



ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

В.М. Малкин, Е.Г. Шапиро

**ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ СОЛИТОНОВ
НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА**

ПРЕПРИНТ 90-78



НОВОСИБИРСК

Элементарные возбуждения солитонов
нелинейного уравнения Шредингера

В.М. Малкин, Е.Г. Шапиро

Институт ядерной физики
630090, Новосибирск 90, СССР

АННОТАЦИЯ

Динамика нелинейных волновых полей, обладающих устойчивыми локализованными состояниями (солитонами), существенно зависит от спектра элементарных возбуждений этих солитонов. Спектр элементарных возбуждений вычислен ниже для солитонов двумерного уравнения Шредингера с кубической фокусирующей нелинейностью, описывающего широкий круг физических явлений, в частности самофокусировку излучения в среде.

1. ВВЕДЕНИЕ

Поле, описываемое уравнением

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} + \Delta + |\psi|^2\right)\psi = 0, \quad (1.1)$$

где Δ — двумерный оператор Лапласа, обладает локализованными стационарными состояниями вида

$$\psi(\vec{r}, t) = \kappa R(\kappa r) \exp(i\kappa^2 t + i\varphi). \quad (1.2)$$

Параметр κ^2 можно назвать «энергией выхода кванта из солитона». Обозначение $R(r)$ используется ниже для монотонно убывающего решения уравнения

$$\left(-1 + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} + R^2\right)R = 0. \quad (1.3)$$

График этого решения, вычисленного в работе [1], воспроизведен для удобства читателей на рис. 1. Уравнение (1.3) имеет также осциллирующие по r локализованные решения (см. [2—4]), но они являются экспоненциально неустойчивыми относительно малых возмущений. Малые же возмущения таунсовского солитона [1] могут возрасти лишь как квадрат времени (см. [5—7]). При включении в уравнение (1.1) малой дефокусирующей нелинейности пятой степени по амплитуде поля ψ квадратично растущая со временем неустойчивая мода превращается в устойчивую низко-

