

М.19
ИЯФ 1990

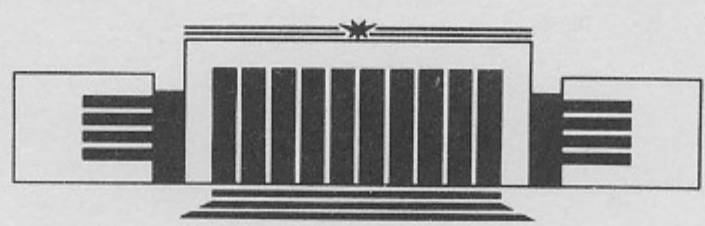
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

В.М. Малкин, В.Н. Худик, М.П. Федорук

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕЖИМЫ
СВЕРХЗВУКОВОГО КОЛЛАПСА
ЛЕНГМЮРОВСКИХ ВОЛН

БИБЛИОТЕКА
Института ядерной
Физики СО АН СССР
ИМБ. № 2312

ПРЕПРИНТ 89-172



НОВОСИБИРСК

Автомодельные режимы сверхзвукового
коллапса ленгмюровских волн

В.М. Малкин, В.Н. Худик, М.П. Федорук

Институт ядерной физики
630090, Новосибирск 90, СССР

А Н Н О Т А Ц И Я

Предсказываемые теорией спектры сильной ленгмюровской турбулентности и ускоряемых ею электронов критическим образом зависят от ряда тонких свойств сверхзвукового автомодельного коллапса. Эти свойства едва ли уловимы на уровне упрощенных моделей, широко используемых для получения информации о решениях нелинейных уравнений захаровского типа. Прямое же вычисление автомодельных решений уравнений Захарова до сих пор было осуществлено лишь в весьма специальном случае центрально-симметричной (с точностью до малых поправок) каверны.

В настоящей работе построен широкий класс автомодельных режимов сверхзвукового коллапса ленгмюровских волн. Особое внимание уделено режимам с заселенным основным триплетом связанных состояний и минимальным давлением волн в центре каверны. Такие режимы, судя по результатам исследования скалярной модели коллапса, должны быть устойчивыми относительно бесконечно малых возмущений и играть наиболее заметную роль в сильной ленгмюровской турбулентности.

Self-Similar Regimes of Supersonic
Langmuir Wave Collapse

V.M. Malkin, V.N. Khudik, M.P. Fedoruk

Institute of Nuclear Physics
630090, Novosibirsk, USSR

А B S T R A C T

The theoretical predictions on the spectra of the strong Langmuir turbulence and of electrons accelerated by this turbulence are critically dependent on the number of delicate properties of the self-similar supersonic collapse. These properties are hardly perceptible on the level of the simplified models, which are widely used for obtaining an information on the solutions of nonlinear equations of Zakharov's type. As for direct calculation of self-similar solutions of Zakharov's equations, up to now it was carried out only in a very special case of a spherically symmetric (with an accuracy to small terms) cavity.

A wide set of self-similar regimes of the supersonic Langmuir wave collapse is constructed in the present work. The main attention is given to the regimes with the populated ground triplet of bound states and a minimum pressure of waves in the centre of the cavity. Such regimes, judging from the results of investigation of the scalar collapse model, promise to be stable against the infinitesimal perturbations and to play a most important role in the strong Langmuir turbulence.

© Институт ядерной физики СО АН СССР

1. ВВЕДЕНИЕ

Автомодельный сверхзвуковой коллапс ленгмюровских волн — один из важнейших для теории сильной ленгмюровской турбулентности нелинейных процессов. Судить о нем можно было бы по численному решению задачи Коши для уравнений Захарова [1], но вследствие трудности трехмерного счета пока не удалось надежно достигнуть автомодельной стадии (см., например, [2—4]). Полезную информацию дала так называемая скалярная модель, полученная из уравнений Захарова формальной заменой вектора электрического поля ленгмюровских волн на скаляр [5]. В этой модели, обладающей центрально-симметричными режимами коллапса, удалось разобраться довольно подробно [6—9].

Прямое вычисление автомодельных режимов сверхзвукового коллапса ленгмюровских волн до сих пор было проведено лишь в весьма специальном случае центрально-симметричной (с точностью до малых поправок) каверны, реализующейся при почти равном заселении каждого из состояний слегка расщепленного основного триплета [10].

Этот пример доказал существование автомодельных режимов сверхзвукового ленгмюровского коллапса, а результаты исследований скалярного коллапса позволили судить о многих важных свойствах таких режимов. Остался, однако ряд принципиальных вопросов, ответить на которые, не вычисляя более общих автомодельных решений уравнений Захарова, вряд ли возможно.

Прежде всего следует отметить вопрос о степени анизотропии

типичной автомодельной каверны, так как при мыслимом изменении этого параметра может «включаться» дополнительный канал диссипации, радикально меняющий энергетический баланс сильной ленгмюровской турбулентности. В случае слегка анизотропной каверны, после поглощения сформировавшихся ее волн, вокруг области диссипации возникает (вследствие инерционного движения ионов) горб плотности, практически непроницаемый для плазменных волн. В случае же сильно анизотропной каверны в направлениях ее вытянутости углубляется после коллапса провал плотности, через который проникают в область поглощения новые волны. При этом дополнительное (постколлаптическое) поглощение энергии может существенно превышать ее потерю на заключительной стадии коллапса [11, 12].

Принципиальное значение имеет и вопрос о величине тензора напряжений электрического поля ленгмюровских волн в центре каверны. Эта величина входит в критерий неустойчивости автомодельных режимов коллапса относительно мелкомасштабных возмущений [13]. Если критерий выполняется с известным запасом, то мелкомасштабные возмущения плотности (весьма интенсивные в плазме с электронами, более горячими, чем ионы), возрастая в процессе коллапса, успевают разрушить автомодельные режимы [14, 15].

Количественная информация о типичных автомодельных решениях уравнений Захарова необходима также для уточнения условий поглощения ленгмюровских волн и проявления электронной нелинейности на заключительной стадии коллапса [16].

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В сверхзвуковом адиабатическом пределе автомодельные режимы ленгмюровского коллапса описываются следующими уравнениями (см., например, [13]):

$$\Delta(\Delta - \omega_p)\psi_p = \vec{\nabla}(u \vec{\nabla} \psi_p), \quad (2.1)$$

$$\left(\frac{7}{3} + \frac{2}{3}r \frac{\partial}{\partial r}\right) \left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3}r \frac{\partial}{\partial r}\right) u = \Delta\Phi, \quad (2.2)$$

$$\Phi = \sum_p |\vec{\nabla} \psi_p|^2. \quad (2.3)$$

Здесь индекс p нумерует имеющиеся в каверне связанные состояния. «Энергии связи» ω_p предполагаются различными, что необходимо для адиабатичности коллапса. При этом собственные функции ψ_p можно, не теряя общности, считать вещественными. С помощью преобразования

$$r \rightarrow \lambda r, \quad \psi_p \rightarrow \lambda \psi_p, \quad u \rightarrow \lambda^{-2} u, \quad \omega_p \rightarrow \lambda^{-2} \omega_p,$$

не меняющего уравнений (2.1) — (2.3), можно сделать среднюю энергию связи заселенных состояний единичной:

$$\sum_p n_p \omega_p = 1. \quad (2.4)$$

Здесь n_p — относительная заселенность p -го связанного состояния:

$$n_p = \frac{N_p}{\sum_p N_p}, \quad N_p = \int d^3 \vec{r} |\vec{\nabla} \psi_p|^2. \quad (2.5)$$

Уравнение (2.2) позволяет явно выразить u через Φ :

$$u = \frac{3}{2r^2} \int_0^r dr_1 r_1 \left(1 - \frac{r_1^{3/2}}{r^{3/2}}\right) \Delta\Phi(\vec{r}_1) \equiv \hat{G} \Delta\Phi. \quad (2.6)$$

Подстановка (2.3) и (2.6) в (2.1) приводит к замкнутой системе уравнений для функций ψ_p . Решение этой системы вычисляется ниже разложением по присоединенным полиномам Лежандра:

$$\psi_p(\vec{r}) = \sum_{l,m} R_{p,l,m}(r) \tilde{Y}_{l,m}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right), \quad (2.7)$$

$$\tilde{Y}_{l,m}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = P_l^m(\cos \theta) \cos m\varphi, \quad m \geq 0,$$

$$\tilde{Y}_{l,m}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = P_l^{-m}(\cos \theta) \sin |m|\varphi, \quad m < 0.$$

