

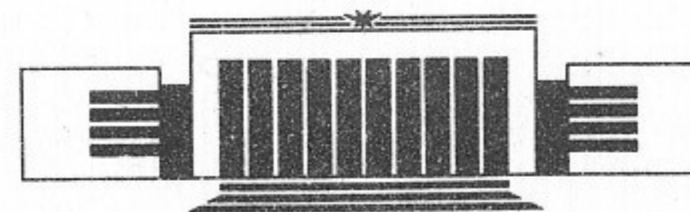


ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

А.Л. Герасимов, А.З. Паташинский

**АВТОВОЛНОВАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ
С ВНУТРЕННИМ ПОТОКОМ
(почему поет закипающий чайник)**

ПРЕПРИНТ 89-37



НОВОСИБИРСК

Автоволновая неустойчивость систем
с внутренним потоком
(почему поет закипающий чайник)

А.Л. Герасимов, А.З. Паташинский

*Институт ядерной физики
630090, Новосибирск 90, СССР*

АННОТАЦИЯ

Изучается стационарная термодинамически неравновесная система с внутренним потоком по степеням свободы. Показывается, что при наличии существенного запаздывания между моментами воздействия коллективной волновой моды на потоковые степени свободы и ответным обратным воздействием волновая мода может становиться неустойчивой. Рассмотрение ведется на примере звуковой волны в метастабильной среде с удалением больших закритических зародышей и может рассматриваться как абстрактная модель закипающего чайника.

© Институт ядерной физики СО АН СССР

ВВЕДЕНИЕ

Автоволновая неустойчивость статистико-механических систем при наличии стационарных внешних потоков (поток тепла, электрический ток и т. п.) является классическим объектом синэнергетики — науки об образовании пространственно-временных структур из хаоса в условиях неравновесности [1]. Кроме систем с такими макроскопическими внешними потоками, в природе достаточно распространены системы с микроскопическими внутренними потоками. Под последними мы понимаем потоки по степеням свободы системы. Подчеркнем, что такие потоки не сопровождаются переносом каких-либо величин в реальном физическом пространстве. Стандартным примером может служить перегретая жидкость, удерживаемая в стационарно перегретом состоянии за счет удаления больших закритических пузырьков пара (например, из-за всплывания пузырьков). В результате устанавливается стационарный (или квазистационарный) поток в «пространстве» радиусов пузырьков [2]. Характеристики такого потока как функции точки реального пространства и времени играют роль новых гидродинамических мод. При изменении внешних условий поток приходит в стационарное состояние через конечное время, которое зависит от точки наблюдения потока в конфигурационном пространстве (радиуса пузырьков) и увеличивается при удалении от критической конфигурации (увеличении закритических радиусов пузырьков). Заметим, что это время всегда больше времени релаксации в сис-

теме. При возбуждении коллективных колебаний (например, звука), моды, отвечающие этим колебаниям, взаимодействуют с коллективными степенями свободы, ассоциируемыми с потоком (для перегретой жидкости таковыми являются закритические пузырьки). При этом прямая и обратная связи двух типов коллективных степеней свободы возникают, вообще говоря, не для одинаковых областей конфигурационного пространства. Так, для перегретой жидкости давление звуковой волны сильно влияет на вероятность гомогенного зародышеобразования [2, 3], т. е. на число образующихся в единицу времени зародышей критического размера, дальнейший рост которых слабо зависит от звукового давления; обратное же воздействие пузырьков на звук определяется их общим объемом, наибольший вклад в который естественным образом дают пузырьки максимального размера. Если период коллективных колебаний (звука) больше максимального времени запаздывания потока, то наличие связи двух типов коллективных степеней свободы может привести лишь к дополнительному затуханию звука, интерпретированному в перегретой жидкости как рассеяние звука на пузырьках. При сравнимости же периода с максимальным временем запаздывания ситуация делается более сложной.

Целью настоящей работы является демонстрация того, что в этом случае в системе имеется автоволновая неустойчивость — коллективные колебания «раскачиваются», черпая энергию от потока. Качественно неустойчивость объясняется тем, что коллективные колебания обладают самовоздействием через поток, и из-за его запаздывания это самовоздействие может осуществляться со сдвигом фазы на π , приводя к самораскачке. Можно предположить, что в сильно нагреваемой снизу жидкости (модель закипающего чайника) из-за передачи тепла образующимися на дне пузырьками пара вблизи дна может образовываться перегретый слой, который является резонатором для звука. Тогда такая система, с точностью до пространственной неоднородности, похожа на рассматриваемую в настоящей работе, и, таким образом, в ней может наблюдаться автоволновая «раскачка» звука — чайник «поет».

2. МОДЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Эволюция распределения круглых зародышей по радиусам r (кинетическое уравнение) имеет вид [2, 4]

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left[F(r) f + D(r) \frac{\partial f}{\partial r} \right], \quad (1)$$

где величина $F(r)$ задает «детерминистскую» (при докритическом r — релаксационную) динамику зародыша, а $D(r)$ определяет диффузию по размерам под влиянием сторонних случайных сил, имитирующих взаимодействие с термостатом. В общем случае наличия как сохраняющихся, так и несохраняющихся полей параметра порядка величины F , D имеют вид [2, 4]:

$$F(r) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{r} + \frac{3h}{4} \right) \frac{1}{r + \lambda_0}, \quad (2a)$$

$$D(r) = \frac{D_0}{3r^2(r + \lambda_0)}, \quad (2b)$$

где поле h определяет степень метастабильности системы, так что критический радиус $R_c = \frac{4}{3|h|}$, а размер λ_0 определяется соотношением сохраняющихся и несохраняющихся мод. Кинетическое уравнение (1) соответствует наглядной интерпретации движения зародыша при большом трении в потенциале $U(r) = \int F(r) dr$, в присутствии зависящей от r диффузии «Детерминистская» динамика зародышей в отсутствие диффузии определяется, таким образом, соотношением [2, 4]

$$\dot{r} = F(r). \quad (3)$$

В качестве коллективных колебаний будем рассматривать для определенности звук, хотя формализм может быть легко распространен и на более общий случай. Распространение звуковых волн в рассматриваемой среде с зародышами в общем случае может быть записано в форме

