27

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

В.Н. Байер, В.М. Катков, В.М. Страховенко

КВАЗИКЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПРОЦЕССОВ В ПОЛЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ И ПОСТОЯННОМ ПОЛЕ

ПРЕПРИНТ 91-32

НОВОСИБИРСК

Квазиклассическая теория
электромагнитных процессов в поле
плоской волны и постоянном поле

В.Н. Байер, В.М. Катков, В.М. Страховенко

Институт ядерной физики
630090, Новосибирск 90, СССР

АННОТАЦИЯ

В рамках квазиклассической теории получены общие выражения для вероятности излучения релятивистской частицы движущейся во внешнем поле, являющемся суперпозицией локально постояного поля и монохроматической плоской волны распространяющейся в произвольном направлении. В качестве приложений рассмотрены комптон-эффект и двухфотонное рождение пары частиц во внешнем поле.

Quasiclassical Theory
of Electromagnetic Processes in Field
of a Plane Wave and Constant Field

V.N. Baier, V.M. Katkov, V.M. Strakhovenko

Institute of Nuclear Physics
630090, Novosibirsk, USSR

ABSTRACT

In the frame of quasiclassical theory the general expressions are obtained for the radiation probability of relativistic particles moving in an external field which is superposition of a locally constant field and a monochromatic plane wave propagating along an arbitrary direction. As an application we considered the processes of Compton scattering and two photon pair creation in the external field.

1. ВВЕДЕНИЕ

Процессы в электромагнитном поле сложной конфигурации представляют значительный интерес. Одним из полей такого рода является суперпозиция поля плоской волны и постоянного поля. Рассмотрение радиационных процессов основывается на использовании решений (точных или квазиклассических) волновых уравнений в таком поле. Следует иметь в виду, что точные решения известны только в случае, когда плоская волна распространяется вдоль магнитного поля. В этом случае решения уравнений Клейна-Гордона и Дирака были получены еще Редмондом [1], который провел также анализ классического движения частицы. Функции Грина скалярной и спинорной частиц в таком поле были найдены Баталиным и Фрадкиным [2] с помощью метода функционального интегрирования. Массовый оператор в поле редмондовской конфигурации был получен Мильштейном и одним из авторов для скалярных [3] и спинорных [4] частиц с помощью операторного подхода. Соответствующие волновые функции использовались здесь для вычисления матричных элементов массового оператора, которые содержат в себе обширную физическую информацию (вероятности излучения, сдвиги уровней). В частности, были рассмотрены радиационные эффекты вблизи циклотронного резонанса, рассеяние фотона на электроне (комптон-эффект) в магнитном поле. Обзор ряда работ в этой области содержится также в [5].

Настоящая работа базируется на квазиклассической теории излучения и рождения пар развитой двумя из авторов [6]. В области квазиклассичности движения нет необходимости использовать решения уравнений Дирака (Клейна-Гордона) и достаточно знать только классические траектории частиц. Мы будем рассматривать существенно релятивистский случай $\gamma=\varepsilon/m\gg 1$, когда скорость частицы мало меняется за время формирования процесса. В ковариантной записи это условие имеет вид:

$$|(F_{\mu\nu}p^{\nu})^2/m^2|\gg|F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}|\,,\quad |F^*_{\mu\nu}F^{\mu\nu}|$$

где $F^{\mu\nu}$ — тензор электромагнитного поля, в котором движется частица ($F^{\mu\nu}=F^{\mu\nu}_{ex}+f^{\mu\nu}$, $F^{\mu\nu}_{ex}$ — внешнее поле, $f^{\mu\nu}$ — поле волны), $F^*_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$, p^{ν} — импульс частицы. Если дополнительно потребовать, чтобы изменение внешнего поля F_{ex} на длине формирования было мало, то задача сводится к процессам в однородном внешнем поле F_{ex} и поле распространяющейся в произвольном направлении плоской волны f, которую для определенности возьмем монохроматической. Отметим, что полученные в настоящей работе выражения являются точными, когда $F^2=F^*F=0$. В этом случае электромагнитное поле имеет вид немонохроматической плоской волны, в которой задача решается точно. В разделе 2 получены общие формулы для вероятности излучения в единицу времени, в разделе 3 изучен комптон-эффект во внешнем поле, а в разделе 4 рассмотрено рождение электрон-позитронной пары. Найденные выражения имеют вид «мгновенных» характеристик процессов и при определении их интегральных свойств должны быть усреднены по траектории частицы или с соответствующей функцией распределения.

2. ОБЩИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Использование квазиклассической теории излучения и рождения пар [6] позволяет провести вычисления наиболее адекватным образом. Вероятность излучения в этой теории имеет вид ($\hbar=c=1$, $e^2=\alpha=1/137$)

$$dw_{\gamma}=\frac{\alpha}{(2\pi)^2}\frac{d^3k}{\omega}|M|^2,\qquad M=\int dt\,R(t)e^{ik'x(t)}\,, \tag{1}$$

где $k'=\varepsilon k/\varepsilon'$, $k=k(\omega,\ \vec{k})$ — 4-импульс фотона, $\varepsilon(m)$ — энергия (масса) частицы, $\varepsilon'=\varepsilon-\omega$, $x(t)=(t,\ \vec{r}(t))$, t — время, $\vec{r}(t)$ — коор-

дината на классической траектории частицы. Для спинорных частиц с релятивистской точностью $(1/\gamma=m/\varepsilon\ll 1)$

$$R=\varphi_f^{+}(A+i\vec{\sigma}\vec{B})\varphi_i\,,\qquad A=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right)\vec{e}^{\,*}\vec{a}\,,$$

$$\vec{B}=\frac{\omega}{2\varepsilon'}\vec{e}^{\,*}\times\vec{b}\,,\qquad \vec{a}=\vec{v}-\vec{k}/\omega\,,\qquad \vec{b}=\frac{\vec{k}}{\omega\gamma}-\vec{a}\,, \tag{2}$$

где $\vec{v}=\vec{v}(t)$ — классическая скорость частицы, $\varphi_{f(i)}$ — двухкомпонентный спинор описывающий поляризацию частицы, $\vec{e}$ — вектор поляризации фотона.