Коэффициенты $R_{p,l,m}(r)$ разложения (2.7) вещественны и удовлетворяют уравнениям:

$$\Delta_l(\Delta_l - \omega_p) R_{p,l,m}(r) = \sum_{l_1, m_1, l_2, m_2} F_{p,l,l_1,l_2}^{m,m_1,m_2}(r), \quad (2.8)$$

$$F_{p,l,l_1,l_2}^{m,m_1,m_2}(r) = c_{l,l_1,l_2}^{m,m_1,m_2} \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 u_{l_2,m_2}(r) \frac{d}{dr} - \frac{A_{l,l_1,l_2}}{r^2} u_{l_2,m_2}(r) \right] R_{p,l_1,m_1}(r), \quad (2.9)$$

$$u_{l_2,m_2}(r) = \hat{G} \Delta_{l_2} \sum_{p,l,m,l_1,m_1} \Phi_{p,l_2,l,l_1}^{m_2,m,m_1}(r), \quad (2.10)$$

$$\Phi_{p,l_2,l,l_1}^{m_2,m,m_1}(r) = c_{l_2,l,l_1}^{m_2,m,m_1} \left[\frac{dR_{p,l,m}(r)}{dr} \frac{dR_{p,l_1,m_1}(r)}{dr} + \frac{A_{l,l_1,l_2}}{r^2} R_{p,l,m}(r) R_{p,l_1,m_1}(r) \right]. \quad (2.11)$$

Здесь введены обозначения

$$\Delta_l = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2}, \quad (2.12)$$

$$A_{l,l_1,l_2} = \frac{1}{2} [l(l+1) + l_1(l_1+1) - l_2(l_2+1)], \quad (2.13)$$

$$c_{l,l_1,l_2}^{m,m_1,m_2} = \frac{\int d^2 \vec{n} \tilde{Y}_{l,m}(\vec{n}) \tilde{Y}_{l_1,m_1}(\vec{n}) \tilde{Y}_{l_2,m_2}(\vec{n})}{\int d^2 \vec{n} \tilde{Y}_{l,m}^2(\vec{n})}. \quad (2.14)$$

Интегрирование в (2.14) ведется по всем возможным направлениям единичного вектора \vec{n} .

«Число квантов» N_p в p -м связанном состоянии выражается через функции $R_{p,l,m}(r)$ следующим образом:

$$N_p = 2\pi \sum_{l,m} \frac{1+\delta_{m,0}}{2l+1} \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!} \int_0^\infty dr r^2 \left[\left(\frac{dR_{p,l,m}}{dr} \right)^2 + \frac{l(l+1)}{r^2} R_{p,l,m}^2 \right]. \quad (2.15)$$

Семейство регулярных в центре каверны ($R_{p,l,m}(r) \propto r^l$, $r \rightarrow 0$) и убывающих при $r \rightarrow \infty$ решений уравнений (2.8) — (2.11) удобно параметризовать с помощью относительных чисел заполнения n_p . Рассуждая в духе [13], нетрудно проверить, что фиксированному набору $\{n_p\}$ ($\sum_p n_p = 1$) соответствует не более чем счетное множество

автомодельных решений. Это множество не пусто лишь при достаточно высокой относительной заселенности состояний с $\vec{\nabla} \Psi_p(0) \neq 0$, без чего давление волн $\Phi(\vec{r})$ было бы понижено в центральной части каверны и вытеснение туда плазмы препятствовало бы коллапсу в точку $\vec{r}=0$.

3. ДИПОЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Ненулевое поле $\vec{\nabla} \psi_p$ в центре каверны создается только дипольными ($l=1$) членами разложения (2.7) функции ψ_p . Приведенные выше соображения указывают на значительный вес таких членов. Поэтому, приступая к вычислению автомодельных решений, разумно в нулевом приближении отбросить все высшие гармоники, сохранив в суммах (2.8) и (2.10) лишь слагаемые с $l=l_1=1$. Дипольное приближение является вполне точным, т. е. высшие гармоники практически не «примешиваются» к первой, если каверна близка к центрально-симметричной. В такой каверне имеется слегка расщепленный основной триплет связанных состояний с $l=1$ и различными значениями m . При почти равном заселении этих состояний:

$$n_1 \cong n_2 \cong n_3 \cong \frac{1}{3}, \quad (3.1)$$

давление волн $\Phi(\vec{r})$ действительно оказывается близким к центрально-симметричному и создает столь же симметричную каверну. «Волновые функции» ψ_p заселенных состояний имеют в данном случае вид

$$\psi_1(\vec{r}) \cong R(r) \sin \theta \cos \varphi, \quad \psi_2(\vec{r}) \cong R(r) \sin \theta \sin \varphi, \quad \psi_3(\vec{r}) \cong R(r) \cos \theta. \quad (3.2)$$

Радиальная зависимость $R(r)$ определяется из уравнений

$$\Delta_1(\Delta_1 - 1)R = u \Delta_1 R + \frac{du}{dr} \frac{dR}{dr}, \quad (3.3)$$

$$u(r) = \hat{G} \Delta_0 \Phi, \quad \Phi = \left(\frac{dR}{dr} \right)^2 + \frac{2}{r^2} R^2.$$

Их решение было численно найдено в [10].

При произвольном (не обязательно равном) заселении основного триплета связанных состояний волновые функции $\psi_p(\vec{r})$, давление волн $\Phi(\vec{r})$ и возмущение плотности плазмы $u(\vec{r})$ имеют в дипольном приближении вид

$$\psi_p(\vec{r}) = R_p(r) \frac{x_p}{r},$$

$$\Phi_p(\vec{r}) = \sum_{p=1}^3 \Phi_p(r) \frac{x_p^2}{r^2}, \quad (3.4)$$

$$u_p(\vec{r}) = \sum_{p=1}^3 u_p(r) \frac{x_p^2}{r^2},$$

где

$$x_1 = r \sin \theta \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad x_3 = r \cos \theta.$$

Функции $R_p(r)$, $\Phi_p(r)$, $u_p(r)$ параметрически зависят от чисел заполнения n_p ($\sum_{p=1}^3 n_p = 1$) и при достаточно малых значениях разностей

$$\delta n_p = n_p - \frac{1}{3} \quad (3.5)$$

практически совпадают с $R(r)$, $\Phi(r)$, $u(r)$. При $|\delta n_p| \ll 1$ имеют место простые формулы:

$$R_p(r) = R(r) + \Omega \delta n_p \tilde{R}(r), \quad (3.6)$$

$$u_p(r) = u(r) + \Omega \delta n_p \tilde{u}(r), \quad (3.7)$$

$$\omega_p = 1 + \Omega \delta n_p. \quad (3.8)$$

Функции $\tilde{R}(r)$, $\tilde{u}(r)$ уже не зависят от чисел δn_p ($\sum_{p=1}^3 \delta n_p = 0$) и удовлетворяют уравнениям

$$\Delta_1(\Delta_1 - 1) \tilde{R} = \Delta_1 R + u \Delta_1 \tilde{R} + \frac{du}{dr} \frac{d\tilde{R}}{dr} + \frac{2}{5} \left(\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \tilde{u} \frac{d}{dr} + \frac{\tilde{u}}{r^2} \right) R, \quad (3.9)$$

$$\tilde{u} = 2\hat{G} \Delta_2 \left(\frac{dR}{dr} \frac{d\tilde{R}}{dr} - \frac{R\tilde{R}}{r^2} \right). \quad (3.10)$$

Параметр Ω вычисляется из определения чисел δn_p (см. (3.5), (2.5), (2.15)):

$$\Omega = \frac{3 \int_0^\infty dr r^2 \left[\left(\frac{dR}{dr} \right)^2 + \frac{2}{r^2} R^2 \right]}{2 \int_0^\infty dr r^2 \left(\frac{dR}{dr} \frac{d\tilde{R}}{dr} + \frac{2}{r^2} R \tilde{R} \right)} \cong 0.63 \quad (3.11)$$

Согласно формуле (3.8), расщепление основного триплета происходит таким образом, что максимальной «энергией связи» обладает наиболее заселенное состояние.

