

56

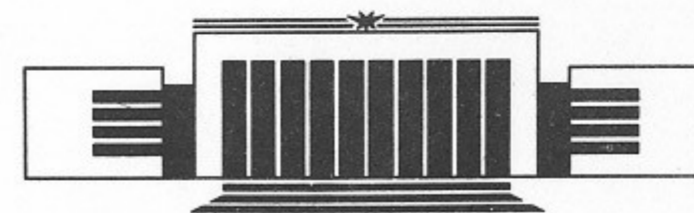


ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

И.М. Ланский, А.И. Щетников

**ВИНТОВАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ
ПЛАЗМЕННОГО ШНУРА
С ВМОРОЖЕННЫМИ ТОРЦАМИ**

ПРЕПРИНТ 89-85



НОВОСИБИРСК

Винтовая неустойчивость
плазменного шнура
с замороженными торцами

И.М. Ланский, А.И. Щетников

Институт ядерной физики
630090, Новосибирск 90, СССР

АННОТАЦИЯ

Исследуется влияние замороженности плазменного шнура в торцевые стенки на развитие винтовой неустойчивости. Выяснено, что замороженность в торцы оказывает стабилизирующее воздействие, если плазменный шнур помещен в проводящий кожух. Найдена величина критического тока. Описана нелинейная стадия развития неустойчивости в условиях слабой надкритичности.

В экспериментах по нагреву плазмы релятивистским электронным пучком этот пучок пропускается через плазменный шнур, помещенный в однородное магнитное поле. Как известно, при превышении нескомпенсированным полным током, равным алгебраической сумме тока пучка и обратного тока, некоторого критического значения в такой системе развивается гидродинамическая винтовая неустойчивость [1]. При отыскании порога этой неустойчивости в аналогичных задачах для токамаков рассматривалась идеальная модель, в которой плазменный «бублик» для простоты заменялся подвешенным на оси установки прямым шнуром с циклическими граничными условиями. Результаты, полученные с помощью такой модели, использовались и для оценки критического тока в аксиально-симметричных системах, хотя оставался открытым вопрос о влиянии замороженности плазмы в торцевые стенки установок на строгость таких оценок.

В первом разделе настоящей работы будет проведено вычисление критического полного тока с учетом замороженности плазмы в торцы в часто реализуемой на практике ситуации, когда этот ток течет в тонком скин-слое на поверхности шнура. Мы покажем, что замороженность действительно приводит к качественному изменению критерия устойчивости, если плазма помещена в проводящий кожух (как это обычно и бывает в эксперименте). Во втором разделе будет описана нелинейная стадия развития неустойчивости в условиях слабой надкритичности, когда величина полного тока лишь незначительно превышает пороговую.

1. КРИТЕРИЙ ВИНТОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Рассмотрим однородный плазменный цилиндр радиуса a и длины $L \gg a$, помещенный в идеально проводящий кожух радиуса b ; плотность плазмы ρ , а давление p . Если по поверхности плазмы течет равномерно распределенный продольный ток I , то магнитное поле внутри плазмы имеет только продольную компоненту B_z , а снаружи — продольную B_z и азимутальную $B_\varphi(r)$ (причем $B_\varphi(r) = B_\varphi a/r$, где B_φ связано с током I соотношением $B_\varphi = 2I/ca$). Условие равновесия поверхности плазмы связывает эти величины соотношением

$$B_z^2 + 8\pi p = B_z^2 + B_\varphi^2. \quad (1)$$

Вывод точных уравнений колебаний такой системы в линейном приближении дан в обзоре [1]. Следуя полученным там результатам, удобно сформулировать нашу задачу следующим образом. Пусть $\bar{\xi}$ — смещение элемента плазмы из положения равновесия. Тогда функция $\tilde{p} = \partial \bar{\xi}_z / \partial z$ и скалярный потенциал возмущенного магнитного поля ψ должны удовлетворять уравнению Лапласа соответственно внутри ($r < a$) и снаружи ($r > a$) шнура:

$$\Delta \tilde{p} = 0, \quad (2)$$

$$\Delta \psi = 0. \quad (3)$$

Функции \tilde{p} и ψ , а также радиальная компонента смещения ξ_r связаны на поверхности плазмы (при $r = a$) граничными условиями

$$\left(\frac{4\pi\rho}{B_z^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \xi_r = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r}, \quad (4)$$

$$B_z^2 \tilde{p} = \left(B_z \frac{\partial}{\partial z} + \frac{B_\varphi}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \psi - \frac{B_\varphi^2}{a} \xi_r, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \left(B_z \frac{\partial}{\partial z} + \frac{B_\varphi}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \xi_r. \quad (6)$$

