

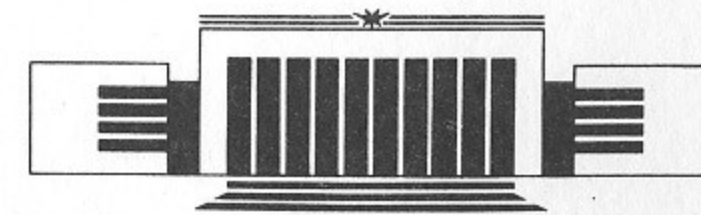


ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

Э.А. Кураев, Т.В. Кухто,  
З.К. Силагадзе, А. Шиллер

**ДВУХПЕТЛЕВЫЕ ЭЛЕКТРОСЛАБЫЕ  
ПОПРАВКИ К АНОМАЛЬНОМУ  
МАГНИТНОМУ МОМЕНТУ МЮОНА**

**ПРЕПРИНТ 90-66**



НОВОСИБИРСК

Двухпетлевые электрослабые поправки  
к аномальному магнитному моменту мюона

Э.А. Кураев, Т.В. Кухто,  
З.К. Силагадзе, А. Шиллер

Институт ядерной физики  
630090, Новосибирск 90, СССР

АННОТАЦИЯ

Вычислен логарифмически-усиленный вклад в аномальный магнитный момент мюона от диаграмм с двумя петлями без фермионных циклов, имеющими в промежуточном состоянии наряду с  $W$ - и  $Z$ -бозонами фотон. Он составляет 11% от однопетлевого вклада. Суммарный вклад в двухпетлевом приближении составляет  $\simeq 23\%$  от вклада однопетлевого приближения и примерно равен  $-4,5 \cdot 10^{-10}$ .

Цель этой работы — оценить величину вклада в аномальный магнитный момент мюона (АММ)  $a^{weak} = (g-2)/2 = a^{(1)} + a^{(2)} + \dots$  от диаграмм двухпетлевого приближения в стандартной модели  $a^{(2)}$ . Вклад диаграмм однопетлевого приближения  $a^{(1)}$  [1]:

$$a^{(1)} = \frac{(\alpha/\pi)\mu^2}{8(M_Z^2 C_W S_W)^2} \frac{5}{3} \simeq 19,5 \cdot 10^{-10}, \quad S_W = \sin \theta_W, \quad C_W = \cos \theta_W$$

превышает неопределенность экспериментального измерения этой величины [1], которая имеет тенденцию уменьшиться до величины  $\sim 1 \cdot 10^{-10}$ . Наивная оценка двухпетлевых вкладов  $a^{(2)} \sim (\alpha/\pi)a^{(1)}$  приводит к величинам  $\sim 10^{-11}$ , которыми мы будем в дальнейшем пренебрегать. Эта оценка оказывается заниженной из-за наличия логарифмического усиления радиационных поправок т. е. вкладов  $\sim (\mu/M_Z)^2 \cdot (\alpha/\pi)^2 L$ ,  $L = \ln(M_Z^2/\mu^2) \simeq 14$ . Такого типа поправки происходят от диаграмм, в которых наряду с  $W$ - и  $Z$ -обменами присутствуют обмены фотоном. Вклад двухпетлевых диаграмм, содержащих обмен только  $W$ - и  $Z$ -бозонами, будет величиной  $O(\alpha/\pi)^2 (\mu/M_Z)^2$ . Коэффициент неизвестен, но логарифмического усиления они не содержат.

Вычисления мы проводим в калибровке Хуфта — Фейнмана. Правила Фейнмана приведены в Приложении 1. Вклад 53 диаграмм (см. рис. 1)

$$a_W^{(2)} = - \frac{(\alpha/\pi)^2 \mu^2 [\ln(M_Z^2/\mu^2)]}{(S_W C_W M_Z)^2} \cdot \frac{119}{288} \simeq -2,2 \cdot 10^{-10}$$

составляет  $\sim 11\%$  от вклада электрослабых взаимодействий в

однопетлевом приближении. Вклады отдельных диаграмм приведены в таблице. Здесь мы не рассматриваем диаграммы с замкнутыми фермионными циклами, рассмотренные нами ранее [2]. Мы обратим внимание, что некоторые диаграммы, учитывающие обмен Z-бозоном, содержат даже дваждылогарифмическое усиление  $\sim (\alpha/\pi) L^2 \cdot a_W^{(1)}$ , однако в полной сумме такие вклады сокращаются.

По-видимому, компенсация таких членов  $\sim a^{(1)} \left(\frac{\alpha}{\pi} L^2\right)^n$  имеется во всех порядках ТВ.

Этот вопрос, однако, нами не анализировался. Диаграммы Фейнмана, приводящие к вкладам вида  $(\alpha/\pi) L \cdot a^{(1)}$  приведены на рис. 1. В разделах ниже мы приводим детали вычисления. Для полноты вначале мы приводим вычисление однопетлевых вкладов. Параллельные вычисления с использованием проекционного оператора проведены с помощью программы REDUCE (см. Приложение 2).

Таблица отдельных вкладов

|       |                                 |                                 |                   |                |    |    |    |    |                  |    |
|-------|---------------------------------|---------------------------------|-------------------|----------------|----|----|----|----|------------------|----|
| $i$   | 6                               | 7                               | 8                 | 9              | 10 | 11 | 12 | 13 | 14               | 15 |
| $b_i$ | $\frac{2}{9}L - \frac{166}{27}$ | $-\frac{2}{9}L - \frac{74}{27}$ | $-\frac{460}{27}$ | $-\frac{2}{9}$ | 3  | 3  | -2 | -2 | $\frac{566}{27}$ | 2  |

|       |    |    |    |    |                |                |    |                 |                |                  |
|-------|----|----|----|----|----------------|----------------|----|-----------------|----------------|------------------|
| $i$   | 16 | 17 | 18 | 19 | 20             | 21             | 22 | 23              | 24             | 25               |
| $b_i$ | 0  | 0  | 0  | 0  | $\frac{44}{3}$ | $-\frac{2}{9}$ | 4  | $-\frac{20}{3}$ | $\frac{10}{3}$ | $-\frac{184}{9}$ |

|       |    |    |                |                 |                |                 |    |    |    |
|-------|----|----|----------------|-----------------|----------------|-----------------|----|----|----|
| $i$   | 26 | 27 | 28             | 29              | 30             | 31              | 32 | 33 | 34 |
| $b_i$ | -2 | -2 | $\frac{32}{9}$ | $-\frac{40}{9}$ | $\frac{20}{3}$ | $-\frac{56}{9}$ | 0  | 0  | 0  |

$$\Delta a_i^{(2)} = (\alpha/\pi)^2 (\mu/M_Z C_W S_W)^2 \cdot 2^{-7} \cdot L \cdot b_i, \quad L = \ln M_Z^2/\mu^2$$

1. Диаграммы однопетлевого приближения (1) — (5) рис. 1.

Общее выражение для вершинной функции в стандартной модели следует из CP-инвариантности и сохранения тока:

$$\Gamma^\mu(p_2, p_1, q) = -ie \bar{u}(p_2) \left\{ F_1(q^2) \gamma^\mu + \frac{\hat{q} \gamma^\mu - \gamma^\mu \hat{q}}{4\mu} F_2(q^2) + \right.$$

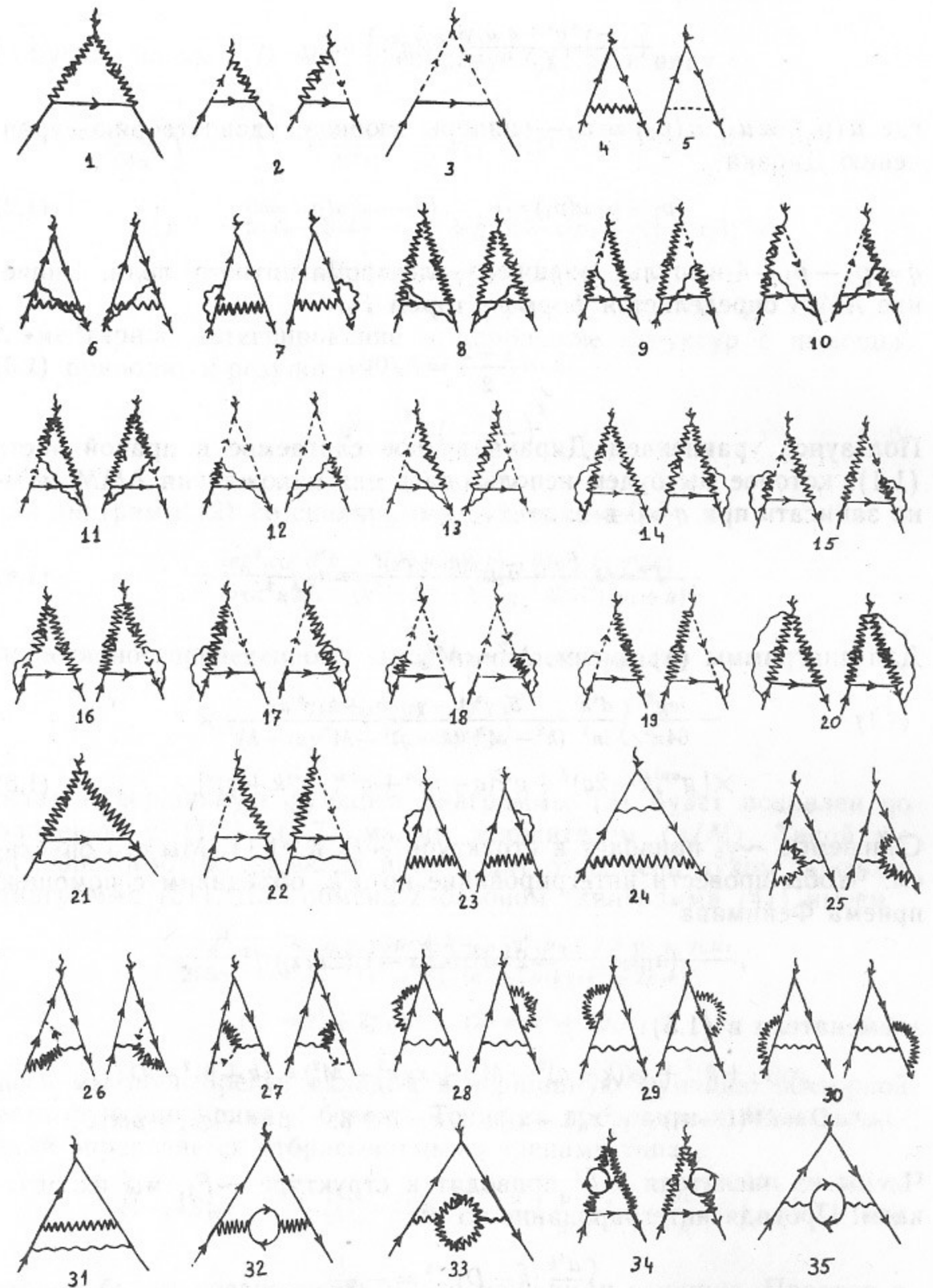


Рис. 1.

