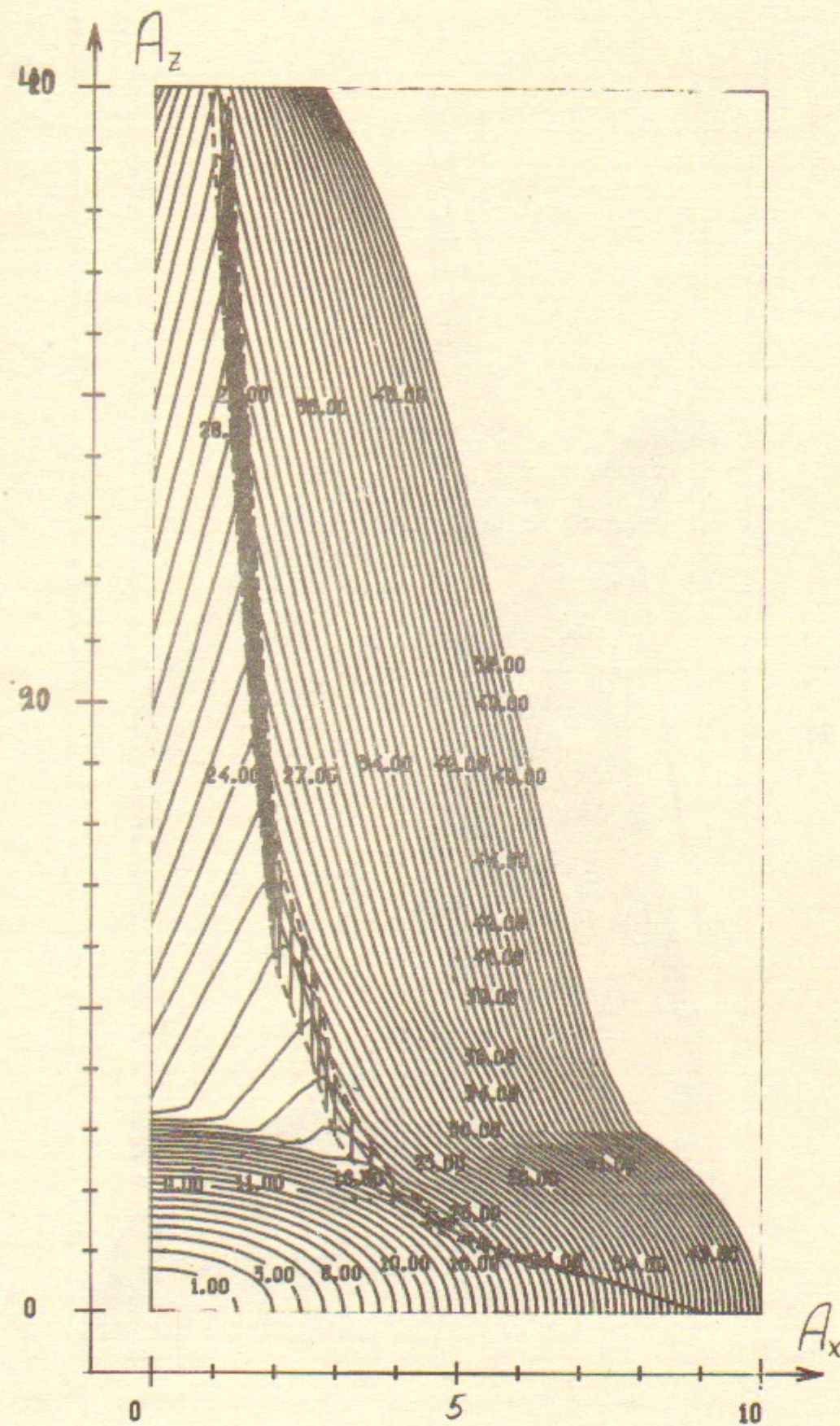
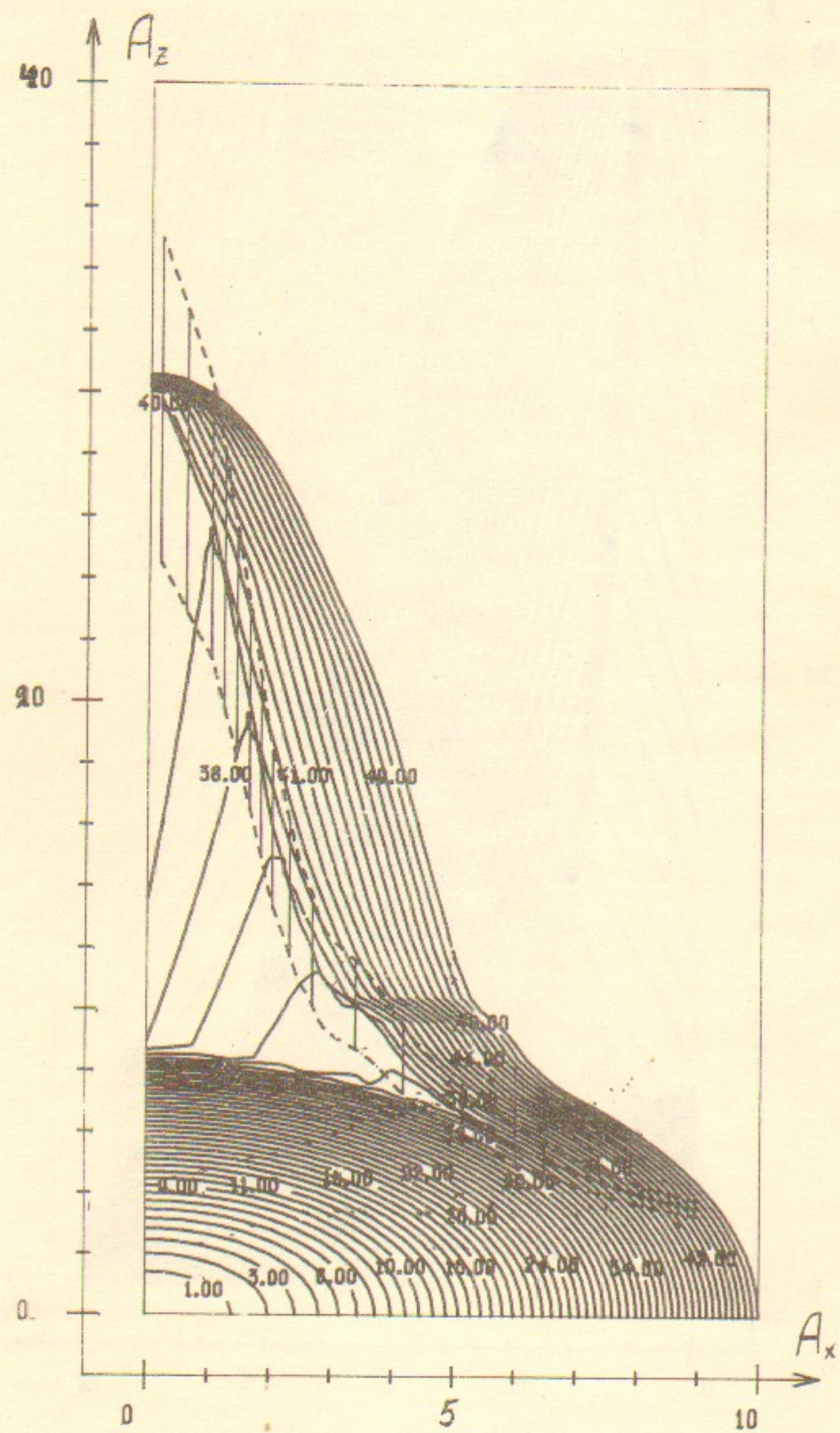
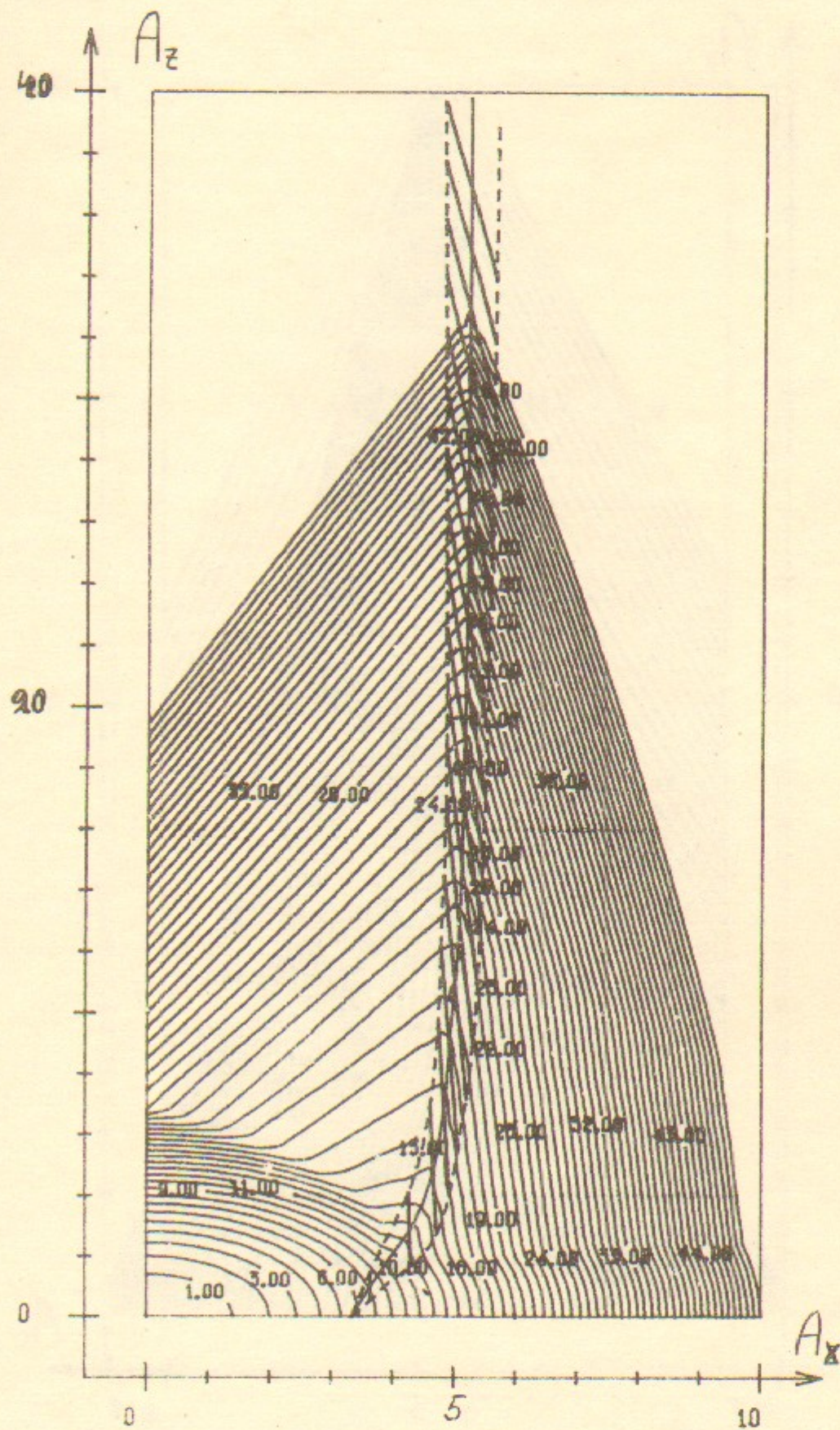


Рис. 16. $l=2, m=8$.



Puc. 17. $l=0, m=10$.



Puc. 18. $l=8, m=-2$.

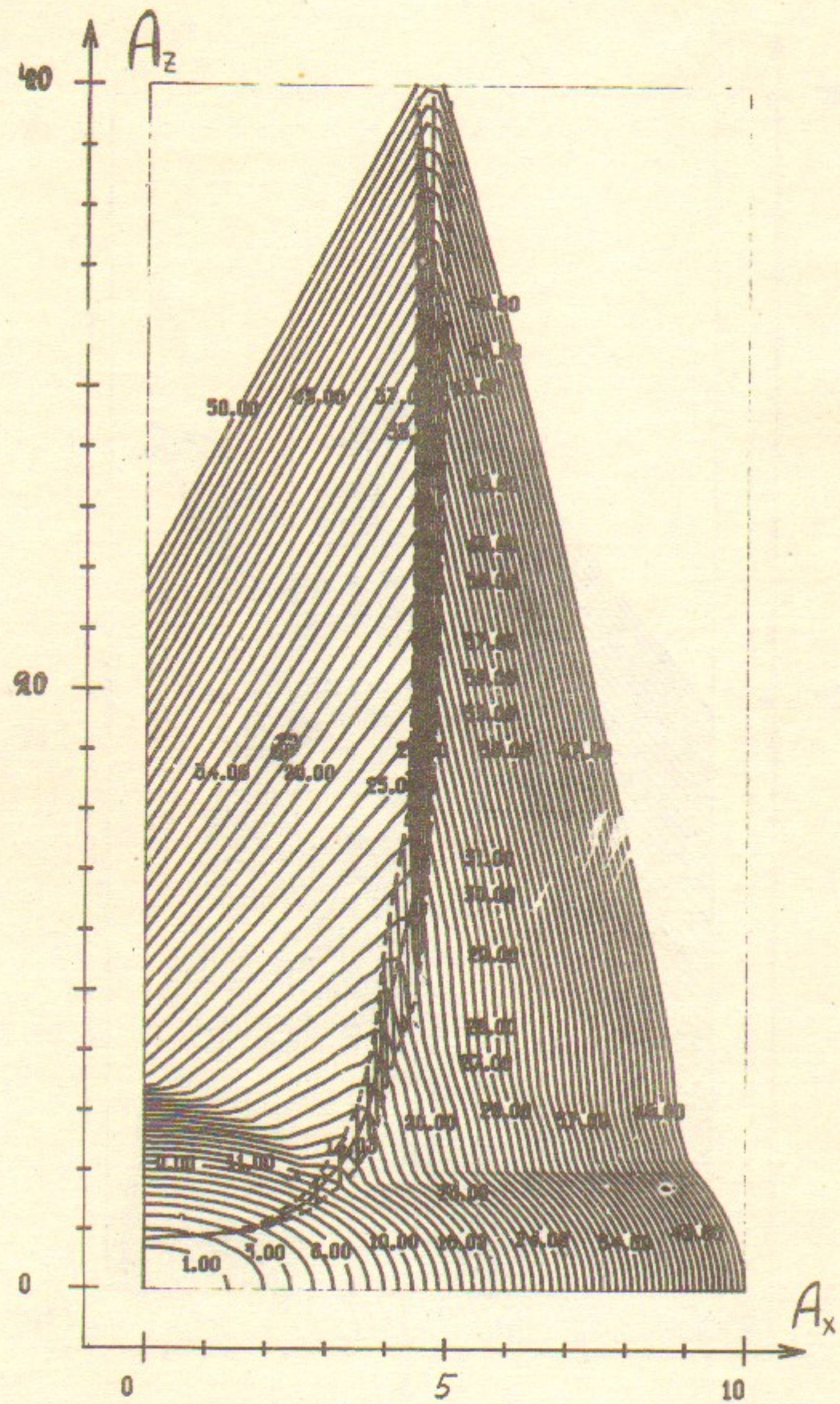


Рис. 19. $l=6, m=-4$.