Поверхности уровня функций $\Phi(\vec{r})$, $u(\vec{r})$ вблизи центра каверны представляют собой эллипсоиды:

$$\Phi(\vec{r}) \cong \Phi(0) \left[1 - \frac{1}{a_\Phi^2} \sum_{p=1}^3 x_p^2 (1 + \alpha_\Phi \delta n_p) \right], \quad (3.12)$$

$$\Phi(0) \cong 3.19, \quad a_\Phi \cong 0.57, \quad \alpha_\Phi \cong 1.53;$$

$$u(\vec{r}) \cong u(0) \left[1 - \frac{1}{a_u^2} \sum_{p=1}^3 x_p^2 (1 + \alpha_u \delta n_p) \right], \quad (3.13)$$

$$u(0) \cong 18.8, \quad a_u \cong 0.61, \quad \alpha_u \cong 1.91.$$

Увеличение числа δn_p сопровождается сплющиванием эллипсоидов уровня вдоль p -й оси, причем каверна сплющивается в большей степени, чем распределение запертых в ней волн ($\alpha_u > \alpha_\Phi$).

При не малых значениях δn_p зависимости функций R_p от чисел n_p усложняются. Эти зависимости удобно вычислять, постепенно наращивая поправки δn_p и пользуясь тем обстоятельством, что производные $\frac{\partial R_p}{\partial n_p}$ удовлетворяют линейной системе интегродифференциальных уравнений, решить которую гораздо легче, чем исходную нелинейную систему. Именно таким способом было построено (в дипольном приближении) двухпараметрическое семейство автомодельных решений со всевозможными заселенностями основного триплета связанных состояний. Предельные варианты заселения представлены на рис. 1. При $n_1 \cong n_2 \cong 1/2$, $n_3 = 0$ (рис. 1,а) каверна вытянута в направлении оси Z («огурец»), а при $n_1 \cong n_2 \cong 0$, $n_3 \cong 1$ (рис. 1,б) — сплюснута в том же направлении («блин»).

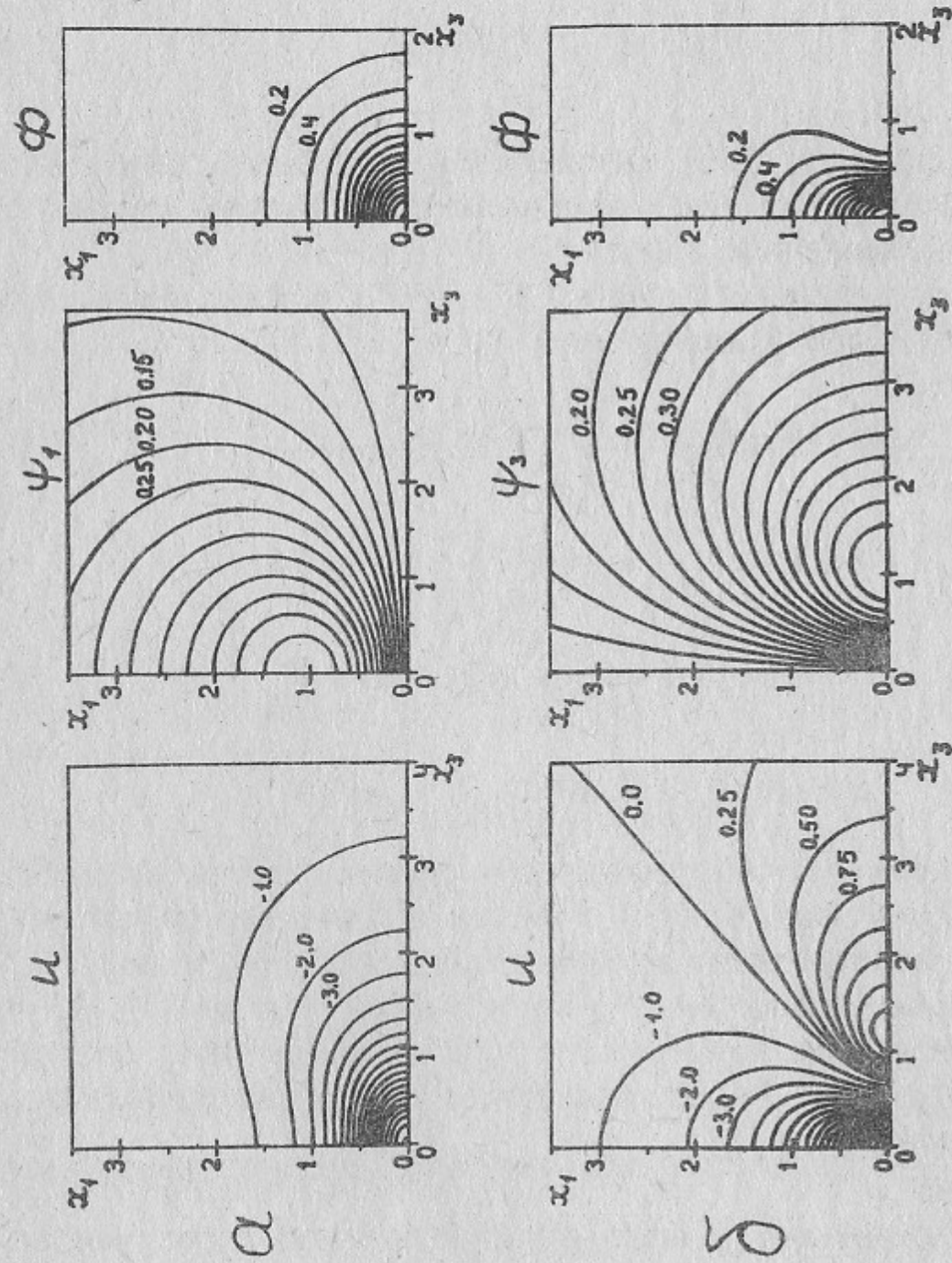


Рис. 1. Линии уровня вычисленных в дипольном приближении автомодельных решений с минимальным значением параметра E , при различных заселенностях состояний основного триплета: а) $n_1 \cong n_2 \cong 1/2$, $n_3 = 0$ (огурцеобразная каверна); б) $n_1 \cong n_2 \cong 0$, $n_3 = 1$ (блинообразная каверна).

4. ОСНОВНОЕ СЕМЕЙСТВО АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Описанное в предыдущем разделе дипольное приближение можно уточнять последовательным учетом высших гармоник. При этом в разложениях (2.7) функций $\psi_p(\vec{r})$ ($p=1, 2, 3$) возникают лишь нечетные ($l=2K-1$), а в аналогичном разложении функции $u(r)$ — лишь четные ($l=2K$) гармоники. Конечномерная аппроксимация K -го порядка уравнений (2.8) — (2.11) получается формальной заменой нулями всех тех коэффициентов Клебша—Гордана $c_{l,l_1,l_2}^{m,m_1,m_2}$ в (2.9) и $c_{l_2,l_1,l_1}^{m_2,m,m_1}$ в (2.11), у которых $\max(l, l_1) > 2K-1$. Такая аппроксимация соответствует удержанию первых K членов (нечетные гармоники до $2K-1$ -й включительно) в разложениях функций $\psi_p(r)$ и $2K$ членов (четные гармоники до $4K-2$ -й включительно) в разложении функции $u(r)$. В первом порядке ($K=1$) получается уже известное дипольное приближение. Зная решение K -го порядка, можно строить решение $K+1$ -го порядка следующим образом. Формально умножить на ε коэффициенты Клебша—Гордана с $\max(l, l_1) = 2K+1$ в аппроксимации $K+1$ -го порядка уравнений (2.8) — (2.11). Решение полученных таким образом уравнений параметрически зависит от ε : $\psi_p = \psi_p^{(K)}(r, \varepsilon)$. При $\varepsilon=0$ оно совпадает с известным (по предположению) решением K -го порядка, а при $\varepsilon=1$ — с искомым решением $K+1$ -го порядка. Производные

$$\frac{\partial R_{p,l,m}^{(K)}(r, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \quad (l=1, 3, \dots, 2K+1)$$

удовлетворяют линейной системе интегродифференциальных уравнений. Регулярное в центре каверны ($r=0$) решение этой системы зависит от параметров $a_{p,l,m}$ ($l=1, 2, \dots, 2(K+1)$):

$$\left. \frac{\partial R_{p,l,m}^{(K)}(r, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{r \rightarrow 0} \cong a_{p,l,m} r^l + a_{p,l+1,m} r^{l+2} + O(r^{l+4}), \quad (4.1)$$

$$l=1, 3, \dots, 2K+1.$$

Значения указанных параметров однозначно определяются требованием убывания всех функций $\frac{\partial}{\partial \varepsilon} R_{p,l,m}^{(K)}(r, \varepsilon)$ при $r \rightarrow \infty$, так как количество независимых решений, растущих на бесконечности,

в точности совпадает с количеством параметров $a_{p,l,m}$ (грубо говоря, каждая из функций $\frac{\partial}{\partial \varepsilon} R_{p,l,m}^{(K)}(r, \varepsilon)$ имеет две растущих на бесконечности асимптотики:

$$\frac{\partial R_{p,l,m}^{(K)}(r, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \propto e^r, \quad \frac{\partial R_{p,l,m}^{(K)}(r, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \propto r^l.$$

Зная $\frac{\partial}{\partial \varepsilon} R_{p,l,m}^{(K)}(r, \varepsilon)$ и $R_{p,l,m}^{(K)}(r, \varepsilon)$, можно вычислить $R_{p,l,m}^{(K)}(r, \varepsilon + \Delta\varepsilon)$.

