

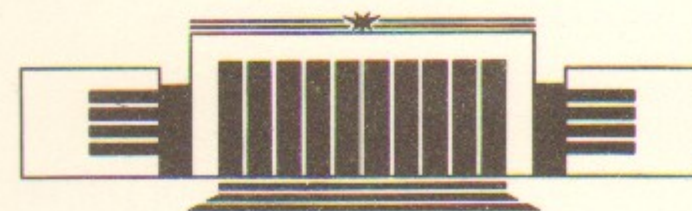


10  
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

В.М. Малкин, Е.Г. Шапиро

О СИНГУЛЯРНОМ ВОЛНОВОМ КОЛЛАПСЕ

ПРЕПРИНТ 89-102



НОВОСИБИРСК



## О сингулярном волновом коллапсе

*В.М. Малкин, Е.Г. Шапиро*

Институт ядерной физики  
630090, Новосибирск 90, СССР

### АННОТАЦИЯ

Спонтанно возникающие особенности нелинейного волнового поля во многих случаях не исчезают сразу после поглощения сформировавших их волн, а существуют более продолжительное время и засасывают в себя новые волны. Энергия, поглощаемая путем засасывания, может значительно превышать энергию, затрачиваемую на формирование особенностей, в частности, может быть конечной в условиях, когда на формирование особенностей уходит бесконечно малая энергия, т. е. коллапс является слабым.

Для более глубокой проверки этих недавно выдвинутых положений необходимо тщательно исследовать динамику волнового поля в пространственно-временной окрестности точки образования особенности. Такое исследование проведено ниже в рамках встречающегося во многих физических задачах уравнения Шредингера со степенной нелинейностью. Показано, что в широком диапазоне параметров данной модели динамика волнового поля в окрестности точки образования особенности носит автомодельный характер. Продемонстрировано существование сингулярных автомодельных решений при произвольных значениях параметров. В условиях, когда такие решения неустойчивы, предложен альтернативный вариант динамики волнового поля.

### On a Singular Wave Collapse

*V.M. Malkin, E.G. Shapiro*

Institute of Nuclear Physics  
630090, Novosibirsk, USSR

### ABSTRACT

A spontaneously arisen singularity of nonlinear wave field in many cases do not vanish straightway after the absorption of waves formed one occurs, but exists during a longer time and sucks the new waves. The energy absorbed via wave sucking can considerably exceed the energy expended on a singularity formation, in particular, the first one can be finite in conditions when the second one is an infinitely small, i. e. when the collapse is weak.

For a more careful verification of those recently suggested propositions it is necessary to investigate thoroughly the dynamics of wave field in the space-time vicinity of the singularity formation point. Such an investigation is carried out below in the frame of nonlinear Schrödinger equation, which arises in a number of physical problems. We show that in wide range of the model parameters the dynamics of wave field in the vicinity of the singularity formation point is of self-similar character. The existence of self-similar singular solutions for arbitrary meanings of the parameters is demonstrated. In conditions when the solutions are unstable an alternative variant of wave field dynamics is suggested.

### ВВЕДЕНИЕ

Возможность взрывного возрастания амплитуды нелинейного волнового поля в отдельных точках пространства была осознана примерно четверть века назад при разработке теории самофокусировки электромагнитного излучения в среде [1, 2]. Разнообразные явления такого рода позднее были объединены понятием «волнового коллапса» (первоначально примененным в [3] к предсказанному там взрывному самосжатию сгустка ленгмюровских волн в плазме). Долгое время предпочтение отдавалось так называемому сильному коллапсу, при котором на создание особенности поля тратится конечная энергия волн. Введенное по необходимости представление о «слабом» коллапсе, т. е. о стремлении к нулю энергии локализованных в области формирующейся особенности волн, несло на себе некую печать ущербности, что наиболее отчетливо проявилось в статье [4]. Там рассматривалось трехмерное уравнение Шредингера с кубической нелинейностью, встречающееся во многих областях физики, в частности, служащее скалярной моделью дозвукового коллапса ленгмюровских волн. Ранее в рамках данной модели были известны лишь слабые режимы коллапса, авторы же [4] (см. также [5]) нашли «квазиклассические» сильные режимы. Последние, однако, оказались неустойчивыми относительно мелкомасштабных возмущений, что не позволило снять проблему поглощения волн. Механизм поглощения удалось понять позднее, причем не на пути поиска устойчивых режимов сильного коллапса, а отказавшись от привычного отождествления процессов



образования особенности и поглощения волн. Тенденцию к зарождению более адекватного подхода можно усмотреть в предшествовавшей [4, 5] статье [6], в §3 которой обсуждался «эффект воронки». Суть этого эффекта состоит в следующем.

В скалярной модели сверхзвукового ленгмюровского коллапса (являющегося, как известно, сильным) волновое поле описывается уравнением Шредингера

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} + \Delta - V\right) \psi = 0.$$

Роль потенциала  $V$  играет возмущение плотности плазмы. После коллапса некоторое время сохраняется «воронка плотности»

$$V(r) = -\frac{A}{r^2}, \quad \frac{1}{4} < A \sim 1.$$

Она простирается от начального размера каверны  $r \sim a_0$  до физически бесконечно малого по сравнению с  $a_0$  размера области поглощения  $r \sim a_f$ . Согласно [6], воронка «втягивает» в себя из окружающего пространства волны, которые затем «падают на центр» и поглощаются; «волновая функция» в области  $a_f \ll r \ll a_0$  имеет вид

$$\psi = \psi_0 r^{-\frac{1}{2} - i\beta}, \quad \beta = \left(A - \frac{1}{4}\right)^{1/2}.$$

В [6] не обсуждалось, насколько сильное затухание волн в центре воронки требуется для осуществления описанной картины. Между тем ясно, что для поглощения свободной квазичастицы с длиной волны порядка  $a_0$  декремент затухания  $\nu$  должен, по крайней мере, в  $a_0/a_f$  раз превышать обратное время пролета квазичастицы над каверной (так как в области  $r \lesssim a_f$  в каждый момент времени находится лишь малая доля энергии). С другой стороны, использовавшееся в [6] приближение стационарной воронки применимо лишь в течение характерного времени углубления каверны на заключительной стадии коллапса. Это время оценочно совпадает с  $\nu^{-1}$ , так как именно затухание запертой волны ограничивает взрывной рост ее амплитуды. За время  $\nu^{-1}$  свободная волна длины  $a_0$  успевает пройти расстояние, не превышающее  $a_f$ , поэтому сколько-нибудь заметная по сравнению с поглощенной при коллапсе энергии не успевает попасть извне в воронку.