После интегрирования по углам вылета фотона и суммирования по поляризациям конечных частиц выражения (1), (2) можно представить в виде удобном для вычислений, где все сокращения главных членов уже произведены (для $\zeta=0$ см., например, работу [7]),

$$\frac{dw_{\gamma}}{d\omega}=\frac{i\alpha}{8\pi\gamma^2}\iint\frac{dt\,d\tau}{\tau-i0}\left[4+\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}+\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)(\vec{\Delta}_1-\vec{\Delta}_2)^2+\frac{i\omega}{\varepsilon}\zeta\vec{N}\right]\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{i\tau}{l_{\omega}}\left\{1+\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_1}^{t_2}\vec{\Delta}^2(t')dt'\right)\right\},$$

$$\vec{\Delta}(t')=\frac{1}{m}(\vec{p}(t')-\vec{\pi})\,,\quad \vec{\pi}=\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_1}^{t_2}\vec{p}(t)\,dt\,,\quad l_{\omega}=\frac{2\varepsilon\varepsilon'}{m^2\omega}\,, \tag{3}$$

$$\vec{N}=2\left(2+\frac{\omega}{\varepsilon'}\right)\vec{\Delta}_2\times\vec{\Delta}_1+2(\vec{\Delta}_1-\vec{\Delta}_2)\times\vec{v}(t)\,,$$

где $t_{2,1}=t\pm\tau/2$, $\vec{p}(t)=\varepsilon\vec{v}(t)$ — импульс частицы. Очевидно, что величина $\vec{\Delta}(t)$ не меняется при замене $\vec{p}(t)\to\vec{p}(t)+\vec{p}_0$, где $\vec{p}_0$ не зависящий от времени импульс. Для того, чтобы продвинуться дальше, нам теперь необходимо найти явный вид импульса $\vec{p}(t)$ и вектора $\vec{\Delta}(t)$ в зависимости от времени в поле рассматриваемой конфигурации. Конкретные расчеты мы будем проводить в системе отсчета, в которой монохроматическая плоская волна с волновым вектором $q=q(q_0,\ \vec{q})$ распространяется в направлении $\vec{n}=\vec{q}/q_0$ навстречу электрону. При этом всегда можно найти релятивистскую систему отсчета ($\gamma\gg 1$), в которой выполняется условие $q_0\ll\varepsilon$, что необходимо при рассмотрении плоской волны как классического объекта. Решая уравнения движения частицы в электромагнитном поле, с принятой точностью получаем

$$\vec{p}_\perp(t)/m=\vec{\Omega}t+\vec{\xi}(t),\quad \vec{\xi}(t)=\vec{\xi}_2\sin(\nu t+\varphi_0)+\vec{\xi}_1\cos(\nu t+\varphi_0)\,,$$

$$\vec{\Omega}=\frac{e}{m}\vec{F}_\perp\,,\quad \vec{F}_\perp=\vec{E}-\vec{n}(\vec{n}\vec{E})+\vec{H}\times\vec{n}\,,\quad \nu=2q_0,\quad \vec{\xi}\vec{n}=0 \tag{4}$$

где $\vec{E}$ и $\vec{H}$ электрическое и магнитное поля, не зависящие от времени, $\vec{\xi}_{1,2}$ — ортогональные векторы, характеризующие интенсивность волны $\xi_0^2=(\vec{\xi}_1^2+\vec{\xi}_2^2)/2$ и ее поляризацию. Соответствующие параметры Стокса имеют вид

$$\lambda_3=\frac{\xi_1^2-\xi_2^2}{\xi_1^2+\xi_2^2},\quad \lambda_2=(\vec{\xi}_1\times\vec{\xi}_2)\vec{n}/\xi_0^2\,. \tag{5}$$

Вычисляя входящие в выражение для вероятности излучения (3) соответствующие комбинации, получаем

$$\vec{\Delta}_2-\vec{\Delta}_1=\vec{\Omega}\tau+2\sin\frac{\nu\tau}{2}\vec{\eta}(t)\,,\quad \vec{\eta}(t)=\vec{\xi}_2\cos(\nu t+\varphi_0)-\vec{\xi}_1\sin(\nu t+\varphi_0)\,,$$