На поверхности кожуха (при $r = b$) должно выполняться условие

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0. \quad (7)$$

Подчеркнем еще раз, что это — точная система уравнений. Мы же рассмотрим далее приближение длинноволновых колебаний,

причем таких, что плазменный столб смещается как целое (моды $m = \pm 1$). В этом случае радиальную компоненту смещения можно представить в виде

$$\xi_r = \bar{\xi}(z, t) \vec{e}_r$$

(здесь и далее $\vec{e}_z, \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi$ — ортонормированный базис цилиндрической системы координат). Уравнения (2) и (3) с учетом граничных условий (4), (6), (7) будут иметь решения

$$\tilde{p} = r \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{4\pi\rho}{B_z^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \xi_r, \quad (8)$$

$$\psi = \frac{r + b^2/r}{1 - b^2/a^2} \left(B_z \frac{\partial}{\partial z} + \frac{B_\varphi}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \xi_r. \quad (9)$$

Подставив эти решения в (5) и учитывая, что

$$\frac{\partial e_r}{\partial \varphi} = e_\varphi,$$

получаем уравнение, описывающее интересующие нас колебания:

$$-4\pi\rho \frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial t^2} + (B_z^2 + NB_z^2) \frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial z^2} + 2N \frac{B_z B_\varphi}{a} \frac{\partial}{\partial z} [\vec{e}_z \times \bar{\xi}] - \frac{B_\varphi^2}{a^2} (N-1) \bar{\xi} = 0. \quad (10)$$

Здесь $N = (b^2 + a^2)/(b^2 - a^2)$ — геометрический фактор, в котором отражено влияние кожуха. (Если кожух отсутствует, то $a/b = 0$ и $N = 1$; при этом последнее слагаемое в уравнении (10) исчезает. Нетрудно понять, что оно описывает отталкивание шнура от токов изображения, наведенных на кожухе). Уравнение (10) надо дополнить граничными условиями

$$\bar{\xi}(0) = 0, \quad \bar{\xi}(L) = 0, \quad (11)$$

выражающими факт вмороженности плазмы в торцевые стенки. Для упрощения дальнейших выкладок удобно ввести обозначения:

$$v^2 = \frac{B_z^2 + NB_z^2}{4\pi\rho},$$

$$\alpha = \frac{B_z B_\varphi}{B_z^2 + NB_z^2} \cdot \frac{N}{a},$$

$$\beta^2 = \frac{B_\varphi^2}{B_z^2 + NB_z^2} \frac{N-1}{a^2},$$

и сделать преобразование

$$w = (\xi_x + i\xi_y) e^{i\alpha z}.$$

Уравнение (10) при этом приобретает вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - v^2 \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (\alpha^2 - \beta^2) w \right\} = 0, \quad (12)$$

а граничные условия (11) переходят в

$$w(0) = 0, w(L) = 0. \quad (13)$$

Решение уравнения (12) будем искать в виде

$$w(z, t) = \sin\left(\frac{\pi n z}{L}\right) e^{i\omega t}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Из дисперсионного соотношения

$$\omega^2 = v^2 \left(\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 + \beta^2 - \alpha^2 \right)$$

следует, что при увеличении тока первой потеряет устойчивость гармоника с номером $n=1$; поэтому критерием устойчивости системы является выполнение условия

$$\alpha^2 < \beta^2 + \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \quad (14)$$

В случае, когда давление плазмы p мало по сравнению с $B_i^2/8\pi$, можно положить $B_e = B_i$, при этом неравенство (14) преобразуется в

$$\frac{B_\varphi}{B_i} \frac{L}{2\pi a} < \frac{b^2}{b^2 - a^2}, \quad (15)$$

и критический ток оказывается равным

$$I_{\text{crit}} = \frac{c B_i \pi a^2 b^2}{L(b^2 - a^2)}.$$

Сравним условие (15) с другим, полученным ранее для не замороженной в торцы плазмы с циклическими граничными условиями (см., например, [2]). Как известно, в этом случае область неустойчивости продольной гармоники с номером n в плазме малого