Более эффективный механизм поглощения ленгмюровских волн, связанный с нестационарностью остающейся после коллапса каверны, был обнаружен в [7]. Согласно [7], каверна, продолжая после поглощения сформировавших ее волн углубляться за счет инерционного движения ионов, приобретает большое по параметру  $a_0/a_f$  количество новых связанных состояний. В каждое из этих состояний захватывается некоторая энергия. Для поглощения запертых волн уже не требуется столь сильное затухание  $\nu$ . Тем самым снимается ограничение сверху на время углубления каверны и на величину втекающей в нее за это время энергии. При весьма мягких условиях «засасываемая» каверной энергия превышает энергию сформировавших особенность волн в большое по параметру  $a_0/a_f$  число раз. В этом смысле затраченная на создание особенности энергия является физически бесконечно малой, как при слабом коллапсе, что, однако, ничуть не препятствует конечному поглощению.

Аналогичный эффект, по всей видимости, имеет место и в дозвуковом режиме коллапса ленгмюровских волн, заведомо осуществляясь в его скалярной модели (уже упоминавшейся выше в связи со ссылкой [4]). Последнее было продемонстрировано с помощью численных расчетов в статье [8], авторы которой назвали засасывание волн самопроизвольно образующейся особенностью «распределенным коллапсом».

Гипотеза о засасывании волн долгоживущими особенностями как общем механизме поглощения энергии полей, обладающих устойчивыми режимами слабого коллапса, была выдвинута в статье [9]. Там же отмечались существование и необходимость исследования сингулярных автомодельных решений.

Вскоре были построены сингулярные стационарные решения двухпараметрического семейства нелинейных уравнений шредингеровского типа [10]. По мнению авторов [10], слабый коллапс в широком диапазоне значений параметров данной модели действительно сопровождался образованием долгоживущей особенности волнового поля.

Основной целью настоящей работы является исследование динамики (очевидно, нестационарной) нелинейного волнового поля вблизи момента и места возникновения особенности. Такое исследование необходимо для более глубокого выяснения самой возможности сколько-нибудь длительного существования спонтанно образующейся особенности.



## 2. КАЧЕСТВЕННОЕ ОБСУЖДЕНИЕ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ

Нелинейному уравнению Шредингера

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} + \Delta + |\psi|^s\right) \psi = 0 \quad (2.1)$$

посвящено большое количество работ (см., например, обзор [11]). Ниже рассматриваются центрально-симметричные решения (2.1), для которых это уравнение имеет вид

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{d-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + |\psi|^s\right) \psi = 0 \quad (2.2)$$

( $d$  — размерность пространства). Наиболее разнообразными приложениями обладает кубичное уравнение Шредингера ( $s=2$ ). В частности, оно описывает: возбуждения в квазиодномерных молекулярных структурах при  $d=1$  (см., например, обзор [12]); стационарную самофокусировку излучения в среде [1, 2] и волны на поверхности глубокой жидкости [13] при  $d=2$  (см. также обзоры [14, 15]); огибающую квазимонохроматического волнового пакета (см., например, [16]) и дозвуковой ленгмюровский коллапс [17] при  $d=3$ . Для выяснения общих свойств нелинейного уравнения (2.2) полезно разобраться в зависимости его решений от параметров  $s \geq 1$ ,  $d \geq 1$ . Характер этой зависимости во многом определяется интегралами движения

$$N = \int_0^{\infty} dr r^{d-1} |\psi|^2, \quad (2.3)$$

$$H = \int_0^{\infty} dr r^{d-1} \left( \left| \frac{\partial \psi}{\partial r} \right|^2 - \frac{2}{s+2} |\psi|^{s+2} \right), \quad (2.4)$$

которыми обладает уравнение (2.2) на регулярных волновых полях  $\psi$ . Обычно «число квантов»  $N$  пропорционально истинной энергии волнового поля, а гамильтониан  $H$  — дисперсионно-нелинейной добавке к ней. На одномасштабном волновом поле  $\psi$ , локализованном в области  $r \leq a$ , для гамильтониана справедлива оценка

$$H \sim \frac{N}{a^2} - \frac{N^{s/2+1}}{a^{sd/2}}. \quad (2.5)$$

С ее помощью нетрудно понять, что в случае  $sd < 4$  коллапс невозможен, так как условие  $a \rightarrow 0$  несовместимо с сохранением гамильтониана. Если  $sd = 4$ , то при некотором числе квантов  $N \sim 1$  слагаемые в правой части (2.5) взаимно сокращаются и разрешен сильный коллапс. В случае  $sd > 4$  для взаимной компенсации дисперсионного и нелинейного вкладов в  $H$  достаточно локализовать в области  $r \leq a \rightarrow 0$  бесконечно малое число квантов  $N \rightarrow 0$ , что соответствует слабому коллапсу.

Здесь уместно заметить, что при  $sd > 4$  можно «организовать» и сильный коллапс, но для этого требуется двухмасштабное волновое поле  $\psi$ . Если поле  $\psi$  изменяется на малой по сравнению с масштабом его локализации  $a$  длине:

$$\lambda \sim \left| \frac{\partial \ln \psi}{\partial r} \right|^{-1}, \quad (2.6)$$

то в первом члене правой части (2.5) следует заменить  $a$  на  $\lambda$ . Условие взаимной компенсации вкладов дисперсии и нелинейности в  $H$  фиксирует связь  $\lambda$  с  $a$ :

$$\lambda \sim N^{-s/4} a^{sd/4}. \quad (2.7)$$

Отсюда видно, что предположение  $\lambda \ll a$  действительно оправдано при  $a \rightarrow 0$  и  $sd > 4$ . Характер временного убывания величин  $a$  и  $\lambda$  проще всего выяснить с помощью уравнения непрерывности

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial r} = 0, \quad (2.8)$$

$$n = r^{d-1} |\psi|^2, \quad j = 2r^{d-1} |\psi|^2 \frac{\partial}{\partial r} \arg \psi.$$

При оценочном равенстве масштабов пространственного изменения функций  $n$  и  $j$  размеру  $a$ , из (2.8) следует

$$\lambda a \sim t_* - t, \quad (2.9)$$

где  $t_*$  — момент образования особенности. Описываемые оценками (2.7), (2.9) «квазиклассические» режимы коллапса, как уже отмечалось выше, неустойчивы относительно мелкомасштабных возмущений. Наиболее неустойчивые возмущения обладают длиной вол-



ны порядка  $\lambda$  и развиваются за малое по сравнению с  $t_* - t$  время  $\tau \sim \lambda^2$ .