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\Delta^2(t')\,dt'=\Omega^2\frac{\tau^3}{12}+\frac{4}{\nu^2}\vec{\Omega}\vec{\eta}(t)\left(\sin\frac{\nu\tau}{2}-\frac{\nu\tau}{2}\cos\frac{\nu\tau}{2}\right)+$$

$$+\xi_0^2\left[\tau+\frac{2}{\nu^2\tau}(\cos\nu\tau-1)+\frac{\lambda_3}{\nu}\cos 2(\nu t+\varphi_0)\left(\sin\nu\tau+\frac{2}{\nu\tau}(\cos\nu\tau-1)\right)\right],$$

$$(\vec{\Delta}_2-\vec{\Delta}_1)^2=\Omega^2\tau^2+4\vec{\Omega}\vec{\eta}(t)\,\tau\sin\frac{\nu\tau}{2}+4\xi_0^2(1-\lambda_3\cos 2(\nu t+\varphi_0))\sin^2\frac{\nu\tau}{2},$$

$$\vec{\Delta}_2\times\vec{\Delta}_1=\left(\cos\frac{\nu\tau}{2}-\frac{2}{\nu\tau}\sin\frac{\nu\tau}{2}\right)\left[\tau\vec{\Omega}\times\vec{\xi}(t)-2\lambda_2\vec{n}\,\xi_0^2\sin\frac{\nu\tau}{2}\right]. \tag{6}$$

Сделаем замены $\nu t+\varphi_0=\varphi$, $\tau\to l_0\tau$, $l_0=\dfrac{2\varepsilon}{m^2}=2\gamma\lambda\!\!\!^{-}_c$ и учтем, что

$$\Omega l_0=\frac{2e\vec{F}_\perp\varepsilon}{m^3}=2\vec{\chi},\quad \nu l_0=\frac{4q_0\varepsilon}{m^2}\simeq\frac{2qp}{m^2}\equiv s \tag{7}$$

В результате, получаем для вероятности излучения фотона в единицу времени следующее выражение

$$\frac{d^2w_\gamma(t)}{dt\,dx}=\frac{dW_\gamma(t)}{dx}=\frac{i\alpha m^2}{2\pi\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\tau}{\tau-i0}\Big[1+$$

$$+\left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}+\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right)m_0+ix\vec{\zeta}\,\vec{m}\Big]\exp[-iu\tau\Phi(\varphi,\tau)]\,,$$

$$u=\omega/\varepsilon',\quad x=\omega/\varepsilon,\quad m_0=\chi^2\tau^2+2\vec{\chi}\vec{\eta}(\varphi)\tau\sin\frac{s\tau}{2}+$$

$$+\xi_0^2(1-\lambda_3\cos 2\varphi)\sin^2\frac{s\tau}{2}, \tag{8}$$

$$\vec{m}=2\left(1+\frac{u}{2}\right)\left[\vec{\chi}\times\vec{\xi}(\varphi)\left(\tau\cos\frac{s\tau}{2}-\frac{2}{s}\sin\frac{s\tau}{2}\right)+\frac{1}{2}\lambda_2\xi_0^2\vec{v}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\sin s\tau+\frac{2}{s\tau}(\cos s\tau-1)\right)\right]-\vec{\chi}\times\vec{v}\tau-\vec{\eta}(\varphi)\times\vec{v}\sin\frac{s\tau}{2},$$

$$\Phi=\frac{1}{3}\chi^2\tau^2+\frac{8}{s^2\tau}\vec{\chi}\vec{\eta}(\varphi)\left(\sin\frac{s\tau}{2}-\frac{s\tau}{2}\cos\frac{s\tau}{2}\right)+\xi_0^2\Big[1+$$

$$+\frac{2}{s^2\tau^2}(\cos s\tau-1)+\frac{\lambda_3}{s\tau}\cos 2\varphi\left(\sin s\tau+\frac{2}{s\tau}(\cos s\tau-1)\right)\Big]+1\,.$$

В этой формуле величины $\vec{v}(t)$, $\vec{\chi}(t)$, $\vec{\zeta}(t)$ определяются классической траекторией частицы. В случае когда период волны меньше или порядка времени формирования процесса, которое определяется характерными значениями переменной τ в интеграле (8), это выражение необходимо усреднить по фазе волны φ.

Представим выражение (8) в инвариантной форме. Для этого введем 4-вектора, характеризующие волну

$$a^\mu(\varphi)=a_2^\mu\sin\varphi+a_1^\mu\cos\varphi\,,\quad b^\mu(\varphi)=\frac{da^\mu(\varphi)}{d\varphi},\quad \varphi=qx\,,$$

$$q^2=qa_1=qa_2=a_1a_2=0\,,\quad f^{\mu\nu}=q^\mu b^\nu-q^\nu b^\mu\,, \tag{9}$$

$$\xi_{1,2}^2=-e^2a_{1,2}^2/m^2\,.$$

Здесь $a^\mu(\varphi)$ — вектор-потенциал, $f^{\mu\nu}$ — тензор электромагнитного поля волны. Комбинации в (8) с релятивистской точностью имеют вид

$$\vec{\chi}^2\simeq-\frac{e^2}{m^6}(F^{\mu\nu}p_\nu)^2\,,\quad \vec{\chi}\vec{\eta}\simeq-\frac{e^2}{m^4(qp)}F^{\mu\nu}p_\nu f_{\mu\rho}p^\rho\,,$$

$$(\vec{\zeta}\,\vec{\chi}\,\vec{v})\simeq\frac{e}{m^3}s^\mu F^*_{\mu\nu}p^\nu\,,\quad (\vec{\zeta}\,\vec{\eta}\,\vec{v})\simeq\frac{e}{m(pq)}s^\mu f^*_{\mu\nu}p^\nu\,, \tag{10}$$

$$(\vec{\zeta}\,\vec{\chi}\,\vec{\xi})\simeq\frac{e^2}{m^3}s^\mu F^*_{\mu\nu}a^\nu\,,\quad -\lambda_2\xi_0^2(\vec{\zeta}\,\vec{n})=\frac{e^2}{m(pq)}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,s^\mu a_1^\nu a_2^\rho q^\sigma\,,$$

где s^μ — 4-вектор спина, $F^{\mu\nu}$ — тензор постоянного электромагнитного поля, $*$ — обозначены дуальные тензоры.