Повторение этой процедуры позволяет постепенно увеличить ε от нуля до единицы и тем самым вычислить решение $K+1$ -го порядка.

При слабо отличающихся друг от друга заселенностях состояний основного триплета (см. (3.1)) хорошей точностью обладает уже решение второго порядка ($K=2$). Учет третьей гармоники в разложениях функций $\psi_p(r)$ не меняет вида формул (3.8), (3.11) — (3.13), а приводит лишь к переопределению констант α_ϕ , α_u , Ω :

$$\alpha_\phi \cong 5.3, \quad \alpha_u \cong 7.4, \quad \Omega \cong 2.10. \quad (4.2)$$

При не малых значениях δn_p приходится обращаться к аппроксимациям более высоких порядков. Но даже в предельных случаях $n_1 \cong n_2 \cong 1/2$, $n_3 = 0$ и $n_1 \cong n_2 \cong 0$, $n_3 \cong 1$ вполне достаточным оказывается четвертый порядок, т. е. учет в разложениях функций $\psi_p(r)$ нечетных гармоник до седьмой включительно (и, соответственно, учет четных гармоник до четырнадцатой включительно в разложении функции $u(r)$). Автомодельные решения с кавернами, имеющими форму огурца и блина, изображены на рис. 2. Поверхности уровня функций $\Phi(r)$ и $u(r)$ вблизи центра каверны в обоих случаях являются эллипсоидами вращения вокруг оси z :

$$\Phi(\vec{r}) \cong \Phi(0) \left(1 - \frac{x_1^2 + x_2^2}{a_{\phi\perp}^2} - \frac{x_3^2}{a_{\phi\parallel}^2} \right), \quad (4.3)$$

$$u(\vec{r}) \cong u(0) \left(1 - \frac{x_1^2 + x_2^2}{a_{u\perp}^2} - \frac{x_3^2}{a_{u\parallel}^2} \right). \quad (4.4)$$

Содержащиеся в этих формулах константы оказываются следующими:

$$\begin{aligned} \Phi(0) &\cong 2.93, & a_{\phi\parallel} &\cong 1.40, & a_{\phi\perp} &\cong 0.50, \\ u(0) &\cong -15.8, & a_{u\parallel} &\cong 1.94, & a_{u\perp} &\cong 0.52, \end{aligned} \quad (4.5)$$

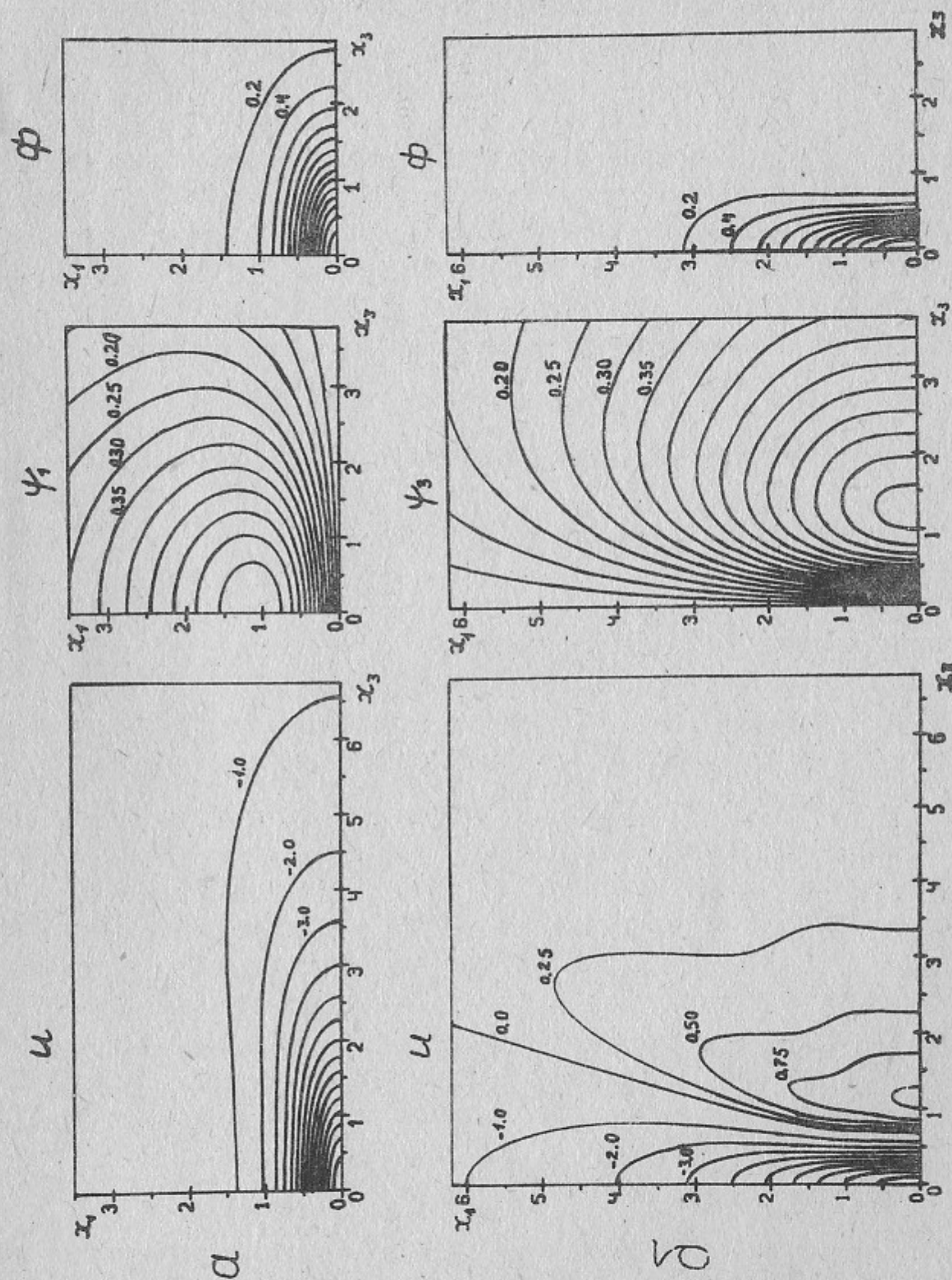


Рис. 2. То же, что и на рис. 1, с учетом высших гармоник.

при $n_1 \cong n_2 \cong 1/2$, $n_3 = 0$;

$$\begin{aligned} \Phi(0) &\cong 2.18, & a_{\Phi\parallel} &\cong 0.40, & a_{\Phi\perp} &\cong 1.8, \\ u(0) &\cong -9.5, & a_{u\parallel} &\cong 0.37, & a_{u\perp} &\cong 2.5 \end{aligned} \quad (4.6)$$

при $n_1 \cong n_2 \cong 0$, $n_3 \cong 1$.

Интересно, что величину $\Phi(0)$ при любых значениях чисел δn_p ($\sum_{p=1}^3 \delta n_p = 0$) можно вычислить с точностью до 1% по формуле

$$\Phi(0) \cong 3.19 - 1.5 \sum_{p=1}^3 (\delta n_p)^2. \quad (4.7)$$

Аналогичная формула для величины $u(0)$:

$$u(0) \cong -18.8 + 14 \sum_{p=1}^3 (\delta n_p)^2. \quad (4.8)$$

обладает примерно 10%-ной точностью.