$$+ \left. \frac{(-\gamma^\mu q^2 + q_\mu \hat{q}) \gamma_5}{4q^2} F_3(q^2) \right\} u(p_1), \quad (1.1)$$

где  $u(p_1) \equiv u_1$ ,  $u(p_2) \equiv u_2$  — спиноры мюонов, удовлетворяют уравнению Дирака

$$(p_1 - \mu) u(p_1) = 0, \quad (p_2 - \mu) u(p_2) = 0, \quad (1.2)$$

$q = p_2 - p_1$  — 4-импульс внешнего электромагнитного поля. Значение АММ определяется формфактором  $F_2$ :

$$a = \frac{g-2}{2} = F_2(0). \quad (1.3)$$

Пользуясь уравнением Дирака второе слагаемое в правой части (1.1), которое мы будем использовать для нахождения АММ можно записать при  $q \rightarrow 0$  в виде

$$\Gamma^\mu \sim ie \frac{F_2(0)}{2} \bar{u}_2 u_1 \frac{(p_1 + p_2)^\mu}{\mu} \equiv a_\mu \frac{a}{2\mu^2}. \quad (1.4)$$

Для диаграммы (1) имеем,  $M^2 = M_W^2$ ,

$$- \frac{ieg^2}{64\pi^2} \int \frac{d^4 k}{i\pi^2} \frac{\bar{u}_2 \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) (p_1 + k) \gamma^\beta u_1}{(k^2 - M^2) ((k - q)^2 - M^2) (p_1 + k)^2} \times \\ \times [g^{\alpha\mu} (k - 2q)^\beta + g^{\mu\beta} (q + k)^\alpha + g^{\beta\alpha} (-2k + q)^\mu]. \quad (1.5)$$

Слагаемое  $\sim \gamma_5$  приводит к структуре  $\sim F_3$  в (1.1). Мы его опускаем. Чтобы провести интегрирование по  $d^4 k$ , объединим с помощью приема Фейнмана

$$(a_1 a_2 a_3)^{-1} = 2 \int d^3 x \delta(\Sigma x - 1) (\Sigma a_i x_i)^{-3}$$

знаменатели в (1.5):

$$x_1(p_1 + k)^2 + x_2((k - q)^2 - M^2) + x_3(k^2 - M^2) = (k + \beta)^2 - D; \\ D = M^2(1 - x_1) - \mu^2 x_1(1 - x_1), \quad \tilde{k} = k + \beta, \quad \beta = -qx_2 + p_1 x_1.$$

Члены из числителя  $\sim \tilde{k}^2$  приводят к структуре  $\sim F_1$ , мы их опускаем. Проводя интегрирование по  $d^4 k$

$$\int \frac{d^4 k}{i\pi^2} (\tilde{k} - D)^{-3} = -\frac{1}{2D}$$

и опуская члены в  $D \sim \mu^2$ , преобразуем (1.5) к виду

$$\frac{ieg^2}{64\pi^2} \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \frac{1}{M^2(1-x_1)} \bar{u}_2 \gamma^\alpha (\hat{p}_1(1-x_1) + \hat{q}x_2) \gamma^\beta u_1 \times \\ \times [g^{\alpha\mu} (-p_1 x_1 - q(2-x_1))^\beta + g^{\mu\beta} (-x_1 p_1 + q(1+x_2))^\alpha + \\ + g^{\beta\alpha} (2x_1 p_1 + q(1-2x_2))^\mu].$$

Элементарное интегрирование и упрощение структур с помощью (1.2) приводит к результату

$$a^\mu \cdot \frac{7}{6 \cdot 16} \left( \frac{q_\mu}{2\pi M_W} \right)^2. \quad (1.6)$$

Для диаграмм (2) со скалярными духами имеем

$$- \frac{ieg^2 \mu}{64\pi^2} \int \frac{d^4 k}{i\pi^2} \frac{\bar{u}_2 (\gamma_\mu (\hat{p}_1 + \hat{k}) + (\hat{p}_1 + \hat{k}) \gamma^\mu) u_1}{(k^2 - M^2) ((k - g)^2 - M^2) (p_1 + k)^2}.$$

Аналогичное приведенному выше вычисление дает

$$a^\mu \frac{1}{32} \left( \frac{g_\mu}{2\pi M_W} \right)^2. \quad (1.7)$$

Вклад в вершинную функцию диаграммы (3) будет подавлен по сравнению с (1.6), (1.7) малым множителем  $(\mu/M)$ . Такой же пренебрежимо малый вклад происходит от обмена духом  $Z$ -бозона (диаграмма (5)). Для обмена  $Z$ -бозоном (диаграмма (4)) имеем

$$- \frac{ieg^2}{256\pi^2} \int \frac{d^4 k}{i\pi^2} \frac{\bar{u}_2 \gamma_\lambda \gamma_5 (p_2 + k + \mu) \gamma^\mu (p_1 + k + \mu) \gamma_\lambda \gamma_5 u_1}{(k^2 - M_Z^2) (k^2 + 2p_1 k) (k^2 + 2p_2 k)}, \\ (1) = k^2 + 2p_1 k, \quad (2) = k^2 + 2p_2 k. \quad (1.8)$$

Здесь мы пренебрегли вкладом в вершинную функцию векторной части функции Грина  $Z$ -бозона. Точность проводимых ниже вычислений определяется отбрасываемыми членами типа

$$(1 - 4S_W^2), \quad \frac{\alpha}{\pi} L(1 - 4S_W^2), \quad \frac{\alpha}{\pi} \left( \frac{\mu}{M} \right) L, \quad \frac{\alpha}{\pi} \ll 1, \quad (1.9)$$

которые будем предполагать много меньшими единицы. Проводя в (1.8) объединение знаменателей и последующее интегрирование по 4-импульсам  $k$ , приведем (1.8) к виду

$$\frac{ieg^2}{256C_W^2 M_Z^2} \int_0^1 \frac{dx_3}{x_3} \int_0^{1-x_3} dx_1 \bar{u}_2 [ -2(\hat{p}_1 - \hat{\beta}) \gamma^\mu (\hat{p}_2 - \hat{\beta}) - 4\mu(p_1 + p_2 - 2\beta)^\mu ] u_1, \quad (1.10)$$

$$\beta = x_1 p_1 + x_2 p_2.$$

Пользуясь уравнением Дирака для  $u_{1,2}$  и проводя элементарное интегрирование, получим

$$a^\mu \left( \frac{g\mu}{2\pi C_W M_Z} \right)^2 \left( -\frac{5}{96} \right), \quad g^2 = \frac{4\pi\alpha}{S_W^2}. \quad (1.11)$$

Полный вклад однопетлевых диаграмм в вершинную функцию получается сложением (1.6), (1.7), (1.11). Из сравнения с (1.4) получаем известный результат:

$$a^{(1)} = (\alpha/\pi) \left( \frac{\mu}{M_Z C_W S_W} \right)^2 \cdot \frac{5}{48} = \frac{G\mu^2}{8\pi^2 \sqrt{2}} \cdot \frac{5}{3} \simeq 19.5 \cdot 10^{-10}. \quad (1.12)$$

## 2. Диаграммы (6) рис. 1.

Вклад в  $\Gamma^\mu$  от диаграмм (6) имеет вид (с точностью, определяемой (1.9):

$$-\frac{ie(\alpha/\pi)^2}{256(S_W C_W)^2} \int \frac{d^4 k_1}{i\pi^2} \bar{u}_2 \left\{ \frac{\gamma_\alpha (\hat{p}_2 + \hat{k}_1 + \mu) J_1^{\alpha\mu}}{k_1^2 ((p_2 + k_1)^2 - \mu^2)} + \frac{J_2^{\alpha\mu} (p_1 + k_1 + \mu) \gamma^\alpha}{k_1^2 ((p_1 + k_1)^2 - \mu^2)} \right\} u_1, \quad (2.1)$$

где

$$J_1^{\alpha\mu} = \int \gamma^\beta \gamma_5 (p_2' + k + \mu)^{-1} \gamma^\mu (p_1' + k + \mu)^{-1} \gamma^\alpha (p_1 + k + \mu) \gamma_\beta \gamma_5 \frac{d^4 k}{i\pi^2} (k^2 - \mu^2)^{-1};$$

$$p_{1,2}' = p_{1,2} + k_1, \quad M \equiv M_Z.$$

для  $J_2$  можно написать аналогичное выражение. Характерные 4-импульсы  $|k|$  имеют порядок  $M_Z$  тогда как  $|k_1| \sim \mu$ . Проведем сначала интегрирование по «жесткому» 4-импульсу  $k$ . Объединяя знаменатели:

$$x_1((p_1 + k)^2 - \mu^2) + x_2((p_1' + k)^2 - \mu^2) + x_3((p_2' + k)^2 - \mu^2) + x_4(k^2 - M^2) = \tilde{k}^2 - D,$$

$$\tilde{k} = k + \beta, \quad \beta = x_1 p_1 + x_2 p_1' + x_3 p_2', \quad D = x_4 M^2 + \Delta_1,$$

$$\Delta_1 = \mu^2 - x_1(1-x_1)k^2 - 2x_1 x_3 k q, \quad q = p_2 - p_1,$$

и проводя интегрирование сначала по  $k$ :

$$\int \frac{d^4 k}{i\pi^2} \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 - D)^4} = -\frac{g^{\mu\nu}}{12D}; \quad \int \frac{d^4 k}{i\pi^2} \frac{1}{(k^2 - D)^4} = \frac{1}{6D^2},$$

а затем по  $x_4$

$$\int_0^{x_3} \frac{dx_4 \cdot x_4}{x_4 M^2 + \Delta_1} = \frac{x_3}{M^2}; \quad \int_0^{x_3} \frac{dx_4}{(M^2 x_4 + \Delta_1)^2} = \frac{1}{M^2 \Delta_1};$$

$$\int_0^{x_3} \frac{dx_4 \cdot x_4}{(M^2 x_4 + \Delta_1)^2} = O\left(\frac{1}{M^4}\right) = 0, \quad x_3 = 1 - x_1 - x_2,$$