Другой тип сильного коллапса двухмасштабных волновых полей  $\psi$  представляют сферические слои-солитоны, сходящиеся к центру. При  $d=3, s=2$  такие решения известны, начиная с работ [17—19], и устойчивы в рамках уравнения (2.2). В рамках исходного уравнения (2.1) сферические слои, по всей видимости, разрушаются тангенциальными модуляциями, подобно плоскому солитону [20, 21].

Слабый коллапс, судя по численному решению задачи Коши для уравнения (2.2) с  $d=3, s=2$  (см. [17, 22, 23, 10]) и с  $d=1, s=6$  (см. [24, 23]), устойчив. Причем картина взрыва весьма груба и вряд ли подвергнется существенному пересмотру в более общей (при  $d \neq 1$ ) модели (2.1).

### 3. ФОРМИРОВАНИЕ ОСОБЕННОСТИ

Слабый коллапс во всех изученных к настоящему времени случаях протекает при  $t \rightarrow t_*$  по автомодельному закону

$$\psi(r, t) = a^{-2(s^{-1} + i\kappa)} f\left(\frac{r}{a}\right), \quad a = (t_* - t)^{1/2}. \quad (3.1)$$

В области  $r \gg a$  поле не успевает заметно измениться за время  $t_* - t$  и как бы замерзает. «Замерзшее» поле имеет в зоне автомодельности  $r \ll a_0$  (где применима формула (3.1)) вид

$$\psi(r, t) \approx \psi(r, t_*) = Cr^{-2(s^{-1} + i\kappa)}. \quad (3.2)$$

Фигурирующая в (3.1) функция  $f(\rho)$  удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\left[ i \left( s^{-1} + i\kappa + \frac{1}{2} \rho \frac{d}{d\rho} \right) + \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{d-1}{\rho} \frac{d}{d\rho} + |f|^s \right] f = 0. \quad (3.3)$$

При  $\rho \rightarrow \infty$  его решение обладает асимптотикой

$$f \approx C_0 \rho^{-2(s^{-1} + i\kappa)} + C_1 \rho^{2(s^{-1} + i\kappa) - d} \exp\left(-i \frac{\rho^2}{4}\right). \quad (3.4)$$

Первое слагаемое в этой формуле соответствует «замерзшему» полю (3.2). Второе слагаемое (убывающее при  $\rho \rightarrow \infty$  быстрее, чем

первое, в силу условия слабого коллапса  $sd > 4$ ) описывает сходящуюся к центру сферическую волну. Такая волна, создающая особенность даже в линейной задаче, может возникнуть лишь при очень специальных начальных условиях. В случае общего положения сходящаяся волна отсутствует, т. е.  $C_1 = 0$ . Учитывая тождественность волновых полей, получающихся друг из друга прибавлением к фазе произвольного вещественного числа, можно выбрать коэффициент  $C$  в асимптотике (3.4) положительным. Таким образом из семейства убывающих при  $\rho \rightarrow \infty$  решений уравнения (3.3) выделяется подсемейство, зависящее от двух вещественных параметров  $C$  и  $\kappa$  ( $s$  и  $d$  фиксированы). Любое решение (3.3) автоматически является регулярным при всех конечных значениях  $\rho > 0$ . (Обсуждавшаяся в статье [4] особенность в действительности не удовлетворяет (3.3), в чем легко убедиться с помощью уравнения непрерывности (2.8)). Ограничения на параметры  $C$  и  $\kappa$  налагаются исключительно условием регулярности функции  $f(\rho)$  при  $\rho = 0$ . Общее решение, бесконечно близкое к регулярному, обладает при  $\rho \rightarrow 0$  асимптотикой

$$f \approx A + A_1 \begin{cases} \rho^{2-d}, & d \neq 2 \\ \ln \rho, & d = 2 \end{cases}. \quad (3.5)$$

Для выхода по мере уменьшения  $\rho$  на регулярную асимптотику требуется занулить комплексную величину  $A_1$ , т. е. удовлетворить двум вещественным соотношениям. Это условие выделяет счетный набор значений параметров  $C$  и  $\kappa$ . Анализ показывает, что устойчивым является лишь первое из соответствующего набора автомодельных решений (расположенных в порядке возрастания  $\kappa$ ). На множестве регулярных устойчивых режимов слабого коллапса параметры  $C$  и  $\kappa$  однозначно связаны с  $d$  и  $s$  во всей области  $ds > 4$ . В ряде предельных случаев эту связь удается описать аналитически. Наиболее интересным является предел  $ds - 4 \rightarrow 0$ , ибо динамика предкритического слабого коллапса содержит в себе характерные черты не только случая  $ds > 4$ , но и критического случая\*)  $ds = 4$ . При  $ds - 4 \rightarrow 0$  оказывается весьма полезным соотношение

\*) Выше уже отмечалось, что в критическом случае ( $s=d=2$ ) коллапс является сильным. Попытки выяснения его динамики предпринимались во многих работах (см. [22, 23, 25—29] и имеющиеся там ссылки), но в полной мере эта цель так и не была достигнута. Корректное решение задачи удалось получить лишь в самое последнее время [30].