Проинтегрировав выражение (8) по $x=u/(1+u)$, получим полную вероятность излучения в единицу времени W_γ, которая посредством дисперсионного соотношения известным образом связана с поправкой к массе частицы [8]. Используя эту связь, получаем

$$\frac{\Delta m}{m}=\frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dx\int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau}\Big[\Big(1+\Big(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}+\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\Big)m_0+ix(\vec\zeta\,\vec m)\Big)\times$$
$$\times\exp(-iu\tau\Phi(\tau))-\exp(-iu\tau)\Big]. \tag{11}$$

Отметим, что в рамках рассматриваемого нами приближения часть этого выражения, зависящая от спина электрона $\Delta m_\zeta(t)=\vec\zeta(t)\cdot\vec M(t)$, определяет радиационные поправки к уравнению движения спина

$$\frac{d\vec\zeta_{\rm rad}}{dt}=2\vec M\times\vec\zeta/\gamma.$$

В случае, когда плоская волна циркулярно поляризована ($\lambda_3=0$, $\lambda_2=\pm1$), выражения для $m_\mu(\varphi,\tau)$ и $\Phi(\varphi,\tau)$ приобретают вид:

$$m_0^{cr}=\chi^2\tau^2+2\vec\chi\,\vec\eta\tau\sin\frac{s\tau}{2}+\xi_0^2\sin\frac{2s\tau}{2},$$

$$\vec\zeta\,\vec m^{cr}=2\Big(1+\frac{u}{2}\Big)\lambda_2(\vec\zeta\,\vec v)\Big[(\vec\chi\,\vec\eta)\Big(\tau\cos\frac{s\tau}{2}-\frac{2}{s}\sin\frac{s\tau}{2}\Big)+$$
$$+\frac{\xi_0^2}{2}\Big(\sin s\tau+\frac{2}{s\tau}(\cos s\tau-1)\Big)\Big]-(\vec\zeta\,\vec\chi\,\vec v)\tau-(\vec\zeta\,\vec\eta\,\vec v)\sin\frac{s\tau}{2}, \tag{12}$$

$$\Phi^{cr}=\frac{1}{3}\chi^2\tau^2+\frac{8}{s^2\tau}(\vec\chi\,\vec\eta)\Big(\sin\frac{s\tau}{2}-\frac{s\tau}{2}\cos\frac{s\tau}{2}\Big)+$$
$$+\xi_0^2\Big(1+\frac{2}{s^2\tau^2}(\cos s\tau-1)\Big)+1.$$

Если положить интенсивность волны $\xi_0^2=0$, то формулы (8), (11) перейдут в выражение для вероятности излучения и поправки к массе в постоянном внешнем поле в квазиклассическом приближении [9]. В случае $\vec\chi=0$ эти формулы совпадают с соответствующими выражениями в поле плоской монохроматической волны [10, 11].

Параметр ξ_0 характеризует изменение полем волны импульса частицы по сравнению с ее массой за время порядка периода колебания волны, и при больших значениях $\xi_0\gg1$ излучение формируется за время, много меньшее этого периода $(\tau\ll1/s)$. В этом случае в формулах (8), (11), (12) можно провести разложение по величине $s\tau$, и в результате получаем, что процесс определяется локальным значением напряженности поля с соответствующим значением параметра $\vec\chi_1$

$$\vec\chi_1(t)=\vec\chi(t)+\vec\eta(\varphi)\frac{s}{2},\quad \vec\chi_1^2=-\frac{e^2}{m^6}[(F^{\mu\nu}+f^{\mu\nu})p_\nu]^2 \tag{13}$$

Такой же характер излучение носит в случае $\xi_0\lesssim1$, но при больших значениях параметра $\mu=\chi/s$ $(\mu\gg1)$. При $\mu\ll1$ $(\xi_0^2\lesssim1)$ переданный постоянным полем импульс за период колебания волны оказывается много меньше массы частицы $(\tau\sim\frac{1}{s},\ \chi\tau\ll1)$ и по величине $\chi\tau$ необходимо провести соответствующие разложения. Удерживая главные члены этого разложения, получим поправки к вероятности процесса в поле плоской волны за счет влияния постоянного поля.

3. КОМПТОН-ЭФФЕКТ В ПОСТОЯННОМ ПОЛЕ

В случае $\xi_0\ll1$ в выражении (8) можно провести разложение экспоненциального фактора по параметру $\xi(\eta)$ и оставить окончательно члены $\infty\xi_0^2$. Тогда нулевые члены разложения по ξ_0 в формуле (8) будут давать вероятность излучения в постоянном поле $F_{\mu\nu}$, а поправки $\infty\xi_0^2$ описывают комптоновское рассеяние в этом поле. Рассмотрим более подробно последнее явление.

