ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

Ю.И. Эйдельман, В.Е. Якименко

РАСЧЕТ ДВИЖЕНИЯ СПИНА ЭЛЕКТРОНА В НЕЛИНЕЙНОЙ МАГНИТНОЙ СИСТЕМЕ НАКОПИТЕЛЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕХНИКИ ЛИ ОПЕРАТОРОВ

ПРЕПРИНТ 90-127

НОВОСИБИРСК

Расчет движения спина электрона в нелинейной магнитной системе накопителя с использованием техники Ли операторов.

Ю.И.Эйдельман, В.Е.Якименко

Институт ядерной физики
630090 Новосибирск, СССР

Техника Ли-операторов применена для решения уравнения движения спина в накопителе. Получено матричное представление оператора преобразования спина при прохождении частицы через элемент магнитной системы накопителя. Выведены формулы "сложения" поворотов спина в операторной и векторной формах для постоянной, линейной, и квадратичной (по компонентам вектора динамических переменных) частей вектора угловой скорости. Найдены выражения для компонент этого вектора вплоть до членов второго порядка по орбитальному и первого по спиновому движению частицы. Обсуждены алгоритмы программы расчета нелинейного спинового движения.

<u>The spin motion calculation using Lie method in collider nonlinear magnetic field.</u>Lie operator method of solving the spin motion equation in collider nonlinear fields is used. The matrix presentation of spin Lie transformation for particle passing through collider elements is obtained. The formulas for combined several spin turn transformations are calculated in vector, matrix and operator forms for zero, first and second powers component of dynamical variable vector. The expressions for frequency precession vector components in zero, first and second powers on orbit motion and first powers on spin motion are obtained. The computer codes algorithms for nonlinear spin motion calculation are discussed.

Введение.

Расчет динамики движения спина в ускорителях и накопителях по-прежнему представляет интерес в связи рассмотрением различных схем экспериментов с поляризованными пучками (включая, естественно, продольную поляризацию). Применение в современных ускорительных установках для улучшения параметров пучков разнообразных элементов, сильно искажающих линейное движение (различные секступоли, октуполи и т.д.), приводит к недостаточности линейных методов расчета как орбитального, так и спинового движения. Использование метода Ли-операторов, развитого в работах Драгта, Фореста и др. [1-3], позволило продвинуться в учете нелинейных поправок для орбитального движения. В работе Йокойи [4] было предложено применение этой техники в спиновых расчетах. К сожалению, практических результатов (расчетных формул и алгоритмов, программ и т.п.) за этим не последовало. Эта "незавершенность" связана, по крайней мере, с двумя обстоятельствами. Первое. Метод Ли-операторов позволяет записать решение уравнения движения спина в виде некоторого матричного оператора, действующего на начальный вектор спина $s(o)$. Но сам этот оператор довольно сложным образом зависит для каждого типа элементов накопителя от синхро-бетотронного движения частицы при прохождении этого элемента. Вторым "препятствием" является сложность получения формул сложения Ли-операторов, двух последовательных элементов накопителя, которые необходимы для вычисления "оборотного" Ли-оператора всего кольца и, следовательно, оператора преобразования спина практически любого числа оборотов частицы в накопителе. В настоящей работе предпринята попытка ликвидировать этот пробел.

План работы следующий. В первом разделе обсуждается операторный метод решения уравнения движения спина. Затем получено матричное представление оператора преобразования спина. В следующем разделе выводятся формулы "сложения" поворотов, поскольку движение спина представляет собой просто поворот вокруг вектора угловой скорости $\mathbf{W}$. Далее получены формулы "сложения" в векторной и операторной формах постоянных, линейных и квадратичных (по компонентам $\mathbf{Z}$) частей вектора угловой скорости $\mathbf{W}$. Следующий раздел содержит вывод выражений для компонент этого вектора с учетом квадратичных (секступольных) по орбитальному и линейных по спиновому компонент вектора динамических переменных $\mathbf{Y}=(\mathbf{Z};\mathbf{S})=(x,p_x,z,p_z,\sigma,p_\sigma;S_x,S_z,S_\tau)$. В заключительном разделе обсуждается алгоритм использования полученных результатов для создания программы расчета нелинейного спинового движения в накопителе.

1. Уравнение движения спина.

Как известно, (например [5]), уравнение классического движения спина в накопителе имеет вид

$$d\mathbf{S}/ds = [\mathbf{W}\mathbf{S}], \qquad (1.1)$$

где $\mathbf{S}$ - вектор спина, s - азимут, $\mathbf{W}$ - угловая скорость вращения спина, определяемая БМТ-уравнением (уравнением Баргмана-Мичела-Телегди [6]). Уравнение (1.1) записано в системе ортов $(\mathbf{e}_x,\mathbf{e}_z,\tau)$, фиксированной относительно накопителя.

Обычный "классический" подход к решению этого уравнения состоит в следующем. Угловая скорость $\mathbf{W}$ записывается для каждого типа элементов накопителя, после чего методом последовательных приближений интегрируется система дифференциальных уравнений для S. Поскольку при учете синхро-бетатронного движения частицы $\mathbf{W}$ сложным образом зависит от параметров этого движения, аналитически решить систему (1.1) удается лишь в линейном (по синхро-бетатронному движению) приближении.

В другом подходе, основанном на применении техники Ли-операторов, вектора $\mathbf{S}$ и $\mathbf{W}$ в уравнении (1.1) рассматриваются как операторы. Тогда для частицы с орбитальным гамильтонианом $\mathbf{H}_{\mathbf{orb}}$ и спиновым $\mathbf{WS}$ нетрудно найти решение этого уравнения:

$$\mathbf{S}(s)=\exp(-:\int_0^s ds'(H_{orb}+\mathbf{WS}):)\mathbf{S}(0). \qquad (1.2)$$

(ограничивающие символы " : " подчеркивают операторную природу выражения). Здесь, как и общепринято, экспоненциальный оператор понимается как ряд:

$$\exp(-:F:)=\Sigma_{n=o}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}:F:^n.$$

В свою очередь каждый член этого ряда представляет собой n-ную степень дифференциального оператора, действие которого на произвольную функцию f определяется с помощью скобок Пуассона :

$$:F:f=(F,f) = \frac{dF}{dz_i}\cdot\frac{df}{dp_{zi}} - \frac{dF}{dp_{zi}}\cdot\frac{df}{dz_i}. \ ^{*)}$$

Введенный таким образом оператор называется Ли-оператором, а экспоненциальное разложение - Ли-преобразованием.

Для полного гамильтониана $H_{orb}+WS$, не зависящего явно от азимута, вместо (1.2) имеем:

$$S(s) = \exp(-:s(H_{orb}+WS):)\ S(0) = M\ S(0), \qquad (1.3)$$

где через M обозначен весь экспоненциальный оператор. В силу уравнений Гамильтона он удовлетворяет уравнению $dM/ds = M:-(H_{orb}+WS):$. Найдем этот оператор в виде произведения некоторых трех экспоненциальных операторов [3]: $M=M_2M_1M_0$. Для этого представим полный гамильтониан в виде суммы однородных полиномов по степеням Z:

$$H_{orb}+WS = H_2+H_3+H_4+W_0S+W_1S+W_2S,$$

где нижний индекс указывает на степень соответствующего полинома. Важно отметить, что операторы $:H_2:$ и $:W_0S:$ не меняют степень зависимости операнда от Z, а оператор $:H_3:$ повышает ее на единицу. Рассмотрим действие оператора $:W_1S:$ на спиновый операнд, который всегда представим в виде $S\cdot f(Z)$. Имеем :

$$:W_1S:S\cdot f(Z) = W_1\{S,S\cdot f(Z)\}+S\{W_1,S\cdot f(Z)\} =$$
$$= W_1\cdot f(Z):S:S+S^2:W_1:f(Z).$$

*) Как известно, скобки Пуассона для компонент вектора Z равны: $\{q_i,q_k\}=\{p_i,p_k\}=0$, $\{q_i,p_k\}=-\{p_i,q_k\}=\delta_{ik}$, где q,p - пара канонически сопряженых переменных (x,p_x),(z,p_z),(σ,p_σ) и δ_{ik} - символ Кронекера, а для компонент вектора S имеем: $\{S_i,S_j\}=e_{ijk}S_k$, где e_{ijk} - трехмерный полностью антисимметричный тензор третьего ранга. Кроме того, для любых i,j имеет место соотношение: $\{Z_i,S_k\}=\{S_i,Z_k\}=0$.