Представим величину  $J_1^{\alpha\mu}$  в виде

$$J_1^{\alpha\mu} = \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \left\{ -2 \int_0^{x_3} \frac{dx_4}{M^2 x_4 + \Delta_1} [(\hat{p}_1 - \hat{\beta}_0) \gamma^\alpha \gamma^\mu + \gamma^\mu (p_1' - \beta_0) \gamma^\alpha + \right. \\ \left. + \gamma^\alpha \gamma^\mu (p_2' - \beta_0)] - \frac{2x_3}{M^2} [\hat{p}_2' \gamma^\alpha \gamma^\mu + \gamma^\mu \hat{p}_2' \gamma^\alpha + \gamma^\alpha \gamma^\mu \hat{p}_2'] + \right. \\ \left. + \frac{1}{M^2 \Delta_1} \gamma^\beta (p_2' - \beta_0 - \mu) \gamma^\mu (p_1' - \beta_0 - \mu) \gamma^\alpha (p_1 - \beta_0 - \mu) \gamma^\beta \right\}, \quad (2.2)$$

$$\beta_0 = x_1 p_1 + x_2 p_1' + x_3 p_2'.$$

При подстановке (2.2) в (2.1) возникнут формально расходящиеся интегралы по  $k_1$ , однако при получении (2.2) мы предполагали

$$\mu^2 \sim |k_1^2| \ll |k^2| \sim M^2. \quad (2.3)$$

Для выделения  $\sim L$  вклада от 2-го слагаемого в (2.2) объединим знаменатели в (2.1):

$$k_1^2 (1-y) + ((p_2 + k_1)^2 - \mu^2) y = (k_1 + p_2 y)^2 - y^2 \mu^2,$$

и проведем интегрирование по  $k_1$  по области (2.3):

$$\int \frac{d^4 k_1 / i\pi^2}{(k_1^2 - \mu^2 y^2)^2} = L,$$

причем члены  $\sim k_1^2$  из числителя приводят к структурам формфактора  $F_1$ . В результате возникает выражение

$$\frac{ie(\alpha/\pi)^2 \cdot 2L}{256(S_W C_W M_Z)^2} \int_0^1 dy \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 (1-x_1-x_2) \bar{u}_2 \times$$

$$\times \{ \gamma_\alpha (\hat{p}_2(1-y) + \mu) [\hat{p}_2 \gamma^\alpha \gamma^\mu + \gamma^\mu \hat{p}_2 \gamma^\alpha + \gamma^\alpha \gamma^\mu \hat{p}_2] (1-y) +$$

$$+ (1-y) [\hat{p}_1 \gamma^\mu \gamma^\alpha + \gamma^\alpha \hat{p}_1 \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^\alpha \hat{p}_1] (\hat{p}_1(1-y) + \mu) \gamma^\alpha \} \hat{u}_1 =$$

$$= \frac{a^\mu}{256} \cdot \frac{10}{9} \left( \frac{\alpha\mu}{\pi M_Z C_W S_W} \right)^2 L. \quad (2.4)$$

Для проведения интегрирования по  $k_1$  третьего слагаемого в (2.2) необходимо объединить знаменатели (2.1) с  $\Delta_1$ :

$$\frac{1}{k_1^2(k_1^2 + 2p_2 k_1) \Delta_1} = -\frac{2}{x_1(1-x_1)} \int d^3 y \delta(\Sigma y - 1) [\tilde{k}_1^2 - D]^{-3},$$

$$\tilde{k}_1 = k + p_2 y_2 + y_1 \frac{x_3}{1-x_1} q, \quad D = \mu^2 \left( y_2^2 + \frac{y_1}{x_1(1-x_1)} \right).$$

К «логарифмически расходящемуся» (т. е.  $\sim L$ ) вкладу приводят члены числителя  $\sim \tilde{k}_1^2$  (члены  $\sim \tilde{k}_1^4$  дают вклад в структуру  $F_1$ ):

$$\int \frac{d^4 k_1}{i\pi^2} \frac{k_1^\mu k_1^\nu}{(k_1^2 - D)^3} = \frac{1}{4} g^{\mu\nu} L.$$

Проводя довольно громоздкое, но прямое интегрирование по параметрам  $x, y$  и преобразование спинорных структур, получим для первого слагаемого в (2.1):

$$-\frac{ie(\alpha/\pi)^2 \cdot L}{256(S_W C_W)^2} \left( -\frac{1}{2M^2} \right) \left( -8p_1^\mu - \frac{22}{9} p_2^\mu \right) \bar{u}_2 u_1 \mu.$$

Учитывая аналогичный результат для второго, получим для слагаемых:

$$\frac{a^\mu}{256} \left( -\frac{50}{9} L \right) \left( \frac{\alpha\mu}{\pi M_Z C_W S_W} \right)^2. \quad (2.5)$$

Для первого слагаемого в (2.2) снова применяем процедуру объединения знаменателей

$$-\frac{1}{x_1(1-x_1)} \left[ k_1^2(k_1^2 + 2p_2 k_1) \left( k_1^2 + 2k_1 q \frac{x_3}{1-x_1} - \frac{M^2 x_4 + \mu^2}{x_1(1-x_1)} \right) \right]^{-1} =$$

$$= -\frac{2}{x_1(1-x_1)} \int d^3 y [\tilde{k}_1^2 - D]^{-3},$$

$$\tilde{k}_1 = k_1 + \beta, \quad D = \frac{M^2 x_4 y_1}{x_1(1-x_1)} + \mu^2 \left( y_2^2 + \frac{y_1}{x_1(1-x_1)} \right), \quad \beta = y_2 p_2 + \frac{y_1 x_3}{1-x_1} q.$$

К структуре  $F_2$  приводят только члены числителя, получающиеся за счет «сдвижки» т. е. замены  $k_1 \rightarrow -\beta$ . Проводя интегрирование по  $k_1$  (интеграл сходящийся), получим для 1-го слагаемого в (2.1):

$$\frac{ie(\alpha/\pi)^2}{128(S_W C_W)^2} \int \frac{d^3 x \delta(\Sigma x - 1)}{x_1(1-x_1)} \int d^3 y \delta(\Sigma y - 1) \times$$

$$\times \int_0^1 dx_4 \bar{u}_2 \gamma^\alpha (p_2 - \beta + \mu) [(-x_3 q + (1-x_1)\beta) \gamma^\alpha \gamma^\mu +$$

$$+ \gamma^\mu (-qx_3 - x_1\beta) \gamma^\alpha + \gamma^\alpha \gamma^\mu (q(1-x_3) - x_1\beta)] u_1 D^{-1}. \quad (2.6)$$

Проводим сначала интегрирование по  $x_4$  и  $y_1$  с логарифмической точностью:

$$M^2 \int_0^1 \frac{dx_4}{x_1(1-x_1)} \int_0^{1-y_2} dy_1 D^{-1} = \frac{1}{2} L^2 + L \ln \frac{x_3(1-y_2)}{x_1(1-x_1)y_2^2};$$

$$M^2 \int_0^1 \frac{dx_4}{x_1(1-x_1)} \int_0^{1-y_2} y_1 dy_1 D^{-1} = (1-y_2) L. \quad (2.7)$$

Последующее упрощение  $\gamma$ -матричной структуры и стандартное интегрирование дает

$$\frac{ie(\alpha/\pi)^2 \mu}{128(S_W C_W M_Z)^2} \left[ \frac{1}{2} L^2 \left( -p_1 + \frac{11}{9} p_2 \right) + L \left( -\frac{17}{6} p_1 + \frac{107}{54} p_2 \right) \right]^\mu \bar{u}_2 u_1. \quad (2.8)$$

Аналогичное вычисление даст для второго слагаемого в (2.1) выражение, получающееся из (2.8) заменой  $p_1 \leftrightarrow p_2$ . Эти слагаемые дадут

$$\frac{a_\mu}{128} \left( \frac{\alpha\mu}{\pi S_W C_W M_Z} \right)^2 \left( \frac{1}{9} L^2 - \frac{23}{27} L \right). \quad (2.9)$$

Полный вклад диаграммы 6 в  $\Gamma^\mu$  будет (см. (2.4), (2.5), (2.9)):

$$a_\mu \cdot \frac{1}{256} \left( \frac{\alpha\mu}{\pi M_Z S_W C_W} \right)^2 \left( \frac{2}{9} L^2 - \frac{166}{27} L \right). \quad (2.10)$$

### 3. Диаграммы (7) рис. 1.

Вычисление, аналогичное приведенному в разделе 2, дает

$$-\frac{ie(\alpha/\pi)^2}{256(C_W S_W)^2} \int \frac{d^4 k_1}{i\pi^2} \bar{u}_2 \left\{ \frac{O_1^{\mu\sigma}(p_1 + \mu)\gamma^\sigma}{k_1^2(k_1^2 + 2p_1 k_1)} + \frac{\gamma^\sigma(p_2 + \mu)O_2^{\mu\sigma}}{k_1^2(k_1^2 + 2p_2 k_1)} \right\} u_1, \quad (3.1)$$

где

$$O_1^{\mu\sigma} = \frac{1}{M_Z^2} \int d^3 x \delta(\Sigma x - 1) \times \\ \times \left\{ -2l_1[(k_1(1-x_1) - qx_3)\gamma^\sigma\gamma^\mu + \gamma^\mu(-x_1 k_1 - x_3 q)\gamma^\sigma + \gamma^\sigma\gamma^\mu(q(1-x_3) - x_1 k_1)] - \right. \\ \left. - 2x_2[p_1\gamma^\sigma\gamma^\mu + \gamma^\mu p_1\gamma^\sigma + \gamma^\sigma\gamma^\mu p_1] + \right. \\ \left. + \frac{1}{\Delta_1} \gamma^\lambda(q(1-x_3) - x_1 k_1 - \mu)\gamma^\mu(-x_3 q - x_1 k_1 - \mu)\gamma^\sigma(-qx_3 + k_1(1-x_1) - \mu)\gamma^\lambda \right\}, \\ \Delta_1 = \mu^2 - k_1^2 x_1(1-x_1) + 2qk_1 x_1 x_3, \quad l_1 = \ln\left(1 + \frac{M^2}{\Delta_1} x_2\right). \quad (3.2)$$

и аналогичное выражение для  $O_2$ . Первое слагаемое в (3.2) при подстановке в первое слагаемое (3.1) дает:

$$\frac{ie(\alpha/\pi)^2 \bar{u}_2 u_1 \mu}{256(S_W C_W M_Z)^2} \left\{ L^2\left(\frac{7}{9}p_1 - p_2\right) + L\left(\frac{52}{27}p_1 - 2p_2\right) \right\}^\mu; \quad (3.3)$$

а второе и третье, соответственно:

$$\frac{ie(\alpha/\pi)^2 \bar{u}_2 u_1 \mu}{256(S_W C_W M_Z)^2} \frac{2}{3} L p_1^\mu, \quad \frac{ie(\alpha/\pi)^2 \bar{u}_2 u_1 \mu L}{256(S_W C_W M_Z)^2} \left\{ -\frac{7}{12}p_1 - \frac{11}{4}p_2 \right\}^\mu \quad (3.4)$$

Полный вклад этой диаграммы в  $\Gamma_\mu$  (с учетом второго слагаемого в (3.1)) будет

$$\frac{a_\mu}{256} \left( \frac{\alpha\mu}{\pi M_Z C_W S_W} \right)^2 \left\{ -\frac{2}{9}L^2 - \frac{74}{27}L \right\}. \quad (3.5)$$

Здесь следует отметить, что диаграммы (7) содержат расходящийся блок, вершинную функцию  $Z_{\mu\mu}$ , который должен быть регуляризован. Это отвечает неучтенной нами области больших  $|k_1|$ . Характерный импульс регуляризации  $\sim M_Z$ , и последующее интегрирование по  $k$  не приводит к логарифмическому усилению.