Учитывая связь напряженности электрического и магнитного полей в волне с плотностью ее энергии, выразим параметр ξ_0^2 через плотность фотонов и их частоту

$$\frac{E^2+H^2}{8\pi}\simeq\frac{1}{4\pi}\Big(\frac{m\xi_0}{e}\Big)^2=q_0n_{ph}$$

$$\xi_0^2=\frac{4\pi\alpha n_{ph}}{m^2q_0}\simeq\frac{16\pi\alpha n_{ph}\varepsilon}{m^4s} \tag{14}$$

Учтем также, что член пропорциональный ξ_0^2 в вероятности излучения (8) $dW_\gamma = dW_\gamma^{ex} + \xi_0^2\, dW_\gamma^\xi$ связан с сечением Комптон-эффекта следующим образом

$$\xi_0^2\, dW_\gamma^\xi = 2n_{ph} d\sigma_c ; \quad d\sigma_c = \frac{8\pi\alpha\varepsilon}{m^4 s} dW_\gamma^\xi . \tag{15}$$

В результате получаем следующее выражение для сечения комптоновского рассеяния в присутствии постоянного внешнего поля

$$\frac{d\sigma_c}{dx} = \frac{4\alpha^2}{m^2 si} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau - i0} e^{-i\rho(\tau)} \Big\{ (1+\beta\chi^2\tau^2) F +$$

$$+ \frac{4i}{s^3} u\beta\chi^2 \Lambda_1 z g_2(z) + \frac{\beta}{2} g_3(z) + 2\Big(1 + \frac{u}{2}\Big) \lambda_2(\vec{\zeta}\,\vec{v}) x \times \tag{16}$$

$$\times \Big[\frac{4u}{s^3} \chi^2 g_1(z) + \frac{i}{z} g_2(z) \Big] - x(\vec{\zeta}\,\vec{\chi}\,\vec{v}) \Big[i\frac{z}{s} F -$$

$$- \frac{2u}{s^2} \Lambda_1 g_2(z) \Big] + \frac{2u}{s^2} x(\vec{\zeta}\,\vec{\chi}) \lambda_3 g_2(z) \sin 2\varphi_1 \Big\} ,$$

где

$$\rho(\tau) = u\tau \Big(1 + \chi^2 \frac{\tau^2}{3}\Big), \quad \beta = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}, \quad z = s\tau ,$$

$$F = \frac{8u^2}{s^4} \chi^2 \Lambda_1 g_1(z) + \frac{2iu}{sz} g_3(z) + iu\frac{z}{s} ,$$

$$g_1(z) = 1 + \frac{z^2}{4} + \Big(\frac{z^2}{4} - 1\Big) \cos z - z \sin z , \tag{17}$$

$$g_2(z) = 1 - \cos z - \frac{z \sin z}{2}, \quad g_3(z) = \cos z - 1 , \quad \Lambda_1 = 1 + \lambda_3 \cos 2\varphi_1 ,$$

φ_1 — угол между векторами $\vec{\chi}$ и $\vec{\xi}_1$. Положив в (16), (17) $\lambda_{2,3} = 0$, получим сечение комптон-эффекта для неполяризованных начальных фотонов. Отметим, что подынтегральное выражение в (16) не имеет особенностей при $\tau \to 0$, поэтому интеграл имеет обычный смысл. Однако при получении асимптотик в случае слабого поля удобно пользоваться контурным представлением (16).

Влияние внешнего поля на комптоновское рассеяние в целом определяется величиной параметра $\mu = \chi/s$. При $\mu \ll 1$ внешнее поле не успевает существенно изменить движение заряженных частиц за характерные времена процесса $T \sim 1/q_0$

$$\frac{\Delta p_\perp}{m} \sim \frac{eF_\perp T}{m} \sim \frac{eF_\perp}{mq_0} \sim \frac{\chi}{s} \equiv \mu \ll 1 . \tag{18}$$

Надо сказать, что даже при выполнении условия $\mu \ll 1$ в области максимума спектрального распределения при $u \simeq s$ влияние внешнего поля становится существенным при достаточной малости величины $\delta = 1 - u/s$. Это связано с тем, что значение $u = s$ соответствует комптоновскому рассеянию назад, а фотон с частотой ω близкой к граничному значению $\varepsilon s/(s+1)$ формируется за время $T/\delta \sim 1/(q_0\delta)$ $(\tau \sim 1/(s\delta))$. Тогда в фазе $\rho(\tau)$ (17) зависящим от поля членом можно пренебречь только при условии

$$u\chi^2\tau^3 \sim \frac{\chi^2}{s^2\delta^3} = \frac{\mu^2}{\delta^3} \ll 1 . \tag{19}$$

Таким образом параметром влияния внешнего поля на спектральное распределение комптоновского рассеяния вблизи границы частот является величина $\mu\delta^{-3/2}$. Если параметр μ мал $(\mu \ll 1)$, но при этом также мала величина δ, так что $\delta \lesssim \mu^{2/3}$, главный член в (16) существенно упрощается

$$\frac{d\sigma_c}{dx} = \frac{\alpha^2}{im^2 s} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau - i0} e^{i(z - \rho(\tau))} [\beta - x(2+u)\lambda_2(\vec{\zeta}\vec{v})] . \tag{20}$$

Используя табличные интегралы (см. [12], стр. 142), получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau - i0} e^{i(z-\rho(\tau))} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{3}\,\pi} \displaystyle\int_a^\infty K_{1/3}(y)\, dy , & u \geqslant s \\ 1 - \dfrac{1}{3} \displaystyle\int_a^\infty (J_{1/3}(y) + J_{-1/3}(y))\, dy , & u \leqslant s \end{cases}$$

$$a = \frac{2u}{3\chi} \Big| \frac{s}{u} - 1 \Big|^{3/2} \simeq \frac{2s}{3\chi} \Big| 1 - \frac{u}{s} \Big|^{3/2} \tag{21}$$

Из последнего выражения видно, что присутствие поля «размывает» границу частот в области $u > s$, заменяя ее экспоненциальным падением при $a \gg 1$. При $u = s$ высота спектральной кривой составляет треть от максимального значения в отсутствии поля и не зависит от величины внешнего поля. В области $u < s$ при $a \gg 1$

влияние поля на комптоновское рассеяние мало, что находится в согласии с качественным анализом, приведенным выше.