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + v_0 \hat{L} \rho' = 0, \quad (4)$$

где ρ' , p' — возмущения плотности и давления, x — пространствен-

ная координата, а дифференциальный (по времени и координате x) оператор \hat{L} определяет зависимость декремента затухания звуковых волн от частоты

$$v(\omega) = \frac{v_0}{2\omega} \int dt e^{i\omega t} \hat{L}.$$

Для случая перегретой жидкости декремент затухания звука из-за рассеяния на пузырьках пара пропорционален квадрату частоты ω [5]: $v(\omega) = v_0 \omega^2$, что соответствует оператору $\hat{L} = 2c_0^2 k^2 \frac{\partial}{\partial t}$, так как $\omega = c_0 k$ (см. далее). Возмущение давления p' в линейном (звуковом) приближении пропорционально возмущению плотности ρ' , а из-за меняющегося во времени общего объема зародышей новой фазы y (на единицу объема среды) должно содержать также линейный (в звуковом приближении) вклад по y :

$$p' = c_0^2 \rho' + \lambda y. \quad (5)$$

Постоянная c_0 определяет скорость звука в двухфазной среде для заданного среднего во времени объема пара y_0 и вычисляется известными методами [5]. Отметим, что c_0 не равна скорости звука в жидкости и зачастую много меньше этой скорости.

Уравнения (1), (4) определяют эволюцию потоковых и волновых степеней свободы системы, и для полного задания динамики необходимо определить их связь друг с другом. Влияние потоковых степеней свободы на волновые осуществляется прямым образом через наличие в (5) слагаемого с общим объемом паровых пузырьков y , выражаемым через $f(r)$:

$$y = \gamma \int_0^{R_{\max}} r^3 f(r) dr, \quad (6)$$

где R_{\max} — максимальный радиус зародышей, при котором они удаляются из системы. Обратное воздействие звука на кинетику зародышей осуществляется через влияние возмущений плотности ρ' на критический размер R_c , или, что в линейном приближении то же самое, на поле h :

$$h = h_0 + \delta \rho'. \quad (7)$$

Уравнения (1) — (7), таким образом, связаны между собой и описывают динамику системы.

3. СТАЦИОНАРНОЕ И КВАЗИСТАЦИОНАРНОЕ РЕШЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим ситуацию, когда период звуковых колебаний велик по сравнению с некоторыми характерными временами релаксации в кинетическом уравнении (1) (см. далее). Построим сначала стационарное и квазистационарные решения этого уравнения, когда параметр h (7) в нем является медленно меняющимся. Будем считать, что вся метастабильная система поддерживается в стационарном состоянии за счет удаления больших критических зародышей, моделируемого установлением нулевого граничного условия (поглощающей стенки) при $r = R_{\max}$ в кинетическом уравнении (1). Стационарное решение уравнения (1) записывается в виде [2, 4]

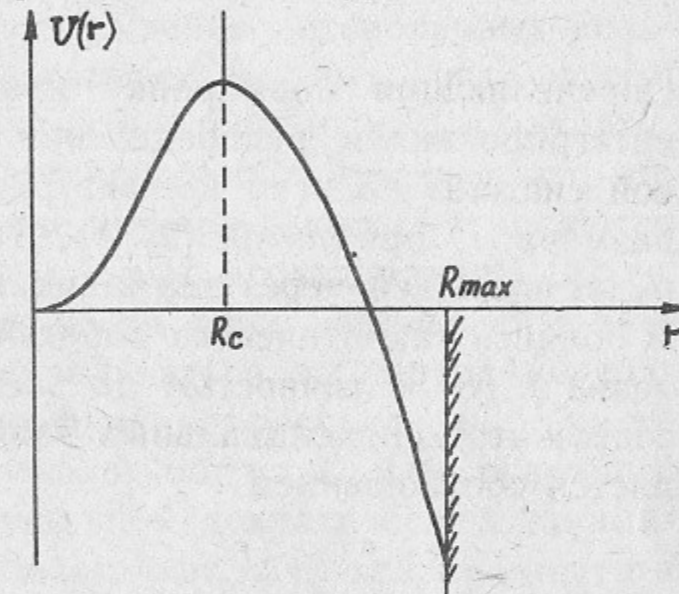


Рис. 1. Метастабильный потенциал $U(r)$, определяющий распределение зародышей.

$$f = J \exp(-U) \int_r^{R_{\max}} \frac{\exp(U)}{D(r)} dr, \quad (8)$$

где потенциал U определяется выражением

$$U(r) = \int dr \frac{F(r)}{D(r)} = \frac{r^2 + \frac{h}{2} r^3}{D_0}, \quad (9)$$

а постоянная J является потоком зародышей, вытекающих из центра $r=0$ и поглощаемых на границе $r=R_{\max}$:

$$J = Ff + D \frac{\partial f}{\partial r}. \quad (10)$$

Вид функции $U(r)$ изображен на рис. 1. Отметим, что максимум $U(r)$ совпадает с нулем $F(r)$: $r=R_c$. Поскольку система может считаться метастабильной только при условии $R_c^2/D_0 = 16/9h^2 D_0 \gg 1$, то в области докритических зародышей $r < R_c$, $R_c - r \gg \sqrt{D_0}$ распределение f (8) с точностью до экспонен-

циально малых поправок принимает вид

$$f = N_0 \exp(-U(r)), \quad (11)$$

где константа N_0 связана с потоком J посредством соотношения [4]:

$$J = \frac{N_0 D_0^{1/2}}{3\sqrt{\pi} R_c^2 (R_c + \lambda_0)} \exp\left(-\frac{1}{3D_0} R_c^2\right). \quad (12)$$