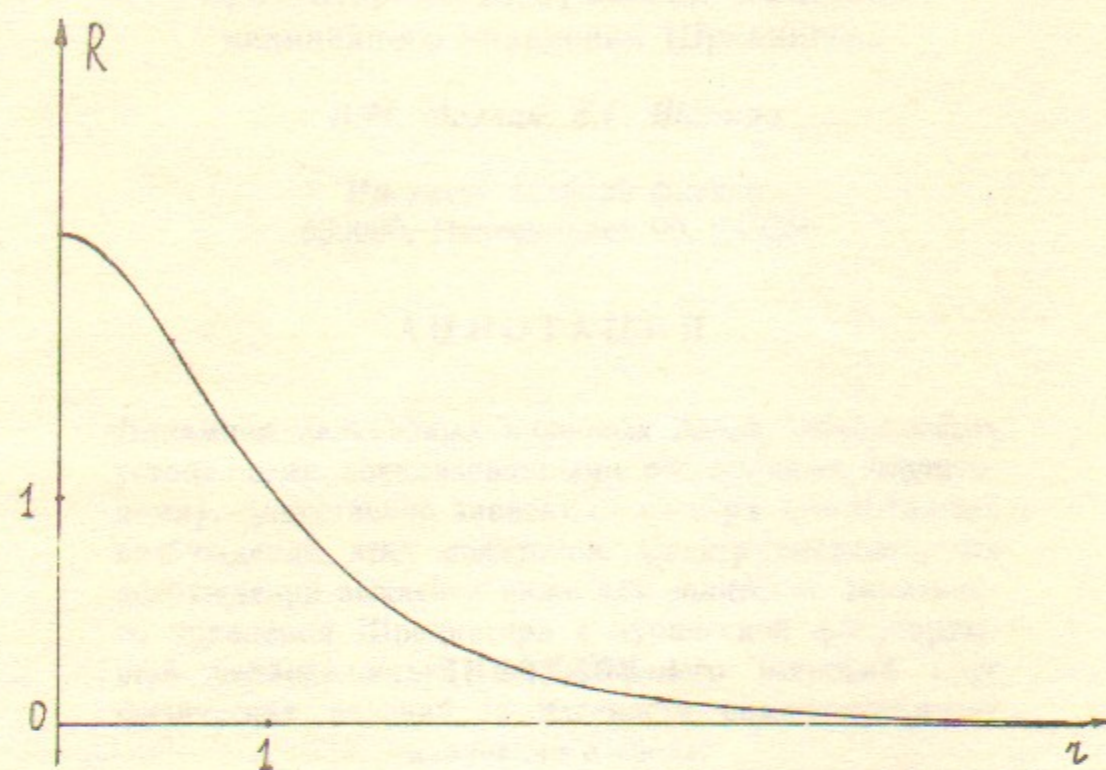


Рис. 1. Таунсовский солитон $R(r)$.

частотную моду, практически не меняя своей формы (как и сам солитон). Динамика стабилизированного таким образом солитона с сильно возбужденной низкочастотной модой представляет значительный интерес и существенно зависит от спектра других собственных мод (см. [8]). Вычисление этого спектра является целью настоящей работы.

Прежде чем перейти к решению поставленной задачи, полезно вспомнить основные свойства симметрии уравнения (1.1).

2. СВОЙСТВА СИММЕТРИИ

На классе функций, аксиально-симметричных относительно выбранного начала координат в плоскости переменных $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, уравнение (1.1) допускает трехпараметрическую группу преобразований. Ее составляют калибровочные, масштабные и талановские преобразования. (Последние были явно указаны в [9], хотя фактически содержались в еще более ранней работе [10] того же автора). Применение перечисленных преобразований к солитону единичного размера ($\kappa=1$) с нулевой фазой ($\varphi=0$)

дает трехпараметрическое семейство точных решений уравнения (1.1):

$$\psi(r, t) = \frac{\kappa}{1-t/t_*} R\left(\frac{\kappa r}{1-t/t_*}\right) \exp\left[i\left(\frac{\kappa^2 t}{1-t/t_*} - \frac{1}{4} \frac{r^2}{t_* - t} + \varphi\right)\right]. \quad (2.1)$$

Двухпараметрическое семейство стационарных солитонов (1.2) получается из (2.1) как частный случай, соответствующий бесконечно удаленному моменту образования особенности ($t_* = \infty$). При $t_* \rightarrow \infty$ решение (2.1) отличается от (1.2) бесконечно малой (пропорциональной $t_*^{-1} \rightarrow 0$) поправкой, квадратично растущей со временем. Как уже указывалось во введении, эта неустойчивая мода стабилизируется при включении в (1.1) малой дефокусирующей нелинейности. Связь обсуждаемой собственной моды с инфинитезимальным преобразованием Таланова была замечена в [7]. Инфинитезимальные калибровочное и масштабное преобразования порождают соответственно постоянную и линейно растущую со временем собственные моды. Рост последней связан исключительно с накоплением разности фаз и не означает неустойчивости солитона.

Помимо описанной трехпараметрической группы, уравнение (1.1) инвариантно относительно пятипараметрической группы преобразований Галилея, включающей в себя повороты, трансляции и движения с постоянной скоростью в плоскости x, y . Поворотная симметрия уравнения (1.1) и таунсовского солитона позволяет ввести азимутальное квантовое число $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ и рассматривать независимо друг от друга малые возмущения с различными значениями m . Инфинитезимальные трансляции и вариации скорости солитона генерируют соответственно две постоянные и две линейно растущие со временем дипольные ($|m|=1$) собственные моды. Поведение последней пары мод, очевидно, связано с растущим сдвигом солитона как целого и не означает неустойчивости его формы.

3. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

С целью упрощения формул удобно принять размер солитона κ^{-1} равным единице (что не приводит к какой-либо потере общности, ввиду масштабной инвариантности уравнения (1.1)). Для солитона единичного размера элементарное возбуждение с

частотой ω :

$$\delta\psi_\omega(\vec{r}, t) = e^{it} [A_\omega(\vec{r}) e^{-i\omega t} + B_\omega^*(\vec{r}) e^{i\omega^* t}] \quad (3.1)$$

удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} \omega A_\omega &= \hat{L}_0 A_\omega - R^2(A_\omega + B_\omega), \\ -\omega B_\omega &= \hat{L}_0 B_\omega - R^2(A_\omega + B_\omega), \end{aligned} \quad (3.2)$$