Поскольку

$$\int\limits_0^\infty dy \int\limits_{2y^{3/2}/3\mu}^\infty dz \left[\frac{\sqrt{3}}{\pi} K_{1/3}(z) - J_{1/3}(z) - J_{-1/3}(z)\right] = 0$$

внешнее поле в рассматриваемой области частот в основном только перераспределяет спектральную вероятность процесса, сохраняя ее полную величину. Это позволяет при вычислении поправок к полному сечению в формуле (16) проводить разложение по $\chi\tau$ при всех значениях x. Оставляя первые члены разложения по μ и χ τ, интеграл по τ возьмем при помощи теории вычетов, после чего интеграл по x берется элементарно. В результате получаем для сечения комптон-эффекта с учетом полевых поправок следующее выражение

$$\begin{aligned}\sigma_c = \frac{\pi r_e^2}{s}\Big\{ & 2\left(1 - \frac{4}{s} - \frac{8}{s^2}\right)L + 1 + \frac{16}{s} - \frac{1}{z^2} + \\ & + \lambda_2(\vec{\zeta}\,\vec{v})\left[2\left(1 + \frac{2}{s}\right)L - 5 + \frac{2}{z} - \frac{1}{z^2}\right] + \\ & + 4\mu^2\Big[\frac{16}{s^2}(L - s) - 2 + \frac{59}{3z} - \frac{59}{3z^2} + \frac{13}{z^3} - \\ & - \frac{1}{z^4} - \frac{2}{z^5} + 2\lambda_3 \cos(2\varphi_1)\left(\frac{8}{s^2}(L - s) - 2 + \frac{11}{z} - \frac{11}{z^2} + \right. \\ & \left. + \frac{9}{z^3} - \frac{3}{z^4}\right) + \lambda_2(\vec{\zeta}\,\vec{v})\left(\frac{4}{s}(L - s) + 4 - \frac{7}{3z} - \right. \\ & \left. - \frac{19}{3z^2} + \frac{11}{3z^3} + \frac{3}{z^4} - \frac{2}{z^5}\right)\Big] + 4(\vec{\zeta}\,\vec{\chi}\,\vec{v})\left[\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3}\right] - \\ & - 8\lambda_3[(\vec{\zeta}\,\vec{\chi}\,\vec{v})\cos(2\varphi_1) + (\vec{\zeta}\,\vec{\chi})\sin(2\varphi_1)] \times \\ & \times\left(\frac{1}{s^2}(L - s) + \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2z^3}\right)\Big\}\end{aligned} \tag{22}$$

где $z = 1 + s$, $L = \ln(1 + s)$, λ_3 — степень линейной поляризации, λ_2 — степень циркулярной поляризации начального фотона, $\vec{\zeta}$ — поляризация начального электрона. При $\vec{\chi} = 0$ выражение (22) переходит в сечение поляризованного комптон-эффекта (см., например, [10, 11]). Поправки к формуле Клейна — Нишины для неполяризо-

ванных фотонов были получены в работе [13] и согласуются с формулой (22), если в ней положить $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

В другом предельном случае, когда длина формирования фотона в постоянном поле $l_c = \frac{m}{eF_\perp}\left(1 + \frac{\chi}{u}\right)^{1/3}$ много меньше длины волны $\lambdabar = 1/q_0$, поле волны можно считать постоянным на этой длине. Это соответствует разложению по степеням $s\tau$ в формулах (8), (12)

$$s\tau \sim \frac{l_c}{\lambdabar} = \frac{mq_0}{eF_\perp}\left(1 + \frac{\chi}{u}\right)^{1/3} = \frac{s}{\chi}\left(1 + \frac{\chi}{u}\right)^{1/3} \ll 1. \tag{23}$$

При этом вероятность процесса определяется формулами магнитотормозного излучения в суммарном поле (13). В случае неполяризованных электронов эта вероятность имеет вид

$$\frac{dW_\gamma}{dx} = \frac{\alpha m^2}{\pi\varepsilon\sqrt{3}}\left(\beta K_{2/3}(z_1) - \int\limits_{z_1}^\infty K_{1/3}(y)\,dy\right) \tag{24}$$

$$\beta = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}, \quad z_1 = \frac{2u}{3\chi_1}, \quad \vec{\chi}_1 = \vec{\chi} + \vec{\xi}(\varphi)\frac{s}{2}.$$

Условием применимости выражения (24), в соответствии с формулой (23), является большая вличина параметра $\mu_1 = \frac{\chi_1}{s}(\mu + \xi_0) \gg 1$. Если интенсивность волны при этом достаточно мала ($\xi_0 \ll \mu$), то в формуле (24) можно провести разложение по полю волны и в соответствии с формулами (14), (15) перейти к сечению комптоновского процесса. В результате получаем, например, для неполяризованного комптон-эффекта следующее выражение