Так как вектор спина пропорционален постоянной Планка h, вторым слагаемым можно пренебречь и, следовательно, оператор $:W_1S:$ также повышает степень зависимости операнда от Z на единицу. Аналогично операторы $:H_4:$ и $:W_2S:$ повышают ее на двойку. Таким образом, удобно ввести следующие операторы: $H_1 = :H_3 + W_1S:$ и $H_2 = :H_4 + W_2S:$. Разделим теперь оператор полного гамильтониана $:H_{orb}+WS:$ на операторы $H_0 = :H_2 + W_0S:$ (неувеличивающий степень операнда) и $H_r = H_1 + H_2$, а оператор M на M_0 и M_r. Тогда с одной стороны :

$$\frac{dM}{ds} = M:-(H_{orb}+WS):=M_rM_0(-H_0-H_r)=$$
$$=M_rM_0(-H_0)+M_rM_0(-H_r)=$$
$$=M_r\frac{dM_0}{ds}+M_rM_0(-H_r),$$

а с другой :

$$\frac{dM}{ds} = M_r\frac{dM_0}{ds}+\frac{dM_r}{ds}M_0,$$

так что :

$$\frac{dM_r}{ds}M_0 = M_rM_0(-H_r).$$

Отсюда

$$\frac{dM_r}{ds} = M_rM_0(-H_r)M_0^{-1},$$

или, используя свойство Ли - преобразований

$$M_0:g(Z,S):M_0^{-1}=:g(M_0Z,M_0S):, \qquad (1.4)$$

получим

$$\frac{dM_r}{ds} = M_r(-H_r(M_0Z,M_0S)).$$

Интегрируя обе части последнего соотношения, найдем (J - единичный оператор) :

$$M_r = J + \int_0^s ds' M_r(s')(-H_r(M_0Z,M_0S,s')).$$

Решение этого интегрального уравнения легко получается в виде ряда, если в подинтегральное выражение последовательно подставлять правую часть :

$$M_r = J+\int_0^s ds'\Big[J+\int_0^{s'} ds'' M_r(s'')(-H_r(M_0\mathbf{z},M_0\mathbf{s},s''))\Big](-H_r(M_0\mathbf{z},M_0\mathbf{s},s'))=$$

$$=J + \int_0^s ds'(-H_r(M_0\mathbf{z},M_0\mathbf{s},s')) +$$

$$+\int_0^s ds'\int_0^{s'} ds'' M_r(s'')(-H_r(M_0\mathbf{z},M_0\mathbf{s},s''))\ (-H_r(M_0\mathbf{z},M_0\mathbf{s},s'))=$$

$$=J + \int_0^s ds'(-H_r(M_0\mathbf{z},M_0\mathbf{s},s')) +$$

$$+\int_0^s ds'\int_0^{s'} ds''\ \Big[J + \int_0^{s''} ds''' M_r(s''')(-H_r(M_0\mathbf{z},M_0\mathbf{s},s'''))\Big]\cdot$$

$$\cdot(-H_r(M_0\mathbf{z},M_0\mathbf{s},s''))(-H_r(M_0\mathbf{z},M_0\mathbf{s},s'))=$$

$$=J + \int_0^s ds'(-H_r(M_0\mathbf{z},M_0\mathbf{s},s')) +$$

$$+\int_0^s ds'\int_0^{s'} ds''(-H_r(M_0\mathbf{z},M_0\mathbf{s},s''))(-H_r(M_0\mathbf{z},M_0\mathbf{s},s')) +$$

$$+\int_0^s ds'\int_0^{s'} ds''\int_0^{s''} ds''' M_r(s''')(-H_r(M_0\mathbf{z},M_0\mathbf{s},s'''))\cdot$$

$$\cdot(-H_r(M_0\mathbf{z},M_0\mathbf{s},s''))(-H_r(M_0\mathbf{z},M_0\mathbf{s},s'))=\ldots\ .$$

Существует простой критерий обрыва этого ряда. Он связан с порядком его членов по степеням $\mathbf{z}$. В самом деле, оператор H_r повышает степень операнда как минимум на единицу. Поэтому, ограничиваясь членами со степенью не выше второй, можно отбросить слагаемые содержащие H_r^3 и оборвать ряд :

$$M_r = J + \int_0^s ds'(-H_r(M_0\mathbf{z},M_0\mathbf{s},s')) + \tag{1.5}$$

$$+\int_0^s ds'\int_0^{s'} ds''(-H_r(M_0\mathbf{z},M_0\mathbf{s},s''))(-H_r(M_0\mathbf{z},M_0\mathbf{s},s')).$$

Так как M_r представляет собой произведение двух экспоненциальных операторов M_2M_1, то выберем их показатели операторами, повышающими степень операнда на единицу $(:f_1:)$ и на двойку $(:f_2:)$. Тогда, разлагая экспоненты в ряды и ограничиваясь членами не выше второго порядка, получим :

$$M_r = M_2M_1 = \exp(-:f_2:)\cdot\exp(-:f_1:) =$$

$$=(J - :f_2: + \frac{:f_2:^2}{2} - \ldots)\cdot(J - :f_1: + \frac{:f_1:^2}{2} - \ldots)=$$

$$= J - :f_1: - :f_2: + \frac{:f_1:^2}{2}\ .$$

Сравнивая с (1.5), найдем :

$$:f_1: = -\int_0^s ds'(-H_1(M_0\mathbf{z},M_0\mathbf{s},s')) \tag{1.6}$$

и

$$:f_2: = \frac{:f_1:^2}{2} - \int_0^s ds'(-H_2(M_0\mathbf{z},M_0\mathbf{s},s')) -$$

$$-\int_0^s ds'\int_0^{s'} ds''(-H_1(M_0\mathbf{z},M_0\mathbf{s},s''))(-H_1(M_0\mathbf{z},M_0\mathbf{s},s')).$$

Но

$$:f_1:^2 = \int_0^s ds'\int_0^s ds''(-H_1(M_0\mathbf{z},M_0\mathbf{s},s''))(-H_1(M_0\mathbf{z},M_0\mathbf{s},s')),$$

поэтому, разбивая второе интегрирование на области от 0 до s' и от s' до s и делая замену переменных во второй области, получим :

$$:f_1:^2 = \int_0^s ds' \int_0^{s'} ds''(-H_1(M_0\mathbf{z},M_0\mathbf{s},s''))(-H_1(M_0\mathbf{z},M_0\mathbf{s},s')) +$$

$$+ \int_0^s ds' \int_0^{s'} ds''(-H_1(M_0\mathbf{z},M_0\mathbf{s},s'))(-H_1(M_0\mathbf{z},M_0\mathbf{s},s'')).$$

Поэтому для $:f_2:$ находим окончательно :

$$:f_2: = -\int_0^s ds'(-H_2(M_0\mathbf{z},M_0\mathbf{s},s')) - \tag{1.7}$$
$$- \frac{1}{2}\int_0^s ds' \int_0^{s'} ds''[-H_1(M_0\mathbf{z},M_0\mathbf{s},s''),-H_1(M_0\mathbf{z},M_0\mathbf{s},s')],$$

где [,] - коммутатор операторов.