Большая сплюснутость блинообразной каверны ($a_{u\perp}/a_{u\parallel} \cong 6.6$, $a_{\Phi\perp}/a_{\Phi\parallel} \cong 4.4$) позволяет упрощенно описать соответствующее решение на оси z , пренебрегая там производными в поперечном направлении:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - 1\right)E &= uE + B, & E &= \frac{\partial \Psi_3}{\partial x_3}, \\ \left(\frac{7}{3} + \frac{2}{3}x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\right) &\left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3}x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\right)u &= \frac{\partial^2 E^2}{\partial x_3^2}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Постоянная B выражается через значения $u(0) \cong -10$, $E(0) = 1.5$ функций $u(r)$ и $E(r)$ в центре каверны:

$$B = \left[\frac{14}{9} - E^2(0) \right] \frac{u(0)}{E(0)} - E(0) \cong 3.1.$$

Если бы уравнения (4.9) были пригодны при всех значениях x_3 (а не только вблизи центра каверны), то из условий на бесконечности следовало бы $B=0$, как и предполагалось в модели сильно сплюснутой каверны [6]. В действительности же при $x_3 \sim 1$ продольный и поперечный масштабы изменения функции $u(r)$ оказываются примерно одинаковыми. Именно этим объясняется существ-

венное отличие B от нуля и параметров истинного автомодельного решения от их значений, рассчитанных в предположении о равномерной по x_3 применимости приближения сильно сплюснутой каверны. Наиболее чувствительным параметром является максимальная глубина каверны $|u(0)|$, которая в четыре раза превышает предсказываемое моделью [6] значение.

Как уже отмечалось выше, предсказываемый теорией спектр сильной ленгмюровской турбулентности существенно зависит от того, остается ли «щель» в горбе плотности, окружающем каверну после коллапса, т.е. является ли знакоопределенной временная производная плотности в момент поглощения сколлапсировавших волн. В автомодельном режиме коллапса временная производная плотности пропорциональна функции $\frac{\partial}{\partial r} r^2 u(\vec{r})$, асимптотика которой при $r \gg 1$ имеет вид $r^{-5/2} g(\vec{r}/r)$ (см. (2.6)), где

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) &= \frac{9}{4} \int_0^\infty dr r^{5/2} \Delta \Phi(\vec{r}) = \\ &= \frac{9}{4} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \int_0^\infty dr r^{1/2} \Phi(\vec{r}) \end{aligned} \quad (4.10)$$

(θ и φ — полярный и азимутальный углы направления \vec{r}). Для центрально-симметричной каверны функция $g(\vec{r}/r)$ является положительной. Графики $g(\theta)$ для блинообразной и огурцеобразной каверн изображены на рис. 3. В этих случаях имеется заметный диапазон направлений, вдоль которых плазмоны могут проникать в каверну после коллапса.

Возможность разрушения автомодельного коллапса усиливаемыми в каверне мелкомасштабными возмущениями определяется их начальным уровнем и коэффициентом усиления, который быстро (экспоненциально) возрастает при увеличении параметра

$$E_s^2 = \max_{|\vec{n}|=1} \sum_p (\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \Psi_p)^2 |_{r=0}$$

(см. [13—15]). Для обсуждаемого семейства автомодельных решений (соответствующих заселению основного триплета и минимальному значению E_s^2) вектор $\vec{\nabla} \Psi_p |_{r=0}$ направлен вдоль p -й координатной оси, следовательно,

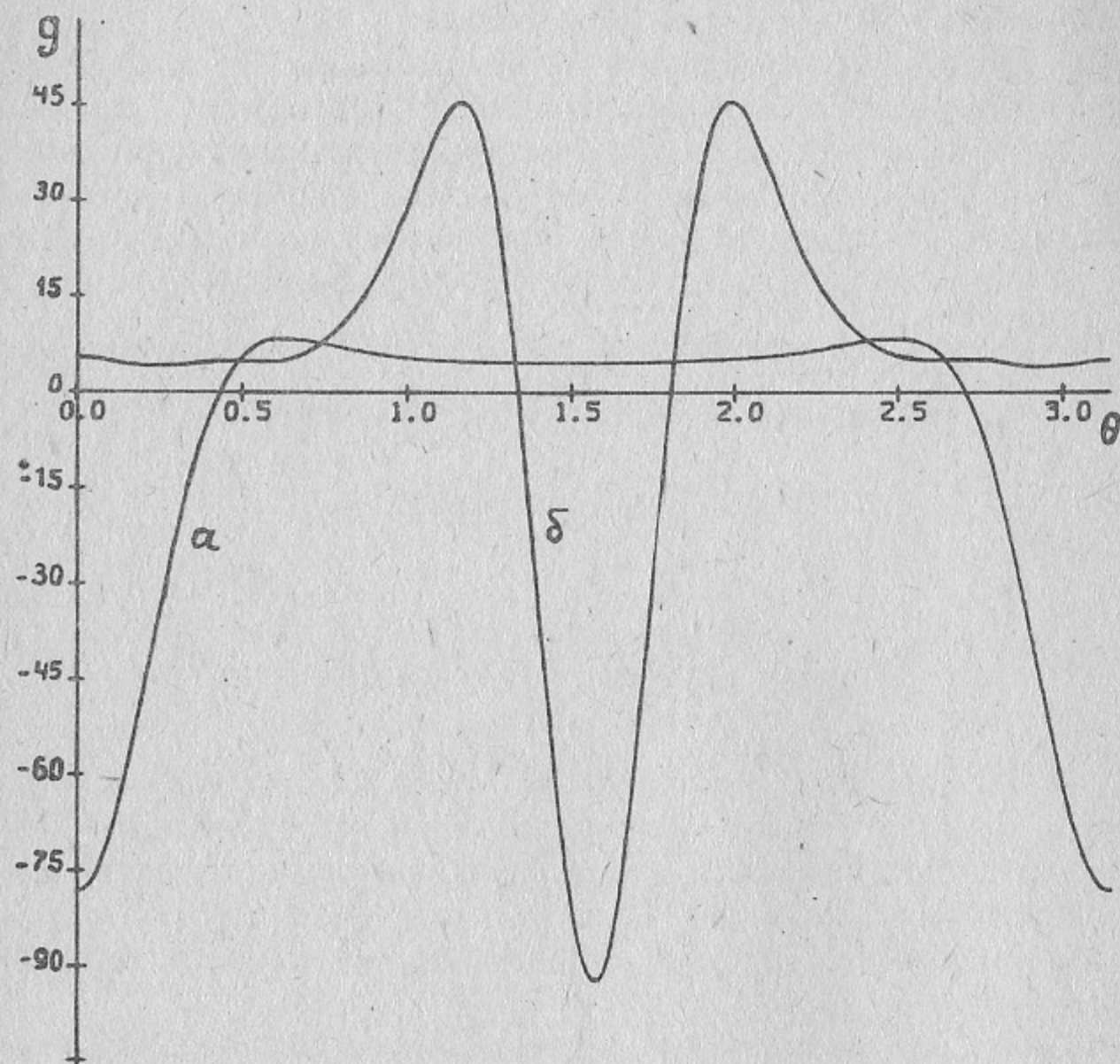


Рис. 3. Зависимости временной производной возмущения плотности от полярного угла в автомодельных режимах коллапса при $r \gg 1$:
 а) $n_1 \cong n_2 \cong 1/2, n_3 = 0$; б) $n_1 \cong n_2 \cong 0, n_3 \cong 1$.

$$E_s^2 = \max_p \left(\frac{\partial \psi_p}{\partial x_p} \right)^2 \Big|_{r=0}$$

При любых относительных числах заполнения n_p ($\sum_{p=1}^3 n_p = 1$) величину E_s^2 можно вычислить с точностью не хуже 10% по формуле

$$E_s^2 = 1.06 + 1.8 \max_p \delta n_p. \quad (4.11)$$

5. ВЫСШИЕ АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

Исходя из аналогии со скалярным коллапсом, можно ожидать существования счетного набора автомодельных решений при каждом заданном способе заселения основного триплета. Проверить это предположение проще всего при почти равном заселении состояний триплета, когда каверна близка к центрально-симметричной и применимо дипольное приближение (3.2). Автомодельные решения удобно пронумеровать в порядке возрастания параметра $R'(0) = E_s > 0$. Найденное в [10] решение уравнений (3.3) соответствует наименьшему значению данного параметра и будет при такой нумерации первым. Анализ показывает, что автомодельное решение с номером $M \geq 2$ реализуется при

$$E_s^2 \cong \frac{2}{3} M \left(1 + \frac{4}{3} M \right), \quad (5.1)$$

причем погрешность данной формулы экспоненциально стремится к нулю с увеличением M . Графики функций $R(r)/E_s^2$ и $u(r)$ в зависимости от переменной r/E_s изображены на рис. 4. При возрастании M эти графики стремятся к определенному пределу. Предельное решение можно описать аналитически. Для этого следует, предполагая масштабы изменения функций $R(r), u(r), \Phi(r)$ оценочно равными $E_s \gg 1$ и пренебрегая малым по параметру E_s^{-1} членом $\Delta_1 \Delta_1 R$ в первом из уравнений (3.3), представить эти уравнения в виде

$$(u+1) \Delta_1 R + \frac{du}{dr} \frac{dR}{dr} \cong 0, \quad (5.2)$$

$$\frac{2}{3} r^2 \left(\frac{7}{3} + \frac{2}{3} r \frac{d}{dr} \right) u = \frac{d}{dr} r \left[\left(\frac{dR}{dr} \right)^2 + \frac{2}{r^2} R^2 - 3E_s^2 \right]. \quad (5.3)$$