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_c}{dx} = \frac{r_e^2}{2\sqrt{3}\,\mu^2 s}\Big\{ & \left[(\beta - 1)z^2 + \frac{4}{9}\beta\right]K_{2/3}(z) + \\ & + \frac{2}{3}zK_{1/3}(z)\Big\}, \quad z = \frac{2u}{3\chi}.\end{aligned} \tag{25}$$

При выводе формулы (25) мы использовали рекуррентные соотношения для бесселевых функций, с помощью которых полное сечение комптоновского рассеяния можно представить в виде

$$\sigma_c = \frac{r_e^2}{6\sqrt{3}\,\mu\chi} \int_0^\infty \left(\frac{4}{9} + z^2\right) \frac{5u^2+7u+5}{(1+u)^3} K_{2/3}(z)\,du\,. \tag{26}$$

В случае $\chi \ll 1$ в интеграл (26) вклад дают $u \sim \chi \ll 1$, а само сечение имеет вид

$$\sigma_c = \frac{5\pi}{4\sqrt{3}} \frac{r_e^2}{\mu}; \quad \chi \ll 1, \quad \mu \gg 1\,. \tag{27}$$

При $\chi \gg 1$ **вклад** дают $u \sim 1$ и можно воспользоваться асимптотиками бесселевых фунций при малых значениях аргумента $(z \ll 1)$. В этом случае

$$\sigma_c = \frac{28}{81} \frac{\Gamma(2/3)}{3^{1/3}} \left(\frac{s}{\chi^{2/3}}\right)^2 \frac{\pi r_e^2}{s}, \quad \chi \gg 1\,. \tag{28}$$

Из формулы (28) видно, что в случае $\chi \gg 1$, $s \gg 1$ параметром разложения является величина $s/\chi^{2/3}$, что находится в соответствии с формулой (23).

4. РОЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОН-ПОЗИТРОННОЙ ПАРЫ ФОТОНОМ

Спектральная вероятность рождения пары получается из вероятности излучения при помощи следующих замен $\varepsilon \to -\varepsilon$, $\omega \to -\omega$, $\zeta \to -\zeta$, $\omega^2 d\omega \to -\varepsilon^2 d\varepsilon$ (см., например, [9, 11]). При этом $u \to -(1-x)^{-1}$

$$\mu = \chi/s \to \varkappa/(4\Lambda)\,, \quad \varkappa^2 = -\frac{e^2}{m^6}(F^{\mu\nu}k_\nu)^2\,,$$

$$u/s \to (4x(1-x)\Lambda)^{-1} = \mathrm{ch}^2 y/\Lambda\,,$$

$$x = \varepsilon/\omega = (1+\mathrm{th}\,y)/2\,, \quad \Lambda = qk/(2m^2)\,.$$

В соответствии с анализом, проведенным выше, при $\varkappa \ll \Lambda$ поле существенно влияет на процесс рождения пары двумя фотонами только в припороговой области, когда $\mathrm{ch}^2 y \simeq \Lambda$. В этом случае сечение двухфотонного процесса имеет вид

$$\frac{d\sigma_{\gamma\gamma}}{dy} = \frac{\pi r_e^2}{\Lambda}\left[1 - \frac{1}{2\,\mathrm{ch}^2 y} + \frac{1}{\Lambda}\left(1 - \frac{\mathrm{ch}^2 y}{\Lambda}\right)\right]\left[\vartheta(\Lambda - \mathrm{ch}^2 y) \times\right.$$

$$\times \left(1 - \frac{1}{3}\int_b^\infty dx(J_{1/3}(x) + J_{-1/3}(x))\right) +$$

$$\left. + \frac{\vartheta(\mathrm{ch}^2 y - \Lambda)}{\pi\sqrt{3}} \int_b^\infty K_{1/3}(x)\,dx\right], \quad b = \frac{8\,\mathrm{ch}^2 y}{3\varkappa}\left|\frac{\Lambda}{\mathrm{ch}^2 y} - 1\right|^{3/2},$$

где $\vartheta(x) = 1$, если $x > 0$; и $\vartheta(x) = 0$, если $x < 0$. Рассмотрим ситуацию, когда $\Lambda < 1$, т. е. вне кинематической области рождения пары в отсутствии поля и при экспоненциальном подавлении однофотонного процесса в постоянном поле $(\varkappa \ll 1)$. Используя формулы (20), (21), (29), получаем для сечения двухфотонного процесса следующее выражение

$$\frac{d\sigma_{\gamma\gamma}}{dy} \simeq \frac{r_e^2}{2\sqrt{3}} \int_{b_1}^\infty K_{1/3}(z)\,dz\,;$$

$$b_1 = \frac{8}{3\varkappa}(\Delta + y^2)^{3/2}, \quad \Delta = 1 - \Lambda \ll 1, \quad y \ll 1\,. \tag{30}$$

Интегрируя в (30) по частям получим полное сечение при $\Lambda < 1$

$$\sigma_{\gamma\gamma} = r_e^2 \left(\frac{\Delta}{3}\right)^{1/2} \int_{z_0}^\infty \left[\left(\frac{z}{z_0}\right)^{2/3} - 1\right]^{1/2} K_{1/3}(z)\,dz$$

$$z_0 = (8\Delta^{3/2})/(3\varkappa)\,. \tag{31}$$

В предельных случаях $z_0 \gg 1$ и $z_0 \ll 1$ соответственно имеем

$$\sigma_{\gamma\gamma} \simeq \frac{\pi r_e^2}{6} \frac{\Delta^{1/2}}{z_0^{5/6}} e^{-z_0}, \quad z_0 \gg 1$$

$$\sigma_{\gamma\gamma} \simeq \frac{r_e^2}{4}(6\varkappa)^{1/3} \sqrt{\frac{\pi}{3}}\ \Gamma\left(\frac{5}{6}\right). \tag{32}$$

Как следует из формул (31), (32) величина $\sigma_{\gamma\gamma}/\varkappa^{1/3}$ вблизи порога $(\Delta \ll 1)$ имеет скейлинговую форму, зависящую только от z_0, т.е. от определенной комбинации Δ и $\varkappa$. График этой функции приведен на рис. 1. В том случае, когда канал двухфотонного процесса достаточно хорошо открыт $\Lambda - 1 \gtrsim 1$, поправки к полному сечению малы по параметру $(\varkappa/\Lambda)^2$.