где

$$\hat{L}_0 = 1 - \Delta - R^2. \quad (3.3)$$

При одновременных заменах $\omega \rightarrow -\omega^*$, $A_\omega \rightleftharpoons B_{-\omega^*}$, возмущение (3.1) переходит в себя. Кроме того, уравнения (3.2) инвариантны относительно одновременных комплексного сопряжения и замен $\omega^* \rightarrow \omega$, $A_\omega^* \rightarrow A_\omega$, $B_\omega^* \rightarrow B_\omega$. Следовательно, при наличии собственного значения ω , являются собственными значениями также ω^* , $-\omega$, $-\omega^*$. Это позволяет ограничиться исследованием спектра в первом квадранте комплексной плоскости ω : $\text{Re } \omega \geq 0$, $\text{Im } \omega \geq 0$.

В инвариантном подпространстве \mathcal{L}_m функций с азимутальным квантовым числом m регулярное решение уравнений (3.2) имеет при $r \rightarrow 0$ вид

$$\begin{aligned} A_\omega(\vec{r}) &= A_\omega^{(m)} r^m + O(r^{m+2}), \\ B_\omega(\vec{r}) &= B_\omega^{(m)} r^m + O(r^{m+2}). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Всевозможные асимптотики функций $A_\omega(\vec{r})$ и $B_\omega(\vec{r})$ при $r \rightarrow \infty$ даются формулами

$$\begin{aligned} A_\omega(\vec{r}) &\propto \frac{1}{r^{1/2}} \exp[\pm(1-\omega)^{1/2}r], \\ B_\omega(\vec{r}) &\propto \frac{1}{r^{1/2}} \exp[\pm(1+\omega)^{1/2}r]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Регулярное в точке $r=0$ решение уравнений (3.3) зависит, помимо ω и m , от двух дополнительных параметров $A_\omega^{(m)}$ и $B_\omega^{(m)}$. После отождествления решений, пропорциональных друг другу, остается всего один дополнительный параметр. Его можно подобрать так, чтобы обратить в нуль коэффициент при какой-либо из асимптотик (3.5). Для действительных $\omega > 1$ лишь одна из четырех асимптотик (3.5) не обращается в нуль при $r \rightarrow \infty$. Эта асимптотика может быть устранена надлежащим выбором дополнительного параметра

в регулярном при $r \rightarrow 0$ решении. Следовательно, действительный луч $\omega > 1$ принадлежит непрерывному спектру. Для любого другого значения ω (в полуплоскости $\text{Re } \omega \geq 0$) уже две из асимптотик (3.5) не обращаются в нуль при $r \rightarrow \infty$. Поэтому все остальные собственные значения ω принадлежат дискретному спектру.

Для наудачу взятого значения ω из полуплоскости $\text{Re } \omega \geq 0$, разрезанной вдоль луча $\omega > 1$, регулярное в точке $r=0$ решение уравнений (3.2) экспоненциально растет при $r \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} A_\omega(\vec{r}) &\approx [C_{AA}^{(m)}(\omega) A_\omega^{(m)} + C_{AB}^{(m)}(\omega) B_\omega^{(m)}] \frac{1}{r^{1/2}} \exp[(1-\omega)^{1/2}r], \\ B_\omega(\vec{r}) &\approx [C_{BA}^{(m)}(\omega) A_\omega^{(m)} + C_{BB}^{(m)}(\omega) B_\omega^{(m)}] \frac{1}{r^{1/2}} \exp[(1+\omega)^{1/2}r]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Устранить этот рост нетривиальным подбором параметров $A_\omega^{(m)}$, $B_\omega^{(m)}$ можно лишь при условии равенства нулю детерминанта

$$D_m(\omega) = C_{AA}^{(m)}(\omega) C_{BB}^{(m)}(\omega) - C_{AB}^{(m)}(\omega) C_{BA}^{(m)}(\omega). \quad (3.7)$$

Таким образом, дискретные собственные значения ω являются корнями уравнений

$$D_m(\omega) = 0, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.8)$$

Линейные комбинации функций $A_\omega(\vec{r})$ и $B_\omega(\vec{r})$:

$$u_\omega = A_\omega + B_\omega, \quad v_\omega = A_\omega - B_\omega \quad (3.9)$$

удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \omega v_\omega &= \hat{L}_1 u_\omega, \\ \omega u_\omega &= \hat{L}_0 v_\omega, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где

$$\hat{L}_1 = \hat{L}_0 - 2R^2. \quad (3.11)$$

Пару уравнений (3.10) удобно представить в виде одного матричного уравнения для двухкомпонентной функции χ_ω :

$$\hat{L} \chi_\omega = \omega \chi_\omega, \quad (3.12)$$

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{L}_0 \\ \hat{L}_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_\omega = \begin{pmatrix} u_\omega \\ v_\omega \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Сужения операторов \hat{L}_i ($i=0; 1$) и \hat{L} на их инвариантные подпространства \mathcal{L}_m и $\mathcal{L}_m^2 = \mathcal{L}_m \otimes \mathcal{L}_m$ для краткости обозначаются далее теми же символами, что и полные операторы. В пространстве \mathcal{L}_m лапласиан имеет вид

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2}, \quad (3.14)$$

и \hat{L}_0, \hat{L}_1 сводятся к обыкновенным дифференциальным операторам.

4. ТОЧЕЧНЫЙ СПЕКТР

На классе изотропных возмущений, т. е. в пространстве \mathcal{L}_0^2 , оператор \hat{L} вырожден. Нулевому собственному значению соответствует собственная функция $\chi^{(1)}$:

$$\hat{L}\chi^{(1)} = 0, \quad u^{(1)} = 0, \quad v^{(1)} = R. \quad (4.1)$$

Эта мода порождается инфинитезимальным калибровочным преобразованием. Помимо $\chi^{(1)}$, нулевому собственному значению оператора \hat{L} соответствуют корневая функция $\chi^{(2)}$ высоты 2:

$$\hat{L}\chi^{(2)} = \chi^{(1)}, \quad u^{(2)} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dr} r R, \quad v^{(2)} = 0, \quad (4.2)$$

порождаемая инфинитезимальным масштабным преобразованием, и корневая функция $\chi^{(3)}$ высоты 3:

$$\hat{L}\chi^{(3)} = \chi^{(2)}, \quad u^{(3)} = 0, \quad v^{(3)} = \frac{1}{8} r^2 R, \quad (4.3)$$

порождаемая инфинитезимальным преобразованием Таланова.

Эрмитово-сопряженный в \hat{L} оператор $\hat{L}^+ = \begin{pmatrix} 0 & \hat{L}_1 \\ \hat{L}_0 & 0 \end{pmatrix}$ обладает в \mathcal{L}_0^2 аналогичным корневым подпространством $\{\bar{\chi}^{(i)}, i=1, 2, 3\}$, соответствующим нулевому собственному значению. Функции $\bar{\chi}^{(i)}$ ($i=1, 2, 3$) получаются из $\chi^{(i)}$ простой перестановкой компонент:

$$\bar{u}^{(i)} = v^{(i)}, \quad \bar{v}^{(i)} = u^{(i)}, \quad (i=1, 2, 3).$$

Каждая собственная функция χ_ω оператора \hat{L} , соответствующая ненулевому собственному значению ω , ортогональна к $\bar{\chi}^{(i)}$ ($i=1, 2, 3$)

при естественном определении скалярного произведения:

$$\langle \bar{\chi} | \chi \rangle = \int d^2 \bar{r} (\bar{u}^* u + \bar{v}^* v).$$

В терминах скалярного произведения однокомпонентных функций —

$$(u, v) = \int d^2 \bar{r} u^* v$$

— указанные условия ортогональности означают следующее:

$$\begin{aligned} (u^{(i)}, v_\omega) &= 0, \quad i=2; \\ (v^{(i)}, u_\omega) &= 0, \quad i=1, 3. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Пусть \hat{P} — оператор проецирования на подпространство функций, ортогональных к $v^{(1)} = R$. Воздействие оператора \hat{P} на уравнения (3.10) (с $m=0$) дает:

$$\omega \hat{P} v_\omega = \hat{P} \hat{L}_1 u_\omega, \quad \omega \hat{P} u_\omega = \hat{P} \hat{L}_0 v_\omega. \quad (4.5)$$