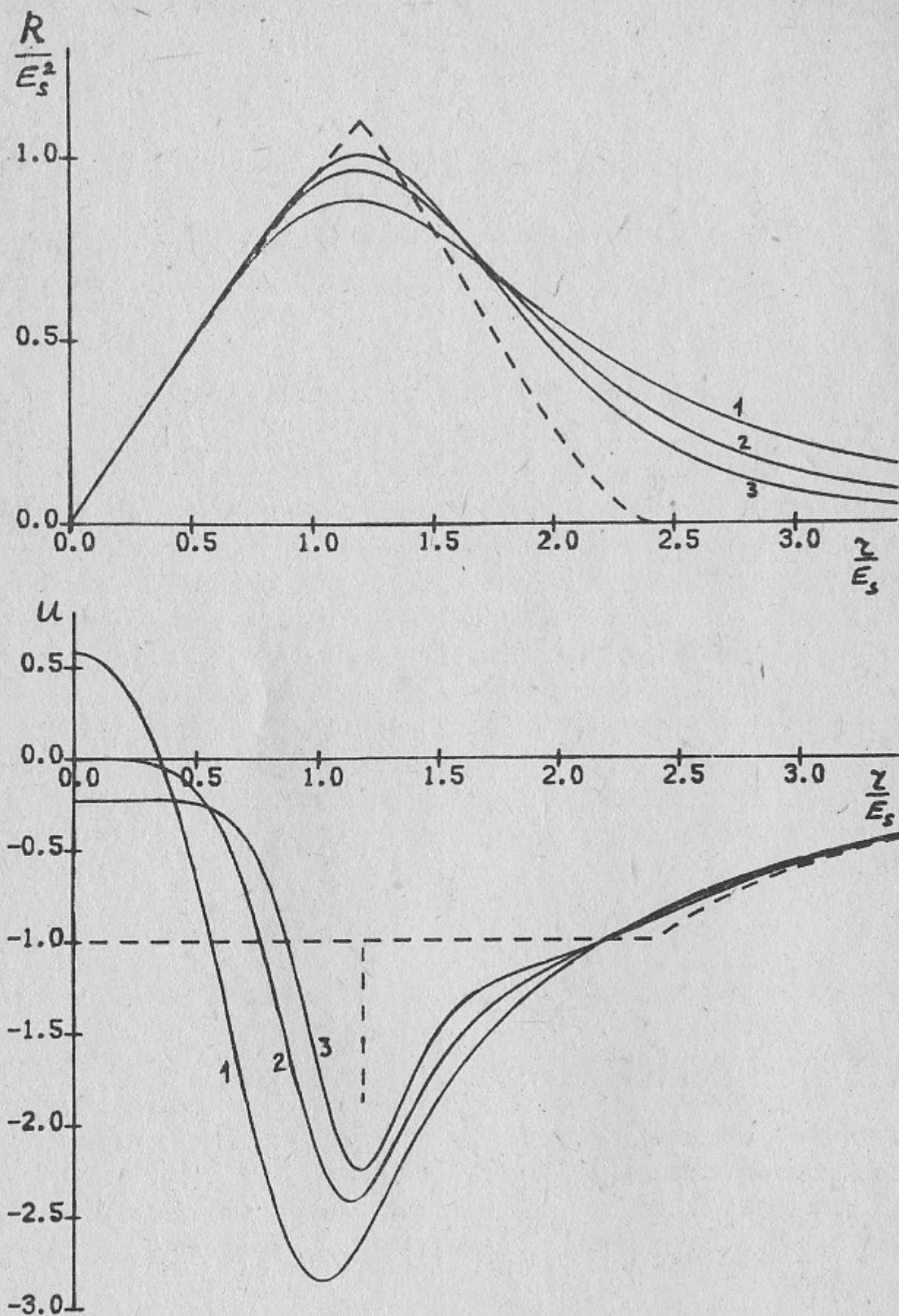


Рис. 4. Зависимости «радиальной волновой функции» R/E_s^2 и возмущения плотности u от переменной r/E_s для автомодельных решений с почти равным заселением состояний основного триплета ($n_1 \cong n_2 \cong n_3 \cong 1/3$) и различными значениями параметра E_s : 1) $E_s^2 \cong 44/9$ ($M=2$); 2) $E_s^2 = 10$ ($M=3$); 3) $E_s^2 \cong 152/9$ ($M=4$). Штриховой линией изображено решение в пределе $E_s \rightarrow \infty$.

Уравнение (5.2) имеет решение

$$u \cong -1, \quad (5.4)$$

подстановка которого в (5.3) (с последующим интегрированием от 0 до r) дает

$$\left(\frac{dR}{dr}\right)^2 + \frac{2R^2}{r^2} \cong 3E_s^2 - \frac{14}{27} r^2. \quad (5.5)$$

Положительные интегральные кривые уравнения (5.5), исходящие из точек $r=0$ и $r=r_r=9E_s/\sqrt{14}$, где $R=0$, пересекаются при $r=r_c \cong r_r/2$. Здесь производная функции $R(r)$ скачком, меняет знак:

$$R'(r_c-0) = -R'(r_c+0) \equiv R'_c \cong \frac{3}{4} E_s$$

и следует учесть опущенный выше член $\Delta_1 \Delta_1 R$. Пользуясь малостью ширины скачка по сравнению с E_s , можно упростить и решить уравнения (3.3) в окрестности точки r_c :

$$R'(r) \cong R'_c \operatorname{th} \left[\frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{R'_c}{r_c} (r_c - r) \right] \cong R'_c \operatorname{th} \left[\frac{\sqrt{7}}{4} (r_c - r) \right], \quad (5.6)$$

$$u(r) + 1 \cong \frac{9}{4r_c^2} [R'(r)^2 - (R'_c)^2] \cong -\frac{7}{8} \operatorname{ch}^{-2} \left[\frac{\sqrt{7}}{4} (r_c - r) \right].$$

Аналогичный скачок встречался ранее при исследовании скалярной модели коллапса (см. [8]). В ее рамках положение скачка однозначно определялось дополнительным условием, возникавшим при учете малых по параметру E_s^{-1} членов. Дополнительное условие того же типа возникает и в рассматриваемом случае. Поэтому для осуществления описанной выше сшивки двух интегральных кривых уравнения (5.5) в точке их пересечения r_c требуется дополнительный параметр. Он обнаруживается при ближайшем рассмотрении уравнения (5.2), обладающего целым семейством решений, близких к $u = -1$:

$$u + 1 = \frac{C}{R'(r)} \exp \left\{ 2 \int_{r_c}^r \frac{dr_1}{r_1} \left[\left(\frac{d \ln R(r_1)}{d \ln r_1} \right)^{-1} - 1 \right] \right\}. \quad (5.7)$$

Значения C_+ и C_- постоянной интегрирования C в областях $r < r_c$

и $r > r_c$ плавного изменения $R'(r)$ оказываются следующими:

$$C_{\pm} = \frac{3E_s^2}{2\sqrt{2}r_c^2} \left[\left(\frac{R_c}{r_c E_s} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{R'_c}{E_s} \right)^2 - 6 \left(\frac{r_c}{r_r} \right)^2 \pm \frac{4R_c R'_c}{r_c E_s} \right] \cong \begin{cases} 3.53, & r < r_c, \\ -0.50 & r > r_c. \end{cases}$$

Помимо области $|r - r_c| \leq 1$, приближение (5.2), (5.3) нарушается в окрестности точки r_r , а именно при $|r - r_r| \leq r_r^{1/3}$. В гораздо более широкой области $|r - r_r| \ll r_r$ уравнения (3.3) можно упростить другим способом, а именно, пренебрегая малыми по параметру $|r - r_r|/r_r$ членами:

$$\frac{d^2 R'}{dr^2} = (u+1)R' + C_r, \quad u+1 = \frac{9}{4r_r^2} \left[(R')^2 + \frac{28}{27} r_r (r - r_r) \right]. \quad (5.8)$$