Таким образом, оператор M, определяющий решение (1.3) уравнения движения спина (1.1), равен

$$M = M_2M_1M_0 = \exp(-:f_2:)\cdot\exp(-:f_1:)\cdot\exp(-:f_0:) = \tag{1.8}$$
$$= (J - :f_1: - :f_2: + \frac{:f_1:^2}{2}) M_0.$$

В некоторых случаях выражение (1.8) удобно разделить на последовательные спиновый и чисто орбитальный операторы. Для этого заменим в (1.8) f_1 и f_2 на $h_3 + \mathbf{w}_1\mathbf{s}$ и $h_4 + \mathbf{w}_2\mathbf{s}$ соответственно. Вклад операторов $:h_4:$, $:h_3:^2$ и $:\mathbf{w}_1\mathbf{s}::h_3:$ в (1.8) можно не рассматривать, так как они действуют на операнд, содержащий как минимум первую степень $\mathbf{z}$, и повышают ее на двойку, в отличие от операторов $:\mathbf{w}_2\mathbf{s}:$, $:\mathbf{w}_1\mathbf{s}:^2$ и $:h_3::\mathbf{w}_1\mathbf{s}:$, которые могут действовать на операнд и с нулевой степенью по $\mathbf{z}$. Кроме того, учтем, что оператор $:\mathbf{w}_1\mathbf{s}::h_3:$ по аналогичным соображениям не существенен и поэтому можно считать, что $:h_3::\mathbf{w}_1\mathbf{s}:=:(:h_3:\mathbf{w}_1\mathbf{s}):.$

В итоге получаем :

$$M = (J - :h_3: - :\mathbf{w}_1\mathbf{s}: - :\mathbf{w}_2\mathbf{s}: + \frac{:\mathbf{w}_1\mathbf{s}:^2}{2} + \frac{:h_3::\mathbf{w}_1\mathbf{s}:}{2}) M_0 =$$
$$= \exp(-:[\mathbf{w}_2 - \frac{(:h_3:\mathbf{w}_1)}{2}]\mathbf{s}:)\cdot\exp(-:\mathbf{w}_1\mathbf{s}:)\cdot\exp(-:h_3:)\cdot M_0.$$

Заметим, что $:\mathbf{w}_0\mathbf{s}:$ коммутирует с $:h_2:$ и $:h_3:$ поэтому можно окончательно написать:

$$M = \exp(-:[\mathbf{w}_2 - \frac{(:h_3:\mathbf{w}_1)}{2}]\mathbf{s}:)\cdot\exp(-:\mathbf{w}_1\mathbf{s}:)\cdot\exp(-:\mathbf{w}_0\mathbf{s}:)\cdot \tag{1.9}$$
$$\cdot\exp(-:h_3:)\cdot\exp(-:h_2:),$$

Иногда возникает потребность спиновую часть оператора (1.9) представить в виде одной экспоненты с единой угловой скоростью $\mathbf{w}^*$, определяющей поворот спина в данном элементе:

$$M = \exp(-:\mathbf{w}^*\mathbf{s}:)\cdot\exp(-:h_3:)\cdot\exp(-:h_2:). \tag{1.10}$$

Получим сначала "свертку" трех экспоненциальных операторов в один :

$$\exp(-:sf:)=\exp(-:sf_2:)\cdot\exp(-:sf_1:)\cdot\exp(-:sf_0:).$$

Дифференцируя обе части по s, получим :

$$\exp(-:sf:)\cdot:-f:=\exp(-:sf_2:)\cdot:-f_2:\cdot\exp(-:sf_1:)\cdot\exp(-:sf_0:) +$$
$$+ \exp(-:sf_2:)\cdot\exp(-:sf_1:)\cdot:-f_1:\cdot\exp(-:sf_0:) +$$
$$+ \exp(-:sf_2:)\cdot\exp(-:sf_1:)\cdot\exp(-:sf_0:)\cdot:-f_0:=$$
$$= \exp(-:sf_2:)\cdot\exp(-:sf_1:)\cdot\{\exp(:sf_1:):-f_2:\cdot\exp(-:sf_1:)\}\cdot$$
$$\cdot\exp(-:sf_0:) + \exp(-:sf_2:)\cdot\exp(-:sf_1:)\cdot\exp(:-sf_0:)\cdot$$
$$\cdot\{\exp(:sf_0:)\cdot:-f_1:\cdot\exp(-:sf_0:)\} +$$
$$+ \exp(-:sf_2:)\cdot\exp(-:sf_1:)\cdot\exp(-:sf_0:)\cdot:-f_0:.$$

Во втором и третьем слагаемых очевидным образом сформировались множители $\exp(-:sf:)$. Кроме того, выражения, стоящие в фигурных скобках, можно собрать по свойству (1.4) Ли - преобразований. Поэтому :

$$\exp(-:sf:)\cdot:-f:=\exp(-:sf_2:)\cdot\exp(-:sf_1:)\cdot:-\exp(:sf_1:)f_2:\cdot$$
$$\cdot\exp(:-sf_0:)+\exp(-:sf:)\cdot:-\exp(:sf_0:)f_1:+\exp(-:sf:)\cdot:-f_0:.$$

Повторяя в первом слагаемом аналогичное действие с оператором $\exp(-{:}sf_0{:})$, получим:

$$\exp(-{:}sf{:})\cdot{:}-f{:}=\exp(-{:}sf_2{:})\cdot\exp(-{:}sf_1{:})\cdot\exp({:}-sf_0{:})\cdot$$
$$\cdot{:}-\exp({:}sf_0{:})\cdot\exp({:}sf_1{:})f_2{:}+\exp(-{:}sf{:})\cdot{:}-\exp({:}sf_0{:})f_1{:}\ +$$
$$+\exp(-{:}sf{:})\cdot{:}-f_0{:}=\exp(-{:}sf{:})\cdot{:}-\exp({:}sf_0{:})\cdot\exp({:}sf_1{:})f_2{:}\ +$$
$$+\ \exp(-{:}sf{:})\cdot{:}-\exp({:}sf_0{:})f_1{:}+\exp(-{:}sf{:})\cdot{:}-f_0{:}.$$

Отсюда находим искомое выражение для f :

$$f = f_0 + \exp({:}sf_0{:})f_1 + \exp({:}sf_0{:})\cdot\exp({:}sf_1{:})f_2\ . \qquad (1.11)$$

Оператор $\exp({:}sf_1{:})$ дает вклад не ниже кубов, поэтому для $\mathbf{w}^*$ окончательно имеем :

$$\mathbf{w}^* = \mathbf{w}_0 + \exp({:}\mathbf{w}_0\mathbf{S}{:})\mathbf{w}_1 + \exp({:}\mathbf{w}_0\mathbf{S}{:})(\mathbf{w}_2 - \frac{{:}h_3{:}\mathbf{w}_1}{2})\ . \qquad (1.12)$$

Оператор $\exp(-{:}\mathbf{SW}_0{:})$, как будет показано в следующем разделе, представим в матричном виде.

Таким образом, при использовании техники Ли-операторов необходимо подставить в соотношения (1.6) и (1.7) выражения для H_{orb} и $\mathbf{W}$ из БМТ-уравнения (для каждого типа элементов накопителя) и найти компоненты преобразованных угловой скорости $\mathbf{w}$ и гамильтониана h_{orb}. Полученный результат следует подставить в (1.8) или (1.9). Операторы $\exp(-{:}h_2{:})$ и $\exp(-{:}\mathbf{SW}_0{:})$ являются, как известно, обычными матрицами линейного преобразования. Остальные экспоненциальные операторы вычисляются разложением в ряды. Уравнение (1.1) решено!

2. Матричное представление оператора преобразования спина.