Учитывая, что $\hat{P} \hat{L}_0 = \hat{L}_0 = \hat{L}_0 \hat{P}$ и $\hat{P} u_\omega = u_\omega$, можно переписать уравнения (4.5) в виде

$$\begin{aligned} \omega \bar{v}_\omega &= \hat{L}_1 u_\omega, \quad \omega u_\omega = \hat{L}_0 v_\omega \\ (\bar{v}_\omega = \hat{P} v_\omega, \quad \hat{L}_1 = \hat{P} \hat{L}_1 \hat{P}). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Все функции в уравнениях (4.6) уже принадлежат пространству $\hat{P} \mathcal{L}_0$. В этом пространстве оператор \hat{L}_0 положительно определен (что вытекает из монотонности функции R , соответствующей нулевому собственному значению оператора \hat{L}_0 в пространстве \mathcal{L}_0). Оператор \hat{L}_1 в пространстве $\hat{P} \mathcal{L}_0$ вырожден. Его нулевому собственному значению соответствует собственная функция $u^{(2)}$ (которая, как нетрудно проверить с помощью явной формулы (4.2), ортогональна к R , так что $\hat{P} u^{(2)} = u^{(2)}$). Функция $u^{(2)}(r)$ имеет всего один нуль. Функции, вообще не имеющие нулей, не являются ортогональными к R и не принадлежат пространству $\hat{P} \mathcal{L}_0$. Поэтому ясно, что функция $u^{(2)}$ соответствует наименьшему собственному значению оператора \hat{L}_1 , т. е. он неотрицательно определен. С учетом вытекающей из уравнений (4.6) формулы

$$\omega^2 = \frac{(u_\omega, \hat{L}_1 u_\omega)}{(u_\omega, \hat{L}_0^{-1} u_\omega)} \quad (4.7)$$

отмеченные выше свойства операторов \hat{L}_0 и \hat{L}_1 гарантируют вещественность всех собственных значений ω оператора \hat{L} в пространстве \mathcal{L}_0^2 .

На классе дипольных возмущений, т. е. в пространствах $\mathcal{L}_{\pm 1}^2$, оператор \hat{L} также вырожден. Нулевому собственному значению соответствуют собственные функции $\chi_{\pm}^{(1)}$:

$$\hat{L}\chi_{\pm}^{(1)}=0, \quad u_{\pm}^{(1)}=\frac{dR}{dr}e^{\pm i\theta}, \quad v_{\pm}^{(1)}=0, \quad (4.8)$$

порождаемые инфинитезимальными сдвигами в плоскости x, y , и корневые функции $\chi_{\pm}^{(2)}$ высоты 2:

$$\hat{L}\chi_{\pm}^{(2)}=\chi_{\pm}^{(1)}, \quad u_{\pm}^{(2)}=0, \quad v_{\pm}^{(2)}=-\frac{1}{2}rRe^{\pm i\theta}, \quad (4.9)$$

порождаемые инфинитезимальными преобразованиями Галилея.

Радиальная часть dR/dr функций $u_{\pm}^{(1)}$, соответствующих нулевому собственному значению оператора \hat{L}_1 в пространствах $\mathcal{L}_{\pm 1}$, не имеет нулей при $0 < r < \infty$. Это гарантирует неотрицательную определенность оператора \hat{L}_1 в пространствах $\mathcal{L}_{\pm 1}$ и положительную определенность в них оператора \hat{L}_0 . Ясно также, что при $|m| \geq 2$ оба оператора \hat{L}_0 и \hat{L}_1 являются положительно определенными в пространствах \mathcal{L}_m . С учетом соотношения (4.7), имеющего место во всех пространствах \mathcal{L}_m , отсюда следует вещественность всех собственных значений ω оператора \hat{L} . Это позволяет ограничиться при численном изучении точечного спектра интервалом $0 < \omega < 1$.