### 4. Диаграммы (8) — (13) рис. 1.

Интересующий нас вклад в вершинную функцию  $\Gamma^\mu$  (от левой диаграммы (8)) имеет вид:

$$\frac{ie(\alpha/\pi)^2}{128(S_W)^2} \int \frac{d^4 k_1}{i\pi^2} \int \frac{d^4 k}{i\pi^2} \frac{\bar{u}_2 \gamma^\lambda(p_1 + k)\gamma^\sigma u_1}{k_1^2(k_1^2 + 2p_1 k_1)} \times \\ \times \frac{V_1^{\mu\alpha\eta} V_2^{\eta\sigma\lambda}}{(k^2 - M^2)((k-q)^2 - M^2)((k+k_1-q)^2 - M^2)(p_1 + k)^2}, \quad (4.1) \\ V_1^{\mu\alpha\eta} = g^{\mu\alpha}(q+k)^\eta + g^{\alpha\eta}(-2k+q)^\mu + g^{\eta\mu}(k-2q)^\alpha, \\ p_1' = p_1 + k_1, \quad q = p_2 - p_1, \\ V_2^{\eta\sigma\lambda} = g^{\eta\sigma}(q-k+k_1)^\lambda + g^{\sigma\lambda}(-2k_1-k+q)^\eta + g^{\lambda\eta}(k_1+2k-2q)^\sigma, \\ M^2 = M_W^2.$$

Сначала проводим интегрирование по 4-импульсу «жесткого» блока  $k$ . Для этой цели объединяем соответствующие знаменатели в (4.1):

$$x_1(k^2 - M^2) + x_2((k-q)^2 - M^2) + x_3((k+k_1-q)^2 - M^2) + \\ + x_4(p_1 + k)^2 = (k+\beta)^2 - D, \\ \beta = x_4 p_1' + x_3(k_1 - q) - x_2 q, \quad D = M^2(1-x_4),$$

и удерживаем члены  $\sim k^2$  из числителя (4.1):

$$\int \frac{d^4 k k^\mu k^\nu / i\pi^2}{(k^2 - D)^4} = -\frac{g^{\mu\nu}}{12D} = -\frac{g^{\mu\nu}}{12M^2(1-x_4)}.$$

Оставшийся интеграл по  $k_1$  в области  $|k_1^2| \ll M^2$  содержит  $L$ :

$$\int \frac{(d^4 k_1 / i\pi^2) f(k_1)}{k_1^2(k_1^2 + 2p_1 k_1)} = \int_0^1 dy \int \frac{(d^4 k_1 / i\pi^2) f(-p_1 y)}{((k_1 + p_1 y)^2 - \mu^2)^2} = L \cdot \int_0^1 dy f(-p_1 y).$$

Приводя в (4.1) тензорные структуры к соответствующей  $F_2$  и проводя интегрирование по  $x_i, y$ , получим

$$-\frac{ie(\alpha/\pi)^2 L \bar{u}_2 u_1 \mu}{128(S_W C_W M_Z)^2} \left( \frac{179}{27}p_1 + \frac{17}{9}p_2 \right)^\mu. \quad (4.2)$$

Суммарный вклад диаграмм (8) в  $\Gamma^\mu$ :

$$-\frac{a_\mu}{256} \left( \frac{\alpha\mu}{\pi M_Z C_W S_W} \right)^2 L \cdot \frac{460}{27}. \quad (4.3)$$

Рассмотрим теперь диаграммы с духовыми состояниями. Для левой диаграммы (9) после проведения интегрирования по «жест-

кому блоку» получим

$$\frac{ie(\alpha/\pi)^2 M^2}{64S_W^2} \int \frac{d^4 k_1 / i\pi^2}{k_1^2(k_1^2 + 2p_1 k_1)} \int d^4 x \delta(\Sigma x - 1) \frac{\bar{u}_2 \gamma_\alpha(p_1' - \beta) \gamma_\mu(p_1' + \mu) \gamma_\alpha u_1}{M^4(1-x_4)^2},$$

где  $p_1' = p_1 + k_1$ , а величина  $\beta$  приведена в этом разделе выше. Дальнейшее интегрирование по  $k$  дает

$$\begin{aligned} & \frac{ie(\alpha/\pi)^2 L}{64(S_W M_Z)^2} \int \frac{d^4 x \delta(\Sigma x - 1)}{(1-x_4)^2} \int_0^1 dy \bar{u}_2 [4\mu p_1^\mu ((1-y)(1-x_4) + x_3 y) - \\ & - 2(1-y)\hat{p}_1 \gamma^\mu (\hat{p}_1(1-y)(1-x_4) + x_2 \hat{q} + x_3(y\hat{p}_1 + \hat{q}))] u_1 = \\ & = \frac{ie(\alpha/\pi)^2 L \bar{u}_2 u_1 \mu}{64(S_W C_W M_Z)^2} \left( \frac{5}{18} p_1 - \frac{1}{3} p_2 \right)^\mu. \end{aligned}$$

Так что диаграммы (9) рис. 1 дают:

$$-\frac{a_\mu (\alpha/\pi)^2}{256} \left( \frac{\mu\alpha}{\pi M_Z S_W C_W} \right)^2 \cdot \frac{2}{9} L. \quad (4.4)$$

Для левых диаграмм (10), (11) рис. 1 аналогично получаем

$$\begin{aligned} & \frac{ie(\alpha/\pi)^2 \mu}{64(S_W)^2} \int \frac{d^4 k_1}{i\pi^2 k_1^2 (k_1^2 + 2p_1 k_1)} \int \frac{d^4 k}{i\pi^2} \times \\ & \times 6 \int d^4 x \delta(\Sigma x - 1) \frac{\bar{u}_2 \gamma_\alpha(p_1' + k) \gamma_\mu(p_1' + \mu) \gamma_\lambda u_1}{(\bar{k}^2 - D)^4} V_2^{\mu\lambda\alpha}, \\ & - \frac{ie(\alpha/\pi)^2 \mu}{64(S_W)^2} \int \frac{d^4 k}{i\pi^2 k_1^2 (k_1^2 + 2p_1 k_1)} \int \frac{d^4 k}{i\pi^2} \times \\ & \times 6 \int d^4 x \delta(\Sigma x - 1) \frac{\bar{u}_2(p_1' + k) \gamma_\alpha(p_1' + \mu) \gamma^\lambda u_1}{(\bar{k}^2 - D)^4} V_1^{\mu\alpha\lambda}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где величины  $V_{1,2}$  приведены в (4.1). Проведение интегрирования в (4.5) по изложенной выше схеме (снова важны члены  $\sim \bar{k}^2$  из числителя) дает одинаковый результат:

$$\frac{ie(\alpha/\pi)^2 L \bar{u}_2 u_1 \mu}{256(S_W C_W M_Z)^2} 3p_1^\mu.$$

В результате, диаграммы (10) и (11) дают суммарный вклад в  $\Gamma^\mu$ :

$$\frac{a_\mu}{256} \left( \frac{\alpha\mu}{\pi M_Z S_W C_W} \right)^2 6L. \quad (4.6)$$

Из диаграмм с двумя духовыми пропагаторами будут существенны только (12) и (13), изображенные на рис. 1. Имеющие одну  $S_\mu V$ -вершину. Для суммы вкладов в  $\Gamma^\mu$  левых диаграмм (12), (13) рис. 1 получим

$$\begin{aligned} & - \frac{ie(\alpha/\pi)^2 \mu}{64S_W^2} \int \frac{d^4 k_1}{i\pi^2 k_1^2 (k_1^2 + 2p_1 k_1)} \int \frac{d^4 k}{i\pi^2} \times \\ & \frac{\bar{u}_2 [ \gamma^\lambda(p_1' + k) \gamma^\mu(p_1' + \mu) \gamma^\lambda (-2k + q)^\mu + (p_1' + k) \gamma^\mu(p_1' + \mu) \gamma^\lambda (-2k - k_1 + 2q)^\lambda ] u_1}{(k^2 - M^2)((k - q)^2 - M^2)((k + k_1 - q)^2 - M^2)(p_1' + k)^2}. \end{aligned}$$

Удерживая в числителе члены  $\sim k^2$ , получим:

$$\begin{aligned} & - \frac{ie(\alpha/\pi)^2 \mu}{64S_W^2 M_Z^2} L \int \frac{d^4 x \delta(\Sigma x - 1)}{1-x_4} \int_0^1 dy \bar{u}_2 [ \gamma^\lambda \gamma^\mu (p_1(1-y) + \mu) \gamma^\lambda g^{\mu\eta} + \\ & + \gamma^\mu \gamma^\mu (p_1(1-y) + \mu) \gamma^\lambda g^{\lambda\eta} ] u_1 = - \frac{ie(\alpha/\pi)^2 \mu \bar{u}_2 u_1 L}{64S_W^2 M_Z^2} p_1^\mu. \end{aligned}$$

Учитывая правые диаграммы (10), (11) на рис. 1, получим для их суммы:

$$-\frac{a^\mu}{256} \left( \frac{\alpha\mu}{\pi M_Z S_W C_W} \right)^2 4L. \quad (4.7)$$

## 5. Диаграммы (14) — (19) рис. 1.

Для левой диаграммы (14) имеем:

$$\begin{aligned} & - \frac{ie(\alpha/\pi)^2}{64S_W^2} \int \frac{d^4 k_1}{i\pi^2 k_1^2 (k_1^2 + 2p_1 k_1)} \times \\ & \times \int \frac{d^4 k}{i\pi^2} \frac{\bar{u}_2 \gamma_\alpha(p_1 + k) \gamma^\rho(p_1 + k_1 + \mu) \gamma^\sigma u_1}{(k^2 - M^2)((k - k_1)^2 - M^2)((k - q)^2 - M^2)(p_1 + k)^2} V_1^{\mu\lambda\alpha}(q, k) V_2^{\lambda\sigma\rho}(k, k_1); \\ & V_1^{\mu\lambda\alpha}(q, k) = g^{\mu\lambda}(q + k)^\alpha + g^{\lambda\alpha}(-2k + q)^\mu + g^{\alpha\mu}(k - 2q)^\lambda; \\ & V_2^{\lambda\sigma\rho}(k, k_1) = g^{\lambda\sigma}(k + k_1)^\rho + g^{\sigma\rho}(-2k_1 - k)^\lambda + g^{\rho\lambda}(k_1 - 2k)^\sigma. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Для оценки логарифмического вклада снова можно ограничиться областью  $|k_1|$ , много меньших  $M$ . Действительно, вершинная функция  $(\mu\nu W)$  должна быть регуляризована. Характерный импульс регуляризации  $k \sim M$ . В результате, регуляризованная вершинная функция будет содержать величины  $\sim \ln(k^2/M^2)$  и последующее интегрирование по  $k$  в области  $|k| \sim |M|$  не приведет к логарифмическому усилению.