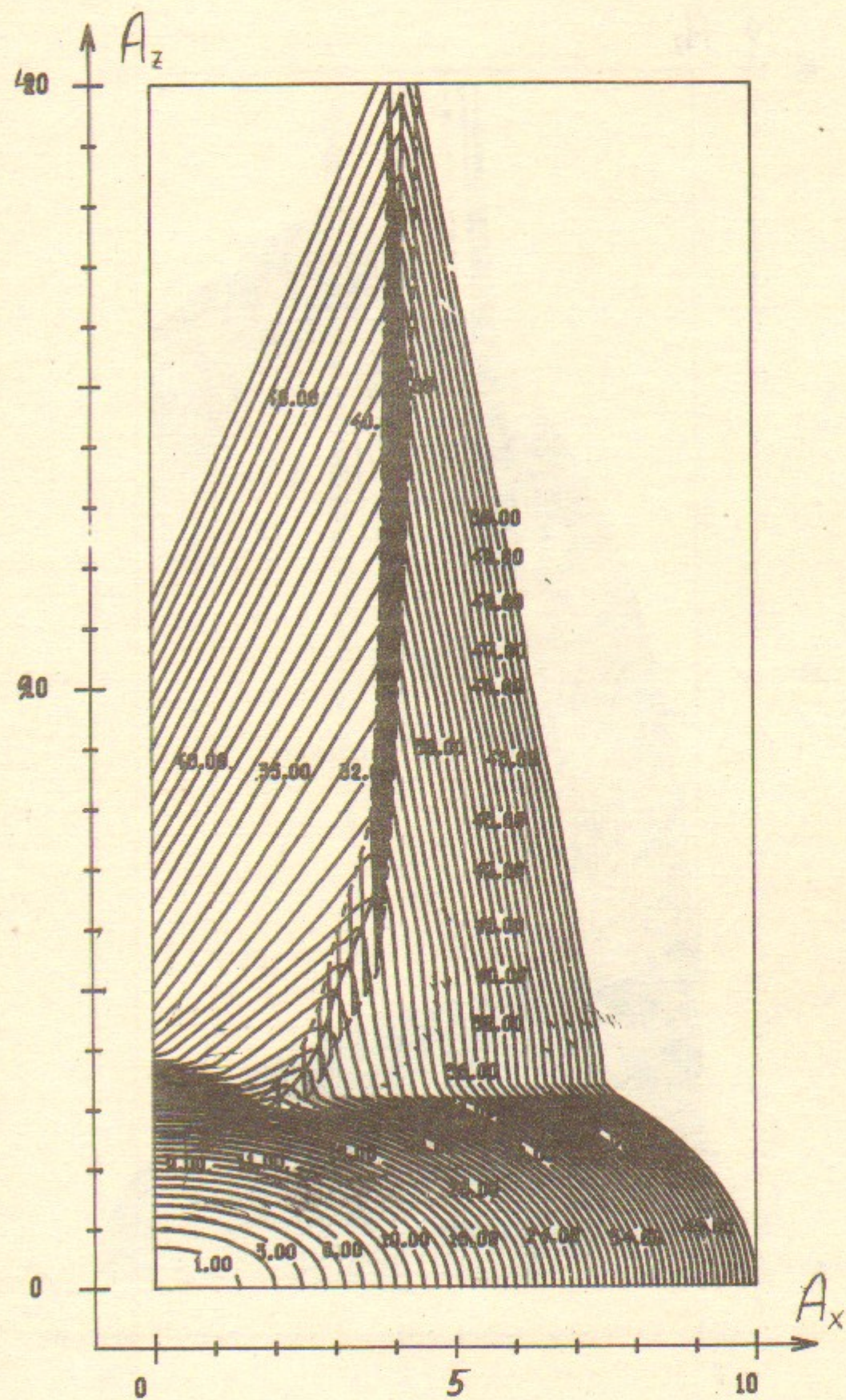


Рис. 20. $l=4, m=-6$.

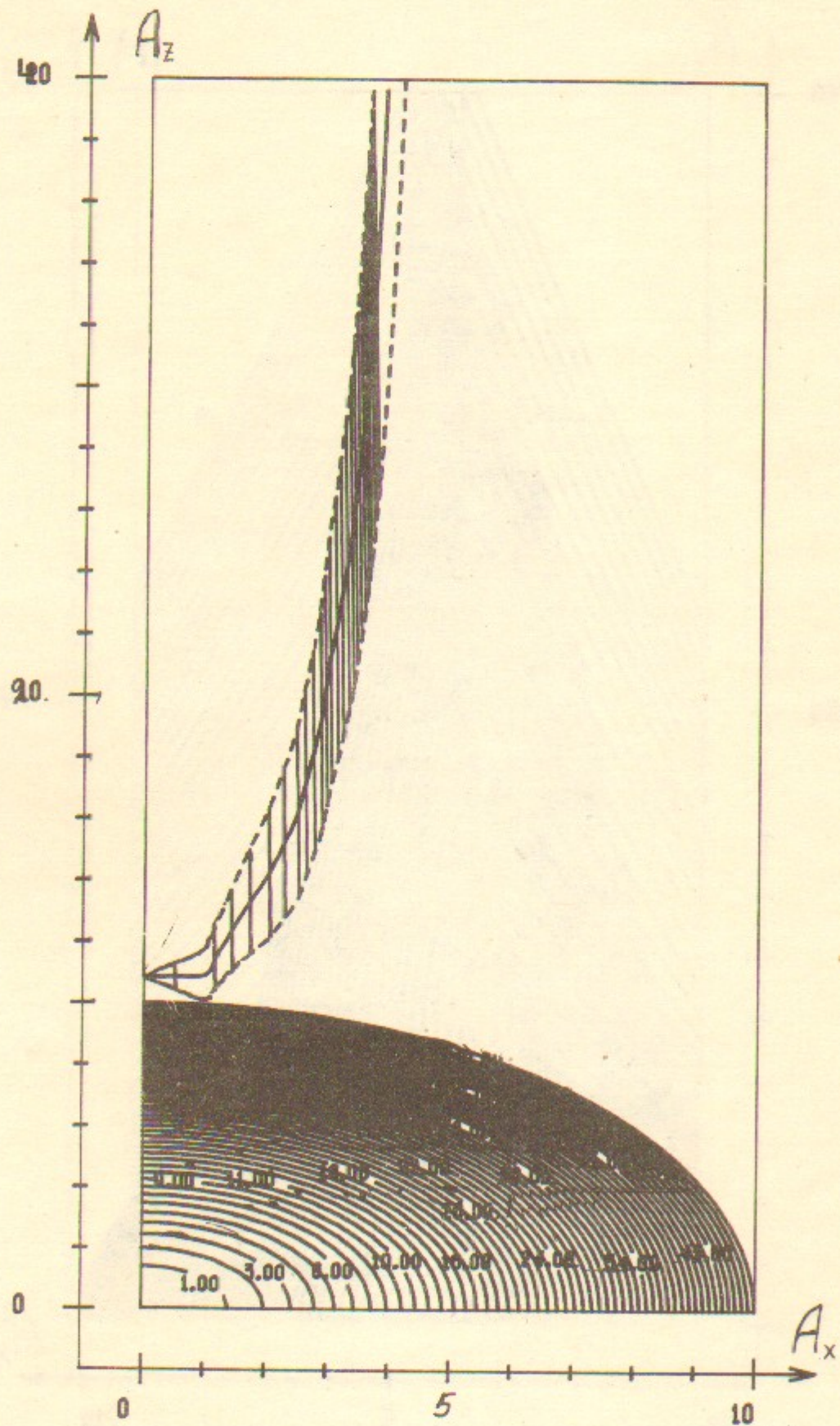


Рис. 21. $l=2, m=-8$.

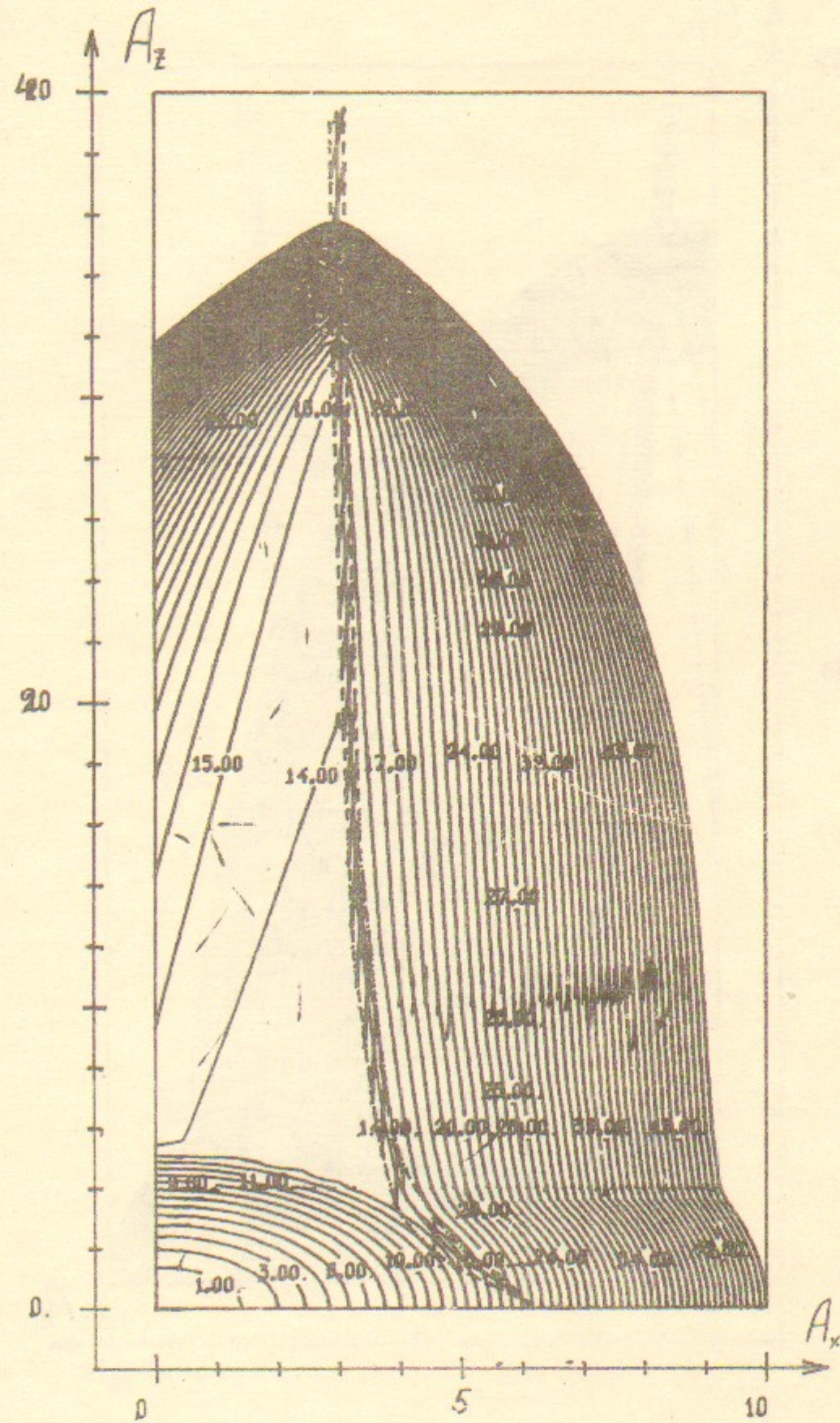


Рис. 22. $l=6, m=4$.