$$\begin{aligned} \rho^{d-1} |f(\rho)|^2 \left( \rho + 4 \frac{\partial}{\partial \rho} \arg f(\rho) \right) = \\ = (d - 4s^{-1}) \int_0^{\rho} d\rho_1 \rho_1^{d-1} |f(\rho_1)|^2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Оно выводится умножением (3.3) на  $\rho^{d-1} f^*$ , и интегрированием мнимой части полученного уравнения от нуля до  $\rho$ . Согласно (3.6), при  $d - 4s^{-1} \rightarrow 0$  в области  $\rho \ll \rho_*$  (где амплитуда  $|f(\rho)|$  не слишком мала) имеет место соотношение

$$\arg f(\rho) \approx -\frac{\rho^2}{8} + \text{const}. \quad (3.7)$$

С помощью подстановки

$$f(\rho) = \bar{f}(\rho) \exp\left(-i\frac{\rho^2}{8}\right), \quad (3.8)$$

устраняющей осцилляции  $f(\rho)$  в области  $\rho \ll \rho_*$ , уравнение (3.3) приводится к виду

$$\left[ \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{d-1}{\rho} \frac{d}{d\rho} + |\bar{f}|^s + \frac{\rho^2}{16} - \kappa - \frac{i}{4}(d-4s^{-1}) \right] \bar{f} = 0. \quad (3.9)$$

Далее выяснится что  $\kappa \rightarrow \infty$  при  $d - 4s^{-1} \rightarrow 0$ . Учитывая это, величину  $\rho_*$  можно определить формулой

$$\rho_* = 4\kappa^{1/2}. \quad (3.10)$$

В области  $\rho \ll \kappa^{-1/2}$  решение уравнения (3.9) имеет вид

$$\bar{f}(\rho) \approx \kappa^{1/s} R(\kappa^{1/2}\rho), \quad (3.11)$$

где  $R(r)$  — обладающее единичной «энергией связи» стационарное состояние уравнения (2.2) с  $ds=4$ :

$$\left( -1 + \frac{d^2}{dr^2} + \frac{d-1}{r} \frac{d}{dr} + |R|^s \right) R = 0. \quad (3.12)$$

При  $s=d=2$  функция  $R(r)$  была вычислена в известной статье [31]. Число квантов в солитоне (3.11) не зависит от  $\kappa$  и равно  $N_c$ :

$$N_c = \int_0^{\infty} dr r^{d-1} |R(r)|^2 \quad (3.13)$$

(при  $s=d=2$ , согласно [31],  $N_c=1.86$ ).

В области  $\rho \gg \kappa^{-1/2}$  можно пренебречь нелинейным членом в уравнении (3.9). Линейное уравнение уже решается аналитически. Решение экспоненциально убывает в подбарьерной области  $\kappa^{-1/2} \ll \rho < \rho_*$ , стандартным образом протягивается через окрестность точки остановки  $\rho = \rho_*$  (см., например, [32]) и выходит при  $\rho \gg \rho_*$  на квазиклассическую асимптотику

$$\bar{f}(\rho) = C \rho^{-2(s^{-1} + i\kappa)} \exp\left(i\frac{\rho^2}{8}\right), \quad (3.14)$$

соответствующую «замерзшему» полю (3.2). В области  $\rho \gg \rho_*$ ,  $C^2 \ln(\rho/\rho_*) \ll 1$ , где применима асимптотика (3.14), а интеграл в правой части (3.6) практически не зависит от  $\rho$  и равен  $N_c$ , из (3.6) следует

$$C^2 = (d - 4s^{-1}) N_c. \quad (3.15)$$

Известная формула для коэффициента подбарьерного прохождения частицы из области  $\rho \ll \kappa^{-1/2}$  в область  $\rho > \rho_*$  позволяет установить связь между величинами  $\kappa$  и  $C$ :

$$\kappa = -\frac{1}{\pi} \ln C \approx -\frac{1}{2\pi} \ln\left(1 - \frac{4}{ds}\right). \quad (3.16)$$

При увеличении разности  $d - 4s^{-1}$  формула (3.15) остается применимой несколько дольше, чем (3.16). Например, в случае  $d=3$ ,  $s=2$ , когда истинные значения  $C^2$  и  $\kappa$  равны:

$$C^2 \approx 2.02, \quad \kappa \approx 0.54,$$

асимптотические формулы (3.15), (3.16) дают

$$C^2 \approx 1.86, \quad \kappa \approx 0.18.$$

На рис. 1 сопоставлены истинное автомодельное решение  $|f|$  и солитон (3.11) (с истинным значением  $|f(0)|$ ) при  $d=3$ ,  $s=2$ . Для столь заметного выхода за область применимости асимптотических формул соответствие является весьма хорошим.