давления ограничена неравенствами

$$n < \frac{B_\varphi}{B_i} \frac{L}{2\pi a} < n \frac{b^2}{a^2}.$$

Объединение всех этих отрезков представляет собой область неустойчивости системы. Если $b^2/a^2 > 2$, то система устойчива только в интервале

$$\frac{B_\varphi}{B_i} \frac{L}{2\pi a} < 1. \quad (16)$$

если же $b^2/a^2 < 2$, то имеется еще

$$l = \left[\frac{a^2}{b^2 - a^2} \right]$$

«островов» устойчивости (квадратные скобки здесь означают взятие целой части), ограниченных неравенствами

$$\frac{b^2}{a^2} < \frac{B_\varphi}{B_i} \frac{L}{2\pi a} < 2,$$

$$2 \frac{b^2}{a^2} < \frac{B_\varphi}{B_i} \frac{L}{2\pi a} < 3,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$l \frac{b^2}{a^2} < \frac{B_\varphi}{B_i} \frac{L}{2\pi a} < l+1$$

(Впрочем, наличие этих «островов» представляет чисто теоретический интерес, и реальная система устойчива только в пределах неравенства (16), так как время, в течение которого ток может быть «переведен» через область неустойчивости, отделяющую один «остров» от другого, значительно превышает характерное время развития неустойчивости.)

Нетрудно увидеть, что предельно достижимое теоретически значение параметра $\frac{B_\varphi}{B_i} \frac{L}{2\pi a}$, равное

$$l+1 = \left[\frac{b^2}{b^2 - a^2} \right],$$

не превышает критического значения этого же параметра для системы с замороженными торцами (15), как и должно быть из энер-

гетических соображений, поскольку мы ограничили класс рассматриваемых решений, вмораживая торцы.

Заметим также, что если кожух отсутствует ($a/b=0$), то оба критерия, (15) и (16), дают одно и то же критическое значение этого параметра:

$$\frac{B_{\varphi}}{B_i} \frac{L}{2\pi a} < 1.$$

2. НЕЛИНЕЙНАЯ СТАДИЯ РАЗВИТИЯ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Предположим, что величина продольного тока лишь незначительно превышает пороговое значение I_{crit} . Рассмотрим задачу об эволюции шнура на нелинейной стадии в условиях слабой надкритичности, когда

$$\varepsilon = \frac{I}{I_{crit}} - 1 \ll 1.$$

Для простоты дальнейших вычислений положим радиус шнура малым по сравнению с радиусом кожуха. При выполнении этого условия легко модифицировать применительно к нелинейной стадии последнее слагаемое в уравнении (12), учитывая нелинейную зависимость от ξ при $\xi \infty b$ силы взаимодействия тока шнура и тока изображения в кожухе на единицу длины:

$$\bar{F} = - \frac{2I^2 \xi}{c^2(b^2 - \xi^2)}. \quad (17)$$

Если выполняется дополнительное условие $L \gg b^3/a^2$, то нелинейными поправками к содержащим производные по координате членам в уравнении (12) можно пренебречь. Их влияние будет мало по сравнению с нелинейными поправками в (17). С учетом сказанного (12) переходит в

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - v^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \left(\alpha^2 - \beta^2 \frac{b^2}{b^2 - |w|^2} \right) w \right) = 0. \quad (18)$$

Коэффициенты этого уравнения при $\rho \ll B_i^2/8\pi$ имеют вид

$$v^2 = \frac{B_i^2}{2\pi\rho},$$

$$\alpha = \frac{\pi}{L} \left(1 + \varepsilon + 2 \frac{a^2}{b^2} \right),$$

$$\beta = \frac{2\pi a}{Lb}.$$

Вблизи порога неустойчивости будем искать решение (18) в виде

$$w(z, t) = \bar{C}(t) \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) + \delta w(z, t), \quad (20)$$

где $\bar{C}(t)$ «медленная» амплитуда основной, неустойчивой в линейном приближении гармоники, а δw — малая поправка, которую без ограничения общности можно выбрать удовлетворяющей условию ортогональности

$$\int_0^L \delta w(z, t) \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) dz = 0.$$

Подставим (20) в (18), причем в нелинейном члене в силу его собственной малости добавкой δw пренебрежем. Проинтегрировав получившееся уравнение по z с весом $\sin\left(\frac{\pi z}{L}\right)$ в пределах от 0 до L , получим обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее зависимость «медленной» амплитуды от времени:

$$\frac{d^2 \bar{C}}{dt^2} - v^2 \left(\alpha^2 - \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \right) \bar{C} + 2v^2 \beta^2 \frac{\bar{C}}{|\bar{C}|^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|\bar{C}|^2}{b^2}}} - 1 \right) = 0. \quad (21)$$

Система, состоящая из уравнения (21) и комплексно сопряженного ему, имеет два интеграла движения: интеграл энергии

$$E = \frac{1}{2} \left| \frac{d\bar{C}}{dt} \right|^2 - \frac{1}{2} v^2 \left(\alpha^2 - \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \right) |\bar{C}|^2 + v^2 \beta^2 \ln \left(\frac{b(1 - \sqrt{1 - |\bar{C}|^2/b^2})}{|\bar{C}|(1 + \sqrt{1 - |\bar{C}|^2/b^2})} \right) \quad (22)$$