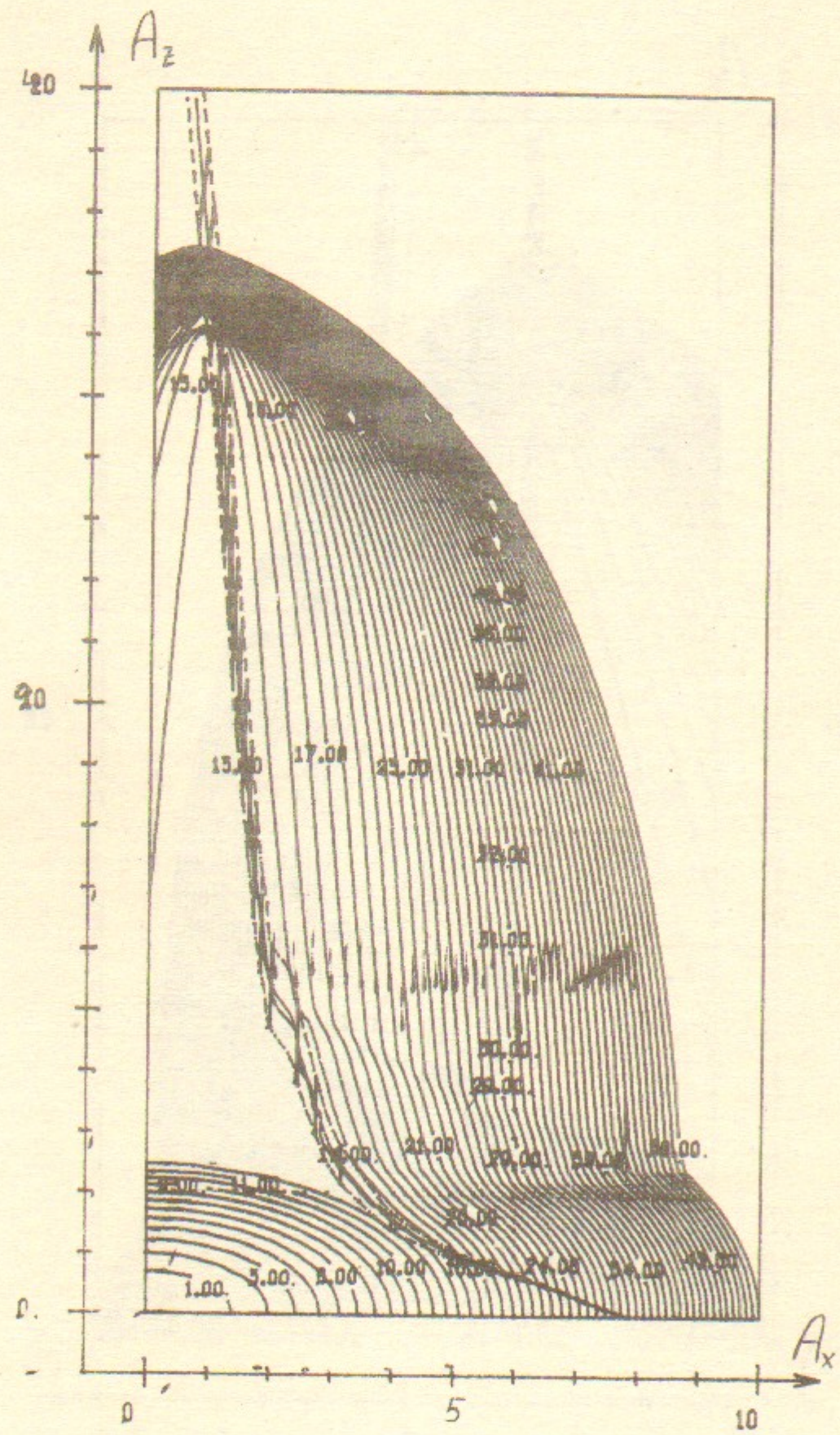


Рис. 23. $l=2, m=8$.

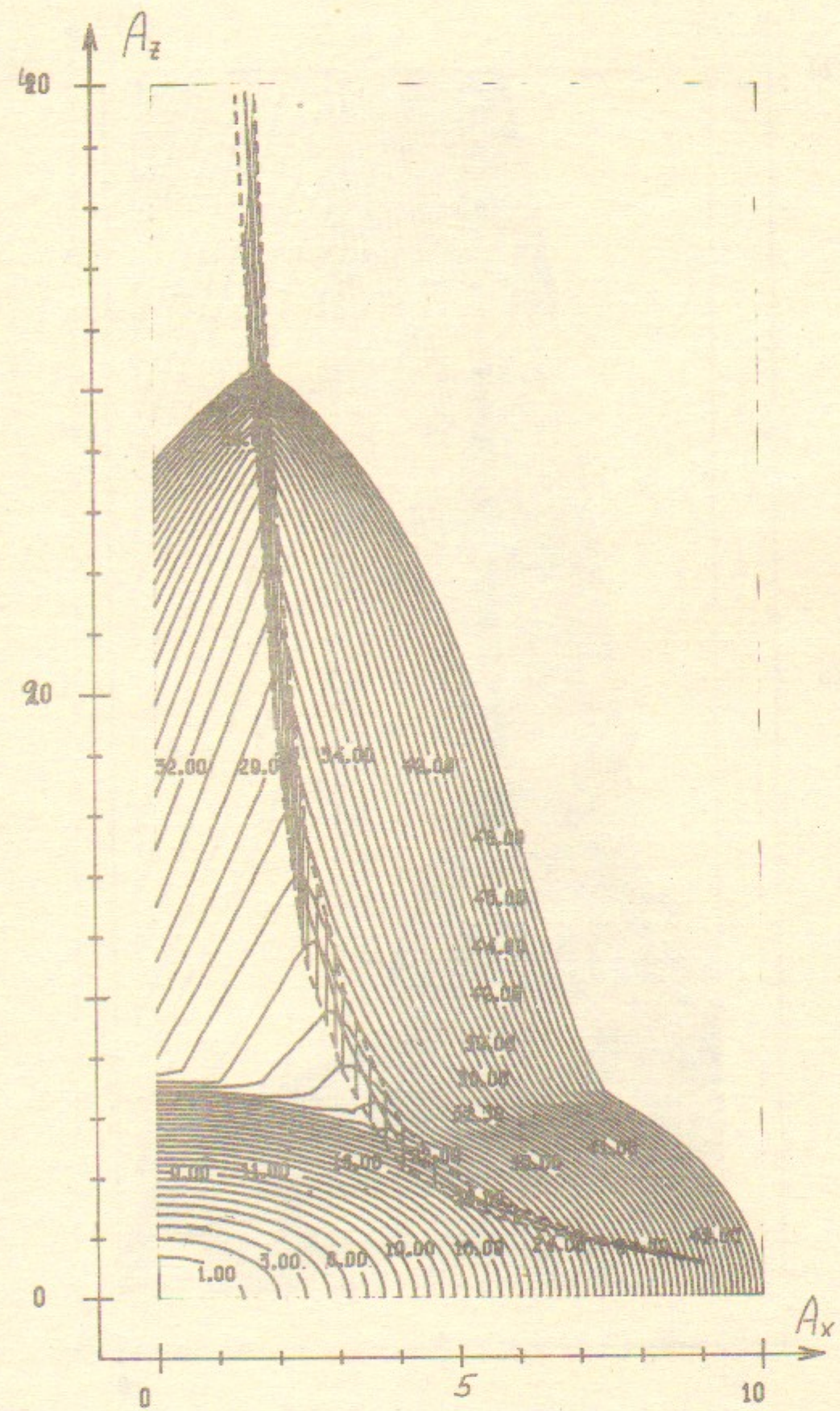


Рис. 24. $l=2, m=8$.

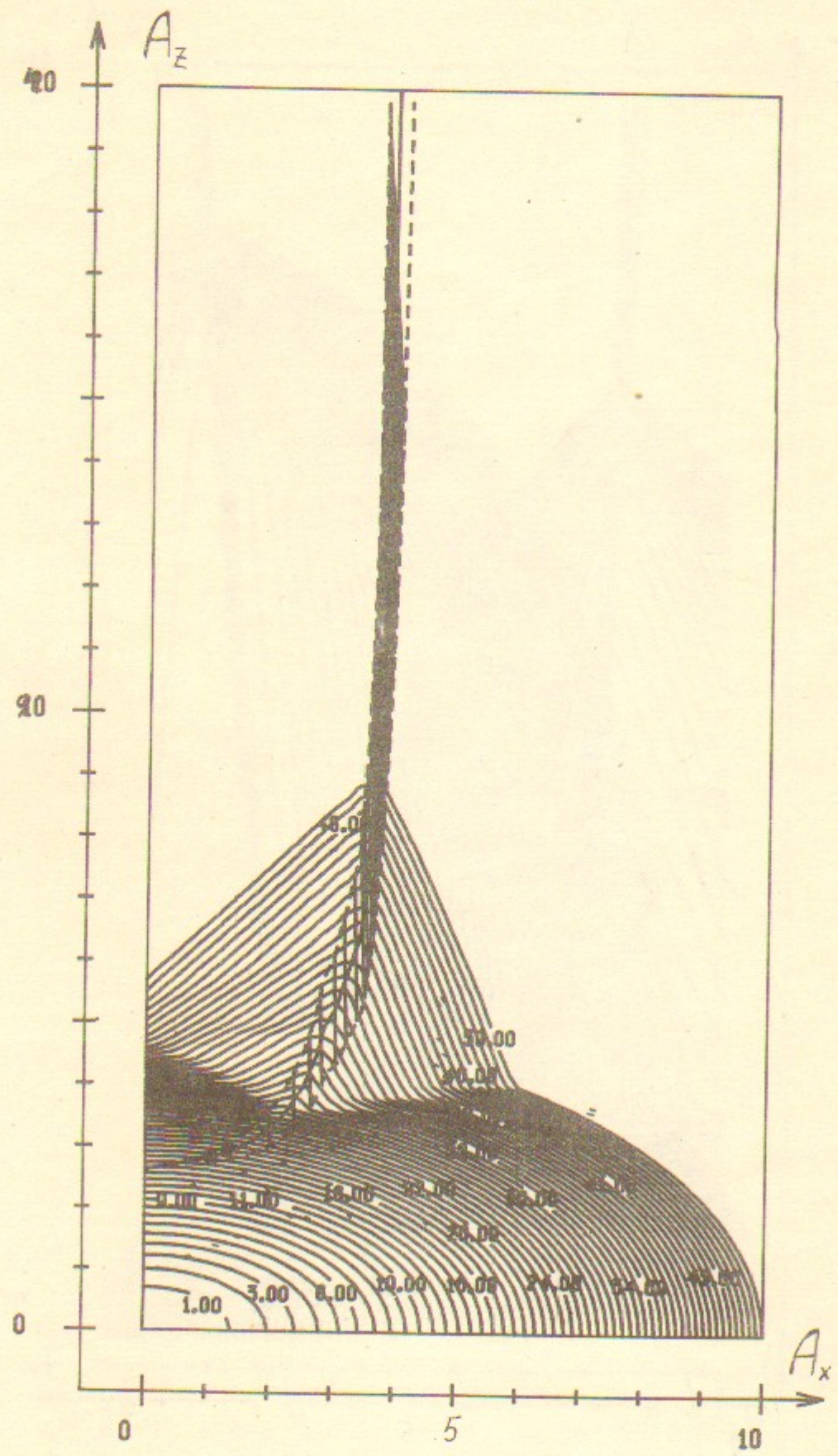


Рис. 25. $l=4, m=-6$.

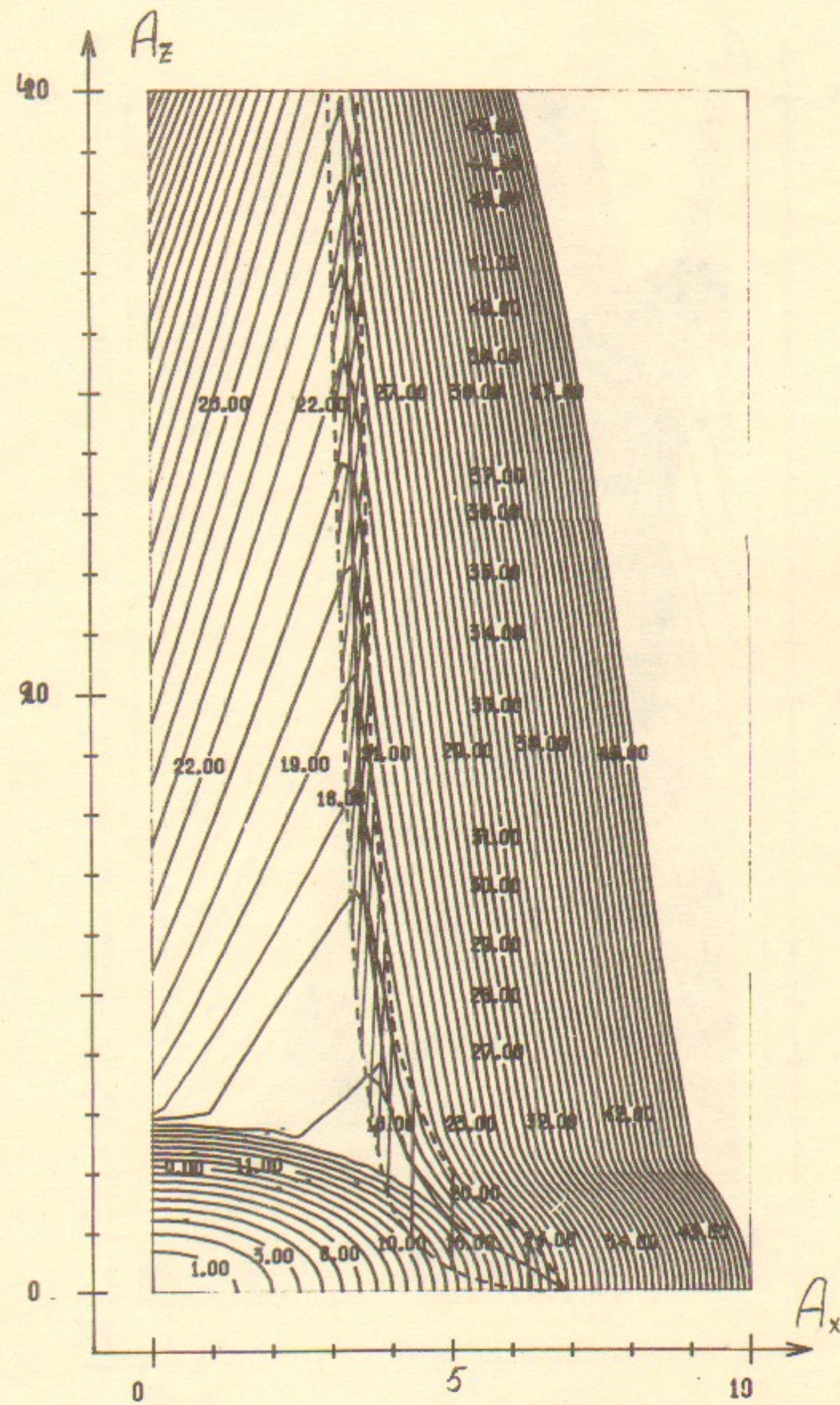


Рис. 26. $l=6, m=2$.