Поступая как и в предыдущем разделе, объединяем знаменатели, содержащие  $k$ :

$$x_1(k^2 - M^2) + x_2((k - q)^2 - M^2) + x_3((k - k_1)^2 - M^2) + \\ + x_4(p_1 + k)^2 = (k + \tilde{\beta})^2 - D, \\ \tilde{\beta} = -x_2q + x_4p_1 - x_3k_1, \quad D = M^2(1 - x_4)$$

и проводим интегрирование по  $k$ , оставляя в числителе члены  $\sim k^2$ . Затем, объединяя оставшиеся знаменатели и проводя интегрирование по  $k_1$  по области  $|k_1| \ll M$ , получим:

$$\frac{ie(\alpha/\pi)^2 L}{128(M_W S_W)^2} \int_0^1 dy \int \frac{d^4 x \delta(\Sigma x - 1)}{1 - x_4} \{ \bar{u}_2 \gamma_\alpha (p_1 - \beta) \gamma_\rho (p_1(1 - y) + \mu) \gamma^\sigma u_1 \times \\ \times [g^{\mu\lambda} g^{\eta\alpha} - 2g^{\lambda\alpha} g^{\eta\mu} + g^{\alpha\mu} g^{\eta\lambda}] [g^{\lambda\sigma} g^{\eta\rho} + g^{\rho\sigma} g^{\eta\lambda} - 2g^{\rho\lambda} g^{\eta\sigma}] + \\ + \bar{u}_2 \gamma_\alpha \gamma^\eta \gamma_\rho (p_1(1 - y) + \mu) \gamma^\sigma u_1 [g^{\mu\lambda} g^{\eta\alpha} - 2g^{\lambda\alpha} g^{\eta\mu} + g^{\alpha\mu} g^{\eta\lambda}] V_2^{\lambda\sigma\rho}(-yp_1, -\beta) + \\ + \bar{u}_2 \gamma_\alpha \gamma^\eta \gamma_\rho (p_1(1 - y) + \mu) \gamma^\sigma u_1 V_1^{\mu\lambda\alpha}(q, -\beta) [g^{\lambda\sigma} g^{\eta\rho} + g^{\rho\sigma} g^{\eta\lambda} - 2g^{\rho\lambda} g^{\eta\sigma}] \}, \\ \beta = -x_2q + x_4p_1 + x_3yp_1. \quad (5.2)$$

Спинорные структуры сводятся к виду  $\sim a^\mu$  с помощью соотношений вида:

$$\bar{u}_2 \hat{p}_1 \gamma^\mu \hat{q} u_1 = 2\mu p_1^\mu \bar{u}_2 u_1; \quad \bar{u}_2 \gamma^\mu (a \hat{p}_1 + \mu) \hat{p}_1 u_1 = 0, \\ \bar{u}_2 \gamma^\sigma \gamma^\mu q (a p_1 + \mu) \gamma^\sigma u_1 = 4\mu p_1^\mu a \bar{u}_2 u_1.$$

Проводя интегрирование по параметрам Фейнмана, получим для вклада этой диаграммы в вершинную функцию  $\Gamma^\mu$ :

$$\frac{ie(\alpha/\pi)^2 L \bar{u}_2 u_1 \mu}{128(M_Z C_W S_W)^2} \left( -\frac{73}{9} p_2 - \frac{64}{27} p_1 \right)^\mu.$$

С учетом правой диаграммы (14) рис. 1 получим для их суммы:

$$-\frac{a^\mu}{256} \left( \frac{\mu\alpha}{\pi M_Z S_W C_W} \right)^2 \frac{566}{27} L. \quad (5.3)$$

Ненулевой вклад из диаграмм с духовыми состояниями происходит только от диаграмм (15); для левой имеем:

$$\frac{ieM^2(\alpha/\pi)^2}{64(S_W)^2} \int \frac{d^4 k_1}{i\pi^2 k_1^2 (k_1^2 + 2p_1 k_1)} \times$$

$$\times \int \frac{d^4 k}{i\pi^2} \frac{\bar{u}_2 \gamma^\mu (p_1 + k) \gamma^\lambda (p_1 + k_1 + \mu) \gamma^\lambda u_1}{(k^2 - M^2)((k - k_1)^2 - M^2)((k - q)^2 - M^2)(p_1 + k)^2}$$

и аналогичное выражение для правой диаграммы (15) рис. 1. Проводя последовательность операций, описанную выше, получим для их суммы:

$$\frac{a^\mu}{256} \left( \frac{\alpha\mu}{\pi M_Z C_W S_W} \right)^2 2L. \quad (5.4)$$

## 6. Диаграммы (20) рис. 1.

Из диаграмм, содержащих 4-вершины, будут существенны (20) с вершиной  $WWAA$ , так как вклад диаграмм с вершиной  $SSAA$  подавлен дополнительным множителем  $(\mu/M)$ . Для левой диаграммы имеем

$$\frac{ie(\alpha/\pi)^2}{64S_W^2} \int \frac{d^4 k_1}{i\pi^2 k_1^2 (k_1^2 + 2p_1 k_1)} \int \frac{d^4 k}{i\pi^2} \times \\ \frac{\bar{u}_2 \gamma^\lambda (p_2 + k) \gamma^\beta (1 - \gamma_5) (p_1 + k_1 + \mu) \gamma^\alpha u_1}{(k^2 - M^2)((k + q - k_1)^2 - M^2)(p_2 + k)^2} [2g^{\mu\alpha} g^{\lambda\beta} - g^{\mu\lambda} g^{\alpha\beta} - g^{\mu\beta} g^{\alpha\lambda}]. \quad (6.1)$$

Логарифмически-усиленный вклад происходит от области  $|k_1| \ll M$ . Проводя интегрирование по  $k$  с помощью процедуры Фейнмана объединения знаменателей, а затем по  $k_1$ , аналогично приходим к выражению

$$-\frac{ie(\alpha/\pi)^2 L}{64(S_W M_W)^2} \int \frac{d^3 x \delta(\Sigma x - 1)}{1 - x_3} \times \\ \times \int_0^1 dy \bar{u}_2 \{ -4\hat{b}(\hat{p}'_1 + \mu)\gamma^\mu - \gamma^\mu \hat{b}(-2\hat{p}'_1 + 4\mu) + 2\hat{p}'_1 \gamma^\mu \hat{b} - 4\mu b^\mu \} u_1, \quad (6.2) \\ b = (1 - x_3) p_2 - x_2(q + p_1 y), \quad p'_1 = p_1(1 - y).$$

Интегрирование по параметрам Фейнмана элементарно. Учитывая вклад правой диаграммы, получим

$$\frac{a^\mu}{256} \left( \frac{\alpha\mu}{\pi M_Z S_W C_W} \right)^2 \frac{44}{3} L. \quad (6.3)$$

## 7. Диаграммы (21), (22) рис. 1.

Эти диаграммы содержат в качестве подблока вершинную

функцию ( $\mu\mu\gamma$ )

$$V^\mu(p'_2, p'_1, q) = V_{W^+}^\mu + V_{W^-}^\mu = \frac{-ie\alpha(1+\gamma_5)}{16\pi S_W^2} \times$$

$$\times \int \frac{d^4k}{i\pi^2} \frac{\gamma_\alpha(p'_1+k) \gamma_\beta V^{\beta\alpha\mu} + \mu(p'_1+k) \gamma^\mu + \mu \gamma^\mu(p'_1+k)}{(p'_1+k)^2 (k^2 - M^2) ((k-q)^2 - M^2)}, \quad (7.1)$$

$$V^{\beta\alpha\mu} = g^{\mu\beta}(q+k)^\alpha + g^{\beta\alpha}(q-2k)^\mu + g^{\alpha\mu}(k-2q)^\beta, \quad p'_{1,2} = p_{1,2} + k_1,$$

которая содержит ультрафиолетовую расходимость

$$V^\mu = -\frac{ie(\alpha/\pi)}{8S_W} \int d^3x \delta(\Sigma x - 1) \left\{ 3\gamma^\mu \left( \ln \frac{\Lambda^2}{D} - \frac{3}{2} \right) - \frac{1}{2D} \gamma_\alpha(p'_1 - \beta) \gamma_\beta \times \right.$$

$$\left. \times [g^{\mu\beta}(q-\beta)^\alpha + g^{\beta\alpha}(q+2\beta)^\mu + g^{\alpha\mu}(-\beta-2q)^\beta] - \frac{1}{2D} 2\mu(p'_1 - \beta)^\mu \right\}, \quad (7.2)$$

$$D = M^2(1-x_3) - p_1'^2 x_1 x_3 - p_2'^2 x_2 x_3, \quad \beta = (1-x_1)p'_1 - x_2 p'_2.$$

Регуляризация ее состоит в замене

$$\ln \frac{\Lambda^2}{D} - \frac{3}{2} \rightarrow \ln \frac{D_0}{D} = -\ln \left( 1 - x_1 x_3 \frac{(p_1'^2 - \mu^2)}{M^2} - x_2 x_3 \frac{(p_2'^2 - \mu^2)}{M^2} \right) =$$

$$= x_1 x_3 \frac{(p_1'^2 - \mu^2)}{M^2} + x_2 x_3 \frac{(p_2'^2 - \mu^2)}{M^2}. \quad (7.3)$$

Полагая в оставшейся части  $D = M^2(1-x_3)$  и проводя интегрирование по  $x$ , получим

$$V^\mu = -\frac{ie(\alpha/\pi)}{8(C_W S_W M_Z)^2} \left\{ \frac{1}{4} \gamma^\mu ((p_1'^2 - \mu^2) + (p_2'^2 - \mu^2)) + \frac{1}{36} (\hat{p}_1 p_1'^\mu + \hat{p}_2 p_2'^\mu) + \right.$$

$$+ \frac{5}{36} (\hat{p}_1 p_2'^\mu + \hat{p}_2 p_1'^\mu) + \frac{11}{24} \gamma^\mu (p_1'^2 + p_2'^2) -$$

$$\left. - \frac{3}{8} (\hat{p}_2 \hat{p}_1 \gamma^\mu + \gamma^\mu \hat{p}_1 \hat{p}_2) - \frac{1}{4} \mu(p'_1 + p'_2)^\mu \right\}. \quad (7.4)$$

Вычисление с логарифмической точностью оставшегося интеграла по  $k_1$  приводит к результату для суммарного вклада диаграмм (21), (22):

$$\frac{a_\mu L}{256} \left( \frac{\alpha\mu}{\pi M_Z S_W C_W} \right)^2 \cdot \frac{34}{9}. \quad (7.5)$$

## 8. Диаграммы (23), (24) рис. 1.

Диаграммы содержат в качестве блоков собственно-энергетическую  $\Sigma$  и вершинную  $\Gamma$  функции мюонов. Рассмотрим сначала вклад  $\Sigma$ . Поскольку характерный 4-импульс, текущий по петле, велик по сравнению с массой мюона, то величину  $\Sigma(p)$  надо взять в асимптотике. При этом можно воспользоваться результатом расчета однопетлевой диаграммы: достаточно умножить (1.11) на  $(1 + \frac{\alpha}{4\pi} L)^2$  и удержать линейный по  $\alpha$  член. В результате, вклад в вершинную функцию диаграммы (23) рис. 1:

$$\frac{1}{256} a_\mu \left( -\frac{20}{3} L \right) \left( \frac{\alpha\mu}{\pi M_Z C_W S_W} \right)^2. \quad (8.1)$$

Для диаграммы (24) мы используем следующее выражение для регуляризованной вершинной функции в случае когда оба фермиона вне массовой поверхности:

$$\Gamma^\mu(p'_2, p'_1, q) = \frac{-ie\alpha}{2\pi} \left\{ -\frac{1}{2} \gamma^\mu \ln \frac{p^2}{\mu^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \int \frac{d^3x \delta(\Sigma x - 1)}{D} \gamma^\lambda (p'_2 - \beta + \mu) \gamma^\mu (p'_1 - \beta + \mu) \gamma^\lambda \right\}, \quad (8.2)$$

где

$$D = \mu^2(1-x_3) - p_1'^2 x_1 x_3 - p_2'^2 x_2 x_3; \quad \beta = x_1 p'_1 + x_2 p'_2.$$

Вклад первого слагаемого в (8.2) в вершинную функцию  $\Gamma^\mu$  (пользуемся (1.11)):

$$\frac{a_\mu}{256} \left( \frac{\alpha\mu}{\pi M_Z C_W S_W} \right)^2 L \frac{10}{3}. \quad (8.3)$$

Второе слагаемое в правой части (8.2) не дает логарифмического вклада в структуру  $F_2$  из  $\Gamma^\mu$ . Доказательство этого факта несколько громоздко, и мы его опустим. Отметим, что это единственные диаграммы, от которых происходит вклад при больших  $|k_1|$ .