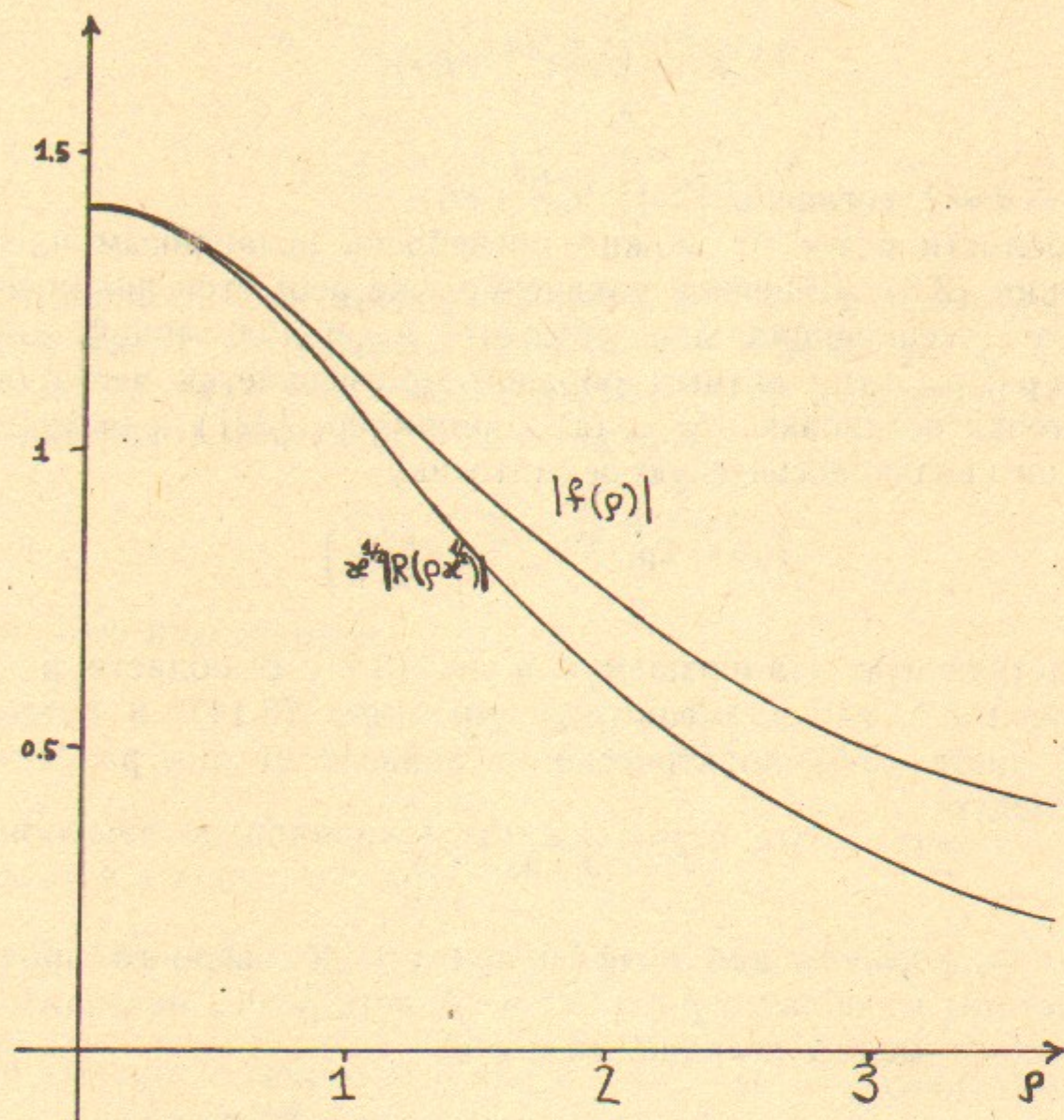


Рис. 1.

#### 4. РАННЯЯ СТАДИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ОСОБЕННОСТИ

В момент  $t=t_*$  образования особенности волновое поле является «замерзшим» во всей зоне автомодельности  $r \ll a_0$ :

$$\psi(r, t_*) = Cr^{-2(s^{-1}+ix)}. \quad (4.1)$$

Полю (4.1) соответствует отрицательный, т. е. направленный к особенности, «поток квантов»:

$$j(r, t_*) = -2\kappa C^2 r^{d-2-4s^{-1}}. \quad (4.2)$$

За время  $t-t_*$  после возникновения особенности поле успевает

измениться в области

$$r \ll b = (t-t_*)^{1/2}, \quad (4.3)$$

оставаясь при  $r \gg b$  «замерзшим» на уровне (4.1). В области  $r \ll b$ , где поле способно изменяться за малое по сравнению с  $t-t_*$  время  $\delta t \sim r^2$ , естественно ожидать установления квазистационарного состояния с не зависящим от  $r$  потоком квантов к особенности. При этом динамика волнового поля должна носить автомодельный характер

$$\psi(r, t) = b^{-2(s^{-1}+ix)} g\left(\frac{r}{b}\right). \quad (4.4)$$

Функция  $g(\rho)$  удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\left[ -i\left(s^{-1}+ix + \frac{\rho}{z} \frac{d}{d\rho}\right) + \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{d-1}{\rho} \frac{d}{d\rho} + |g|^s \right] g = 0 \quad (4.5)$$

и обладает той же, что и  $f$ , асимптотикой при  $\rho \rightarrow \infty$ :

$$g(\rho) = C\rho^{-2(s^{-1}+ix)}. \quad (4.6)$$

Уравнение (4.5) отличается от (3.3) знаком первого слагаемого. Вследствие этого поле (4.4) автоматически оказывается сингулярным в точке  $\rho=0$  и соответствующий ему поток квантов

$$j(r, t) = 2b^{d-2-4s^{-1}} J(\rho), \quad (4.7)$$

$$J(\rho) = \rho^{d-1} |g|^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \arg g,$$

не обращается при  $\rho \rightarrow 0$  в нуль:

$$J(0) < 0. \quad (4.8)$$

Конкретный вид асимптотики  $g(\rho)$  при  $\rho \rightarrow 0$  зависит от параметров  $d$  и  $s$ . В области  $d \geq 2 + 2s^{-1}$  главные члены этой асимптотики можно вычислить по формулам, полученным в [10] для стационарных сингулярных решений, так как связанное с нестационарностью первое слагаемое в (4.5) мало при  $\rho \rightarrow 0$ :

$$g(\rho) \approx \left[ \frac{-J(0)}{\rho^{d-1}} \right]^{\frac{2}{s+4}} \exp \left\{ i \frac{s+4}{sd-2s-4} \left[ \frac{-J(0)}{\rho^{sd-2s-4}} \right]^{\frac{1}{s+4}} \right\}, \quad (4.9)$$

$$d > 2 + 4s^{-1};$$



$$g(\rho) \approx A\rho^{-2s^{-1} + iJ(0)/|A|^2}, \quad (4.10)$$

$$|A|^2 [ |A|^s - 4s^{-2} ]^{1/2} = -J(0), \quad d = 2 + 4s^{-1};$$

$$g(\rho) \approx A\rho^{-2s^{-1}} \left[ 1 + \frac{iJ(0)}{|A|^2} \frac{\rho^{2+4s^{-1}-d}}{2+4s^{-1}-d} \right], \quad (4.11)$$

$$|A|^s = 2s^{-1}(d - 2 - 2s^{-1}), \quad 2 + 2s^{-1} < d < 2 + 4s^{-1};$$

$$g(\rho) = \rho^{-2/3} \left( \frac{s^2}{2} \ln \frac{1}{\rho} \right)^{-1/s} \exp \left[ -\frac{iJ(0)}{2/s+1} \left( \frac{s^2}{2} \ln \frac{1}{\rho} \right)^{2/s+1} \right], \quad (4.12)$$

$$d = 2 + 2s^{-1}.$$

В частном случае  $s=2$ ,  $d=3$  последняя формула приводилась ранее в статье [8]. В контексте настоящей статьи квазиклассичность асимптотики (4.9) можно качественно объяснить временным возрастанием потока квантов в особенность при  $d > 2 + 4s^{-1}$  (см. (4.7)).