Ввиду зеркальной симметрии солитона функции $D_m(\omega)$ (а значит и наборы собственных значений оператора \hat{L} в пространствах \mathcal{L}_m) не зависят от знака m . При $m \gg 1$ функции $D_m(\omega)$ вычисляются аналитически. Выделив эту аналитическую зависимость, можно перейти от $D_m(\omega)$ к функциям

$$\tilde{D}_m(\omega) = \frac{2\pi(1-\omega^2)^{\frac{m}{2} + \frac{1}{4}}}{2^{2m}(m!)^2} D_m(\omega), \quad (4.10)$$

стремящимся при $m \rightarrow \infty$ к единице. Численно построенные графики функций $\tilde{D}_m(\omega)$ с небольшими значениями m изображены на рис. 2. Как видно из рисунка, внутри интервала $(0, 1)$ имеется только одно собственное значение:

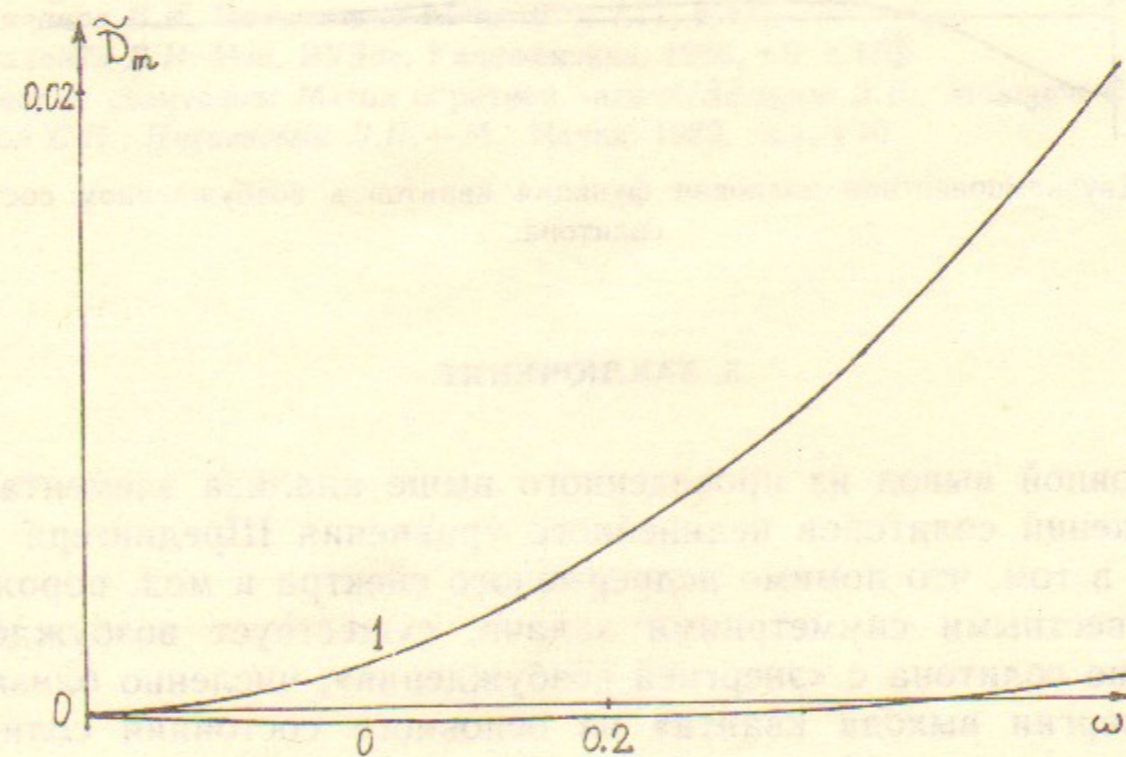
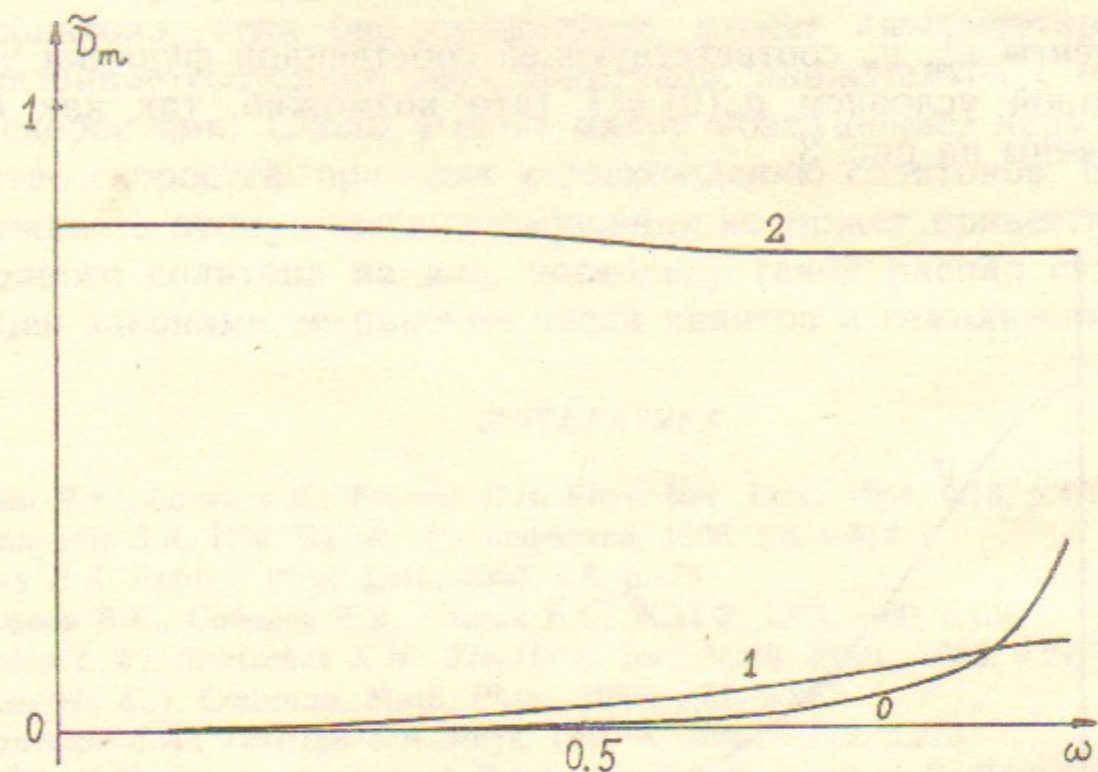