Спиновые экспоненциальные операторы, входящие в (1.9) и (1.12), имеют вид $\exp(-{:}\mathbf{SW}{:})$, где $\mathbf{W}$ - некоторая угловая скорость. Полагая известным выражение для $\mathbf{W}$, вычислим величину $\exp(-{:}\mathbf{SW}{:})$, последовательно найдя несколько младших членов этого ряда. Для нулевой степени, по определению, имеем:

$$(-{:}\mathbf{SW}{:})^0 S_k = S_k. \qquad (2.1)$$

Первая степень (с учетом независимости компонент спина S_k от орбитальных переменных $\mathbf{z}$):

$(-{:}\mathbf{SW}{:})^1 S_k = -W_i\{S_i,S_k\}-S_i\{W_i,S_k\}=e_{ijk}S_jW_i=[\mathbf{W},\mathbf{S}]_k$, где $[\,,\,]$- векторное произведение. Таким образом:

$$(-{:}\mathbf{SW}{:})^1 S_k = [\mathbf{W},\mathbf{S}]_k. \qquad (2.2)$$

Далее для второй степени получаем:

$$(-{:}\mathbf{SW}{:})^2 S_k=(-{:}\mathbf{SW}{:})^1(-{:}\mathbf{SW}{:})^1 S_k=(-{:}\mathbf{SW}{:})[\mathbf{W},\mathbf{S}]_k=-{:}S_nW_n{:}e_{ijk}W_iS_j=$$
$$=-e_{ijk}W_iW_n\{S_n,S_j\}-e_{ijk}S_jS_n\{W_n,W_i\}-e_{ijk}S_jW_n\{S_n,W_i\}-$$
$$-e_{ijk}W_iS_n\{W_n,S_j\}=[\mathbf{W},[\mathbf{W},\mathbf{S}]]_k+[S_n\{W_n,\mathbf{W}\},\mathbf{S}].$$

Второе слагаемое, пропорциональное квадрату постоянной Планка h^2, может быть отброшено по сравнению с первым, так что окончательно получаем:

$$(-{:}\mathbf{SW}{:})^2 S_k=[\mathbf{W},[\mathbf{W},\mathbf{S}]]_k. \qquad (2.3)$$

Наконец, для третьей степени (вновь отбрасывая слагаемые, пропорциональные h^2):

$$(-{:}\mathbf{SW}{:})^3 S_k={:}-S_nW_n{:}[\mathbf{W},[\mathbf{W},\mathbf{S}]]_k={:}-S_nW_n{:}(W_kS_iW_i-S_kW_iW_i)=$$
$$=-W_nW_kW_i\{S_n,S_i\}+W_nW_iW_i\{S_n,S_k\}=-W_nW_kW_ie_{nij}S_j+W_nW_iW_ie_{nkj}S_j,$$

т.е. (W - модуль вектора $\mathbf{W}$):

$$(-{:}\mathbf{SW}{:})^3 S_k = -W^2[\mathbf{W},\mathbf{S}]_k. \qquad (2.4)$$

Таким образом, имеется возможность определить любой член этого ряда :

$$({:}-\mathbf{SW}{:})^{2n+1} S_k = (-1)^n W^{2n}[\mathbf{W},\mathbf{S}]_k \qquad n=0,1,2,\dots\ ;$$
$$({:}-\mathbf{SW}{:})^{2n+2} S_k = (-1)^n W^{2n}[\mathbf{W},[\mathbf{W},\mathbf{S}]]_k \qquad n=0,1,2,\dots\ .$$

Разбивая экспоненциальный ряд $\exp(-:\mathbf{SW}:)$ на два (по четным и нечетным степеням), удается просуммировать его полностью:

$$\exp(-:\mathbf{SW}:)S_k=\Sigma_{n=o}^{\infty}(-:\mathbf{SW}:)^n/n!\ S_k=$$

$$=:-\mathbf{SW}:^0 S_k+\Sigma_{n=o}^{\infty}[(-:\mathbf{SW}:)^{2n+1}/(2n+1)!+(-:\mathbf{SW}:)^{2n+2}/(2n+2)!]S_k=$$

$$=S_k+[\mathbf{W},\mathbf{S}]_k\ \sin(W)/W+[\mathbf{W},[\mathbf{W},\mathbf{S}]]_k\ (1-\cos(W))/W^2.$$

Итак, экспоненциальный оператор $\exp(-:\mathbf{SW}:)$ представим в матричном виде :

$$S_i=\exp(-:\mathbf{SW}:)S_j=T_{ij}\ S_j\ ,$$

где

$$T_{ij}=\cos(W)\cdot E_{ij}+\frac{\sin(W)}{W}\cdot e_{ijk}\ W_k+\frac{1-\cos(W)}{W^2}\cdot W_i W_j. \qquad (2.5)$$

Это представление решения уравнения движения спина является строгим, но практически его точность определяется точностью вычисления $\mathbf{W}$. Ограничиваясь вторым порядком по синхро-бетатронному движению, получим :

$$W_i=W^o{}_i+W^1{}_{im}\cdot Z_m+W^2{}_{imn}\cdot Z_m\cdot Z_n, \qquad (2.6)$$

так что для модуля W угла поворота спина получим $(W_o=\sqrt{(W^o{}_i)^2})$:

$$W=\sqrt{(W_i)^2}=W_o\cdot[1+\frac{W^o{}_i}{W_o{}^2}\cdot W^1{}_{im}\cdot Z_m+$$

$$+\left(\frac{W^o{}_i\cdot W^2{}_{imn}}{W_o{}^2}+\frac{W^1{}_{im}\cdot W^1{}_{in}}{2\cdot W_o{}^2}-\frac{W^o{}_i\cdot W^o{}_j\cdot W^1{}_{im}\cdot W^1{}_{jn}}{2\cdot W_o{}^4}\right)\cdot Z_m\cdot Z_n]. \qquad (2.7)$$

Подставляя (2.6) и (2.7) в (2.5) (тригонометрические функции в котором следует разложить относительно поправок к W_o, после несложных преобразований получим для

нулевого порядка по $\mathbf{Z}$:

$$T^o{}_{ij}=E_{ij}\cdot\cos(W_o)+e_{ijk}\cdot W^o{}_k\cdot\sin(W_o)/W_o+$$

$$+W^o{}_k\cdot W^o{}_i\cdot(1-\cos(W_o))/W_o{}^2; \qquad (2.8)$$

для первого порядка:

$$T^1{}_{ijm}=[-\sin(W_o)/W_o\cdot E_{ij}-\sin(W_o)/W_o\cdot e_{ijk}\cdot W^1{}_{km}+$$

$$+(1-\cos(W_o))/W_o{}^2\cdot(W^1{}_{jm}\cdot W^o{}_i+W^1{}_{im}\cdot W^o{}_j)-$$

$$-(\cos(W_o)-\sin(W_o)/W_o)/W_o{}^2\cdot e_{ijk}\cdot W^1{}_{nm}\cdot W^o{}_k\cdot W^o{}_n+ \qquad (2.9)$$

$$+(\sin(W_o)-2\cdot(1-\cos(W_o)/W_o)/W_o{}^3\cdot W^1{}_{km}\cdot W^o{}_i\cdot W^o{}_j\cdot W^o{}_k]$$

и, наконец, для второго порядка:

$$T^2{}_{ijmn}=\sin(W_o)/W_o\cdot[-E_{ij}\cdot(W^2{}_{kmn}\cdot W^o{}_k+{}^1/{}_2\cdot W^1{}_{km}\cdot W^1{}_{kn})+$$

$$+e_{ijk}\cdot W^2{}_{kmn}]+(1-\cos(W_o))/W_o{}^2\cdot(W^o{}_i\cdot W^2{}_{jmn}+W^o{}_j\cdot W^2{}_{imn}+$$

$$+W^1{}_{im}\cdot W^1{}_{jn})+(\cos(W_o)-\sin(W_o)/W_o)/W_o{}^2\cdot \qquad (2.10)$$

$$\cdot[e_{ijk}\cdot(W^2{}_{pmn}\cdot W^o{}_k\cdot W^o{}_p+{}^1/{}_2\cdot W^1{}_{pm}\cdot W^1{}_{pn}\cdot W^o{}_k+W^1{}_{km}\cdot W^1{}_{pn}\cdot W^o{}_p)-$$

$$-E_{ij}\cdot W^o{}_k\cdot W^o{}_p\cdot W^1{}_{km}\cdot W^1{}_{pn}]+[\sin(W_o)/W_o-2\cdot(1-\cos(W_o))/W_o{}^2]/W_o{}^2\cdot$$

$$\cdot[W^o{}_i\cdot W^o{}_j\cdot(W^2{}_{kmn}\cdot W^o{}_k+{}^1/{}_2\cdot W^1{}_{pm}\cdot W^1{}_{pn})+(W^1{}_{jm}\cdot W^o{}_i+W^1{}_{im}\cdot W^o{}_j)\cdot$$

$$\cdot W^1{}_{kn}\cdot W^o{}_k]-[\sin(W_o)/W_o-3\cdot(\cos(W_o)-\sin(W_o)/W_o)/W_o{}^2]/W_o{}^2/2\cdot$$

$$\cdot e_{ijk}\cdot W^o{}_k\cdot W^o{}_p\cdot W^o{}_q\cdot W^1{}_{pm}\cdot W^1{}_{qn}+[8\cdot(1-\cos(W_o))/W_o{}^2+\cos(W_o)-$$

$$-5\cdot\sin(W_o)/W_o)]/W_o{}^4/2\cdot W^o{}_i\cdot W^o{}_j\cdot W^o{}_p\cdot W^o{}_q\cdot W^1{}_{pm}\cdot W^1{}_{qn}.$$

3. Сложение "поворотов".