Определяющая нормировку константа N_0 может быть найдена интегрированием распределения Гиббса исходной микроскопической системы по всем конфигурациям, соответствующим зародышу размера r , при $h=0$ [2, 4]. Тем самым стационарный поток J будет выражен через термодинамические характеристики системы. В области закритических зародышей $r > R_c$, $r - R_c \gg \sqrt{D_0}$ распределение f (8) с точностью до экспоненциально малых поправок не содержит экспоненциальных зависимостей от размера r и определяется соотношением

$$f = \frac{J}{F(r)}. \quad (13)$$

Рассмотрим теперь ту же систему при наличии коллективных колебаний (звука). Тогда поток J в каждой точке пространства x зависит от времени, и если период колебаний много больше времени установления потока (квазистатистический режим), то функция f в закритической области определяется тем же уравнением (13) с медленной зависимостью $J(t)$. Время установления потока τ_f всегда больше времени релаксации $\sim R_c^3$. Если поток устанавливается за счет диффузионного прохождения зародышей от $r=0$ до $r=R_c$, как в нашем основном примере перегретой жидкости, то во времени τ_f появляется дополнительный логарифмический фактор:

$$\tau_f \sim R_c^3 \ln\left(\frac{R_c^2}{3D_0}\right). \quad (14)$$

Это связано с тем, что наиболее вероятные траектории выхода от $r=0$ до $r \sim R_c$ определяются, как можно показать, решениями «детерминистских» уравнений назад во времени [6, 7] $\dot{r} = -F(r)$, при начальных условиях $r_i \sim \sqrt{D_0}$ (при $r \ll r_i$ влияние «силы» F несущественно). Такая же оценка (14) получается для времени прохождения «макушки» потенциала U при $r=R_c$: в окрестности

«макушки» $r - R_c \sim \sqrt{D_0}$ частица движется под действием шума, а в более далекой закритической области движение определяется «детерминистской» силой F , и влияние шума мало.

4. «ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЕ» РЕШЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

С точки зрения возможности возбуждения автоволновых колебаний, наибольший интерес представляет режим, когда время установления (запаздывания) функции распределения f в закритической области сравнимо с периодом колебаний. Заметим, что это время зависит от значения r , и какие именно значения r являются определяющими, будет выяснено в ходе исследования. Далее, ограничимся рассмотрением случая, когда поток зародышей в закритическую область успевает устанавливаться за период колебаний, а существенное запаздывание функции распределения имеет место только в глубоко закритической области. Для основного примера перегретой жидкости с заданной докритической динамикой зародышей это условие имеет вид $\omega \tau_f \ll 1$, где ω — частота колебаний, а τ_f определяется соотношением (14). Предполагается, однако, что теория может быть распространена и на более сложные ситуации, когда поток в закритическую область определяется какими-то сложными внешними по отношению к метастабильной среде процессами (например, образование пузырьков пара на нагревателе — «чайник»). Для нахождения функции f в закритической области в указанных предположениях будем считать сначала, что влиянием диффузии в ней, за исключением малой окрестности «макушки» $r - R_c \sim \sqrt{D_0}$, можно пренебречь, и движение частиц определяется «детерминистской» динамикой (3). Поток J , «впрыснутый» на «макушке» в момент времени t , создает распределение f (13) в точке r в более поздний момент времени $t + \tau_d(r)$, когда частицы, двигаясь от «макушки» согласно (3), придут в точку r . Величина $\tau_d(r)$ находится в виде

$$\tau_d(r) = \int_{R_c + \Delta r}^r \frac{dr_1}{F(r_1)}, \quad (17)$$

где $\Delta r \sim \sqrt{D_0}$ (окрестность «макушки», где динамика определяется шумом), а функция распределения f выражается через нее

$$f(r, t) = \frac{J(t - \tau_d(r))}{F(r)} \quad (18)$$

Заметим, что от значения нижнего предела Δr функция f (18) не зависит в силу предполагаемой малости τ_f (14) по сравнению с периодом изменения J . По этой же причине запаздывание в аргументе J в (18) существенно лишь для $r \gg R_c$.

Для дальнейшего существенно также рассмотрение влияния диффузии в закритической области. Как нетрудно понять, при задании числа частиц, выпускаемых в единицу времени в точке $r = R_c + \Delta r$, распределение f может быть представлено в общем виде как

$$f(r, t) = \int_0^\infty J(t - t') P(r, t') dt', \quad (19)$$

где $P(r, \tau)$ — переходная вероятность для перехода частиц из точки $R_c + \Delta r$ в точку r за время τ . В пренебрежении шумом $P(r, \tau) = \delta(r - r_d(\tau))$ (где $r_d(\tau)$ — функция, обратная к $\tau_d(r)$), и мы приходим к (18). При учете воздействия шума δ -функциональная переходная вероятность «размывается». Можно показать, что при малом изменении коэффициента диффузии $D(r)$ на ширине σ «размытой» переходной вероятности:

$$D(r) \gg \frac{dD}{dr} \sigma(\tau_d(r)), \quad (20)$$

«размывание» $P(r, \tau)$ происходит квазистатически по медленно меняющемуся коэффициенту диффузии $D(r)$, приводя к выражению

$$P(r, \tau) = \frac{2}{\sqrt{\pi} \sigma(\tau)} \exp\left(-\frac{(r - r_d(\tau))^2}{\sigma^2(\tau)}\right), \quad (21)$$

где

$$\sigma^2(\tau) = F^2(r_d(\tau)) \int_0^\tau D(r_d(t_1)) \frac{dt_1}{F^2(r_d(t_1))} = F^2 \int_{R_c + \Delta r}^{r_d(\tau)} \frac{D(r)}{F^3(r)} dr. \quad (22)$$