Сингулярные автомодельные решения существуют также в области  $d < 2 + 2s^{-1}$ . В данном случае, вычисляя главные члены асимптотик при  $\rho \rightarrow 0$ , можно пренебречь не только первым, но и нелинейным членом в (4.5):

$$g \approx \frac{A}{\rho^{d-2}} + \frac{iJ(0)}{(d-2)A^*}, \quad d > 2;$$

$$g \approx A \ln \frac{1}{\rho} + \frac{iJ(0)}{A^*}, \quad d = 2; \quad (4.13)$$

$$g \approx A + \frac{iJ(0)\rho^{2-d}}{(2-d)A^*}, \quad d < 2.$$

Графики функций  $|g(\rho)|$  и  $\frac{d}{d \ln \rho} \arg g(\rho)$  при различных значениях параметров  $d$  и  $s$  изображены на рис. 2. Рис. 3 демонстрирует реализацию сингулярного автомодельного решения  $g(\rho)$  во временной задаче при  $d \geq 2 + 2s^{-1}$ . Аналогичные расчеты при  $4s^{-1} < d < 2 + 2s^{-1}$  свидетельствуют о неустойчивости соответствующих решений  $g(\rho)$ . Эта неустойчивость объясняется слабостью нелинейных эффектов на асимптотиках (4.13) и очевидным исчезновением особенности при малейшем шевелении линейного волнового поля, сфокусированного в точку. После исчезновения фокуса линейная волна, как обычно, отражается от центра и становится

расходящейся. Ее дальнейшую эволюцию можно проследить аналитически при  $d - 4s^{-1} \ll 1$ , когда постоянная  $C$  в «замороженной» асимптотике поля  $\psi(r, t)$  мала (см. (3.15)) и линейное приближение применимо во всей зоне автомодельности (а не только при  $r \ll b(t)$ ). Характер эволюции остается качественно тем же и при других значениях параметров  $d, s$  из области  $4s^{-1} < d < 2 + 2s^{-1}$ : особенность поля в точке  $r=0, t=t_*$  оказывается изолированной.

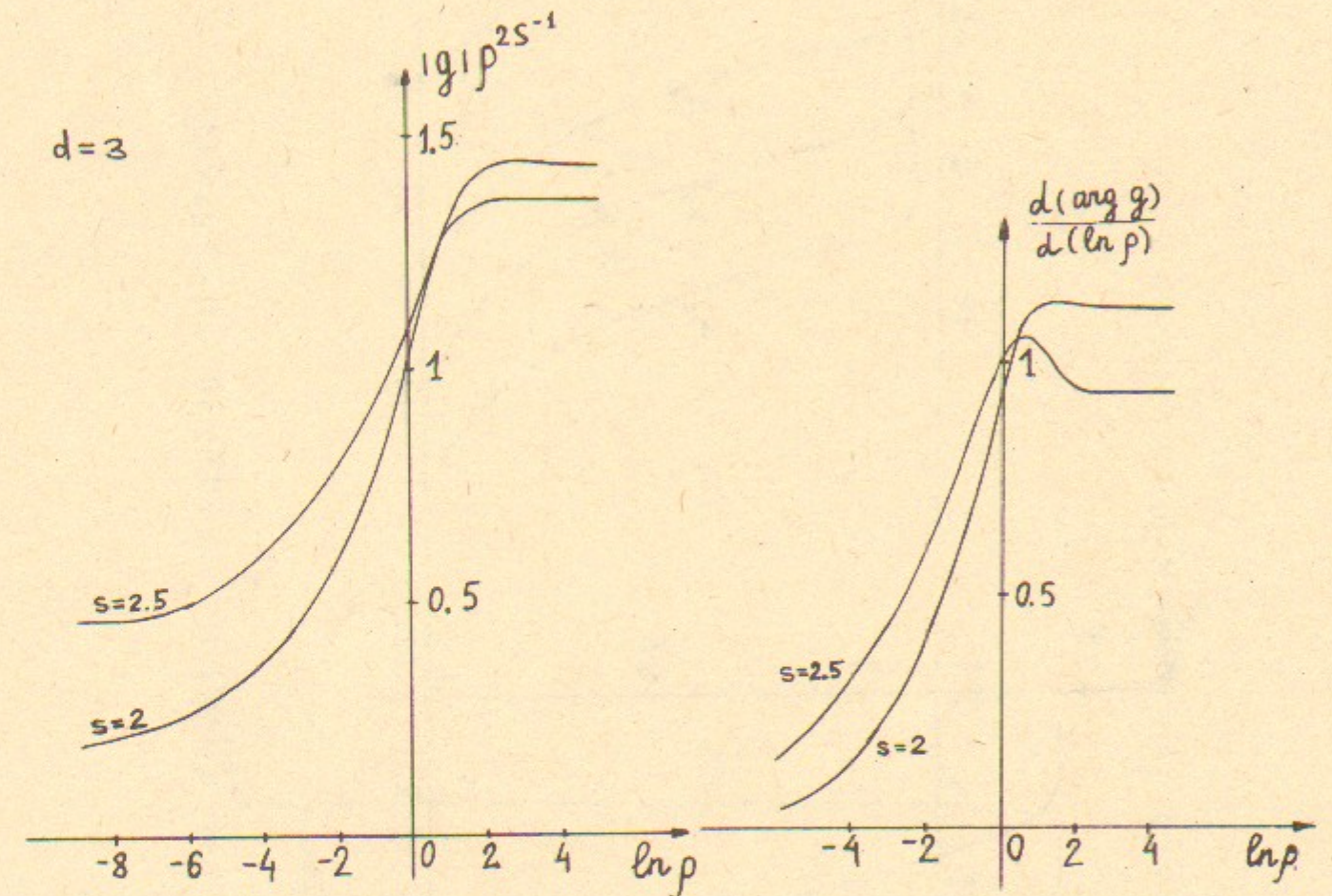


Рис. 2.

Поскольку единичный акт коллапса практически не меняет числа квантов  $N$ , но приводит к появлению мелкомасштабных флуктуаций поля, естественно ожидать постепенного смещения спектральной плотности волн в область малых масштабов. Такое смещение, по всей видимости, должно продолжаться вплоть до ухода поля под порог модуляционной неустойчивости, т. е. до подавления нелинейности дисперсией (каковая и определяет дальнейшую эволюцию). Следует заметить, что это не противоречит теореме о неизбежности коллапса при  $H < 0$  (см. [33], а также обзор [11]), так как гамильтониан  $H$ , в отличие от числа квантов  $N$ , заметно изменяется в каждой сингулярности и в конечном (слабонелинейном) состоянии поля является положительным.