Как уже упоминалось выше, движение спина, определяемое угловой скоростью $\mathbf{W}$, есть просто поворот вокруг оси, направленной вдоль $\mathbf{W}$, на угол, равный W; выражение (2.5) и описывает преобразование спина при этом повороте. Из формулы (2.5) очевидным образом можно получить, что

$$\cos(W)=\frac{1}{2}\cdot(\mathrm{Sp}\ T^{W}-1) \quad (3.1) \quad \text{и} \quad W_i=\frac{1}{2}\cdot\frac{e_{ijk}\,T^{W}{}_{jk}}{\sin(W)}. \qquad (3.2)$$

Эти соотношения позволяют найти формулы "сложения" последовательно осуществленных двух и более поворотов спина. В самом деле, если два последовательных поворота описываются матрицами T^V и T^U, то суммарный поворот характеризуется матрицей T^W, равной произведению матриц: $T^{W}{}_{ij}=T^{U}{}_{ik}\cdot T^{V}{}_{kj}$. Вычисляя шпур матрицы T^W, получим, что

$$\cos(W)=\,^{1}/_{2}\cdot[\cos(V)\cdot\cos(U)+\cos(V)+\cos(U)+\frac{(\mathbf{VU})^2}{V^2U^2}\cdot(1-\cos(V))\cdot(1-\cos(U))-2\cdot\frac{(\mathbf{VU})}{VU}\cdot\sin(V)\cdot\sin(U)-1\,].$$

Это выражение имеет гораздо более простой вид, если его переписать, используя "половинные" углы $^{V}/_{2}$, $^{U}/_{2}$ и $^{W}/_{2}$:

$$\cos(^{W}/_{2})=\cos(^{V}/_{2})\cdot\cos(^{U}/_{2})-\frac{(\mathbf{VU})}{VU}\cdot\sin(^{V}/_{2})\cdot\sin(^{U}/_{2}). \qquad (3.3)$$

Для определения вектора W_i в соответствии с (3.2) необходимо сначала вычислить величину $e_{ikj}\cdot T^{W}{}_{jk}$. Используя уже найденное значение угла суммарного поворота W, получим следующее выражение:

$$\frac{W_i}{W}=\frac{1}{2\sin(W)}\cdot\Big[\frac{V_i}{V}\cdot\Big(\sin(V)\cdot(1+\cos(U))-\frac{(\mathbf{UV})}{UV}\cdot\sin(U)\cdot(1-\cos(V))\Big)+\frac{U_i}{U}\cdot\Big(\sin(U)\cdot(1+\cos(V))-\frac{(\mathbf{UV})}{UV}\cdot\sin(V)\cdot(1-\cos(U))\Big)+\frac{[\mathbf{V},\mathbf{U}]_i}{UV}\cdot\Big(\sin(V)\cdot\sin(U)-\frac{(\mathbf{UV})}{UV}\cdot(1-\cos(V)\cdot(1-\cos(U))\Big)\Big].$$

Вновь переходя к половинным углам, найдем более простой вариант этой формулы:

$$\frac{W_i}{W}=\frac{1}{\sin(^{W}/_{2})}\cdot\Big(\frac{V_i}{V}\cdot\sin(^{V}/_{2})\cdot\cos(^{U}/_{2})+\frac{U_i}{U}\cdot\sin(^{U}/_{2})\cdot\cos(^{V}/_{2})+\frac{[\mathbf{V},\mathbf{U}]_i}{UV}\sin(^{V}/_{2})\cdot\sin(^{U}/_{2})\Big). \qquad (3.4)$$

Таким образом, пара соотношений (3.3) и (3.4) решает задачу сложения двух последовательных поворотов спина.

4. Формулы "сложения".

Для "объединения" последовательных преобразований спина при прохождении пучком магнитной системы накопителя выведем формулы "сложения" преобразований вида (1.10) т.е. определим операторы, удовлетворяющие уравнению:

$$\exp(-{:}\mathbf{SW}{:})\cdot\exp(-{:}h_3{}^{W}{:})\cdot\exp(-{:}h_2{}^{W}{:})=$$
$$=\exp(-{:}\mathbf{SU}{:})\cdot\exp(-{:}h_3{}^{u}{:})\cdot\exp(-{:}h_2{}^{u}{:})\cdot \qquad (4.1)$$
$$\cdot\exp(-{:}\mathbf{SV}{:})\cdot\exp(-{:}h_3{}^{V}{:})\cdot\exp(-{:}h_2{}^{V}{:}).$$

Иными словами, найдем Ли-операторы, отвечающие за преобразование вектора спина от азимута s^0 к азимуту s'', эквивалентные последовательно действующим Ли-операторам, преобразующим спин от s^0 к s' (оператор $\exp(-{:}\mathbf{SV}{:})\cdot\exp(-{:}h_3{}^{V}{:})\cdot\exp(-{:}h_2{}^{V}{:})$) и затем от s' к s'' (оператор $\exp(-{:}\mathbf{SU}{:})\cdot\exp(-{:}h_3{}^{u}{:})\cdot\exp(-{:}h_2{}^{u}{:})$). Действуя аналогично вычислению формулы (1.11) для объединения произведения экспоненциальных операторов, нетрудно получить следующий результат :

$$\exp(-{:}\mathbf{SW}{:})=\exp(-{:}\mathbf{SU}{:})\cdot\exp(-{:}\mathbf{SV}^*{:}),$$
$$\mathbf{V}^*=\exp(-{:}h_3{}^{u}{:})\cdot\exp(-{:}h_2{}^{u}{:})\mathbf{V}, \qquad (4.2)$$
$$h_3{}^{W}=h_3{}^{u}+\exp(-{:}h_2{}^{u}{:})h_3{}^{V},$$
$$\exp(-{:}h_2{}^{W}{:})=\exp(-{:}h_2{}^{u}{:})\cdot\exp(-{:}h_2{}^{V}{:}).$$

Теперь мы имеем уравнение $\exp(-{:}\mathbf{SW}{:})=\exp(-{:}\mathbf{SU}{:})\cdot\exp(-{:}\mathbf{SV}{:})$ (индекс " * " при $\mathbf{V}$ для простоты опускаем). При замене операторов матрицами типа (2.5) уравнение приобретает известный вид:

$$T^{W}{}_{ij} = T^{u}{}_{ik}\cdot T^{V}{}_{kj}. \qquad (4.3)$$

Поскольку нас интересует результат в виде ряда по степеням $\mathbf{z}$:

$$T^{W}{}_{ij} = T^{W0}{}_{ij} + T^{W1}{}_{ijm}\cdot z_m + T^{W2}{}_{ijmn}\cdot z_m\cdot z_n, \qquad (4.4)$$