Как нетрудно понять из явного вида $F(r)$ (2а), для сохраняющегося параметра порядка, $r \gg \lambda_0$ [2, 4], асимптотическая зависимость $r_d(\tau)$ в далеко закритической области $r_d \gg R_c$ имеет вид

$r_d(\tau) \approx \sqrt{h\tau}$; для наличия определяющего релаксацию несохраняющегося параметра порядка $\lambda_0 \neq 0$, $\lambda_0 \gg R_c$ в области $\lambda_0 \gg r \gg R_c$ получим $r_d(\tau) \approx \frac{h}{2\lambda_0} \tau$. Что касается величины $\sigma(r)$, то поскольку в

малой окрестности $r - R_c \approx \Delta r = \sqrt{D_0}$ движение определяется шумом, на нижнем пределе $\Delta r = 0$ последний интеграл в (22) расходится. На верхнем пределе $\tau \rightarrow \infty$, как видно из выражений (2) для F , D , интеграл сходится и $\sigma^2 \sim F^2 \rightarrow \text{const}$ для несохраняющегося параметра порядка $r \ll \lambda_0$, и расходится для сохраняющегося $r \gg \lambda_0$, хотя $\sigma(\tau)$ стремится при этом к нулю по закону

$$\sigma^2(\tau) \approx \frac{9}{8} R_c^3 D_0 r_d(\tau) F^2(r_d(\tau)) = \frac{\sqrt{3}}{4} D_0 \frac{R_c^{3/2}}{\sqrt{\tau}}. \quad (22')$$

Таким образом, в далеко закритической области «расплывание» переходной вероятности по r всегда останавливается.

5. АВТОВОЛНОВАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

После получения явного решения кинетического уравнения в закритической области (19) — (22) можно перейти к исследованию полной системы уравнений (1) — (7). Здесь необходимо сразу учесть, что общий объем зародышей y (6), через который кинетика зародышей оказывает воздействие на звук (5), состоит из составляющей y_0 , мало запаздывающей относительно определяющей функцию f величины $h(t)$ (7) и «набирающейся» в (6) в докритической области $r < R_c$, и составляющей y_1 , набирающейся в области $R_c < r < R_{\text{max}}$, для которой существенно запаздывание (для $r \gg R_c$). Такое разделение всегда возможно и для более сложных систем, когда докритическая динамика зародышей является более сложной (негомогенное зародышеобразование). Составляющая y_0 не может привести к возбуждению автоколебаний и определяет лишь «перенормировку» коэффициента затухания ν , поскольку определяемая y_0 часть самовоздействия звука очевидным образом имеется и в термодинамически равновесной системе без потока $h_0 > 0$. Поэтому мы будем считать коэффициент ν уже «перенормированным», т. е. определяющим реальное затухание звука в недогретой жидкости, и учитывать в (5) вместо y лишь составляющую y_1 . Величина y_1 , записываемая из (6) при подстановке значения

$$y_1 = \gamma \int_{R_c}^{R_{\max}} r^3 dr \int_0^{\infty} J(t-t') P(r, t') dt' \quad (23)$$

Величина y_1 , в свою очередь, содержит не зависящую от времени составляющую, которая может быть опущена, как не влияющая на звуковое уравнение (4). Зависимость y_1 от времени реализуется посредством влияния звукового давления ρ' на поток J , осуществляемого в случае гомогенного зародышеобразования зависимостью критического радиуса $R_c = \frac{4}{3|h|}$ в выражении для J (12) от ρ' через добавку в поле h (7).

5.1. Линейная неустойчивость

Основной неустойчивостью, обычно исследуемой для автоволновых систем, является неустойчивость в линейном приближении. Для нашей системы возможно также и исследование неустойчивости с конечным порогом по амплитуде волны (нелинейной), которое мы проведем после рассмотрения линейного случая. Для малых амплитуд ρ' мы можем разложить зависимость $J(\rho')$ и для линейного по ρ' слагаемого в (23) получить

$$y' = \gamma \delta_1 \int_{R_c}^{R_{\max}} r^3 dr \int_0^{\infty} \rho'(t-t') P(r, t') dt', \quad (24)$$

где величина $\delta_1 = \left. \frac{dJ}{d\rho'} \right|_{h=h_0}$ — постоянная, не зависящая от координат и времени. Для гомогенного зародышеобразования δ_1 легко выражается из (7), (12), в более сложных случаях δ_1 должна находиться из рассмотрения конкретного процесса образования закритических зародышей. Подставляя выражение (24) в звуковое уравнение (4) с учетом (5), получим звуковое уравнение, линеаризованное по возмущениям функции распределения зародышей, в виде

$$\frac{d^2 \rho_1}{dt^2} + c_0^2 k^2 \rho_1 + 2\nu_0 c_0^2 k^2 \frac{d\rho_1}{dt} = \epsilon k^2 \int_0^{\infty} g(t') \rho_1(t-t') dt', \quad (25)$$

где $\epsilon = \gamma \lambda \delta_1$, а ядро $g(t')$ определяется соотношением

$$g(\tau) = \frac{2}{\sqrt{\pi} \sigma(\tau)} \int_{R_c}^{R_{\max}} r^3 \exp\left(-\frac{(r-r_d(\tau))^2}{\sigma^2(\tau)}\right) dr. \quad (26)$$

В уравнении (25) звуковая волна представлена в виде стоячих волн $\rho'(x, t) = \sin kx \cdot \rho_1(t)$, что соответствует системе, помещенной в резонатор. В бесконечной среде следовало бы рассматривать решения в виде бегущих волн. Для решения уравнения (25) следует, как обычно [8], найти его преобразование Лапласа, дающее дисперсионное соотношение (зависимость $\omega(k)$):

$$-\omega^2 + c_0^2 k^2 - 2i\nu_0 c_0^2 k^2 \omega - \epsilon k^2 g_\omega = 0, \quad (27)$$