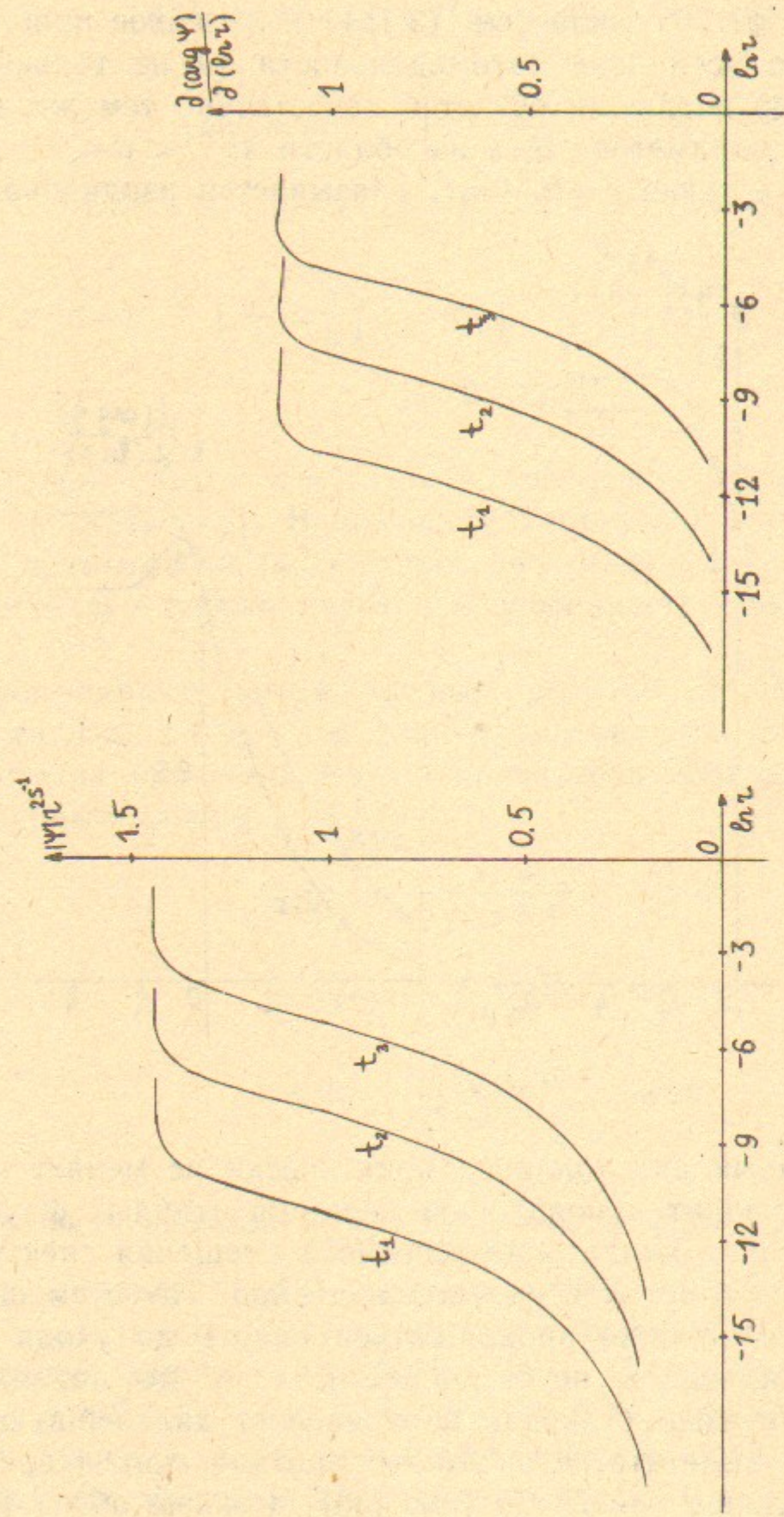


Рис. 3а.  $s=2$ ,  $d=3$ ;  $t_1=6.7 \times 10^{-8}$ ,  $t_2=2.6 \times 10^{-5}$ ,  $t_3=1.05 \times 10^{-2}$ .