Рис. 2. Графики функций $\tilde{D}_m(\omega) = \tilde{D}_{-m}(\omega)$ в интервале $(0, 1)$. Номер кривой равен значению индекса m .

$$\omega \approx 0.321. \quad (4.11)$$

Компоненты u_ω , v_ω соответствующей собственной функции χ_ω , нормированной условием $v_\omega(0) = 1$ (что возможно, так как $m=0$), изображены на рис. 3.

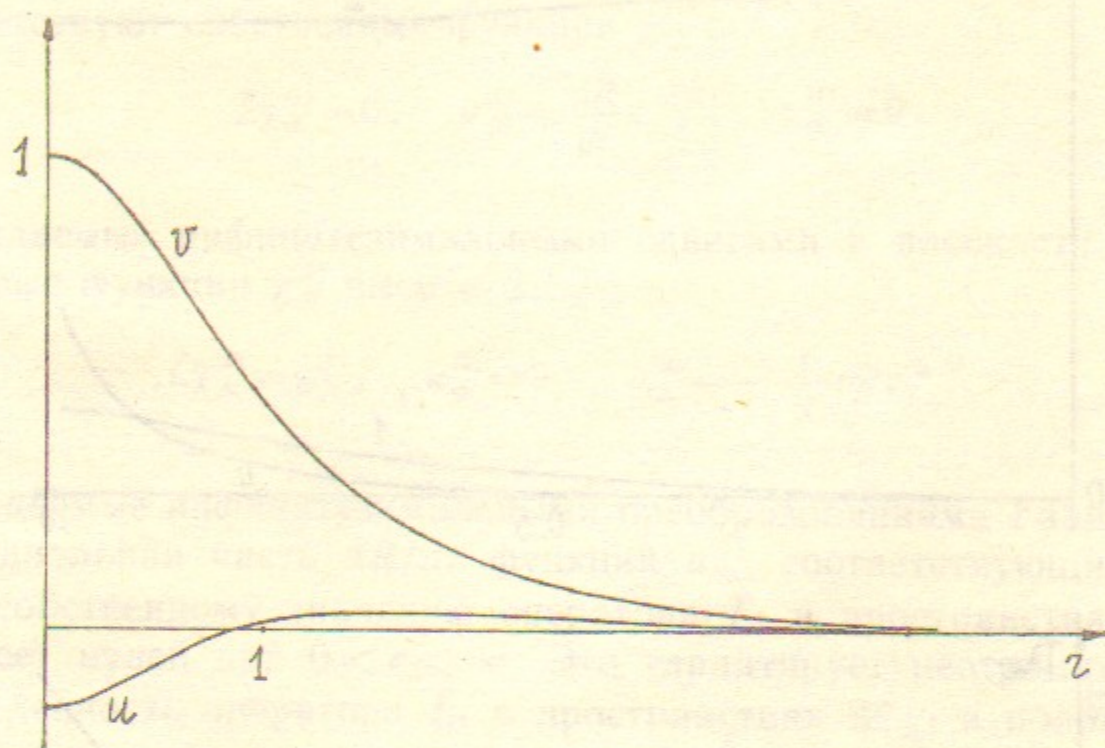


Рис. 3. Двухкомпонентная волновая функция квантов в возбужденном состоянии солитона.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основной вывод из проведенного выше анализа элементарных возбуждений солитонов нелинейного уравнения Шредингера (1.1) состоит в том, что помимо непрерывного спектра и мод, порождаемых известными симметриями задачи, существует возбужденное состояние солитона с «энергией возбуждения», численно близкой к $1/3$ «энергии выхода кванта» из основного состояния солитона. Наличие такого возбужденного состояния играет важную роль в адиабатической динамике солитона, описывающей самофокусировку излучения в среде (см. [8]).

Полезно заметить, что солитоны одномерного уравнения Шредингера с кубической фокусирующей нелинейностью не обладают подобными возбужденными состояниями. Действительно, из самой схемы построения решений методом обратной задачи рассеяния

(см., например, [11]) видно, что возбужденное состояние одномерного солитона, если оно существует, может интерпретироваться как связанное состояние двух солитонов, движущихся с одинаковыми скоростями. Сколь угодно малое возмущение, нарушающее равенство скоростей, приводит к расхождению солитонов. В противоположность этому, малое возмущение не может привести к распаду одного солитона на два, поскольку такой распад с запасом запрещен законами сохранения числа квантов и гамильтониана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chiao R.Y., Garmire E., Townes C.H. Phys. Rev. Lett., 1964, v.13, p.479.
2. Янкаускас З.К. Изв. ВУЗов. Радиофизика, 1966, т.9, с.412.
3. Haus H.A. Applied Phys. Lett., 1966, v.8, p.128.
4. Захаров В.Е., Соболев В.В., Сынах В.С. ЖЭТФ, 1971, т.60, с.136.
5. Laedke E.W., Spatschek K.H., Stenflo L. Journ Math. Phys., 1983, v.24, p.2764.
6. Weinstein E.A. Commun. Math. Phys., 1983, v.87, p.567.
7. Kuznetsov E.A., Turitsyn S.K. Phys. Lett. A, 1985, v.112, p.273.
8. Malkin V.M. On the Analytical Theory for Self-focusing of Radiation in a Medium (to be published).
9. Таланов В.И. Письма в ЖЭТФ, 1970, т.11, с.303.
10. Таланов В.И. Изв. ВУЗов. Радиофизика, 1966, т.9, с.410.
11. Теория солитонов: Метод обратной задачи/Захаров В.Е., Мананов С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. — М.: Наука, 1980, гл.1, § 10.

В.М. Малкин, Е.Г. Шапиро

**Элементарные возбуждения солитонов
нелинейного уравнения Шредингера**

Ответственный за выпуск С.Г.Попов

Работа поступила 29 июня 1990 г.
Подписано в печать 9.07 1990 г. МН 02390
Формат бумаги 60×90. 1/16 Объем 1,1 печ.л., 0,9 уч.-изд.л.
Тираж 220 экз. Бесплатно. Заказ № 78

*Набрано в автоматизированной системе на базе фото-
наборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и
отпечатано на ротапинтере Института ядерной физики
СО АН СССР,
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.*