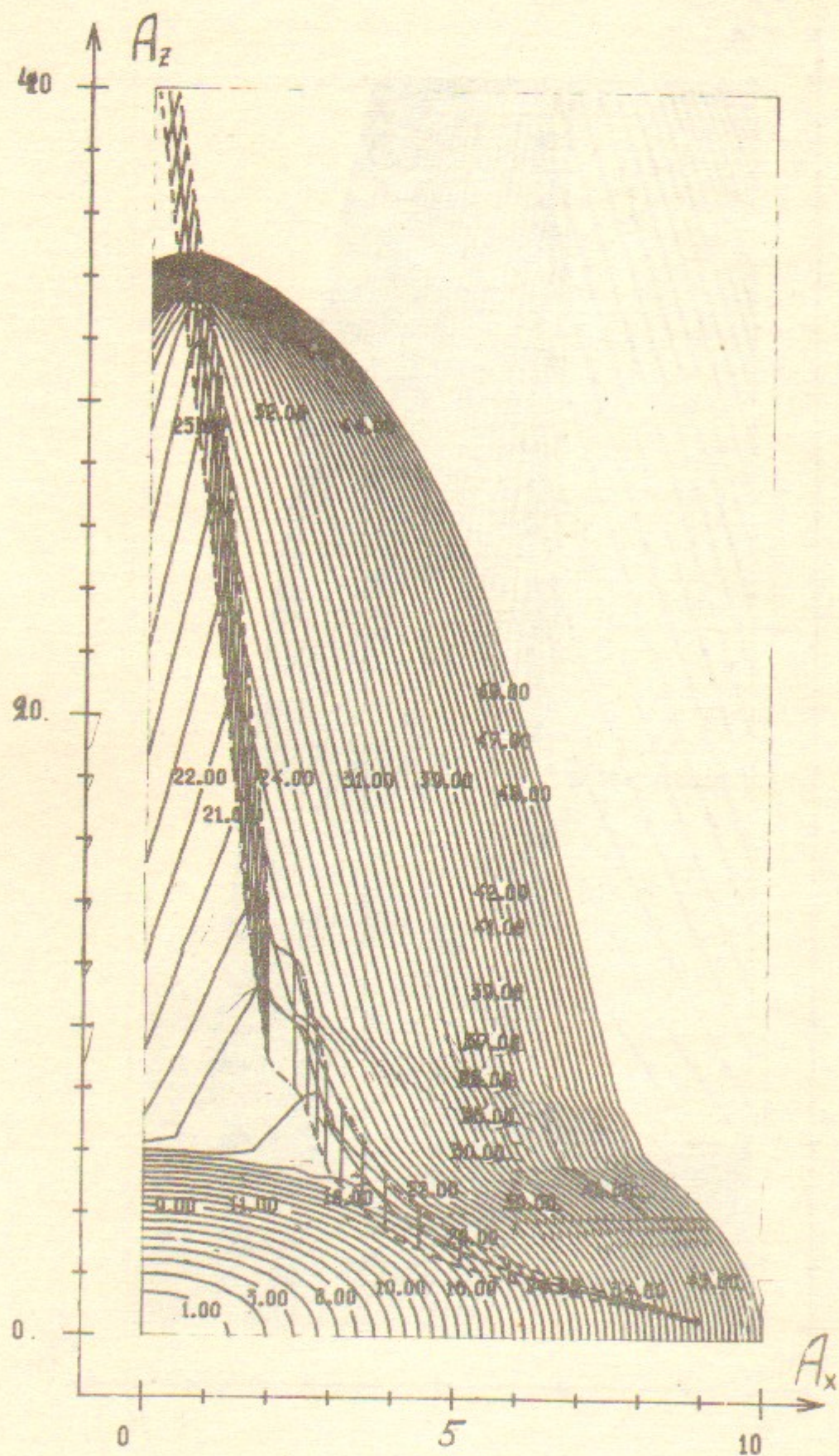


Рис. 27. $l=2, m=6$.

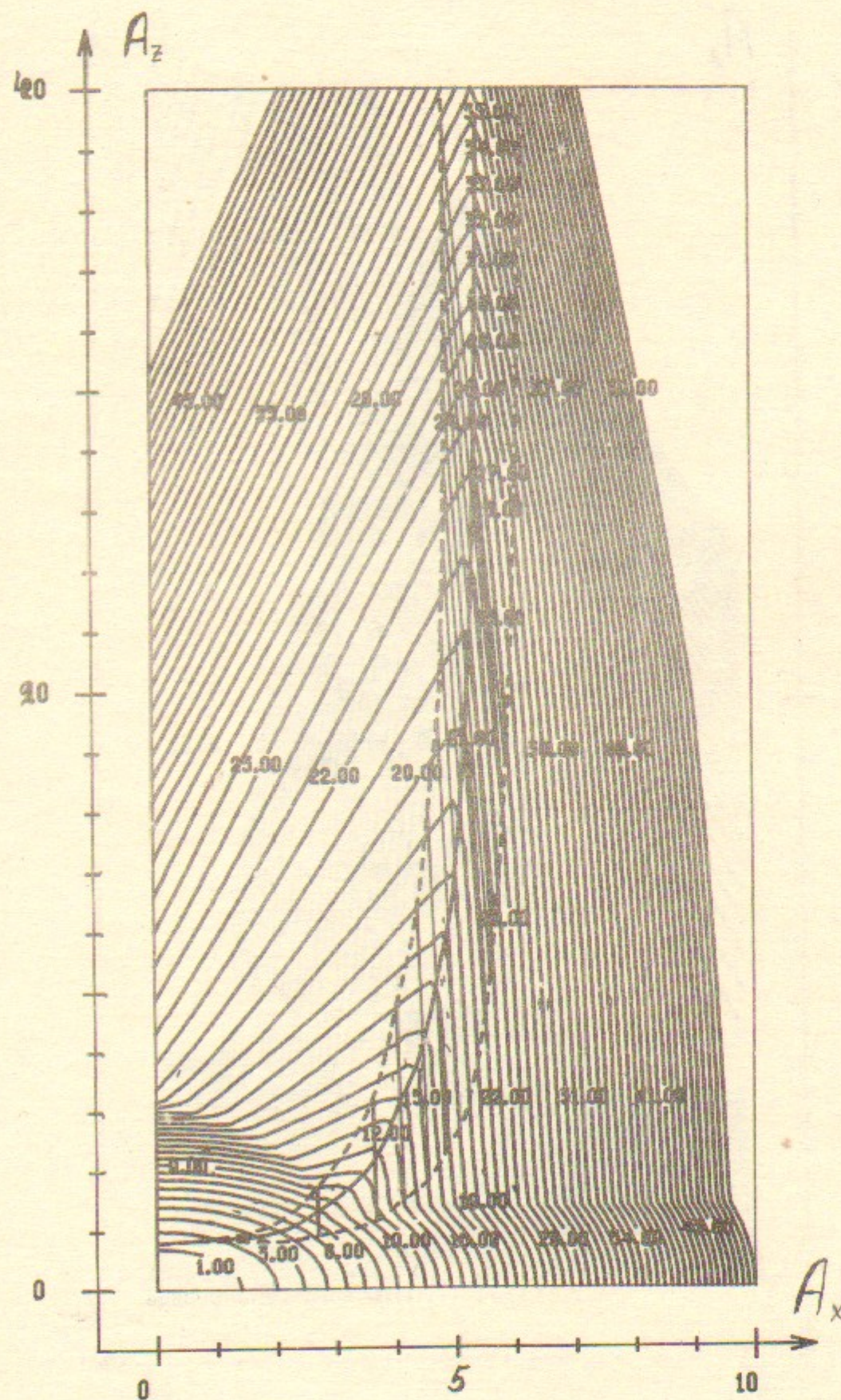
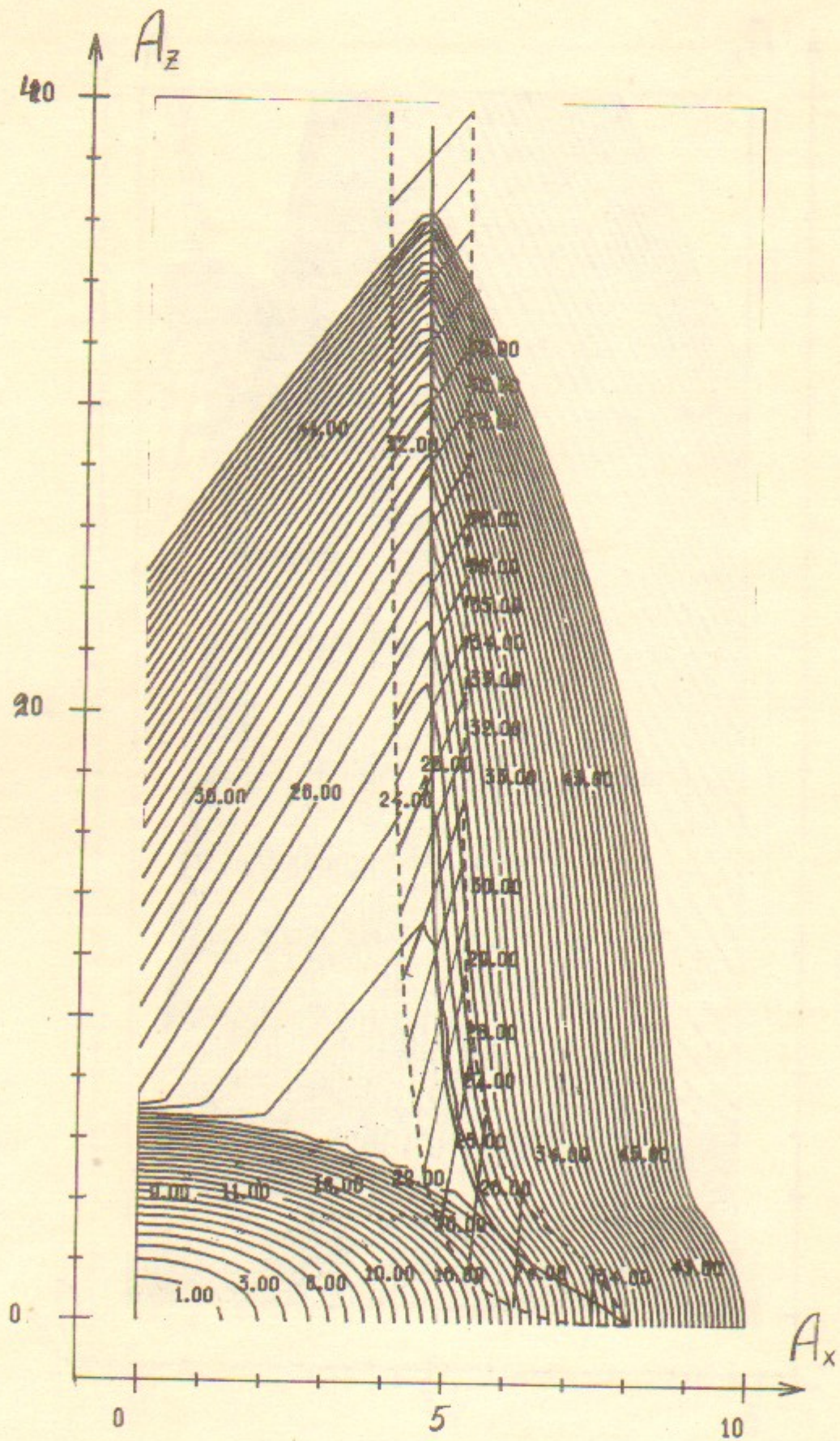
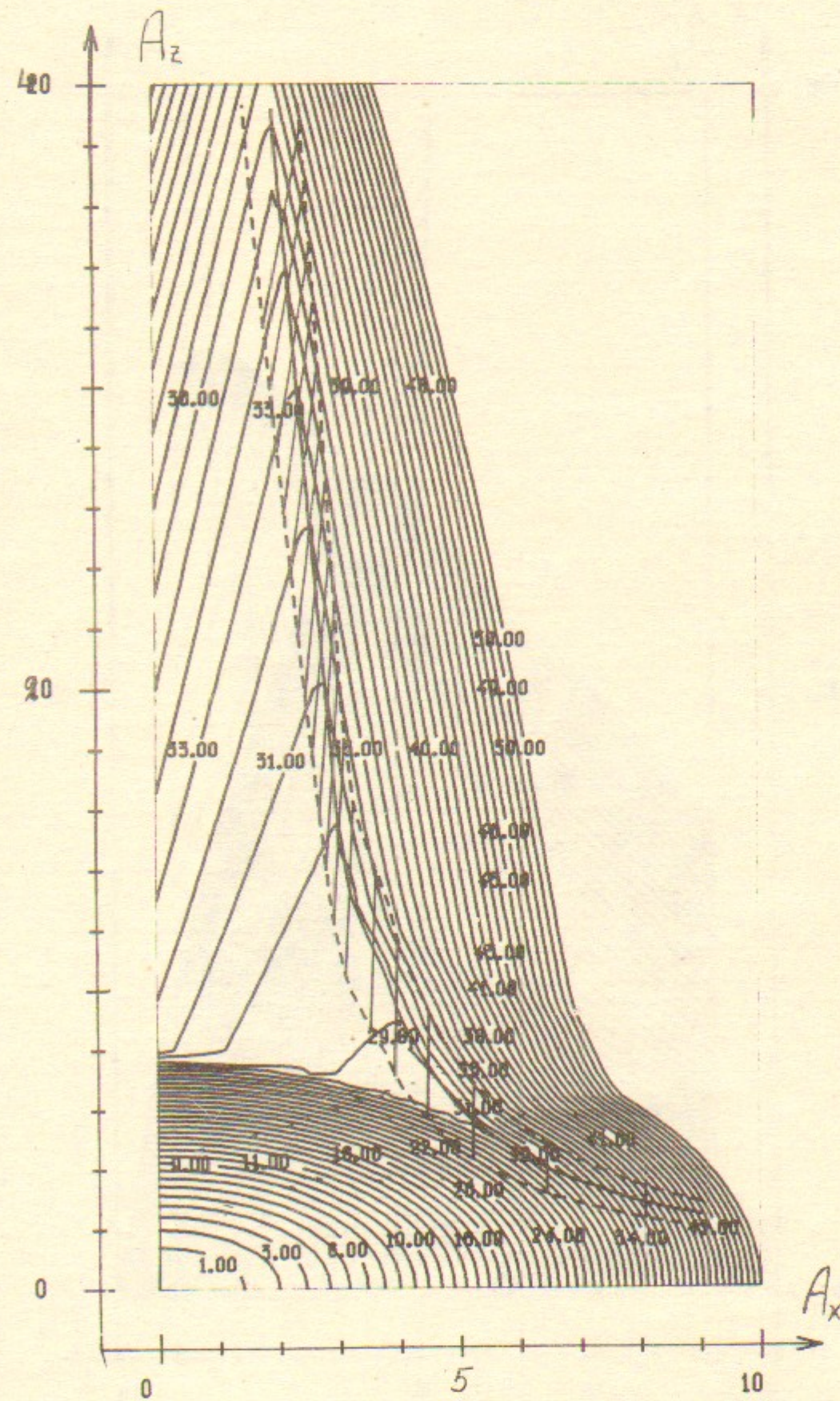