то подставим в (4.3) разложения $T^{u}{}_{ik}$ и $T^{V}{}_{kj}$ аналогичные (4.4). После перегруппировки результата по степеням $\mathbf{z}$ получим:

$$T^{W0}{}_{ij} = T^{u0}{}_{ik}\cdot T^{V0}{}_{kj},$$
$$T^{W1}{}_{ijm} = T^{u0}{}_{ik}\cdot T^{V1}{}_{kjm} + T^{u1}{}_{ikm}\cdot T^{V0}{}_{kj}, \qquad (4.5)$$
$$T^{W2}{}_{ijmn} = T^{u0}{}_{ik}\cdot T^{V2}{}_{kjmn} + T^{u1}{}_{ikm}\cdot T^{V1}{}_{kjn} + T^{u2}{}_{ikmn}\cdot T^{V0}{}_{kj}.$$

В некоторых случаях может оказаться более предпочтительным суммировать не матрицы T_{ij}, описывающие операторы, а непосредственно вектора угловых скоростей. Для этого подставим разложение (2.5) для $\mathbf{W}$ и ему аналогичное для $\mathbf{V}$ и $\mathbf{U}$ в (3.3) и (3.4). После несложных преобразований получим, что для независящих от $\mathbf{z}$ частей $\mathbf{W}$, $\mathbf{V}$ и $\mathbf{U}$ связывающие их соотношения просто совпадают с (3.3) и (3.4):

$$\cos({}^{W}o/_2)=\cos({}^{V}o/_2)\cdot\cos({}^{U}o/_2) - \frac{(\mathbf{V}^o\mathbf{U}^o)}{V_oU_o}\cdot\sin({}^{V}o/_2)\cdot\sin({}^{U}o/_2),$$
$$\frac{W^o{}_i}{W_o} = \frac{1}{\sin({}^{W}o/_2)}\cdot\Big(\frac{V^o{}_i}{V_o}\sin({}^{V}o/_2)\cdot\cos({}^{U}o/_2) + \qquad (4.6)$$
$$+\frac{U^o{}_i}{U_o}\sin({}^{U}o/_2)\cdot\cos({}^{V}o/_2) + \frac{[\mathbf{V}^o,\mathbf{U}^o]_i}{U_oV_o}\sin({}^{V}o/_2)\cdot\sin({}^{U}o/_2)\Big).$$

Первая из этих формул определяет модуль суммарного угла поворота, а вторая (используя результат из первой) - направление "суммарной" оси. Соответствующие соотношения для линейных по $\mathbf{z}$ частей имеют вид:

$$\frac{(\mathbf{W}^o\mathbf{W}^1)}{W_o}\cdot\sin({}^{W}o/_2) = 2\cdot\frac{(\mathbf{V}^o\mathbf{U}^1)+(\mathbf{U}^o\mathbf{V}^1)}{V_o\cdot U_o}\cdot\sin({}^{V}o/_2)\cdot\sin({}^{U}o/_2) +$$
$$+\frac{(\mathbf{V}^o\mathbf{V}^1)}{V_o}\cdot\cos({}^{U}o/_2)\cdot\sin({}^{V}o/_2) + \frac{(\mathbf{U}^o\mathbf{U}^1)}{U_o}\cdot\cos({}^{V}o/_2)\cdot\sin({}^{U}o/_2) + \qquad (4.7)$$
$$+2\cdot\frac{(\mathbf{V}^o\mathbf{U}^o)}{V_o\cdot U_o}\cdot\Big[\frac{(\mathbf{U}^o\mathbf{U}^1)}{U_o{}^2}\cdot\sin({}^{V}o/_2)\cdot\Big(\frac{1}{2}\cos({}^{U}o/_2) - \frac{\sin({}^{U}o/_2)}{U_o}\Big)+$$
$$+\frac{(\mathbf{V}^o\mathbf{V}^1)}{V_o{}^2}\cdot\sin({}^{U}o/_2)\cdot\Big(\frac{1}{2}\cos({}^{V}o/_2) - \frac{\sin({}^{V}o/_2)}{V_o}\Big)\Big]$$

и

$$\frac{W^1}{W_o}\cdot\sin({}^{W_o}/_2) = \frac{W^o(W^oW^1)}{2\cdot W_o^2}\cdot[2\cdot\sin({}^{W_o}/_2)/W_o - \cos({}^{W_o}/_2)] -$$

$$- \left[\frac{U^o(U^oU^1)}{U_o^3} - \frac{U^1}{U_o} + \frac{[U^o,V^o]\cdot(V^oV^1)}{2\cdot U_o\cdot V_o^3}\right]\cdot\cos({}^{V_o}/_2)\cdot\sin({}^{U_o}/_2) -$$

$$- \left[\frac{V^o(V^oV^1)}{V_o^3} - \frac{V^1}{V_o} + \frac{[U^o,V^o]\cdot(U^oU^1)}{2\cdot V_o\cdot U_o^3}\right]\cdot\cos({}^{U_o}/_2)\cdot\sin({}^{V_o}/_2) + \tag{4.8}$$

$$+ \left[\frac{(U^o(U^oU^1)}{2\cdot U_o^3} + \frac{(V^o(V^oV^1)}{2\cdot V_o^3}\right]\cdot\cos({}^{V_o}/_2)\cdot\cos({}^{U_o}/_2) -$$

$$- \left\{\left(\frac{U^o}{2} - \frac{[U^o,V^o]}{V_o^2}\right)(V^oV^1)+\left(\frac{V^o}{2} - \frac{[U^o,V^o]}{U_o^2}\right)(U^oU^1)+[U^oV^1]+[U^1V^o]\right\}\cdot$$

$$\cdot\frac{\sin({}^{V_o}/_2)\cdot\sin({}^{U_o}/_2)}{V_o\cdot U_o}.$$

Последняя из этих формул определяет поправку к направлению "суммарной" оси, а входящяя в нее величина (W^oW^1) вычисляется предварительно в соответствии с (4.7).

5. Угловая скорость вращения спина.

В первом разделе было показано, что для решения уравнения движения спина необходимо знать угловую скорость его прецессии W с требуемой точностью по синхро-бетатронному движению. Получим необходимые выражения для W.

Как известно [6], вектор W_o угловой скорости вращения спина заряженной частицы (e,m - ее заряд и масса, а β и γ - скорость и релятивистский фактор) в электромагнитных поле H и E определяется БМТ-выражением:

$$W_o= - \frac{e}{\gamma mc}\cdot\left((1+a\cdot\gamma)\cdot H - \frac{a\gamma^2}{1+\gamma}\cdot(\beta\cdot K)\cdot\beta - \left(a\cdot\gamma + \frac{\gamma}{1+\gamma}\right)[\beta,E]\right), \tag{5.1}$$

где $a = 1.159...*10^{-3}$ - безразмерная часть аномального магнитного момента электрона. Эта угловая скорость определяет известное уравнение прецессии вектора спина S:

$$^{dS}/_{dt} = [W_o,S]. \tag{5.2}$$

Перейдем от времени t к другой независимой переменной - азимуту s, отсчитываемому вдоль равновесной траектории. Тогда в системе ортов (e_x,e_z,τ), связанной с этой траекторией, радиус-вектор положения частицы равен:

$$r(x,z,s)=r_o+xe_x+ze_z$$

и

$$^d/_{dt} = {}^{dl}/_{dt}\ {}^d/_{dl} = c\beta\ {}^d/_{dl} = c\beta\ {}^{ds}/_{dl}\ {}^d/_{ds} = {}^{c\beta}/_{l'}\,{}^d/_{ds},$$

где l - длина дуги вдоль траектории и штрих означает дифференцирование по s. Далее имеем:

$$^{dr}/_{ds} = r_o'+x'e_x+z'e_z+xe_x'+ze_z'$$

и, используя формулы Френе, которые для плоской орбиты, имеющей кривизну К, дают выражения для производных базисных векторов:

$$\tau={}^{dr}/_{ds}\ ,\quad {}^{d\tau}/_{ds}=-Kn\ ,\quad {}^{dn}/_{ds}=K\tau\ ,\quad {}^{db}/_{ds}=0,$$