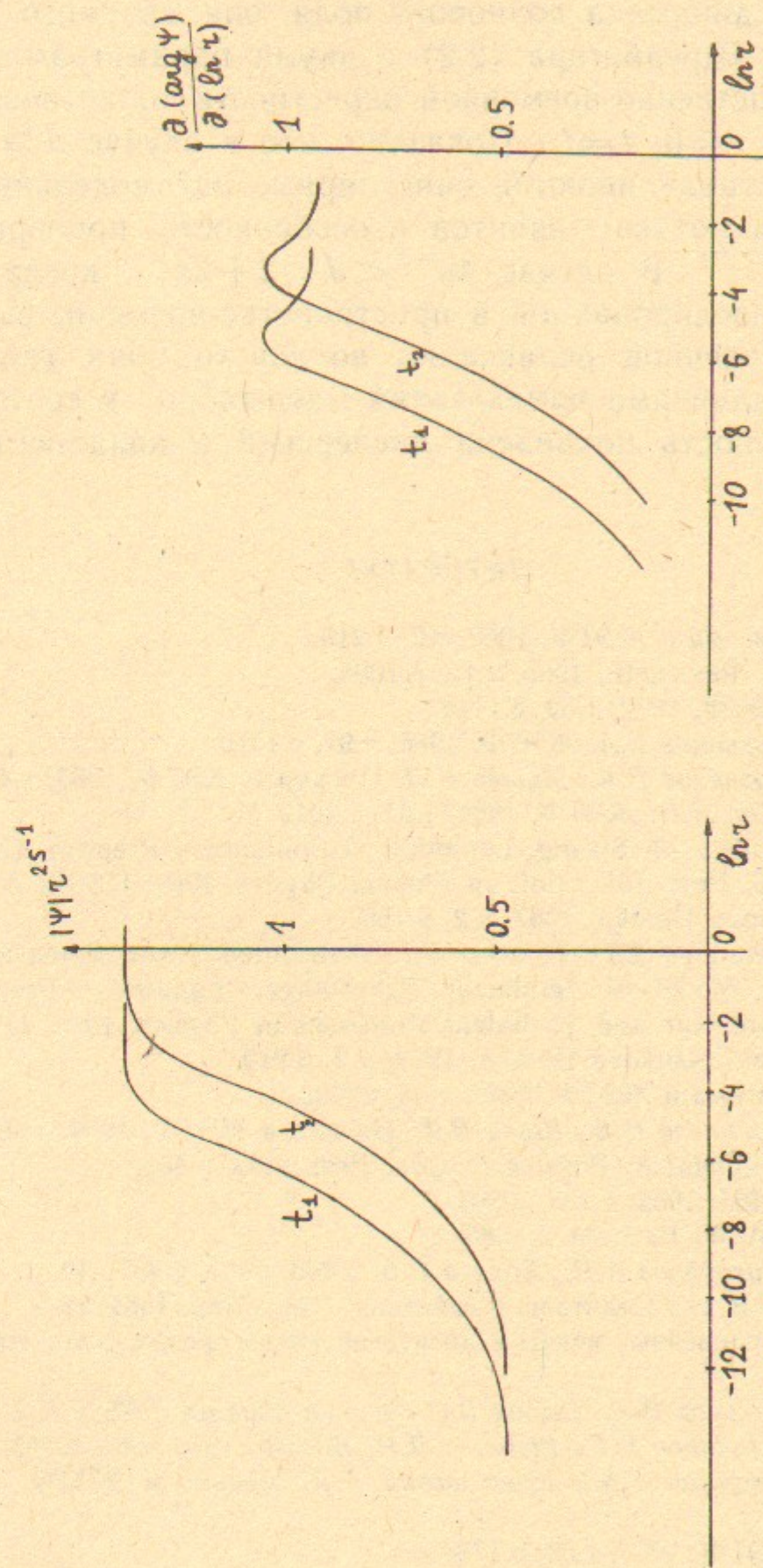


Рис. 3б.  $s=2.5$ ,  $d=3$ ;  $t_1=6.7 \times 10^{-4}$ ,  $t_2=4.8 \times 10^{-3}$ .



## 5. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Исследована динамика волнового поля, описываемого нелинейным уравнением Шредингера (2.2) с двумя параметрами  $d \geq 1$  и  $s \geq 1$ , в пространственно-временной окрестности точки возникновения особенности  $r=0$ ,  $t=t_*$ . Показано, что в случае  $d \geq 2 + 2s^{-1}$  существуют и устанавливаются сингулярные автомодельные решения с ненулевым потоком квантов в особенность, пропорциональным  $(t-t_*)^{d/2-1-2/s}$ . В случае  $4s^{-1} < d < 2 + 2s^{-1}$ , когда особенность является изолированной в пространстве-времени, выдвинута гипотеза о постепенной релаксации волнового поля (вследствие связанного с коллапсами измельчения масштабов) к состоянию, в котором нелинейность подавлена дисперсией и коллапс невозможен.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Таланов В.И. Письма в ЖЭТФ, 1965, т.2, с.218.
2. Kelleu P.L. Phys. Rev. Lett., 1965, v.15, p.1005.
3. Захаров В.Е. ЖЭТФ, 1972, т.62, с.1745.
4. Захаров В.Е., Кузнецов Е.А. ЖЭТФ, 1986, т.91, с.1310.
5. Захаров В.Е., Кузнецов Е.А., Мушер С.Л. Письма в ЖЭТФ, 1985, т.41, с.125.
6. Захаров В.Е., Шур Л.Н. ЖЭТФ, 1981, т.81, с.2019.
7. Malkin V.M. Models of Strong Langmuir Turbulence.—Preprint INP 86-185. Novosibirsk, 1986; Proc. Int. Conf. on Plasma Physics, Kiev, USSR, April 6—12, 1987. Kiev: Naukova Dumka, 1987, v.2, p.169.
8. Vlasov S.V., Piskunova L.I., Talanov V.I. Distributed Three-Dimensional Wave Collapse in the Model of Nonlinear Schrödinger Equation.—Proc. III Int. Workshop on Nonlinear and Turbulent Processes in Physics, Kiev, USSR, April 13—26, 1987. Kiev: Naukova Dumka, 1988, v.2, p.210.
9. Малкин В.М. Письма в ЖЭТФ, 1988, т.48, с.603.
10. Захаров В.Е., Косматов Н.Е., Швец В.Ф. Письма в ЖЭТФ, 1989, т.49, с.431.
11. Rasmussen J.J., Rypdal K. Physica Scripta, 1986, v.33, p.481.
12. Давыдов А.С. УФН, 1982, т.138, с.603.
13. Захаров В.Е. ПМТФ, 1968, № 2, с.86.
14. Ахманов С.А., Сухоруков А.П., Хохлов Р.В. УФН, 1967, т.93, с.19.
15. Юэн Г., Лэйк Б. В кн.: Солитоны в действии.—М.: Мир, 1981, гл.5.
16. Карпман В.И. Нелинейные волны в диспергирующих средах.—М.: Наука, 1973, §27.
17. Буднева О.Б., Захаров В.Е., Сынах В.С. Физика плазмы, 1975, т.1, с.606.
18. Дегтярев Л.М., Захаров В.Е., Рудаков Л.И. ЖЭТФ, 1975, т.68, с.115.
19. Литвак А.Г., Фрайман Г.М., Юнаковский А.Д. Письма в ЖЭТФ, 1974, т.19, с.23.
20. Захаров В.Е. ЖЭТФ, 1967, т.53, с.1735.
21. Захаров В.Е., Рубенчик А.М. ЖЭТФ, 1973, т.65, с.997.



*В.М. Малкин, Е.Г. Шапиро*

**О сингулярном волновом коллапсе**

Ответственный за выпуск С.Г.Попов

---

Работа поступила 29 июня 1989 г.  
Подписано в печать 10.07 1989 г. МН 12086  
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 1,4 печ.л., 1,1 уч.-изд.л.  
Тираж 220 экз. Бесплатно. Заказ № 102

---

*Набрано в автоматизированной системе на базе фото-  
наборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и  
отпечатано на ротапринтере Института ядерной физики  
СО АН СССР,  
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.*