где $g_\omega(\omega)$ — преобразование Лапласа функции $g(\tau)$ (26). Для нахождения пороговых параметров неустойчивости $\text{Im } \omega < 0$, предположим, что $\epsilon \ll 1$, $\nu \ll 1$, и решим уравнение (27) по теории возмущений. Полученное условие неустойчивости моды $\omega_0 = c_0 k$ имеет вид

$$\text{Im} [g_\omega(\omega_0)] > 2c_0^2 \nu_0 \omega_0 / \epsilon. \quad (28)$$

Для вычисления g_ω поменяем местами интегрирование по радиусу r и времени τ

$$g_\omega = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{R_c}^{R_{\max}} r^3 dr \int_0^{\infty} \frac{1}{\sigma(\tau)} \exp\left(-\frac{(r-r_d(\tau))^2}{\sigma^2(\tau)}\right) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (29)$$

Поскольку во всей области не малых запаздываний $r_d(\tau) - R_c \gg \sqrt{D_0}$ выполняется неравенство $r_d(\tau) - R_c \gg \sigma(\tau)$, то подынтегральная функция в (29) при каждом фиксированном r имеет острый максимум по τ при $r_d(\tau) = r$. Разлагая разницу $r - r_d$ в показателе экспоненты по τ в окрестности $r = r_d$ и используя $\frac{dr_d}{d\tau} = F(r_d(\tau))$, в ведущем приближении, получим

$$\text{Im } g_\omega = \int_{R_c}^{R_{\max}} dr \frac{r^3}{F} \exp\left(-\frac{\omega^2 \sigma^2}{F^2}\right) \sin \omega \tau_d(r), \quad (30)$$

где $\sigma = \sigma(\tau_d(r))$, $F = F(r)$. Тот же интеграл (30) может быть пере-

писан через переменную $\tau_d(r)$:

$$\text{Im } g_\omega = \int_0^{\tau_{\max}} d\tau r_d^3(\tau) \exp\left(-\frac{\omega^2 \sigma^2}{F^2}\right) \sin \omega \tau, \quad (31)$$

где $\sigma = \sigma(\tau)$, $F = F(r_d(\tau))$, $\tau_{\max} = \tau_d(R_{\max})$. Из выражений (30), (31) и условия неустойчивости (28) видно, что диффузия в закритической области только подавляет неустойчивость, что естественно, так как диффузия разрушает когерентность самовоздействия с запаздыванием звуковой волны, осуществляемого через взаимодействие с зародышами.

Рассмотрим сначала режим, когда во всей области от $r = R_c$ до $r = R_{\max}$ (или от $\tau = 0$ до $\tau = \tau_{\max}$) выполняется условие пренебрежимости диффузией: $\omega^2 \sigma^2 / F^2 \ll 1$. Тогда вместо (31) получим

$$\text{Im } g_\omega = \int_0^{\tau_{\max}} dt r_d^3(\tau) \sin \omega \tau. \quad (32)$$

Поскольку по сделанному предположению $R_{\max} \gg R_c$, а при $r \gg R_c$ функция $r_d(\tau)$ выходит на известные асимптотики, указанные после формулы (22), то в области $\omega \tau_{\max} \gg 1$ можно найти асимптотические значения $\text{Im } g_\omega$:

$$\text{Im } g_\omega \approx -\frac{(h\tau_{\max})^{3/2}}{\omega} \cos \omega \tau_{\max}, \quad (33a)$$

$$\text{Im } g_\omega \approx -\left(\frac{h^3}{2\lambda_0}\right)^3 \frac{\tau_{\max}^3}{\omega} \cos \omega \tau_{\max}. \quad (33b)$$

Формула (33a) относится к сохраняющемуся параметру порядка $r \gg \lambda_0$, а (33b) — к несохраняющемуся $\lambda_0 \gg r \gg R$. При $\omega \ll 1/\tau_{\max}$ зависимость $\text{Im } g_\omega \sim \omega$ для обоих случаев. При $\omega \sim 1/\tau_{\max}$ функция $\text{Im } g_\omega$ имеет абсолютный максимум и формулы (33) верны по порядку величины. Общий вид зависимостей $\text{Im } g_\omega(\omega)$, носящий одинаковый характер для обоих случаев, изображен на рис. 2. Там же показана прямая, определяющая зависимость от частоты правой части условия устойчивости (28), так что неустойчивы будут те частоты, для которых график зависимости $|\varepsilon| \text{Im } g_\omega$ лежит выше прямой для $\varepsilon > 0$ и ниже прямой для $\varepsilon < 0$. При увеличении параметра возбуждения ε от нуля в сторону положительных значений первыми начинают звучать, как это видно непосредственно из рисунка, малые частоты ω . Критическое значение

$\varepsilon > 0$, при котором начинается автоволновая генерация, находится в виде

$$\varepsilon_{cr} = \frac{c_0^2 v_0}{\gamma'}, \quad (34)$$

где константа γ' различна для сохраняющегося и несохраняющегося параметра порядка:

$$\gamma'_1 = \frac{2}{5} h^{3/2} \tau_{\max}^{5/2}, \quad (35a)$$

$$\gamma'_2 = \frac{1}{32} \left(\frac{h}{\lambda_0}\right)^3 \tau_{\max}^4. \quad (35b)$$

При выводе (35) были также использованы асимптотические зависимости $r_d(\tau)$ и то обстоятельство, что получающиеся интегралы по τ «набираются» на верхних пределах. При отрицательных значениях ε неустойчивость сначала наступает, как видно из рис. 2, для частот ω в районе первого минимума $\text{Im } g_\omega$ при $\omega \sim 2/\tau_{\max}$ с крити-