Рис. 28. $l=6, m=-2$.



Puc. 29. $l=6, m=2$.



Puc. 30. $l=2, m=6$.

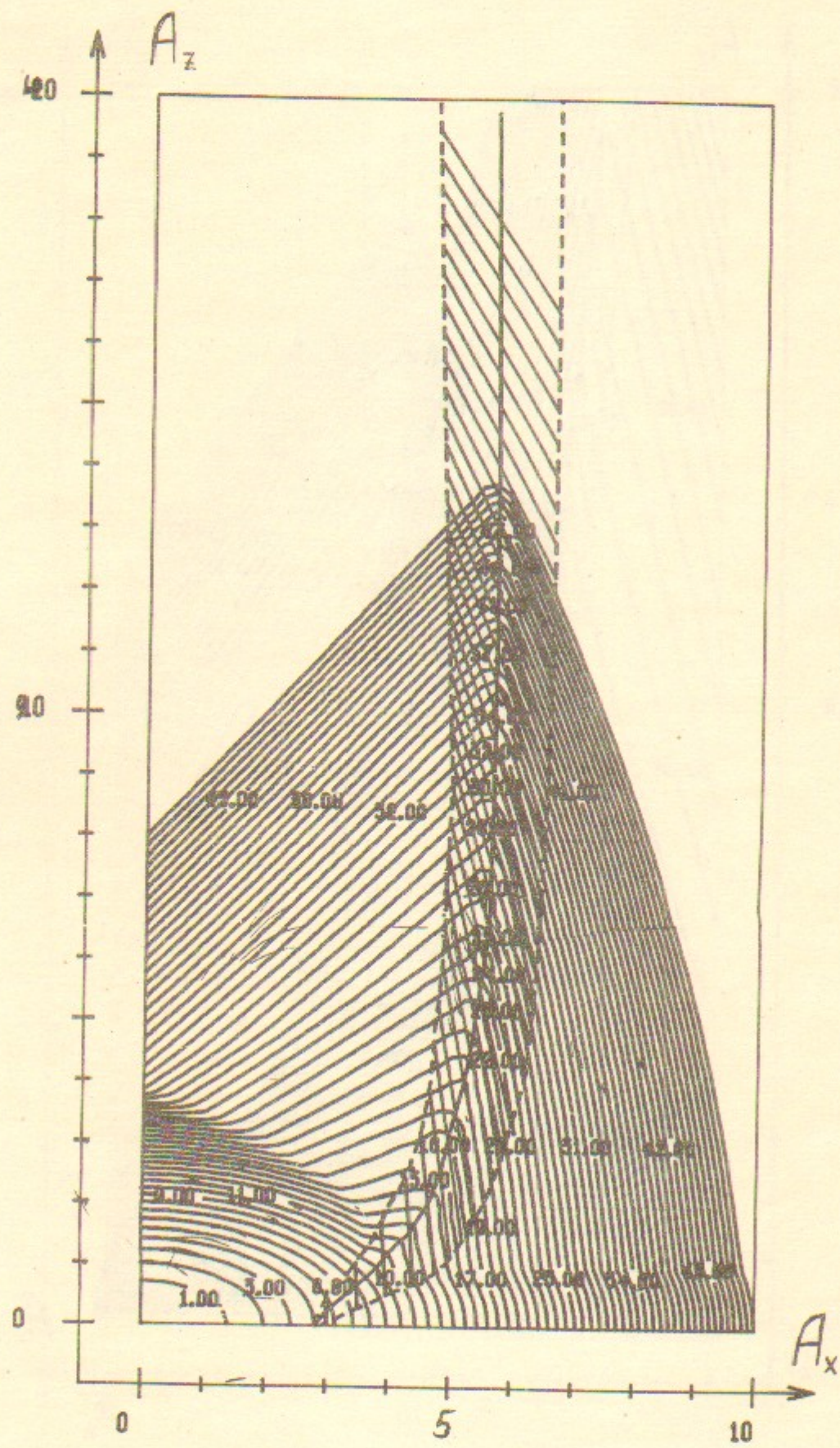


Рис. 31. $l=6, m=-2$.

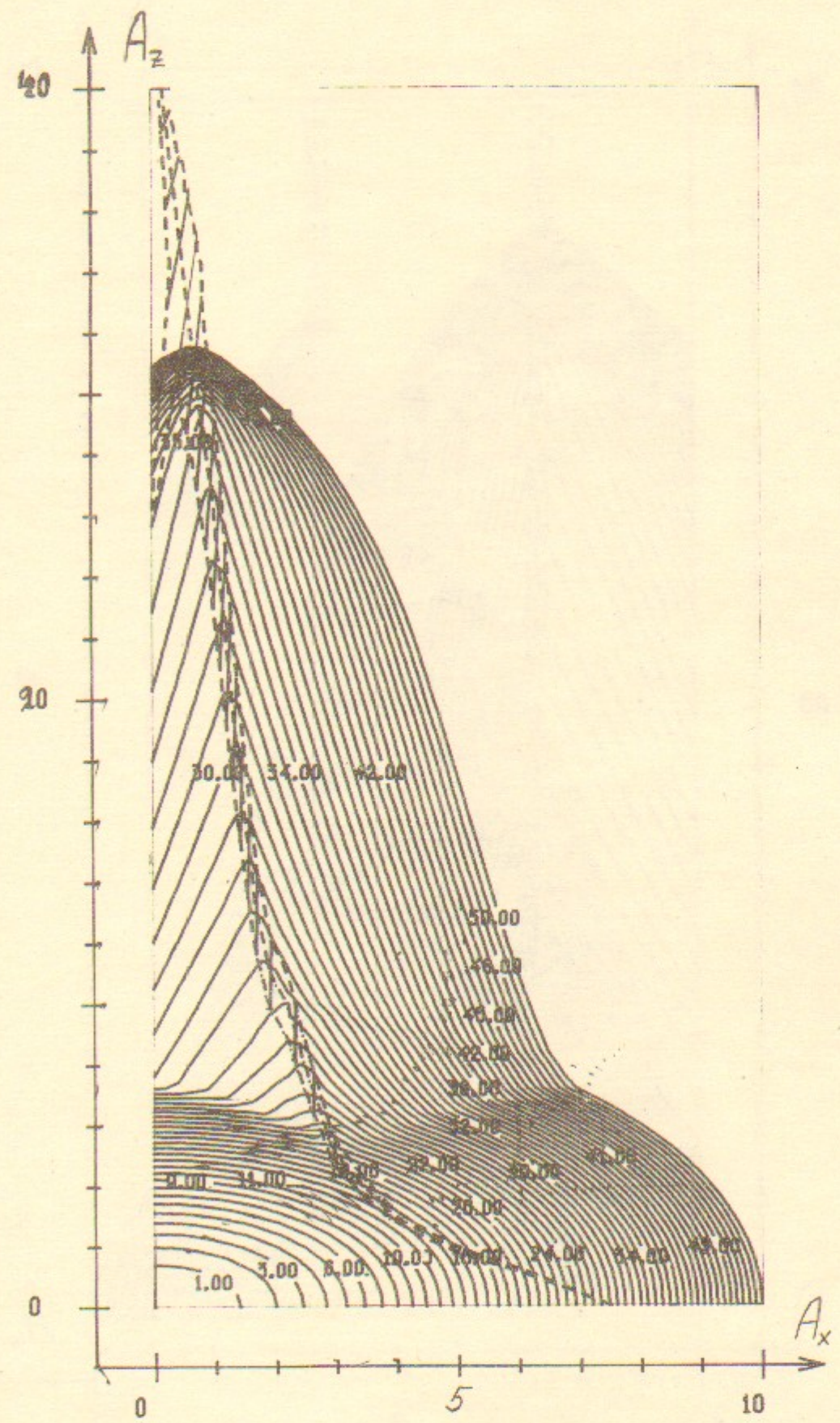


Рис. 32. $l=1, m=4$.

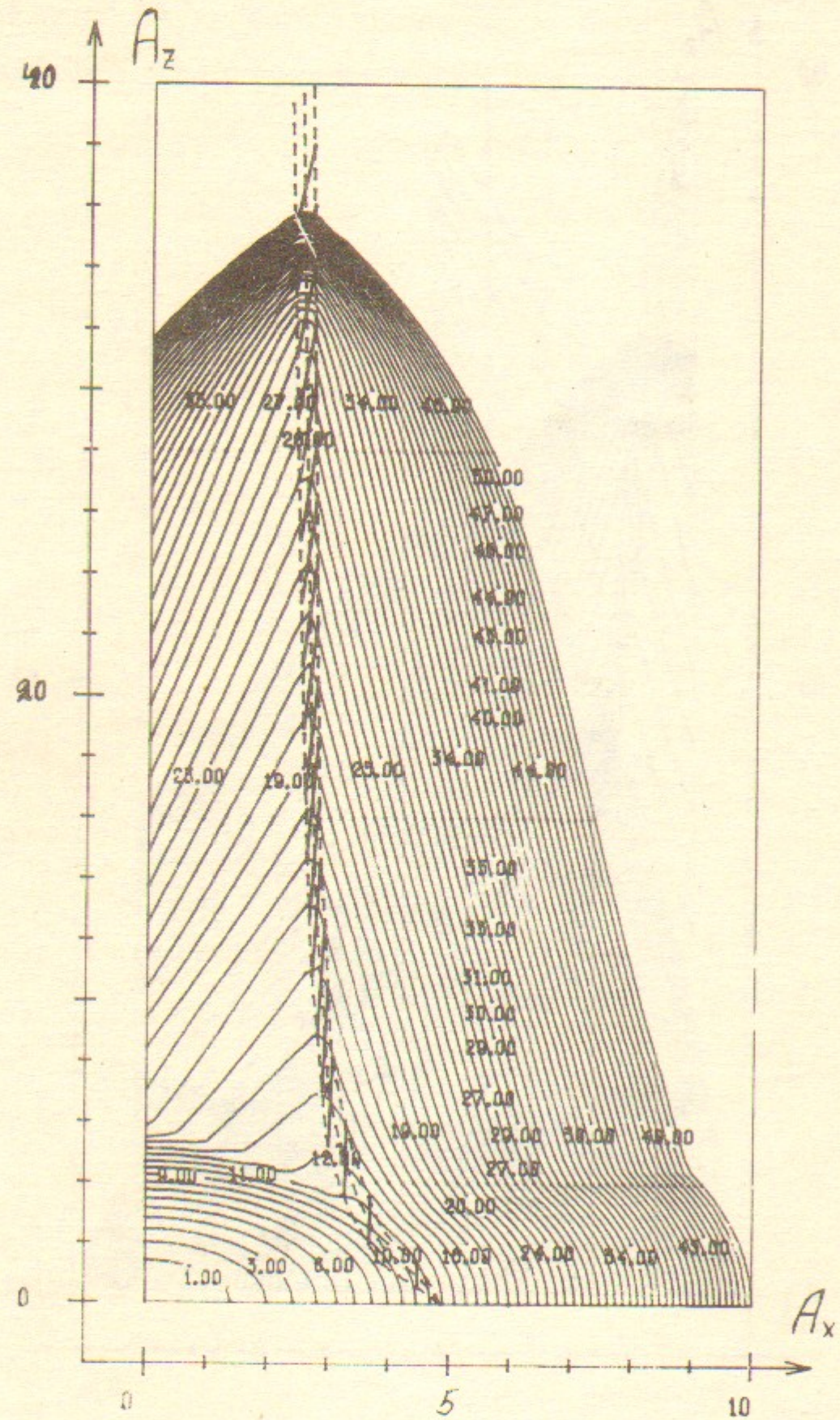


Рис. 33. $l=3, m=2$.