Постоянная C_r определяется по уже известному из (5.7) значению произведения $(u+1)R'$ в области $r_r^{1/3} \ll r_r - r \ll r_r$:

$$C_r = -C_- \exp \left\{ 2 \int_{r_c}^{r_r} \frac{dr}{r} \left[\left(\frac{d \ln R(r)}{d \ln r} \right)^{-1} - 1 \right] \right\} \cong 0.072.$$

В области $r_r^{1/3} \ll r - r_r \ll r_r$ решение уравнения (5.8) с убывающим полем $|R'(r)|$ имеет вид

$$R' \cong -\frac{C_r}{u+1}, \quad u+1 \cong \frac{7}{3} \frac{r - r_r}{r_r}.$$

Обладающее данной асимптотикой решение уравнений (5.2), (5.3) можно вычислять во всей области $r - r_r \gg r_r^{1/3}$ без учета давления волн. При этом из (5.3) следует

$$u \cong -\frac{7}{9} \left(\frac{r_r}{r} \right)^2 - \frac{2}{9} \left(\frac{r_r}{r} \right)^{7/2}. \quad (5.9)$$

Функция $R(r)$ определяется из (5.2), (5.9) и обладает при $r \gg r_r$ асимптотикой

$$R \cong \kappa C_r r_r^3 / r^2, \quad \kappa \cong 0.65.$$

Помимо рассмотренных выше автомодельных решений с одногорбой радиальной волновой функцией $R(r)$, уравнения (3.3) имеют осциллирующие решения, соответствующие почти равному заселению состояний какого-либо из возбужденных связанных триплетов. При заселении N -го возбужденного триплета также

существует счетный набор автомодельных решений, различающихся значениями параметра $R'(0) = E_s$. Наибольший интерес представляет решение с минимальным значением E_s . Графики таких решений для основного и первых двух возбужденных триплетов изображены на рис. 5. Решения с $N \gg 1$, соответствующие заселению высоковозбужденных связанных триплетов, обладают глубокими кавернами:

$$-\min u(r) \cong a^{-2} \gg 1 \quad (5.10)$$

(так как «энергия связи», в силу условия (2.4) равная единице, гораздо меньше глубины каверны). Пренебрегая при $r \ll 1$ энергией связи в уравнениях (3.3), нетрудно получить для функций $a^2 u$ и $a^{-1} R$ от переменной r/a универсальную, т. е. не зависящую от N , систему уравнений. В области $r \gg a$ давление $\Phi(r)$ уже мало и возмущение плотности $u(r)$ описывается асимптотической формулой

$$u(r) \cong -\frac{3}{2} \frac{\Phi(0)}{r^2} \cong -\frac{9}{2} \frac{E_s^2}{r^2}. \quad (5.11)$$

Регулярное при $r \rightarrow 0$ решение уравнений (3.3) имеет в области $a \ll r \ll 1$ вид

$$a^{-1} R(r) \cong A \left(\frac{r}{a} \right)^{1/2} \left[\sin \left(\alpha_- \ln \frac{r}{a} + \varphi \right) + b \left(\frac{r}{a} \right)^{\alpha_+} \right], \quad (5.12)$$

где $\varphi \cong 3.10$,

$$\alpha_{\pm} = \frac{1}{2} [3(16 - 8E_s^2 + 9E_s^4)^{1/2} \pm (13 - 9E_s^2)^{1/2}]. \quad (5.13)$$

С другой стороны, убывающее при $r \rightarrow \infty$ решение уравнений (3.3) дается в области $a \ll r \ll 1$ формулой

$$R(r) \cong A_1 r^{1/2} [\sin(\alpha_- \ln r + \varphi_1) + b_1 r^{\alpha_+}], \quad (5.14)$$

$$\varphi_1 \cong 2.18, \quad b_1 \cong 0.0584.$$

Условие совпадения последней с (5.12) определяет дискретный набор значений параметров a и b :

$$a = \exp[(\varphi - \varphi_1 - \pi N)/\alpha_-], \quad b = (-1)^N b_1 a^{\alpha_+}. \quad (5.15)$$

При $N \gg 1$ они экспоненциально малы. Требование $b = 0$ в асимп-

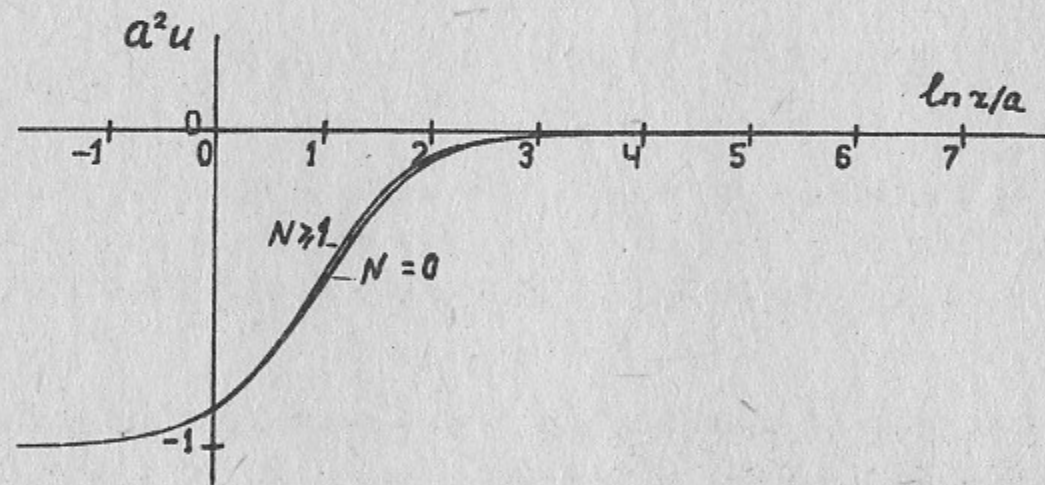
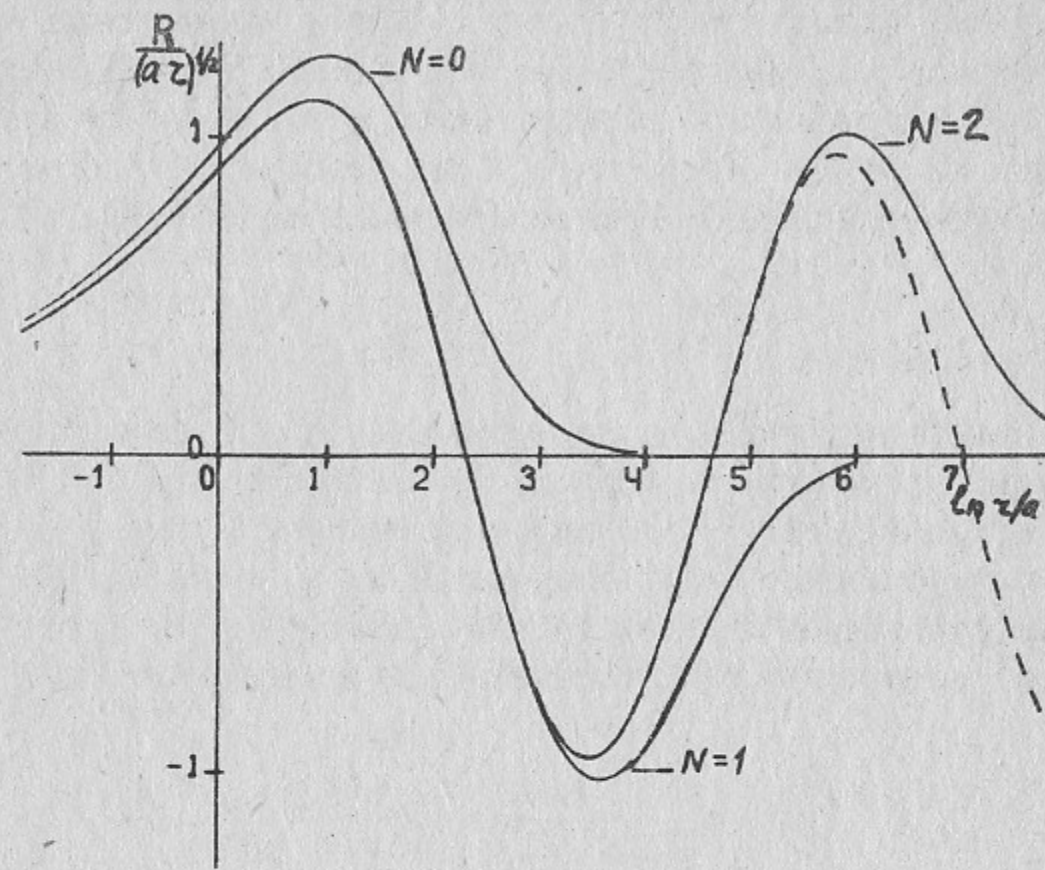


Рис. 5. Зависимости «радиальной волновой функции» $(ar)^{-1/2} R$ и возмущения плотности $a^2 u$ от переменной $\ln(r/a)$ ($a^{-2} \equiv -\min u(r)$) для автомодельных решений с почти равным заселением состояний N -го возбужденного триплета ($N=0, 1, 2, \dots$) и минимальным значением параметра E_s . Штриховой линией изображена функция $(ar)^{-1/2} R$ в пределе $N \rightarrow \infty$. Графики всех функций $a^2 u$ с $N \geq 1$ неразличимы на данном рисунке.