получим:

$$^{dr}/_{ds} =(1 + K_xx + K_zz)\tau + x'e_x + z'e_z. \tag{5.3}$$

Здесь и далее предполагается, что равновесная орбита является кусочно-плоской, так что либо радиальная кривизна K_x либо вертикальная K_z равна нулю $(K_x \cdot K_z = 0)$. Оставляя в выражении для $l' = |dr/ds|$ слагаемые не выше второго порядка малости по отклонениям от равновесной орбиты x, x', z, z', найдем, что

$$l' = 1 + K_x x + K_z z + {}^1/_2 x'^2 + {}^1/_2 z'^2. \tag{5.4}$$

В этом же приближении нетрудно найти выражение для вектора скорости:

$$\boldsymbol{\beta} = {}^1/_c\, {}^{d\mathbf{r}}/_{dt} = \beta/l' \cdot \mathbf{r}' = \beta(1 + K_x x + K_z z + {}^1/_2 x'^2 + {}^1/_2 z'^2)^{-1} \cdot [(1 + K_x x + K_z z)\boldsymbol{\tau} + x'\mathbf{e}_x + z'\mathbf{e}_z],$$

или

$$\boldsymbol{\beta} = \beta \cdot [(1 - {}^1/_2 x'^2 - {}^1/_2 z'^2)\boldsymbol{\tau} + (x' - K_x x x' - K_z z x')\mathbf{e}_x + (z' - K_z z z' - K_x x z')\mathbf{e}_z]. \tag{5.5}$$

Теперь выразим релятивистский фактор y и модуль скорости β через относительное отклонение p_σ энергии частицы E от ее равновесного значения E_o:

$$y = \frac{E}{mc^2} = \frac{E_o + (E - E_o)}{mc^2} = \frac{E_o}{mc^2}\,[1 + \frac{(E - E_o)}{E_o}] = y_o(1 + p_\sigma) \tag{5.6}$$

и

$$\beta = [1 - \frac{1}{y^2}]^{1/2} = 1 - \frac{1}{2y^2}. \tag{5.7}$$

Преобразуем уравнение (5.2). Подставляя в него выражение для вектора спина $\mathbf{S}$ в введенной системе ортов $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z, \boldsymbol{\tau})$ в виде

$$\mathbf{S} = S_x \mathbf{e}_x + S_z \mathbf{e}_z + S_\tau \boldsymbol{\tau}$$

и учитывая найденное выражение для ${}^d/_{dt}$, получим, что (5.2) принимает следующий вид:

$$\mathbf{S}' = [\mathbf{W}, \mathbf{S}], \tag{5.8}$$

где производная по s слева относится только к компонентам вектора $\mathbf{S}$ (но не к ортам $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z, \boldsymbol{\tau}$!), а вектор угловой скорости $\mathbf{W}$ связан с $\mathbf{W}_o$ соотношением

$$\mathbf{W} = {}^{l'}/_{c\beta}\, \mathbf{W}_o - K_z \mathbf{e}_x + K_x \mathbf{e}_z. \tag{5.9}$$

Выражение (5.1) для $\mathbf{W}_o$ можно переписать следующим образом (для $\mathbf{E}=0$, что означает, что рассматривается только магнитная система ускорителя, а наличие в нем резонаторов и других элементов с электрическим полем не предполагается):

$$\mathbf{W}_o = -(a + {}^1/_y) \cdot \frac{E_o}{mc^2} \cdot \frac{ec\mathbf{H}}{E_o} + a \cdot \frac{y}{1+y}\, \boldsymbol{\beta} \cdot (\boldsymbol{\beta} \cdot \frac{ec\mathbf{H}}{E_o} \cdot \frac{E_o}{mc^2})$$

или

$$\mathbf{W}_o = -y_o c \cdot [(a + {}^1/_y)\mathbf{B} - a \cdot \frac{y}{1+y} \boldsymbol{\beta} \cdot (\boldsymbol{\beta}\mathbf{B})], \tag{5.10}$$

где введены "поле" $\mathbf{B} = e\mathbf{H}/E_o$ и фактор $y_o = E_o/mc^2$.

Выразим входящие в (5.10) величины ${}^1/_y$, ${}^y/_{1+y}$ и скорость β через p_σ:

$$y^{-1} = y_o^{-1}(1 + p_\sigma)^{-1} = y_o^{-1}(1 - p_\sigma + p_\sigma^2),$$

$${}^y/_{1+y} = y_o^{-2}(1 - y_o + y_o \cdot p_\sigma + y_o a^2), \tag{5.11}$$

$$\beta = 1 - {}^1/_2 y_o^{-2}(1 - 2p_\sigma + 3p_\sigma^2).$$

Подставляя выражения (5.5) и (5.11) в (5.10) и полученный результат вместе с (5.4) в (5.9), найдем выражение для компонент вектора угловой скорости $\mathbf{W}$. Туда же следует подставить разложения для компонент магнитного поля $\mathbf{H}$ в виде рядов по степеням x, z (не выше, естественно, второй):

$$H_x = H_{ox} + (q - {}^1/_2 H'_{os})x + gz - 1/2(m_z + K_x q + K_z g + H''_{ox})x^2 + {}^1/_2 m_z z^2 + m_x xz,$$

$$H_z = H_{oz} - (q + {}^1/_2 H'_{os})z + gx - 1/2(m_x - K_z q + K_x g + H''_{oz})z^2 + {}^1/_2 m_x x^2 + m_z xz,$$

$$H_s = H_{os} + H'_{ox}x + H'_{oz}z + {}^1/_2(q' - {}^1/_2 H''_{os})x^2 - {}^1/_2(q' + {}^1/_2 H''_{os})z^2 + (g' - K_z H'_{ox} - K_x H'_{oz})xz. \tag{5.12}$$

Здесь введены следующие величины, характеризующие магнитное поле:

$$K_{x,z} = \pm \frac{eH_{oz,ox}}{E_o},$$

$$g = \frac{e}{E_o} \cdot \frac{dH_z}{dx} = \frac{e}{E_o} \cdot \frac{dH_x}{dz}, \qquad q = \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{E_o} \cdot (\frac{dH_x}{dx} - \frac{dH_z}{dz}), \tag{5.13}$$

$$m_{x,z} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{E_o} \cdot \frac{d^2H_{x,z}}{dxdz} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{E_o} \cdot \frac{d^2H_{z,x}}{dx^2, dz^2},$$

причем все значения величин в правых частях берутся на равновесной орбите.

Таким образом, получаем окончательные выражения для компонент W (включая нулевой, первый и второй порядки по x, z и б и их производным $p_x = x' - {}^1/_2 \cdot {}^e/_{Eo} \cdot H_{os} \cdot z$, $p_z = z' + {}^1/_2 \cdot {}^e/_{Eo} \cdot H_{os} \cdot x$ и p_σ):

$$
\begin{aligned}
W_x = &- (B_{ox} + K_z) - B_{ox} \cdot (Y_o a + {}^a/_2 Y_o + {}^1/_2 Y_o^2) + \\
&+ ({}^1/_2 B'_{os} - q) \cdot (1 + Y_o \cdot a) \cdot x + B_{os} \cdot a \cdot (Y_o - 1) \cdot p_x + \\
&+ [B_{os}^2/2 \cdot a \cdot (Y_o - 1) - (B_{ox} \cdot K_z + g) \cdot (1 + Y_o \cdot a)] \cdot z + B_{ox} \cdot p_\sigma + \\
&+ {}^1/2 \cdot (g \cdot K_z - q \cdot K_x + m_z + B''_{ox}) \cdot (Y_o \cdot a + 1) \cdot x^2 + B'_{ox} \cdot Y_o \cdot a \cdot x \cdot p_x - \\
&- (g \cdot K_x + q \cdot K_z + m_x) \cdot (Y_o \cdot a + 1) \cdot x \cdot z - ({}^1/2 \cdot B'_{os} - q) \cdot x \cdot p_\sigma + \\
&+ {}^1/2 \cdot B_{ox}(Y_o \cdot a - 1) \cdot p_x^2 + B'_{oz} \cdot Y_o \cdot a \cdot p_x \cdot z + B_{oz} \cdot Y_o \cdot a \cdot p_x \cdot p_z - \\
&- (g \cdot K_z + {}^1/2 \cdot m_z) \cdot (Y_o \cdot a + 1) \cdot z^2 + (B_{ox} \cdot K_z + g) \cdot z \cdot p_\sigma - \\
&- {}^1/2 \cdot B_{ox} \cdot (Y_o \cdot a + 1) \cdot p_z^2 - B_{ox} \cdot p_\sigma^2;
\end{aligned}
\tag{5.14}
$$