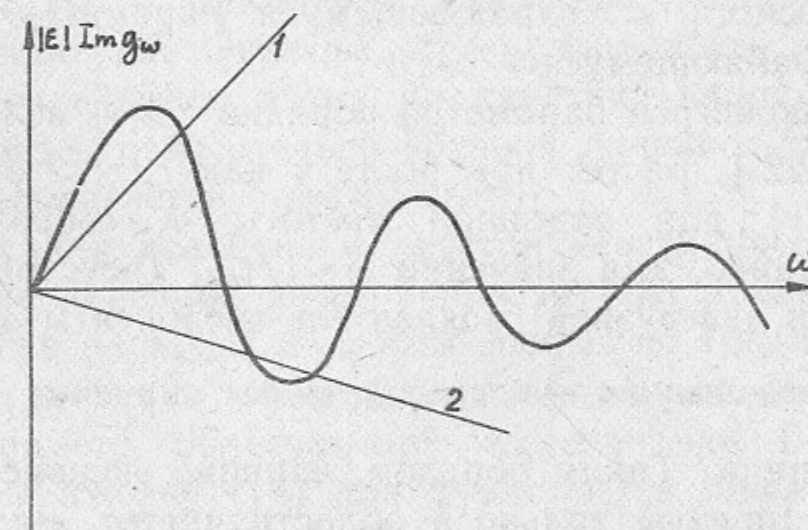


Рис. 2. Графическое решение условия автоволновой неустойчивости (28). Прямая 1 соответствует $\varepsilon > 0$, прямая 2 — $\varepsilon < 0$.

ческим значением $|\varepsilon|$ того же порядка, что и значения (34) для соответствующих случаев.

Рассмотрим теперь влияние диффузии в закритической области, т. е. влияние экспоненциального множителя в (31). Поскольку для несохраняющегося параметра порядка $r \ll \lambda_0$, как уже говорилось, диффузия «останавливается» в далеко закритической области и параметр размерности времени $\tau_0 = \sigma^2 / F^2$ определяется сходящимся интегралом в (22), «обрезанным» на нижнем пределе за счет конечного Δr , то нетрудно понять, что τ_0 оценивается уже

введенной величиной τ_f (14). Поскольку условие квазистационарности докритической динамики зародышей $\omega\tau_f \ll 1$ предполагается выполненным (на нем основано все построение), то получается, что в рамках рассматриваемого приближения для несохраняющегося параметра порядка диффузия в закритической области не оказывает никакого влияния на автоволновые процессы. Таким образом, для несохраняющегося параметра порядка экспоненциальный множитель в (31) всегда должен быть положен равным единице, и автоволновые неустойчивости системы описываются, как показано выше. Здесь же заметим, что поскольку частоты неустойчивых мод $\omega \sim 1/\tau_{\max}$, то необходимое для применимости построенной теории условие $\omega\tau_f \ll 1$ может быть записано в виде

$$\frac{\tau_f}{\tau_{\max}} = \frac{4R_c^2}{3R_{\max}^2} \ln\left(\frac{R_c^2}{3D_0}\right) \ll 1, \quad (36a)$$

$$\frac{\tau_f}{\tau_{\max}} = \frac{2}{3} \frac{R_c^2}{\lambda_0 R_{\max}^2} \ln\left(\frac{R_c^2}{3D_0}\right) \ll 1, \quad (36b)$$

где (36a) относится к сохраняющемуся параметру порядка, а (36b) — к несохраняющемуся.

Для сохраняющегося параметра порядка $r \gg \lambda_0$ величина σ^2/F^2 , как видно из (22'), растет при росте τ как $r_d(\tau) \approx \sqrt{h\tau}$. Поэтому интеграл в (31) для заданной частоты ω «обрезается» при $\tau \sim 1/R_c^5 D_0^2 \omega^4$. Однако, для значений $\omega \sim 1/\tau_{\max}$ (неустойчивые моды в пренебрежении диффузией) показатель экспоненты $\omega^2 \sigma^2/F^2$ даже в точке своего максимума при $\tau = \tau_{\max}$ имеет значение $\sim \frac{D_0 R_c}{R_{\max}^3}$, много меньше единицы. Таким образом, влияние экспоненты скажется на функции $\text{Im} g(\omega)$ только в области частот, много больших частот основных неустойчивостей $\omega \sim 1/\tau_{\max}$, и развитие выше приближение (пренебрежение диффузией) является достаточным. Таким образом, закритическая диффузия оказывается несущественной как для сохраняющегося, так и для несохраняющегося параметров порядка.

5.2. Нелинейная неустойчивость

Связь кинетики зародышей (поточных степеней свободы) со звуковой волной осуществляется в уравнении звука (4) посредством слагаемого с y' — запаздывающей составляющей (закритической) общего объема зародышей (6). Изменение давления ρ' в вол-

не изменяет поле h (7), определяющее критический радиус, и в линейном приближении по ρ' связь y' и ρ' дается соотношением (24). Наглядная интерпретация этого соотношения заключается в том, что при изменениях ρ' изменяется высота потенциального барьера $U(x)$ (рис. 2) и изменяется его «пропускная способность». Поскольку, однако, сама «пропускная способность» для гомогенного зародышеобразования экспоненциально мала (12), то и в коэффициенте ε , определяющем инкремент линейной неустойчивости, содержится эта же малость. Поэтому, если система слабо метастабильна, так что критический радиус велик, то при гомогенном зародышеобразовании коэффициент ε экспоненциально мал, условие (28) не выполнено ни для каких частот и в линейном приближении звуковые колебания устойчивы. Однако, если модуляция h волной ρ' (7) приводит к сильному изменению показателя экспоненты в (12), то линейное приближение неприменимо. Вместе с тем ясно, что такое сильное понижение потенциального барьера экспоненциально усилит воздействие ρ' на y' , и инкремент нелинейной моды сильно возрастет. Таким образом, мы ожидаем получить неустойчивость нелинейных звуковых колебаний достаточно большой амплитуды. Отметим, что нелинейность подразумевается только по воздействию звука на кинетику зародышей, но не по упругости среды, относительно которой линейное звуковое уравнение (4) предполагается применимым.