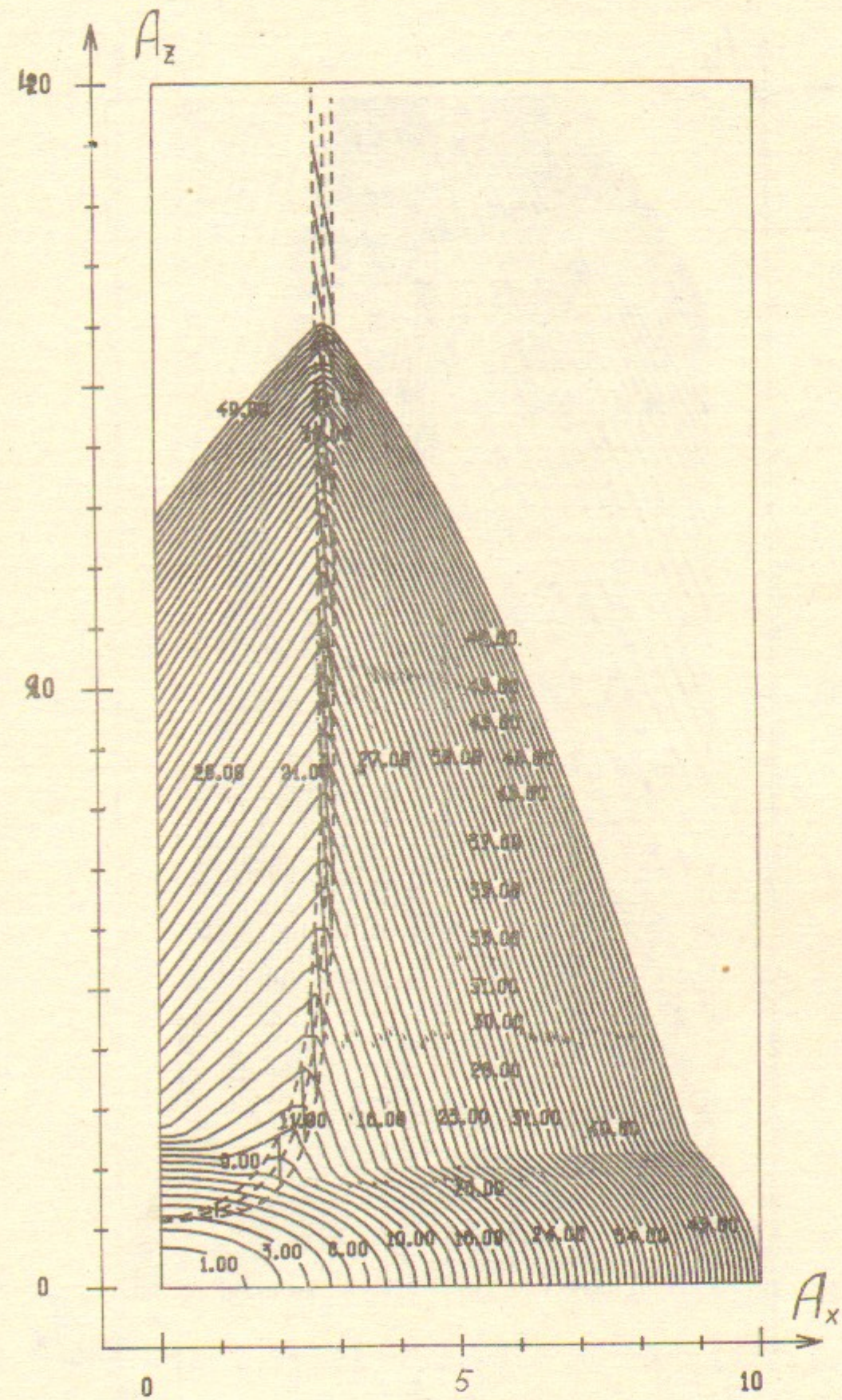


Рис. 34. $l=3, m=-2$.

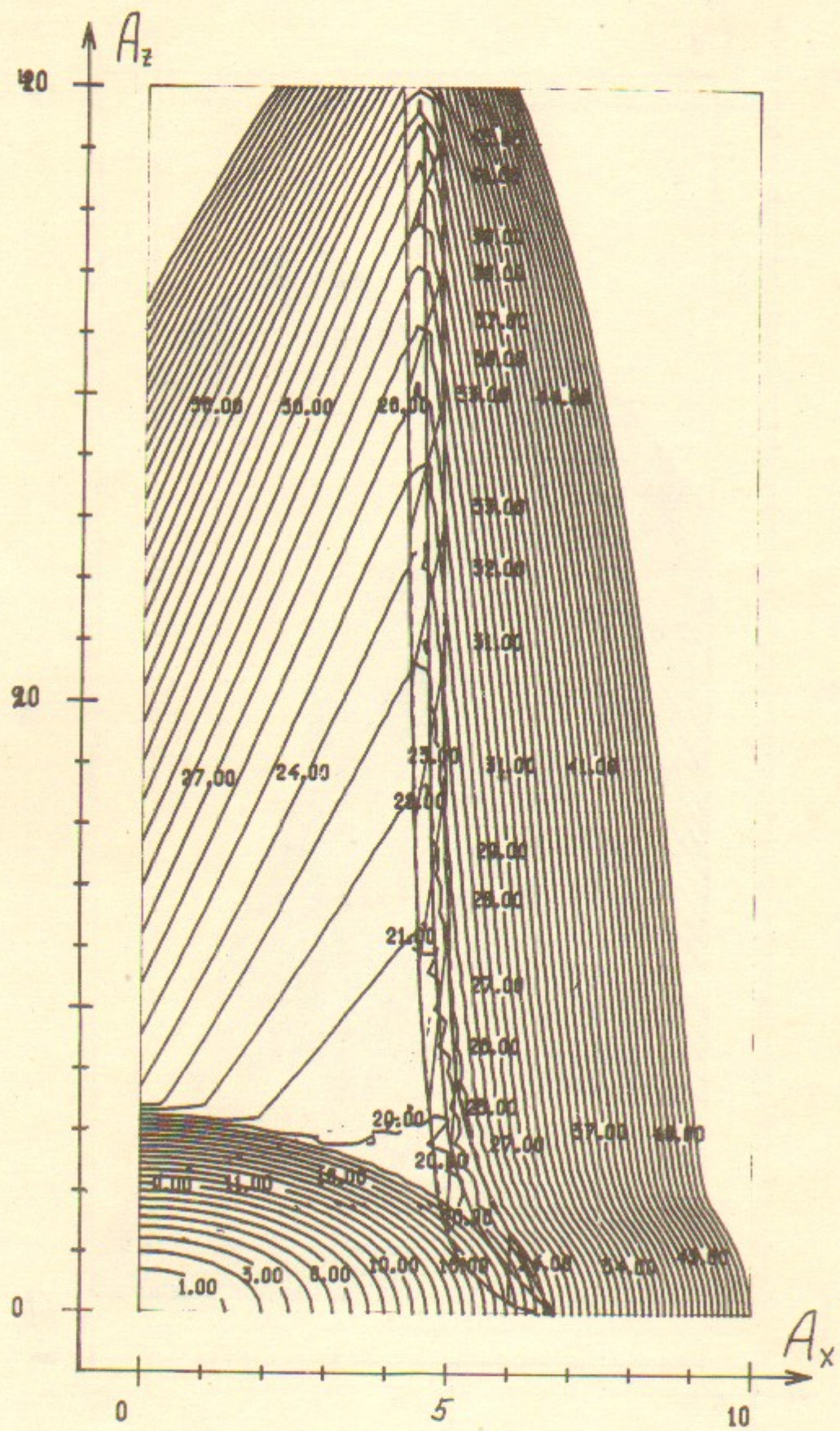


Рис. 35. $l=8, m=2$.

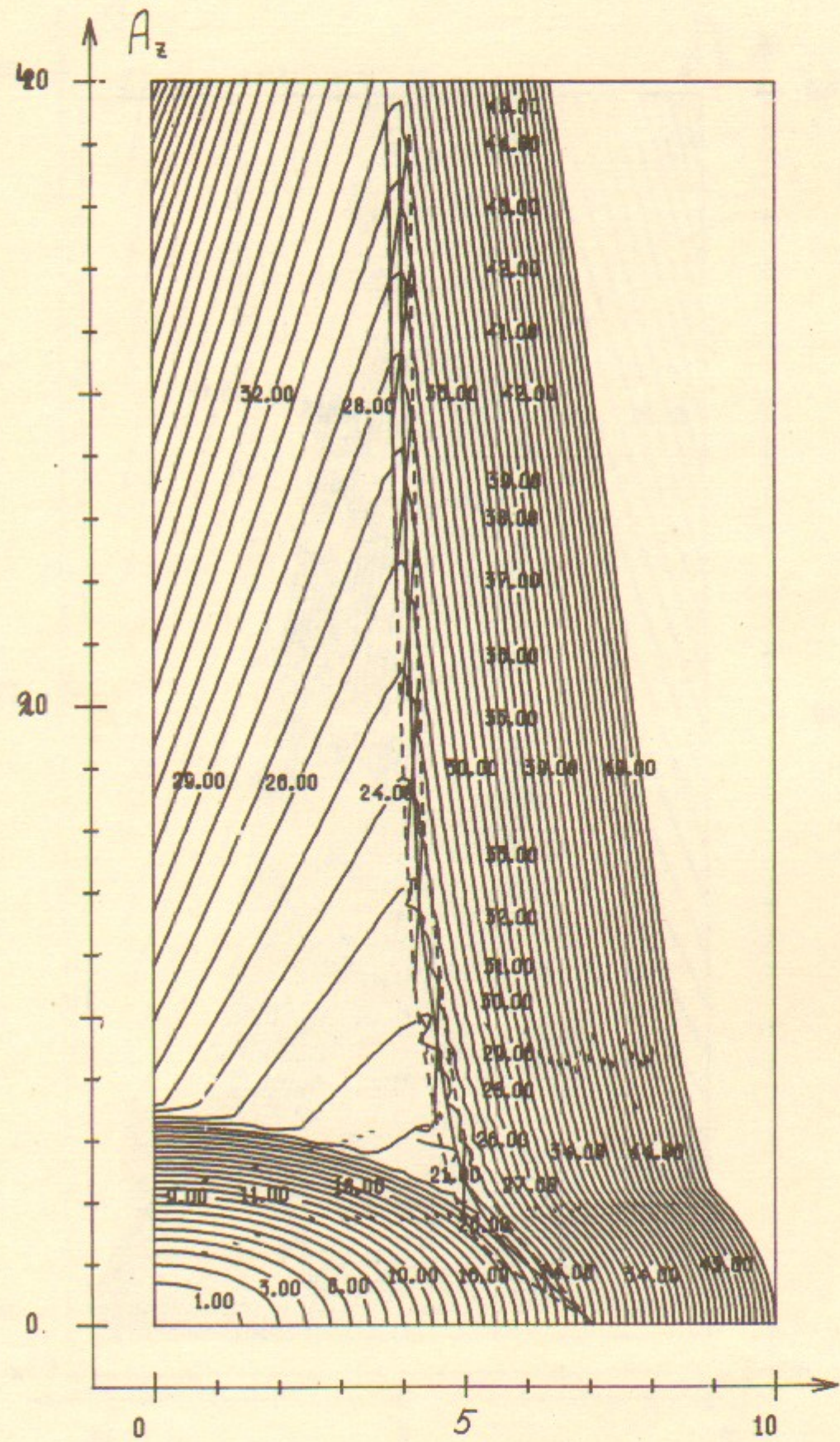


Рис. 36. $l=6, m=4$.