$$
\begin{aligned}
W_z = &- (B_{oz} - K_x) - B_{oz} \cdot (Y_o a + {}^a/_2 Y_o + {}^1/_2 Y_o^2) - \\
&- [B_{os}^2/2 \cdot a \cdot (Y_o - 1) + (B_{oz} \cdot K_x + g) \cdot (1 + Y_o \cdot a)] \cdot x + \\
&+ ({}^1/_2 \cdot B'_{os} + q) \cdot (1 + Y_o \cdot a) \cdot z + B_{os} \cdot a \cdot (Y_o - 1) \cdot p_z + B_{oz} \cdot p_\sigma - \\
&- (g \cdot K_x + {}^1/2 \cdot m_x) \cdot (Y_o \cdot a + 1) \cdot x^2 + \\
&+ (q \cdot K_x - g \cdot K_z - m_z) \cdot (Y_o \cdot a + 1) \cdot x \cdot z + B'_{ox} \cdot Y_o \cdot a \cdot x \cdot p_z + \\
&+ (B_{oz} \cdot K_x + g) \cdot x \cdot p_\sigma - {}^1/2 \cdot B_{oz} \cdot (Y_o \cdot a + 1) \cdot p_x^2 + B_{ox} \cdot Y_o \cdot a \cdot p_x \cdot p_z + \\
&+ {}^1/2 \cdot (g \cdot K_x + q \cdot K_z + m_x + B''_{oz}) \cdot (Y_o \cdot a + 1) \cdot z^2 + B'_{oz} \cdot Y_o \cdot a \cdot z \cdot p_z - \\
&- ({}^1/2 \cdot B'_{os} + q) \cdot z \cdot p_\sigma + {}^1/2 \cdot B_{oz} \cdot (Y_o \cdot a - 1q) \cdot p_z^2 - B_{oz} \cdot p_\sigma^2 .
\end{aligned}
\tag{5.15}
$$

$$
\begin{aligned}
W_s = &- B_{os} \cdot (1 + a + {}^1/_2 Y_o^2) - \\
&- B'_{ox} \cdot (1 + a) \cdot x - B'_{oz} \cdot (1 + a) \cdot z + \\
&+ B_{ox} \cdot a \cdot (Y_o - 1) \cdot p_x + B_{oz} \cdot a \cdot (Y_o - 1) \cdot p_z + B_{os} \cdot (1 + a) \cdot p_\sigma - \\
&- {}^1/_2 \cdot [B_{os}^3/4 \cdot (2 \cdot Y_o \cdot a + 1) + (q' - {}^1/_2 \cdot B''_{os})] \cdot x^2 + \\
&+ (q - {}^1/_2 \cdot B'_{os}) \cdot Y_o \cdot a \cdot x \cdot p_x - g' \cdot x \cdot z + \\
&+ [g \cdot Y_o \cdot a + B_{os}^2 \cdot (Y_o \cdot a + 1/2)] \cdot x \cdot p_z + \\
&+ B'_{ox} \cdot x \cdot p_\sigma - {}^1/_2 \cdot B_{os} \cdot (2 \cdot Y_o \cdot a + 1) \cdot p_x^2 - \\
&- [B_{os}^2 \cdot (Y_o \cdot a + 1/2) - g \cdot Y_o \cdot a] \cdot p_x \cdot z - \\
&- {}^1/_2 \cdot [B_{os}^3 \cdot /4(2 \cdot Y_o \cdot a + 1) - (q' + {}^1/_2 \cdot B''_{os})] \cdot z^2 + \\
&- (q + {}^1/_2 \cdot B'_{os}) \cdot Y_o \cdot a \cdot z \cdot p_z - {}^1/_2 \cdot B_{os} \cdot (2 \cdot Y_o \cdot a + 1) \cdot p_z^2 + \\
&+ B'_{oz} \cdot z \cdot p_\sigma - B_{os} \cdot p_\sigma^2;
\end{aligned}
\tag{5.16}
$$

6. Алгоритм расчета нелинейного спинового движения.

При практических расчетах спинового движения возможны различные подходы. В одном из них (А) вычисляются операторы - матрицы преобразования вектора спина и осуществляется его "протаскивание" последовательно для каждого элемента магнитной структуры накопителя. В другом подходе (Б) для вычисления оборотного преобразования вектора спина после определения матриц отдельных элементов производится их суммирование и только затем находится преобразованный вектор спина. Наконец (В), можно вычислять и суммировать не операторы, а вектора угловой скорости прецессии спина. Опишем последовательность действий при реализации каждого из этих подходов. Отметим, что во всех подходах необходимо сначала вычислить для каждого элемента накопителя вектор угловой скорости в соответствии с пятым разделом (формулы (5.14)-(5.16)) и, используя гамильтониан орбитального движения в этом элементе, найти интегралы (1.6) и (1.7).

Далее пути расходятся.

А. Вычисляется оператор преобразования спина M (формула (1.8)) очередного элемента и через него "протаскивается" вектор спина на входе этого элемента, затем вычисляется оператор M следующего элемента и т.д. .

Б. Находится "полная" скорость прецессии спина в очередном элементе (формула (1.12)). Далее преобразовывается ее орбитальная зависимость и орбитальные преобразования суммируются (формулы (4.2)). Затем по формулам (2.8)-(2.10) вычисляются матрицы преобразования спина в этом элементе. Наконец, по формулам (4.5) вычисляются суммарные матрицы преобразования спина к текущему азимуту накопителя.

В. Находится "полная" скорость прецессии спина в очередном элементе (формула (1.12)). Далее преобразовывается ее орбитальная зависимость и орбитальные преобразования суммируются (формулы (4.2)). Затем по формулам (5.6)-(5.8) вычисляются модуль суммарного угла поворота и направление "сумарной" оси.

* * *

Таким образом, полученные результаты позволяют создать программу расчета нелинейного движения спина в накопителе наиболее оптимальным способом для данной конкретной задачи (малооборотная и многооборотная динамика спина, динамическая и равновесная степень поляризации и т.д.).

Литература.

1. J.Dragt. Lectures on Nonlinear Orbit Dynamics in Physics of High Energy Particle Accelerator. AIP conference proceedings 87, New York, 1982, p.147.

2. J.Dragt, M.Finn. J.Math.Phys. Vol.17 No.12, 1976.

3. J.Dragt, E.Forest. J.Math.Phys. Vol.24 No.12, 1983.

4. K.Yokoya. Calculation of the Equilibrium Polarization of Stored Electron Beams Using Lie Algebra. Preprint KEK 86-90, 1986.

5. H.Mais, G.Ripkin. Theory of spin-orbit motion in electron-positron storage rings. Preprint DESY 83-062, 1983.

6. V.Bargman, L.Michel, V.Telegdi. Phys.Rev.Lett. Vol.2 No.10, 1959.

Ю.И.Эйдельман, В.Е.Якименко

РАСЧЕТ ДВИЖЕНИЯ СПИНА ЭЛЕКТРОНА В НЕЛИНЕЙНОЙ МАГНИТНОЙ СИСТЕМЕ НАКОПИТЕЛЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕХНИКИ ЛИ ОПЕРАТОРОВ

Препринт
№ 90-127

Работа поступила - 13 ноября 1990 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов
Подписано к печати 13.XI.1990 г.
Формат бумаги 60x90 1/16 Усл.2,0 печ.л., 1,6 учетно-изд.л.
Тираж 200 экз. Бесплатно. Заказ № 127.

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90