## 9. Диаграммы (25) — (27) рис. 1.

В этих диаграммах фигурирует вершинная функция ( $\mu\mu\gamma$ ) с фотоном и одним из фермионов вне массовой поверхности в «нерелятивистском» пределе т. е. когда массы внутренних частиц много больше  $|k|$ . Регуляризованный вклад в нее от обмена двумя  $W$ -мезонами (левая диаграмма (25) рис. 1) имеет вид:

$$V^\lambda(p_1+k_1, p_1, k) = \frac{ie(\alpha/\pi)}{8S_W^2} \int d^3x \delta(\Sigma x - 1) \left\{ 3\gamma^\lambda \ln \frac{D}{D_0} - \frac{1}{2D} \times \right. \\ \left. \times [(-\hat{k} + \hat{\beta})(\hat{p}_1 - \hat{\beta})\gamma^\lambda + \gamma^\lambda(\hat{p}_1 - \hat{\beta})(2\hat{k} + \hat{\beta}) + 2(\hat{p}_1 - \hat{\beta})(2\hat{\beta} + k)^\lambda] \right\}, \quad (9.1)$$

$$\beta = x_3 p_1 - x_2 k, \quad D = (1-x_3)M^2 - x_1 x_3 \mu^2 - x_1 x_2 k^2 - x_2 x_3 p_1'^2, \\ D_0 = (1-x_3)(M^2 - x_3 \mu^2); \quad p_1' = (p_1 + k)^2.$$

Покажем сначала, что члены из  $V^\lambda \sim k^2 \gamma^\lambda$  и  $\hat{k}k^\lambda$ ,  $\mu k^\lambda$  не дают вклад в нужную нам структуру  $\Gamma^\mu$ :

$$k^2 \rightarrow \int \frac{d^4k}{i\pi^2} \frac{\bar{u}_2 \gamma^\lambda (p_2 + k + \mu) \gamma^\mu (p_1 + k + \mu) \gamma^\lambda u_1}{(k^2 + 2p_1 k)(k^2 + 2p_2 k)} = \\ = L \int_0^1 dx \bar{u}_2 \gamma^\lambda (\hat{q}x + \mu) \gamma^\mu (-q(1-x) + \mu) \gamma^\lambda u_1 = 0 \\ \hat{k}k^\lambda \rightarrow \int \frac{d^4k}{i\pi^2} \bar{u}_2 \frac{\hat{k}(p_2 + k + \mu) \gamma^\mu (p_1 + k + \mu) \hat{k} u_1}{k^2(k^2 + 2p_1 k)(k^2 + 2p_2 k)} \sim \int \frac{d^4k}{i\pi^2} \bar{u}_2 \gamma^\mu u_1 = 0, \quad (9.2) \\ \mu k^\lambda \rightarrow \int \frac{d^4k}{i\pi^2} \bar{u}_2 \frac{\hat{k}(p_2 + k + \mu) \gamma^\mu (p_1 + k + \mu) u_1}{k^2(k^2 + 2p_1 k)(k^2 + 2p_2 k)} = \int \frac{d^4k}{i\pi^2} \frac{\bar{u}_2 \gamma^\mu (p_1 + k + \mu) u_1}{k^2(k^2 + 2p_1 k)} = 0.$$

Напомним, что нуль в правой части (9.2) мы понимаем как отсутствие вклада в структуру  $\sim F_2(p_1 + p_2)^\mu$  в вершинной функции. Первое слагаемое в (9.1), пользуясь (9.2) и  $(p_1'^2 - \mu^2)/M^2 \ll 1$ , преобразуем к виду

$$\int d^3x \delta \ln \frac{D}{D_0} = \int d^3x \delta \ln \left( 1 - \frac{x_2 x_3}{1-x_3} \frac{p_1'^2 - \mu^2}{M^2} \right) \approx -\frac{1}{12} \frac{p_1'^2 - \mu^2}{M^2}.$$

Преобразуя остальные слагаемые и проводя интегрирование по  $x$ :

$$\int \frac{d^3x \delta(\Sigma x - 1)}{1-x_3} (1, x_2, x_3, 1-x_3, (1-x_3)^2, x_2(1-x_3)) = \left\{ 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6} \right\},$$

Получим

$$V_{WW}^\lambda = \frac{ie(\alpha/\pi)}{8(S_W C_W M_Z)^2} \left\{ \frac{1}{24} ((p_1 + k)^2 - \mu^2) \gamma^\lambda - \right. \\ \left. - \frac{3}{8} (\hat{p}_1 \hat{k} \gamma^\lambda + \gamma^\lambda \hat{p}_1 \hat{k}) - \frac{1}{3} \mu p_1^\lambda - \frac{1}{6} \hat{k} p_1^\lambda \right\}. \quad (9.3)$$

Аналогичное вычисление для вершинных функций левых диаграмм (26), (27) рис. 1 с духовыми состояниями:

$$- \frac{ie(\alpha/\pi)\mu}{8S_W^2} \int \frac{d^4k_1}{i\pi^2} \frac{(p_1 + k_1)^\lambda}{(p_1 + k_1)^2 (k_1^2 - M^2) ((k - k_1)^2 - M^2)}$$

дает

$$V_{S_W + W_S}^\lambda = \frac{ie(\alpha/\pi)\mu p_1^\lambda}{16(S_W C_W M_Z)^2}. \quad (9.4)$$

Найдем вклады отдельных структур из  $V^\lambda$  в  $\Gamma^\mu$ :

$$V^\lambda = V_{WW}^\lambda + V_{S_W + W_S}^\lambda = \frac{ie(\alpha/\pi)}{16(S_W C_W M_Z)^2} v^\lambda, \\ \Gamma^\mu = \frac{ie(\alpha/\pi)^2}{32(S_W C_W M_Z)^2} \int \frac{d^4k}{i\pi^2} \frac{\bar{u}_2 \gamma^\lambda (p_2 + k + \mu) \gamma^\mu (p_1 + k + \mu) \gamma^\lambda u_1}{k^2(k^2 + 2p_1 k)(k^2 + 2p_2 k)}. \quad (9.5)$$

Проводя логарифмическое интегрирование по  $k$ , имеем

$$\gamma^\lambda ((p_1 + k)^2 - \mu^2) \rightarrow \int \frac{d^4k}{i\pi^2} \frac{\bar{u}_2 \gamma^\lambda (p_2 + k + \mu) \gamma^\mu (p_1 + k + \mu) \gamma^\lambda u_1}{k^2(k^2 + 2p_2 k)} = \\ = L \int_0^1 dx \bar{u}_2 \gamma^\lambda (p_2(1-x) + \mu) \gamma^\mu \times \\ \times (p_1 - p_2 x + \mu) \gamma^\lambda u_1 = \mu \bar{u}_2 u_1 L \left( 2p_1 - \frac{4}{3} p_2 \right)^\mu.$$

Для слагаемого  $\sim \hat{p}_1 \hat{k} \gamma^\lambda + \gamma^\lambda \hat{p}_1 \hat{k}$  надо удержать квадратичные по  $k$  члены числителя. Объединяя знаменатели в (9.5) и интегрируя по  $k$ , получим ( $\beta = x_1 p_1 + x_2 p_2$ ):

$$\hat{p}_1 \hat{k} \gamma^\lambda + \gamma^\lambda \hat{p}_1 \hat{k} \rightarrow \frac{1}{2} L \int d^3x \delta(\Sigma x - 1) \bar{u}_2 \{ 2\gamma^\lambda \gamma^\mu (\hat{p}_1 \hat{\beta} \gamma^\lambda + \gamma^\lambda \hat{p}_1 \hat{\beta}) + \\ + \gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\nu (\hat{p}_1 - \hat{\beta} + \mu) (\hat{p}_1 \gamma^\nu \gamma^\lambda + \gamma^\lambda \hat{p}_1 \gamma^\nu) + \gamma^\lambda (\hat{p}_2 - \hat{\beta} + \mu) \gamma^\mu \gamma^\nu (\hat{p}_1 \gamma^\nu \gamma^\lambda + \gamma^\lambda \hat{p}_1 \gamma^\nu) \} = \\ = 4L \mu \bar{u}_2 u_1 \left( \frac{3}{2} p_1 + \frac{1}{3} p_2 \right)^\mu \\ \mu p_1^\lambda \rightarrow \mu \int \frac{d^4k}{i\pi^2} \frac{\bar{u}_2 \hat{p}_1 (\hat{p}_2 + \hat{k} + \mu) \gamma^\lambda (\hat{p}_1 + \hat{k} + \mu) u_1}{k^2(k^2 + 2p_1 k)(k^2 + 2p_2 k)} = \\ = -L \mu \int d^3x \delta(\Sigma x - 1) \bar{u}_2 \hat{p}_1 \gamma^\mu u_1 = -L \bar{u}_2 u_1 \mu p_1^\mu.$$

Наконец,  $\hat{k} p_1^\lambda$  дает

$$\int \frac{d^4 k}{i\pi^2} \frac{\bar{u}_2 \hat{p}_1 (\hat{p}_2 + \hat{k} + \mu) \gamma^\mu u_1}{k^2 (k^2 + 2p_2 k)} = L \int_0^1 dx \bar{u}_2 \hat{p}_1 (\hat{p}_2 (1-x) + \mu) \gamma^\mu u_1 = L_\mu \bar{u}_2 u_1 p_1^\mu.$$

Учитывая вклад правых диаграмм, получим суммарные вклады диаграмм (25) и (26), (27) в  $\Gamma^\mu$ , соответственно:

$$\frac{a^\mu}{256} \left( \frac{\alpha\mu}{\pi M_Z C_W S_W} \right)^2 L \left\{ -\frac{184}{9}; -4 \right\}. \quad (9.6)$$