тотике (5.12) выделяет последовательность допустимых при $N \rightarrow \infty$ значений параметра E_s^2 , наименьшее из которых равно

$$E_s^2(\infty) \cong 0.922. \quad (5.16)$$

Соответствующие значения параметров α_{\pm} таковы:

$$\alpha_- \cong 1.36, \quad \alpha_+ \cong 2.05. \quad (5.17)$$

При конечном $N \gg 1$ значения E_s^2 и α_{\pm} отличаются от приведенных выше лишь экспоненциально малыми по N добавками, в частности,

$$E_s^2(N) - E_s^2(\infty) \cong 0.073 \exp\left(-\frac{2\pi N}{\alpha_-}\right) + 0.022(-1)^N \exp\left(-\frac{\pi N \alpha_+}{\alpha_-}\right). \quad (5.18)$$

Согласно (5.10), (5.15), максимальная глубина каверны экспоненциально велика по N :

$$-\min u(r) = -u(0) = a^{-2} \cong 23.2 \exp\left(\frac{2\pi N}{\alpha_-}\right). \quad (5.19)$$

Интересно отметить, что полученная для $N \gg 1$ формула (5.18) даже при $N=0$ дает правильный результат с погрешностью 5%. Это объясняется численно большой глубиной каверны у решения с заселенным основным триплетом. Форма данной каверны также оказывается близкой к предельной (см. рис. 5).

Аналогично строятся решения с высшими значениями параметра E_s .

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При описании множества автомодельных режимов сверхзвукового коллапса ленгмюровских волн удобно исходить из режимов с (почти) центрально-симметричными кавернами. Такие режимы реализуются, в частности, при (почти) равном заселении (слегка расщепленных) состояний с $l=1$ одного из связанных триплетов. При заселении N -го возбужденного триплета ($N=0, 1, 2, \dots$) имеется счетный набор автомодельных решений, которые можно пронумеровать в порядке возрастания параметра $E_s = R'(0)$ ($M=1, 2, \dots$). Решения с произвольными N и M были подробно описаны выше. Ввиду слабой зависимости формы автомодельной каверны от номера N результаты легко распространить на случай заселе-

ния нескольких триплетов. Далее можно, не теряя симметрии каверны, заселить состояния с $l=0$ и квинтеты с $l=2$, каковых в автомодельной каверне также имеется счетное множество (см. [10]). Наконец, отказавшись от (почти) равной заселенности состояний внутри (слегка расщепленных) триплетов и квинтетов и постепенно наращивания расщепление, можно построить автомодельные решения общего вида. Каждое из них по-прежнему характеризуется некоторым значением числа M . По аналогии со случаем сверхзвукового скалярного коллапса (устойчивость автомодельных режимов которого уже исследована [9]) весьма вероятно неустойчивость решений с $M > 1$ относительно бесконечно малых возмущений. Решения же с $M = 1$ могут оказаться устойчивыми в указанном смысле.

В фиксированной автомодельной каверне масштаб локализации связанного состояния экспоненциально растет с увеличением его номера N . Поэтому максимальное давление волн, а значит и форма каверны определяются наиболее локализованными состояниями уже при весьма незначительной относительной заселенности последних. Абсолютная их заселенность при этом оказывается практически той же, что и в отсутствие других захваченных волн. Наиболее локализованными в автомодельной каверне являются состояния основного триплета (возможно заметно расщепленного). Соответствующие им автомодельные решения, по всей видимости, должны реализоваться гораздо чаще других при случайном заселении всех состояний, характерном для сильной ленгмюровской турбулентности. Двухпараметрическое семейство автомодельных решений с различными заселенностями основного триплета и минимальными значениями параметра E_s подробно описано в разделах 2 и 3. В частности, там установлено, что при не слишком близких к $1/3$ относительных заселенностях состояний основного триплета каверна, углубляясь после коллапса, остается открытой для новых плазмонов (поглощение которых может существенно влиять на энергетический баланс сильной ленгмюровской турбулентности [11, 12]). Вычисленные в разделе 3 значения параметра E_s^2 позволяют выяснить при любом заданном спектре мелкомасштабных возмущений плотности, разрушаются ли автомодельные режимы коллапса растущими квазиמודами [13—15].

В заключение следует отметить, что предпринимавшиеся ранее попытки численного решения задачи Коши для уравнений Захарова создавали иллюзию уникальности режима коллапса с блинообразной каверной (хотя автомодельная стадия и не была уверенно

достигнута). Эта иллюзия порождалась насильственно налагавшимся требованием аксиальной симметрии электрического поля, исключавшим заселение связанных состояний с ненулевой проекцией орбитального момента на выделенное направление. В отсутствие искусственных запретов решение с блинообразной каверной оказывается рядовым представителем двухпараметрического семейства автомодельных решений, найденных в разделе 2 и 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров В.Е. ЖЭТФ, 1972, 62, 1745.
2. Захаров В.Е., Мастрюков А.Ф., Сынах В.С. Физика плазмы, 1975, 1, 614.
3. Дегтярев Л.М., Захаров В.Е., Рудаков Л.И. Физика плазмы, 1976, 2, 438.
4. Соловьев Г.И. Трехмерный коллапс ленгмюровских волн. Препринт ИКИ, № 776, М., 1983.
5. Буднева О.Б., Захаров В.Е., Сынах В.С. Физика плазмы, 1975, 1, 606.
6. Захаров В.Е., Щур Л.Н. ЖЭТФ, 1981, 81, 2019.
7. Дегтярев Л.М., Кона-Овдиенко А.Л. Физика плазмы, 1984, 10, 9.
8. Малкин В.М., Худик В.Н. ЖЭТФ, 1987, 92, 2076.
9. Малкин В.М., Худик В.Н. ЖЭТФ, 1989, 95, 1639.
10. Малкин В.М., Цидулко Ю.А. Физика плазмы, 1985, 11, 964.
11. Malkin V.M. Models of Strong Langmuir Turbulence. — In: Proc. Int. Conf. on Plasma Physics, Kiev, Naukova Dumka, 1987, v.2, p.169.
12. Malkin V.M. Postcollapsal Effects in Strong Langmuir Turbulence. — Preprint 89-33 INP, Novosibirsk, USSR, 1989.
13. Малкин В.М. ЖЭТФ, 1984, 87, 433.
14. Malkin V.M. On the Role of Sound in the Strong Langmuir Turbulence. — In: Proc. IV Int. Workshop on Nonlinear and Turbulent Processes in Physics, Kiev, Naukova Dumka, 1989, v.1, p.387.
15. Khydik V.N., Malkin V.M. Growing Quasi-modes in Dynamics of Supersonic Collapse. — Preprint 89-32 INP, Novosibirsk, USSR, 1989.
16. Малкин В.М. ЖЭТФ, 1986, 90, 59.

В.М. Малкин, В.Н. Худик, М.П. Федорук

**Автомодельные режимы сверхзвукового
коллапса ленгмюровских волн**

Ответственный за выпуск С.Г.Попов

Работа поступила 14 декабря 1989 г.
Подписано в печать 20.12.89 г. МН 10580
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 1,7 печ.л., 1,4 уч.-изд.л.
Тираж 250 экз. Бесплатно. Заказ № 172

*Набрано в автоматизированной системе на базе фото-
наборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и
отпечатано на ротапринтере Института ядерной физики
СО АН СССР,
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.*