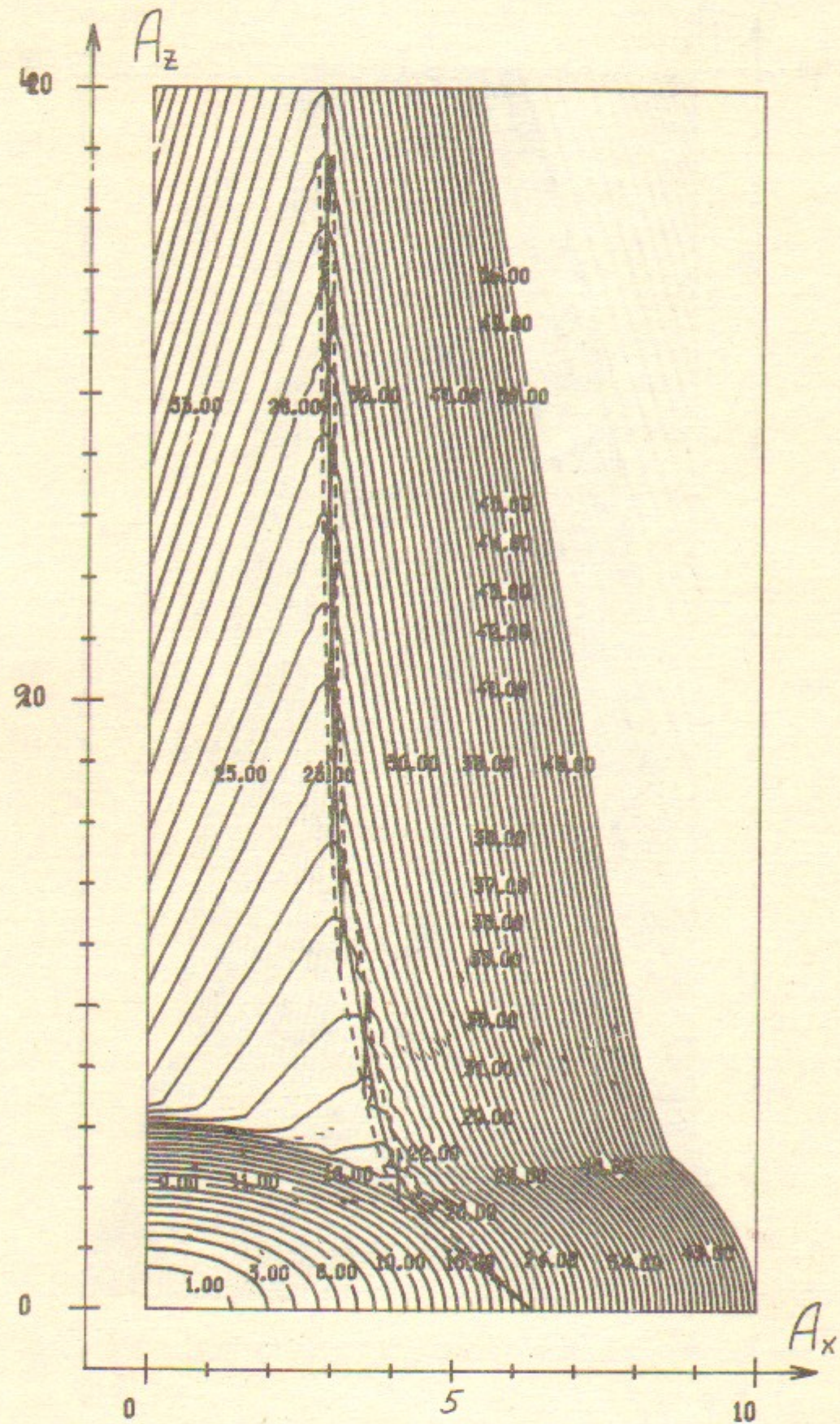


Рис. 37. $l=4, m=6$.

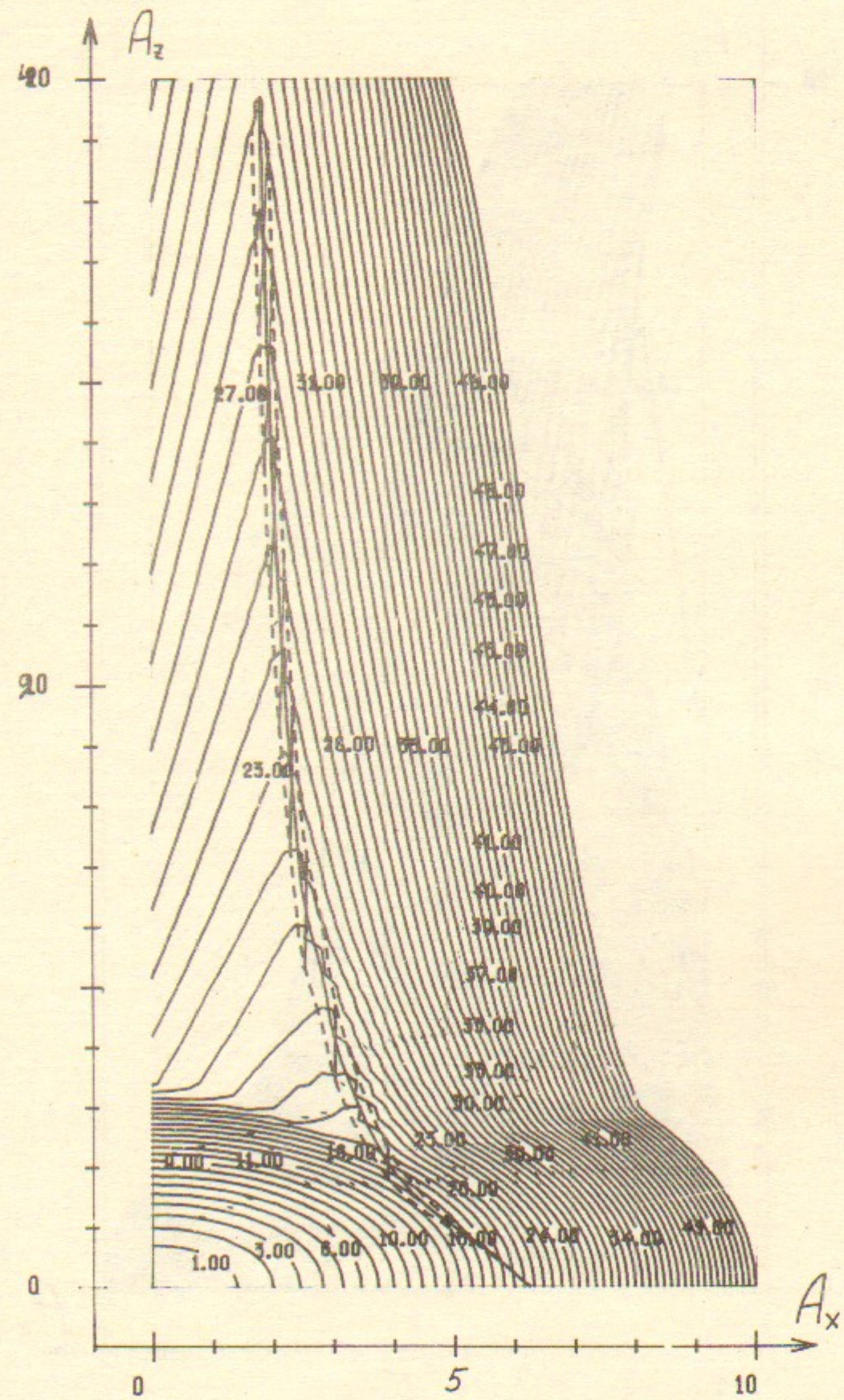


Рис. 38. $l=2, m=8$.

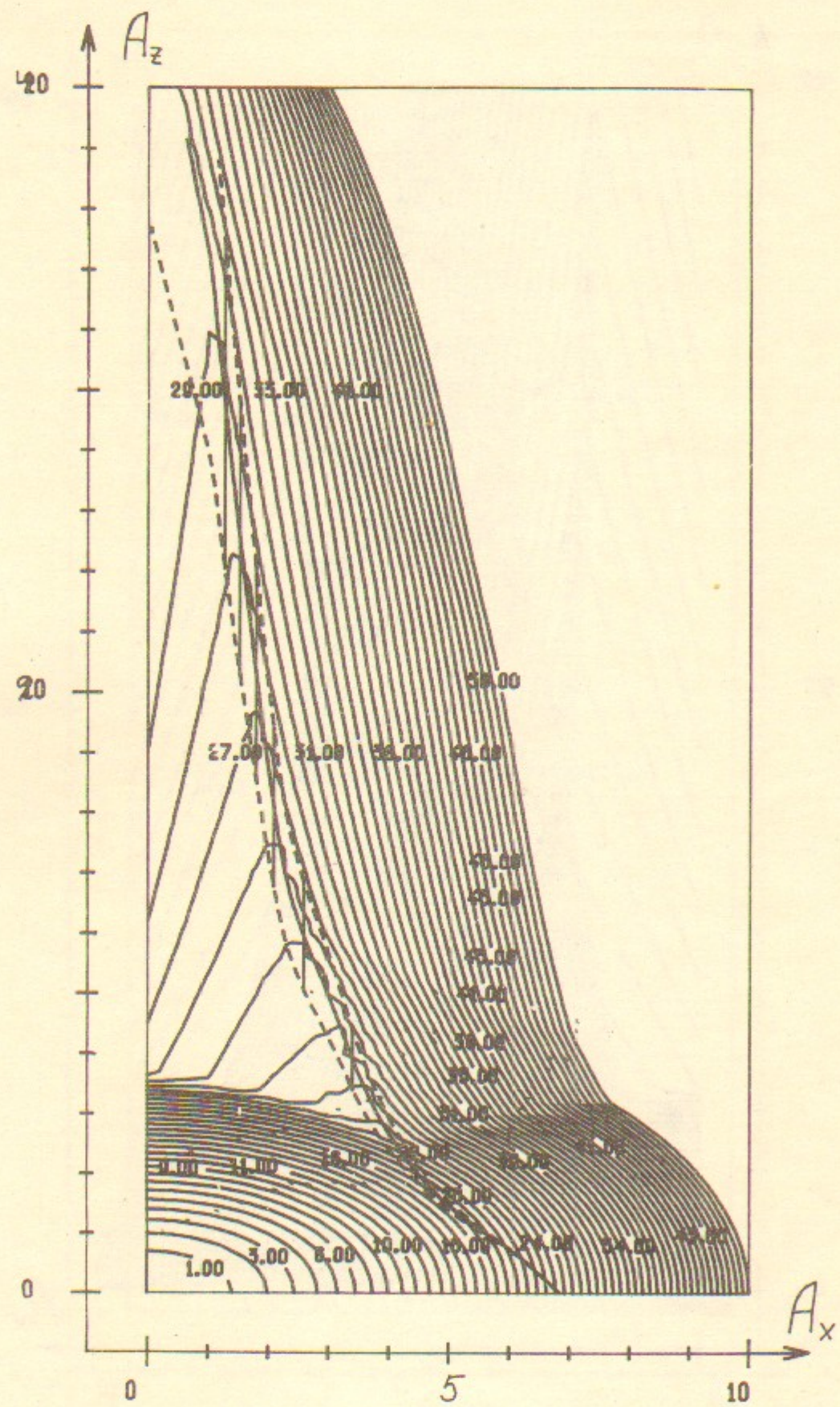


Рис. 39. $l=0, m=10$.

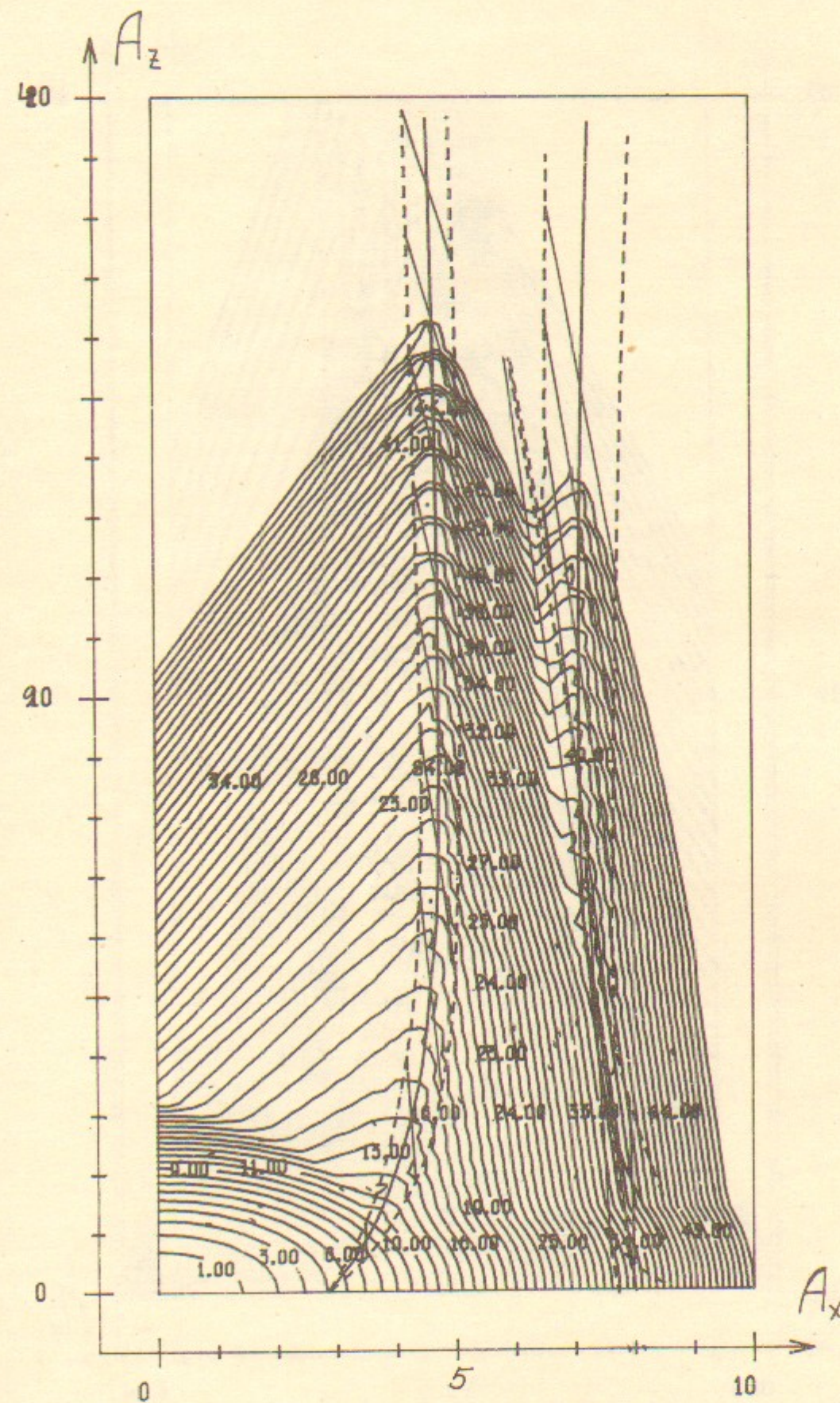


Рис. 40. $l=8, m=-2$.