Для описания нелинейной неустойчивости рассмотрим случай, когда условие линейной неустойчивости (28) «сильно не выполнено», т. е. когда $\varepsilon \text{Im} g_\omega \ll c_0^2 v_0 \omega$ для любых ω . Тогда неустойчивыми будут только волны с большой амплитудой, и в задаче появляется большой параметр, облегчающий исследование. Более конкретно, записывая выражение (18) для функции f в закритической области в пренебрежении диффузией и подставляя значение потока J из (12) с учетом изменяющегося согласно (7) критического радиуса $R_c = 4/3|h|$, получим

$$f(r, t) = \frac{J_0}{F_0(r)} \exp\left\{\frac{P_{c0}^3}{2D_0} \delta\rho'(t - \tau_d(r))\right\}, \quad (37)$$

где J_0 , F_0 , R_{c0} означают соответствующие величины при $h = h_0$. Выражение (37) получено в предположении что амплитуда колебаний ρ' такова, что $h(7)$ мало отличается от невозмущенного значения h_0 : $|h - h_0| \ll h_0$, в то время как показатель экспоненты в (37) велик. Выполнение этого предположения связано с большой

величиной R_c^2/D_0 т. е. со слабой метастабильностью системы. Так же, как и в случае линейной неустойчивости, существенно запаздывающая часть y' общего объема зародышей y (6) «набирается» в интеграле (6) в закритической области $r > R_c$, где распределение f дается выражением (37). Поскольку мы предполагаем амплитуду колебаний показателя экспоненты много больше единицы, то подынтегральная функция в (6) имеет острый максимум в окрестности значений r соответствующих максимуму функции $\rho'(t)$. Мы будем предполагать функцию $\rho'(t)$ периодической, и в зависимости от того, сколько периодов укладывается на времени жизни закритического зародыша $\tau_{\max} = \tau_d(R_{\max})$, этих максимумов может быть один или несколько. Ограничимся рассмотрением области периодов автоволновых частот $T = \frac{2\pi}{\omega} > \tau_{\max}$, когда максимум только один. Тогда, для y' (закритическая часть интеграла (6)) получим

$$y'(t) = \frac{\gamma J_0}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\rho}} \exp\left(\frac{R_{c0}^3}{2D_0} \delta \rho'_{\max}\right) u(t), \quad (38)$$

где $u(t) = r_d^3(t - t_0)$ в моменты времени от t_0 до $t_0 + \tau_{\max}$, и $u(t) = 0$ в остальные моменты времени (время t_0 определяет максимумы ρ'_{\max} периодической функции $\rho'(t)$), а параметр ρ определяется

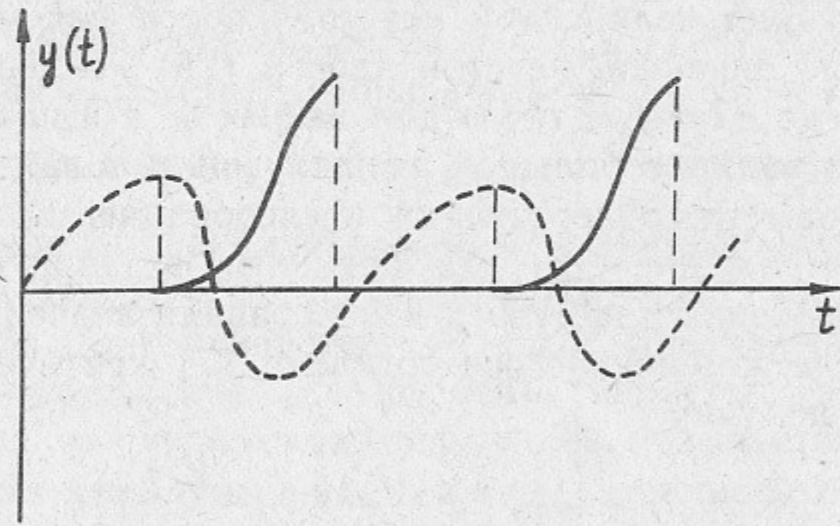


Рис. 3. Зависимость $u(t)$ и y' (38) (сплошная кривая). Штриховая кривая — зависимость $\rho'(t)$. На участках времени от t_0 до $t_0 + \tau_{\max}$, где t_0 — максимум $\rho'(t)$, величина u есть $u(t) = r_d^3(t - t_0)$. В остальные моменты времени $u = 0$.

второй производной $\rho'(t)$ в районе максимума:

$$\rho = \frac{\delta R_{c0}^3}{2D_0} \frac{d^2 \rho'}{dt^2} \Big|_{t=t_0} \quad (39)$$

Зависимость $u(t)$, привязанная по фазе к зависимости $\rho'(t)$, показана на рис. 3. Имеющиеся на кривой $u(t)$ участки $u(t) = 0$ определяются тем, что зародыши, «впрыснутые» на «макушке» потенциала $r = R_c$ в момент времени $t = t_0$, уже дошли до границы поглощения $r = R_{\max}$, а момент следующего «впрыска» $t = t_0 + T$ еще не наступил. Разрывность получающейся зависимости $y'(t)$ связана с фактически использованной заменой экспоненциально острых пиков на δ -функции, и поэтому очевидно, что на самом деле разрывы будут сглажены на экспоненциально малых временах. Подставляя выражение (38) в звуковое уравнение (4), для пространственной гармоники $\rho'(t) \sin kx$ получим

$$\frac{d^2 \rho'}{dt^2} + c_0^2 k^2 \rho' + 2\nu_0 c_0^2 k^2 \frac{d\rho'}{dt} = \frac{\varepsilon_1 k^2}{\sqrt{\rho}} \exp\left(\frac{R_{c0}^3}{2D_0} \delta \cdot \rho'_{\max}\right) u(t), \quad (40)$$