### 10. Диаграммы (28), (29) рис. 1.

Здесь фигурирует вклад в собственно-энергетическую функцию мюона от состояний с  $W$ - и  $Z$ -бозонами. Вклады духовых состояний подавлены дополнительным множителем  $(\mu/M)$ . Для перенормированных величин имеем:

$$\Sigma_Z^N(\hat{p}) = -\frac{i(\alpha/\pi)}{64(S_W C_W)^2} \int \frac{d^4 k}{i\pi^2} \frac{\gamma^\mu \gamma^5 (p+k+\mu) \gamma^\mu \gamma^5}{(k^2 - M^2)((p+k)^2 - \mu^2)}, \quad (10.1)$$

$$\Sigma_W^N(\hat{p}) = -\frac{i(\alpha/\pi)(1+\gamma_5)}{64 S_W^2} \int \frac{d^4 k}{i\pi^2} \frac{\gamma^\mu (p+k) \gamma^\mu}{(p+k)^2 (k^2 - M^2)}. \quad (10.2)$$

Вычисление интегралов дает  $\Lambda$ -параметр ультрафиолетового обрезания:

$$\begin{aligned} \Sigma_Z^N(\hat{p}) &= \frac{i(\alpha/\pi)}{32(C_W S_W)^2} \times \\ &\times \int_0^1 dx (\hat{p}(1-x) + 2\mu) \left( \ln \frac{\Lambda^2}{M_Z^2(1-x) - x(1-x)p^2 + x\mu^2} - \text{const} \right), \\ \Sigma_W^N(\hat{p}) &= \frac{i(\alpha/\pi)}{8 S_W^2} (1+\gamma_5) \int_0^1 dx \hat{p}(1-x) \left( \ln \frac{\Lambda^2}{M_W^2(1-x) - p^2 x(1-x)} - \text{const} \right). \end{aligned}$$

Производя два вычитания в точке  $\hat{p} = \mu$ , мы получим перенормированные величины:

$$\begin{aligned} \Sigma_Z(\hat{p}) &= -\frac{i(\alpha/\pi)(\hat{p}-\mu)}{32(S_W C_W)^2} \int_0^1 dx (1-x) \ln \left( 1 - \frac{x(p^2 - \mu^2)}{M^2 \left( 1 + \frac{\mu^2}{M^2} \frac{x^2}{1-x} \right)} \right) \approx \\ &\approx \frac{i(\alpha/\pi)[(\hat{p}-\mu)(p^2 - \mu^2) - 7\mu(\hat{p}-\mu)^2]}{192(S_W C_W M_Z)^2}, \quad (10.3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_W(\hat{p}) &= -\frac{i(\alpha/\pi)}{8S_W^2} (1+\gamma_5)(\hat{p}-\mu) \int_0^1 dx (1-x) \ln \left( 1 - \frac{x(p^2 - \mu^2)}{M^2} \right) = \\ &= \frac{i(\alpha/\pi)[(\hat{p}-\mu)(p^2 - \mu^2) + \mu(\hat{p}-\mu)^2]}{48(S_W C_W M_Z)^2}. \quad (10.4) \end{aligned}$$

В (10.3), (10.4) мы взяли «нерелятивистский» предел для  $\Sigma$ , так как он определяет логарифмические вклады в  $\Gamma^\mu$ . Окончательно для вкладов диаграмм (28), (29) в  $\Gamma^\mu$  имеем, соответственно:

$$\frac{a_\mu}{256} \left( \frac{\alpha\mu}{\pi M_Z S_W C_W} \right)^2 L \left\{ -\frac{20}{9}; \frac{16}{9} \right\}. \quad (10.5)$$

### 11. Диаграммы (30), (31) рис. 1.

В эти диаграммы в качестве расходящегося блока входит вершинная функция мюона с промежуточным  $Z$ -бозоном. Как и прежде, вкладом соответствующего духового состояния можно пренебречь.

Рассмотрим вершинную функцию, отвечающую левой диаграмме (30) рис. 1:

$$\begin{aligned} V_N^\lambda &= -\frac{ie(\alpha/\pi)}{64(S_W C_W)^2} \int \frac{d^4 k}{i\pi^2} \frac{\gamma^\alpha \gamma_5 (p_1' + k + \mu) \gamma^\lambda (p_1 + k + \mu) \gamma^\alpha \gamma_5}{(k^2 - M^2)((p_1 + k)^2 - \mu^2)((p_1' + k)^2 - \mu^2)}, \quad (11.1) \\ p_1' &= p_1 + k_1. \end{aligned}$$

Интегрирование этого выражения дает

$$\begin{aligned} &-\frac{ie(\alpha/\pi)}{32(S_W C_W)^2} \int d^3 x \delta(\Sigma x - 1) \left\{ \gamma^\lambda \left( \ln \frac{\Lambda^2}{D} - \frac{3}{2} \right) + \right. \\ &+ \frac{1}{2D} [2(p_1 - \beta) \gamma^\lambda (p_1' - \beta) + 2\mu^2 \gamma^\lambda + 4\mu(p_1 + p_1' - 2\beta)^\lambda] \left. \right\}, \quad (11.2) \\ \beta &= p_1 x_2 + p_1' x_3, \quad D = x_1 M^2 + \mu^2(1-x_1) - x_1 x_3 p_1'^2 - x_1 x_2 \mu^2 - x_2 x_3 k^2. \end{aligned}$$

После регуляризации и выполнения простого интегрирования получим

$$\begin{aligned} V^\lambda &= -\frac{ie(\alpha/\pi)}{32(S_W C_W M_Z)^2} \left\{ \frac{7}{3} \mu p_1^\lambda + \frac{1}{3} \hat{p}_1 \gamma^\lambda \hat{k} - \frac{1}{6} \hat{k} \gamma^\lambda \hat{p}_1 + \right. \\ &+ M_Z^2 \gamma^\lambda \int d^3 x \delta(\Sigma x - 1) \left[ -\ln \frac{D}{D_0} + \frac{x_3(1-x_3)k^2}{D} \right] \left. \right\}, \quad (11.3) \\ D_0 &= x_1 M^2 + (1-x_1)^2 \mu^2. \end{aligned}$$

Вклад первых трех слагаемых (11.3) в  $\Gamma^\mu$  находим аналогично (9.2):

$$\{\mu p_1^\lambda; \hat{p}_1 \gamma^\lambda \hat{k}, \hat{k} \gamma^\lambda \hat{p}_1\} \rightarrow \bar{u}_2 u_1 \mu L \left\{ p_1^\mu, -2p_1^\mu - \frac{2}{3} p_2^\mu, 2p_1^\mu + 2p_2^\mu \right\}. \quad (11.4)$$

Слагаемое  $\sim \ln(D/D_0)$  в (11.3) можно преобразовать, используя соотношение

$$\ln \frac{D}{D_0} = \int_0^1 dz \frac{D - D_0}{[zD + (1-z)D_0]}; \quad D - D_0 = -x_3(1-x_3)k^2 - 2x_1 x_3 k p, \quad (11.5)$$

и объединив новый знаменатель в (11.5) с (1) и (2) для членов  $\sim k^2$  из  $D - D_0$ . Аналогичные преобразования можно провести и для члена  $\sim k^2/D$  из (11.3). Слагаемое  $\sim 2k p_1 x_1$  из (11.5) сокращает знаменатель  $(k^2 + 2k p_1)$ , и в нем можно положить  $x_1/D = M^{-2}$ , после чего оставшееся интегрирование по  $d^4 k$  элементарно. Опуская промежуточные выкладки, приведем полный вклад диаграмм (30) рис. 1 в  $\Gamma^\mu$ :

$$\frac{a^\mu}{256} \cdot \frac{20}{3} L \left( \frac{\mu \alpha}{\pi M_Z C_W S_W} \right)^2. \quad (11.6)$$

Рассмотрим вершинную функцию  $(\mu\mu\gamma)$  с обменом  $Z$ -бозона на диаграмме (31) рис. 1. После интегрирования и регуляризации, получим для нее

$$V^\mu = - \frac{ie(\alpha/\pi)}{32(S_W C_W)^2} \int d^3 x \delta(\Sigma x - 1) \left\{ \gamma^\mu \ln \frac{D_0}{D} + \right. \\ \left. + \frac{1}{D} [(p_1' - \beta) \gamma^\mu (p_2' - \beta) + 2\mu(p_1' + p_2')^\mu] \right\}, \quad (11.7)$$

$$\beta = x_1 p_1' + x_2 p_2'.$$

Упрощая ее в пределе  $p_1' \sim p_2' \ll M$  и проводя интегрирование по  $x$ , получим:

$$V^\mu = - \frac{ie(\alpha/\pi)}{192(S_W C_W M_Z)^2} \left\{ \gamma^\mu (p_1'^2 + p_2'^2 - 2\mu^2) + \hat{p}_2' \gamma^\mu \hat{p}_1' + \right. \\ \left. + 2(\hat{p}_2' \gamma^\mu \hat{q} - \hat{q} \gamma^\mu \hat{p}_1') + 6\mu(p_1' + p_2')^\mu \right\}. \quad (11.8)$$

Вычисление вкладов отдельных структур дает:

$$\gamma^\mu ((p_1'^2 - \mu^2) + (p_2'^2 - \mu^2)) \rightarrow L \bar{u}_2 u_1 \mu (p_1' + p_2')^\mu \cdot \frac{2}{3};$$

$$\hat{p}_2' \gamma^\mu \hat{p}_1' \rightarrow 2\mu \bar{u}_2 u_1 L (p_1' + p_2')^\mu;$$

$$\hat{p}_2' \gamma^\mu \hat{q} - \hat{q} \gamma^\mu \hat{p}_1' \rightarrow L \bar{u}_2 u_1 \mu \cdot 2(p_1' + p_2')^\mu; \quad \mu(p_1' + p_2')^\mu \rightarrow 2\mu \bar{u}_2 u_1 L (p_1' + p_2')^\mu.$$

В результате, для вклада диаграммы (31) рис. 1 получим:

$$\frac{a^\mu}{256} \left( \frac{\alpha \mu}{\pi M_Z C_W S_W} \right)^2 \left( -\frac{56}{9} \right). \quad (11.9)$$

## 12. Диаграммы (32) — (34) рис. 1.

Все эти диаграммы не содержат логарифмических вкладов в  $\Gamma^\mu$ . Рассмотрим сначала диаграмму (32), содержащую поляризационный оператор  $\Pi^{\mu\nu}$   $Z$ -бозона. Неперенормированная его часть, пропорциональная  $g^{\mu\nu}$ , имеет вид

$$- \frac{i(\alpha/\pi)}{16(S_W C_W)} \int \frac{d^4 k}{i\pi^2} \frac{\frac{1}{4} \text{Sp} \gamma^\mu \gamma^5 (\hat{p} + \hat{k} + \mu) \gamma^\nu \gamma^5 (\hat{k} + \mu)}{(k^2 - \mu^2)((p+k)^2 - \mu^2)} = \\ = - \frac{i(\alpha/\pi)}{16(S_W C_W)^2} g^{\mu\nu} \int_0^1 dx \left[ -D \ln \frac{\Lambda^2 + D}{D} + \frac{1}{2} \left( \Lambda^2 - 2D \ln \frac{\Lambda^2 + D}{D} + 3D \right) \right],$$

где  $D = \mu^2 - p^2 x(1-x)$ . После регуляризации (необходимо сделать два вычитания, так чтобы  $\Pi(p^2)|_{p^2 \rightarrow M_Z^2} \sim (p^2 - M_Z^2)^2$ ), получим  $\Pi^{\alpha\nu} = \Pi \cdot g^{\mu\nu}$ ,

$$\Pi_{reg}(p^2) = -2 \int_0^1 dx \left\{ D \ln \frac{D_0}{D} - D_0 + D \right\}, \quad D_0 = m^2 - M^2 x(1-x). \quad (12.1)$$

В выражении (12.1) можно положить  $m=0$ , не получая никаких расходимостей. Аналогичное утверждение справедливо и для поляризационного оператора  $W$ -бозона.