и интеграл азимутального момента вращения

$$M = \frac{\frac{d\bar{C}}{dt} \cdot \bar{C}^* - \bar{C} \cdot \frac{d\bar{C}^*}{dt}}{2i} \quad (23)$$

Легко видеть, что решение, соответствующее не смещенному в некоторый момент времени t_0 шнуру ($\bar{C}(t_0) = 0$) и имеющее тем самым нулевой момент вращения относительно оси системы, может быть представлено в виде

$$\bar{C}(t) = C(t) e^{i\varphi_0}, \quad (24)$$

где $C(t)$ — вещественная функция времени, φ_0 — вещественная константа. Если максимальное смещение шнура мало по сравнению с радиусом кожуха, то потенциал, в котором происходит движение, можно разложить по малости C/b :

$$W = -\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 v^2 \left(\varepsilon - \frac{3a^2 C^2}{b^4} \right) C^2.$$

Вид этого потенциала приведен на рис. 1. Решение, соответствующее нулевой энергии шнура, имеет вид

$$C(t) = C_0 \operatorname{ch}^{-1} \left(\pi \sqrt{2\varepsilon} \frac{v(t-t_*)}{L} \right)$$

$$\text{где } C_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}} \frac{b^2}{a}.$$

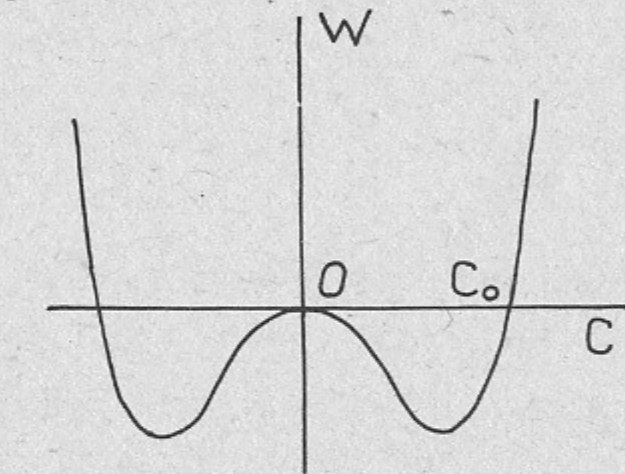


Рис. 1.

Если в задачу ввести слабую неомическую диссипацию энергии (например, трение плазмы о нейтральный газ), то рассмотренные колебания будут релаксировать к состоянию устойчивого равновесия на дне потенциальной ямы.

Отметим еще одно частное решение уравнения (21), описывающее стационарное вращение смещенного шнура:

$$\bar{C}(t) = C_1 e^{-i(\omega t - \varphi_1)}, \quad (25)$$

где C_1, ω, φ_1 — вещественные константы. Подставив (25) в (21), найдем частоту этого вращения

$$\omega^2 = v^2 \left\{ \frac{2\beta^2}{C_1^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{C_1^2}{b^2}}} - 1 \right) - \alpha^2 + \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \right\}. \quad (26)$$

Необходимость выполнения условия $\omega^2 > 0$ накладывает ограничение на амплитуду C_1 при заданной надкритичности ε :

$$\bar{C} < C_1 < b,$$

где \bar{C} — решение (26) при $\omega = 0$.

В заключение приведем основные результаты настоящей работы. Получен критерий устойчивости скинированного пинча с замороженными торцами, окруженного проводящим кожухом (15), который качественно отличается от известного критерия Крускала — Шафранова для случая с невмороженными торцами. Найдены решения нелинейного уравнения колебаний шнура в условиях слабой надкритичности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кадомцев Б.Б. В кн.: Вопросы теории плазмы — М.: Госатомиздат, 1963, вып.2, с.132.
2. Шафранов В.Д. ЖТФ, 1970, т.40, с.241.

И.М. Ланский, А.И. Щетников.

**Винтовая неустойчивость плазменного шнура
с замороженными торцами**

Ответственный за выпуск С.Г.Попов

Работа поступила 16 мая 1989 г.
Подписано в печать 8.06.1989 г. МН 10258
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 1,1 печ.л., 0,9 уч.-изд.л.
Тираж 200 экз. Бесплатно. Заказ № 85

*Набрано в автоматизированной системе на базе фото-
наборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и
отпечатано на ротапинтере Института ядерной физики
СО АН СССР,
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.*