где $\varepsilon_1 = \frac{\gamma J_0}{2} \sqrt{\pi}$. Предполагая обычным образом коэффициенты ε_1 и ν малыми, запишем ρ' в виде $\rho'_\omega(t) e^{i\omega t}$, где $\rho'_\omega(t)$ — медленно меняющаяся функция времени, а $\omega = c_0 k$, и для $\rho'_\omega(t)$ получим

$$\frac{d\rho'_\omega}{dt} + 2\nu_0 c_0^2 k^2 \rho'_\omega = \varepsilon' \exp(\lambda_1 |\rho'_\omega|) u(t) e^{-i\omega t}, \quad (41)$$

где $\lambda_1 = \frac{R_{c0}^3}{2D_0} \delta$, $\varepsilon' = \frac{\varepsilon_1}{c_0^2} \sqrt{\frac{2D_0}{\delta R_{c0}^3}}$. Правая часть в (41) содержит медленно меняющуюся часть, получающуюся выделением гармоники $e^{-i\omega t}$ из периодической зависимости $u(t)$ и «быстрые» гармоники $e^{in\omega t}$, которые можно отбросить. Тогда вместо (41) получим

$$\frac{d\rho'_\omega}{dt} + 2\nu_0 \omega^2 \rho'_\omega = \varepsilon_0 \omega \operatorname{Im} g_\omega \exp(\lambda_1 |\rho'_\omega|), \quad (42)$$

где $\varepsilon_0 = \varepsilon'/2\pi$, и

$$\operatorname{Im} g_\omega = \int_0^{2\pi/\omega} u(t) \sin \omega t dt. \quad (43)$$

Очевидным образом импеданс $\operatorname{Im} g_\omega$ (43) тождественно совпадает с выражением (32). Условие устойчивости решений нелинейного уравнения (42) находится тривиально. Статическое во времени решение $\rho'_\omega = \rho_{\omega 0} = \text{const}$ приближенно (с логарифмической точностью) есть

$$\rho_{\omega 0} = \frac{\pm 1}{\lambda_1} \ln \left(\frac{2\nu_0\omega}{\lambda_1 |\varepsilon_0 \operatorname{Im} g_\omega|} \right) \quad (44)$$

(знак в (41) совпадает со знаком $\varepsilon_0 \operatorname{Im} g_\omega$). Здесь предполагалось (и только в этом приближении имеет смысл рассмотрение нелинейной неустойчивости), что аргумент логарифма много больше единицы. Все амплитуды ρ'_ω , меньшие $\rho_{\omega 0}$, затухают, а большие $\rho_{\omega 0}$ — растут. Таким образом, звуковые волны достаточно большой амплитуды всегда неустойчивы. Интересно отметить также, что наименьший порог неустойчивости по амплитуде $\rho_{\omega 0}$ имеют те же моды, которые первыми становятся линейно неустойчивыми при увеличении ε_0 , что видно из сравнения аргумента логарифма в (44) с условием линейной неустойчивости (28).

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе была продемонстрирована возможность автоволновых неустойчивостей в стационарной термодинамически неравновесной системе с потоками по степеням свободы. Характеристики такого потока как функции точки реального пространства и времени играют роль новых гидродинамических мод. Взаимодействие новых мод с обычными внешними (со звуковой модой, диффузией, теплопроводностью и т. д.) имеет, вообще говоря, конечный сдвиг во времени между моментом максимального воздействия (модуляции) внешней моды на поток и моментом обратного воздействия потока, что может вызвать аномальное затухание или усиление внешней гидродинамической моды.

В качестве конкретной системы было рассмотрено распространение звука в перегретой жидкости с удалением больших закритических зародышей. С точки зрения таких метастабильных систем, следует также отметить совершенно новый механизм установления потока зародышей при учете автоволновых процессов. Действительно, достаточно очевидно, что линейно неустойчивая или имеющая достаточно большую амплитуду звуковая мода будет нарастать до тех пор, пока определяемый ею динамический порог U не станет порядка единицы (т. е. критическая энергия порядка тепловой). Устанавливающийся в результате поток не будет содержать «стандартного» экспоненциального фактора теории Зельдовича — Фольмера [9]. Таким образом, самоорганизация стационар-

ных метастабильных систем может существенно влиять на установление и величину потоков по степеням свободы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Naken H.* Synergetics. An introduction. 3-rd ed, Springer, Berlin, 1983.
2. *Паташинский А.З., Шумило Б.И.* ЖЭТФ, 1979, т.77, с.1417.
3. *Скрипов В.П.* Метастабильная жидкость. — М.: Наука, 1972.
4. *Паташинский А.З., Шумило Б.И.* Препринт ИЯФ СО АН СССР 79-10, Новосибирск, 1979.
5. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. — М.: Наука, 1986, с.424.
6. *Вентцель А., Фрейдлин М.* Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. — М.: Наука, 1979.
7. *Graham R., Tel T.* J. of St. Phys., 1984, v.35, p.729.
8. *Морс Ф., Фешбах Г.* Методы теоретической физики I. — М.: ИЛ, 1979.
9. *Зельдович Я.Б.* ЖЭТФ, 1942, т.12, с.525;
Фольмер М. Кинетика образования новой фазы. — М.: Наука, 1986.

А.Л. Герасимов, А.З. Паташинский

**Автоволновая неустойчивость систем
с внутренним потоком
(почему поет закипающий чайник)**

Ответственный за выпуск С.Г.Попов

Работа поступила 17 марта 1989 г.
Подписано в печать 23.03. 1989 г. МН 12024.
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 1,7 печ.л., 1,4 уч.-изд.л.
Тираж 250 экз. Бесплатно. Заказ № 37

*Набрано в автоматизированной системе на базе фото-
наборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и
отпечатано на ротапринтере Института ядерной физики
СО АН СССР,
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.*