Для диаграммы (33) рис. 1 необходимо вычислить вклад в поляризационный оператор фотона от  $W$ -мезонов. Хорошо известно, что в пределе  $k^2 \ll m^2$  поляризационный оператор  $\Pi(k^2) \sim k^4/m^2$ . Это обеспечивает, в силу (9.2), равенство нулю логарифмического вклада этой диаграммы.

Перечень диаграмм, приведенных на рис. 1, конечно, не полон, даже для диаграмм, содержащих один виртуальный фотон. Анало-

гичными приведенным в этом пункте аргументами можно показать, что они не приводят к вкладам  $\sim L$ .

13. Заключение.

Полученные нами вклады отдельных диаграмм в  $\Gamma^\mu$  представлены в таблице. Суммарный вклад

$$\Delta a_W^{(2)} = \frac{L(\alpha/\pi)^2}{128} \left( \frac{\mu}{M_Z S_W C_W} \right)^2 \left( -\frac{476}{9} \right) \approx -2.2 \cdot 10^{-10}. \quad (13.1)$$

Эта величина составляет  $\approx 11\%$  от однопетлевого вклада. Принимая во внимание вычисленную нами раньше поправку от диаграмм с фермионными циклами [2] (формула (36)):  $\Delta a_A = -2.3 \cdot 10^{-10}$ , получим для полной поправки

$$a_W^{(2)} \approx -4.5 \cdot 10^{-10}. \quad (13.2)$$

Для сравнения мы приведем вклад  $a_\mu$  от поляризации вакуума  $\tau$ -лептоном (диаграмма (35) рис. 1):

$$\Delta a_\mu^{(\tau)} = \frac{1}{45} \left( \frac{m_\mu}{m_\tau} \right)^2 \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^2 = 4.87 \cdot 10^{-10}, \quad (13.3)$$

а также вклад 8-го порядка в рамках квантовой электродинамики и оценку для 10-го порядка [3]:

$$a_\mu^{(8)} = 122(\alpha/\pi)^4 = 4.24 \cdot 10^{-9}, \quad (13.4)$$

$$a_\mu^{(10)} = 4.81 \cdot 10^{-11}. \quad (13.5)$$

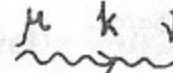
Из сравнения (13.2) и (13.3) видим, что вклад двухпетлевых поправок электрослабой теории почти полностью компенсируется вкладом  $\tau$ -лептона.

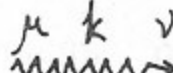
Отметим также, что учет трехпетлевых диаграмм в электрослабой теории приведет к вкладам  $\leq 10^{-11}$ , вряд ли определяемых экспериментально, и поэтому нецелесообразен.

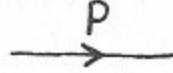
Правила Фейнмана

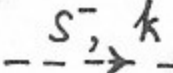
Здесь мы приведем используемые нами правила Фейнмана для стандартной модели Вайнберга—Салама в калибровке Хуфта—Фейнмана:

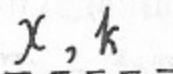
Пропагаторы

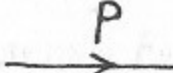
фотон   $-\frac{i s^{\mu\nu}}{k^2}$

бозон   $-\frac{i q^{\mu\nu}}{k^2 - M^2}$

мюон   $\frac{i}{(\hat{p} - m)}$

дух  $W^-$    $\frac{i}{(k^2 - M_W^2)}$

дух  $Z$    $\frac{i}{(k^2 - M_Z^2)}$

нейтрино   $\frac{i}{\hat{p}}$

|                    |  |   |
|--------------------|--|---|
| $\mu\mu\gamma$ :   |  | $-ie\gamma^\mu$   |
| $\mu\mu Z$ :       |  | $\frac{ig}{4C_W}(\gamma^\mu(1-4S_W^2)-\gamma^\mu\gamma^5)$                                    |
| $\mu\nu W^-$ :     |  | $-\frac{ig}{2\sqrt{2}}\gamma^\mu(1-\gamma^5)$   |
| $W^-W^- \gamma$ :  |  | $ie[g^{\mu\beta}(q-q_-)^\alpha + g^{\beta\alpha}(2q_-+q)^\mu + g^{\alpha\mu}(-2q-q_-)^\beta]$ |
| $\mu\nu S^-$ :     |  | $-\frac{ig\mu_e}{2\sqrt{2}M_W}(1-\gamma^5)$   |
| $W\gamma S^-$ :    |  | $-ieM_W g_{\mu\alpha}$  |
| $SS\gamma$ :       |  | $-ie(k+k_1)_\mu$  |
| $WW\gamma\gamma$ : |  | $-ie^2(2g^{\mu\nu}q^{\alpha\beta} - g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} - g^{\alpha\nu}g^{\beta\mu})$   |

где  $C_W, S_W = \cos \theta_W, \sin \theta_W$ ;  $g = \frac{e}{S_W}$ ;  $M_W = M_Z \cdot C_W$ .

В расчетах мы положили  $\sin^2 \theta_W = 1/4$ .

Применение проекционного оператора

При вычислении  $F_2(0)$  с помощью программы REDUCE удобно использовать проекционный оператор [4]. Вершинная функция имеет вид:

$$\Gamma^\mu = -ie \bar{u}(p_2) J_\mu u(p_1),$$

где

$$J_\mu = F_1(q^2) \gamma_\mu + \frac{i}{2\mu} F_2(q^2) \sigma_{\mu\nu} q^\nu + \frac{1}{4q^2} (q_\mu \hat{q} - \gamma_\mu q^2) F_3(q^2),$$

$$q = p_2 - p_1, \quad p_1^2 = p_2^2 = \mu^2.$$

При вычислении вкладов конкретных диаграмм мы получаем:

$$J'_\mu = J_\mu + X_\mu(\hat{p}_1 - \mu) + Y_\mu(\hat{p}_2 - \mu).$$

Чтобы извлечь структуру  $F_2$ , введем оператор  $\Lambda^\mu = a\gamma^\mu + b(p_1 + p_2)^\mu$  со свойствами

$$\text{Sp}(\Lambda^\mu(\hat{p}_2 + \mu) \gamma_\mu(\hat{p}_1 + \mu)) = 0, \quad \text{Sp} \Lambda^\mu(p_2 + \mu) \gamma_5 (\gamma_\mu q^2 - q_\mu \hat{q})(p_1 + \mu) = 0,$$

$$\text{Sp} \Lambda^\mu(p_2 + \mu) \sigma_{\mu\nu}(p_1 + \mu) = -2im.$$

Тогда имеем

$$F_2(q^2) = \text{Sp} \Lambda^\mu(p_2 + \mu) J_\mu(p_1 + \mu).$$

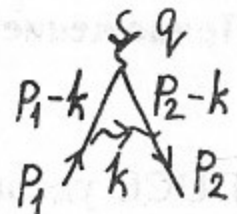
Решение приведенных уравнений дает

$$\Lambda^\mu = \frac{m^2}{4(m^2 - p_1 p_2)(m^2 + p_1 p_2)} \left[ \gamma^\mu + \frac{p_1 p_2 - 2\mu^2}{\mu^2(m^2 + p_1 p_2)} (p_1 + p_2)^\mu \right].$$

Для нахождения  $F_2(0) = \frac{1}{2} (g-2)$  можно использовать

$$\Lambda^\mu = \lim_{q^2 \rightarrow 0} \frac{1}{4q^2} \left[ \gamma^\mu - \frac{1}{2\mu} \left( 1 + \frac{3q^2}{4\mu^2} \right) (p_1 + p_2)^\mu \right].$$

Продemonстрируем применение  $\Lambda^\mu$  для вычисления однопетлевой поправки  $F_2(0)$  в электродинамике:



$$\Gamma^\mu = -ie \frac{\alpha}{4\pi} \int \frac{d^4 k}{i\pi^2} \frac{\bar{u}(p_2) \gamma^\nu (p_2 - k + \mu) \gamma^\mu (p_1 - k + \mu) \gamma^\nu u(p_1)}{k^2 (k^2 - 2p_2 k) (k^2 - 2p_1 k)}$$

После объединения знаменателей с помощью приема Фейнмана и проведения интегрирования по  $d^4 k$  получим

$$\Gamma^\mu = \frac{ie\alpha}{4\pi} \int \frac{d^3 x \delta(\Sigma x - 1)}{(p_2 x_2 + p_1 x_1)^2} \bar{u}(p_2) \gamma^\nu ((1-x_2)p_2 - p_1 x_3 + \mu) \times \\ \times \gamma^\mu ((1-x_3)p_1 - p_2 x_2 + \mu) \gamma^\nu u(p_1).$$

Вычисление следа с помощью программы REDUCE дает

$$\text{Sp} \{ \Lambda^\mu (p_2 + \mu) \gamma^\nu [(1-x_2)p_2 - p_1 x_3 + \mu] \gamma^\mu [(1-x_3)p_1 - p_2 x_2 + \mu] \gamma^\nu (p_1 + \mu) \} = \\ = -4\mu^2 x_1 (1-x_1).$$

Дальнейшее интегрирование тривиально:

$$F_2(0) = \frac{\alpha}{\pi} \int \frac{d^3 x \delta(\Sigma x - 1) x_1}{1-x_1} = \frac{\alpha}{2\pi}$$

и приводит к известному результату Швингера.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Huges V.W. Workshop and Symposium on the Physics of Strong and Trapped Particles, Stockholm, Sweden, 1987.  
Barkov L.M. et al. Nucl. Phys., 1985, v.B256, p.365.
2. Kuraev E.A., Kuchto T.V., Schiller A. Preprint INP 89-153. Novosibirsk; ЯФ, 1990, т.51, с.1631.
3. Kinoshita T., Nizic B. and Okamoto Y. Phys. Rev., 1990, v.D41, p.593.
4. Brodsky S.J., Sullivan J.D. Phys. Rev., 1967, v.156, p.1644.

Э.А. Кураев, Т.В. Кухто,  
З.К. Силагадзе, А. Шиллер

Двухпетлевые электрослабые поправки  
к аномальному магнитному моменту мюона

Ответственный за выпуск С.Г.Попов

Работа поступила 6 апреля 1990 г.  
Подписано в печать 30.05 1990 г. МН 02306  
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 2,2 печ.л., 1,8 уч.-изд.л.  
Тираж 180 экз. Бесплатно. Заказ № 66

Набрано в автоматизированной системе на базе фото-  
наборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и  
отпечатано на ротапринтере Института ядерной физики  
СО АН СССР,  
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.