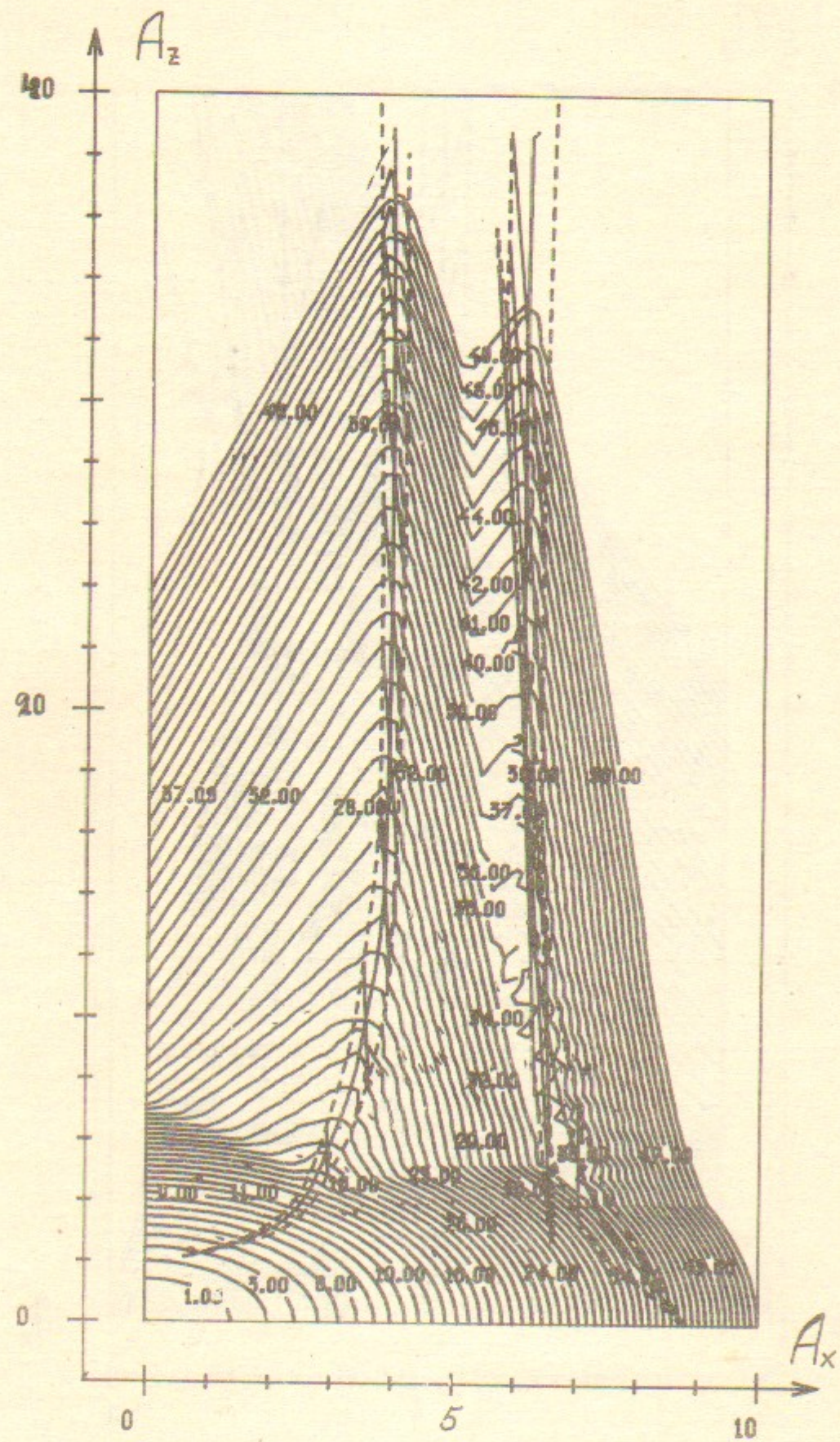


Рис. 41. $l=6, m=-4$.

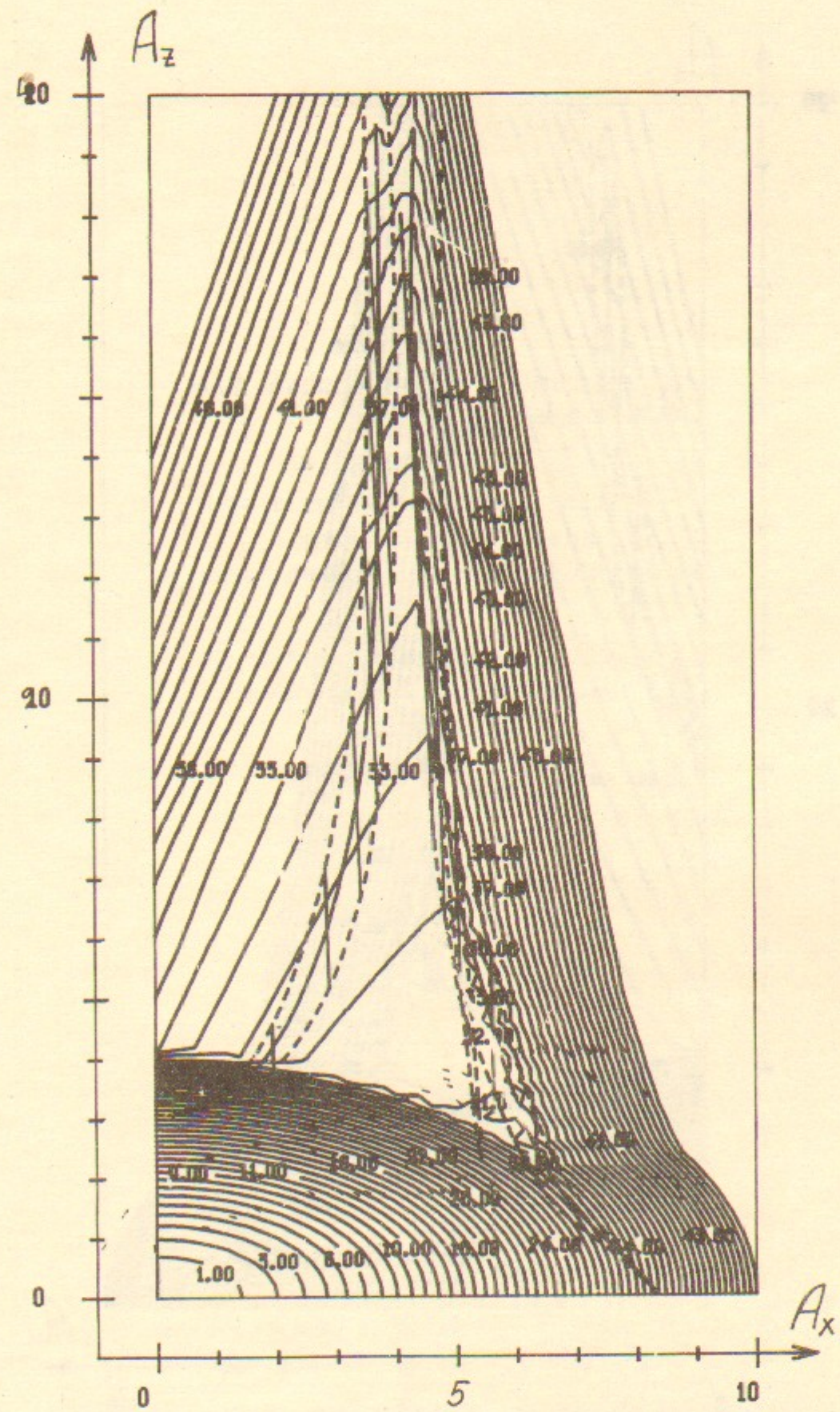


Рис. 42. $l=4, m=-6$.

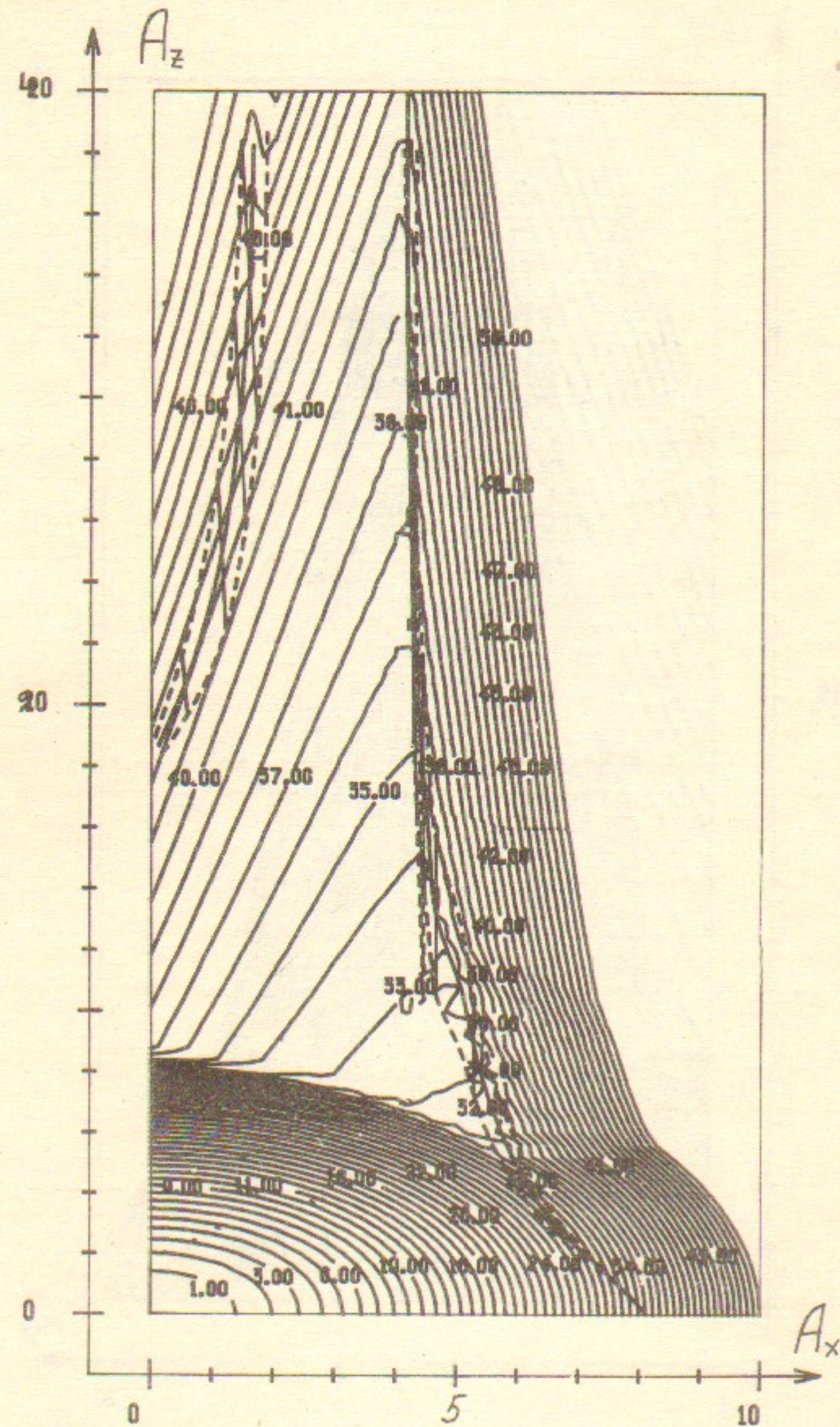


Рис. 43. $l=2$, $m=-8$.

А.Л. Герасимов, Н.С. Диканский

Фазовая конвекция
при встречном взаимодействии
и время жизни пучков
в электрон-позитронных накопителях

II. Ограничение времени жизни
отдельными нелинейными
резонансами

Ответственный за выпуск С.Г. Попов

Работа поступила 24 июня 1988 г.
Подписано в печать 13.07.88 г. МН 00463
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 3,9 печ.л., 3,0 уч.-изд.л.
Тираж 230 экз. Бесплатно. Заказ № 97

Набрано в автоматизированной системе на базе фото-
наборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и
отпечатано на ротапринте Института ядерной физики
СО АН СССР,
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.