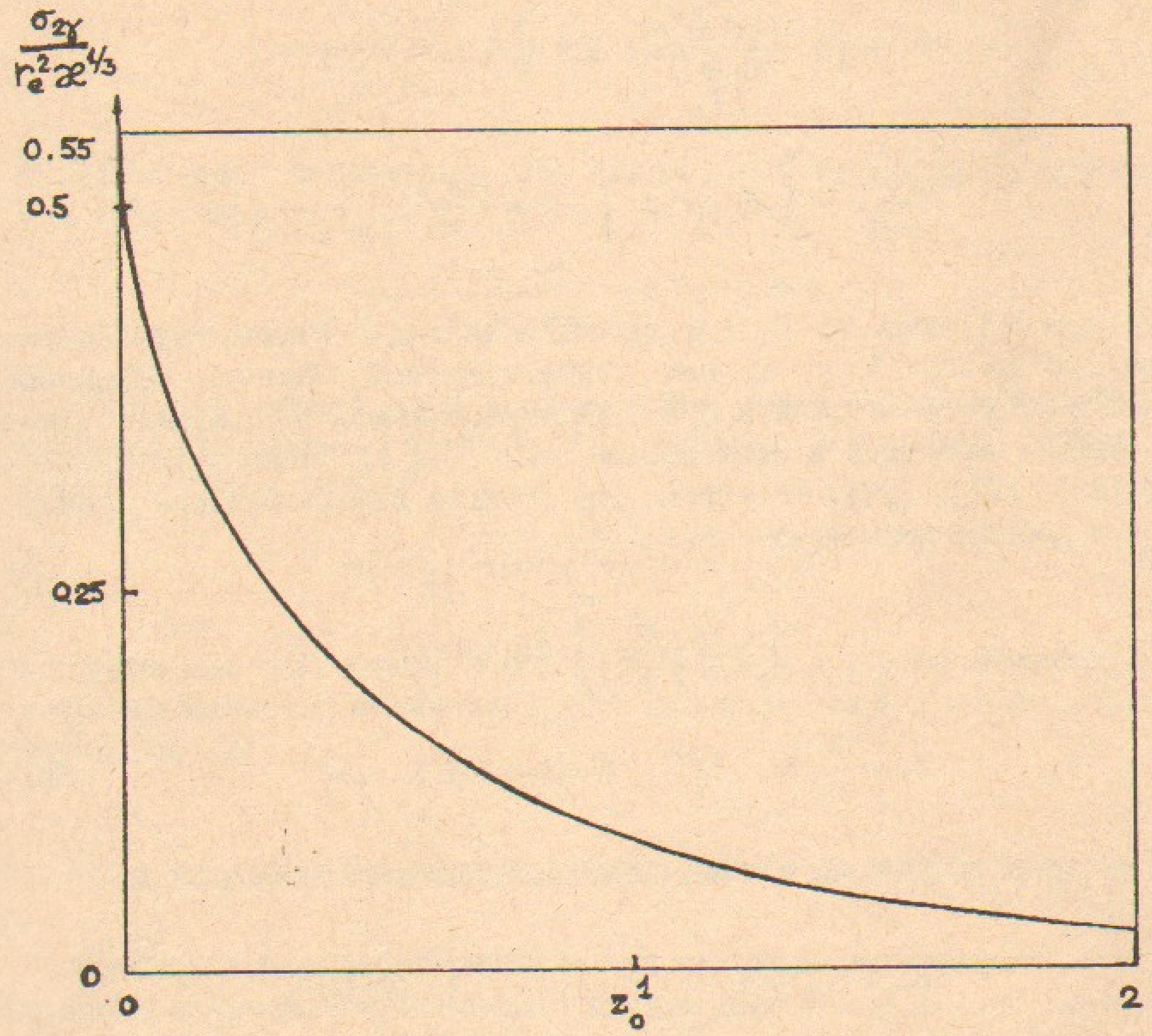

Рис. 1.

В другом предельном случае $\varkappa \gg \Lambda$ дифференциальное сечение двухфотонного рождения пары можно получить из формулы (25) при помощи указанных выше замен. Полное сечение в этом случае можно представить в виде

$$\sigma_{\gamma\gamma} = \frac{2r_e^2\Lambda}{3\sqrt{3}\,\varkappa^2}\int_0^1 \frac{9-v^2}{1-v^2}\left(\frac{4}{9}+\lambda^2\right)K_{2/3}(\lambda)\,dv\,,$$

$$\lambda = (3\varkappa(1-v^2)/8)^{-1}. \qquad (33)$$

При $\varkappa \gg 1$ в интеграле по v можно воспользоваться асимптотикой $K_{2/3}$ (λ) при малых значениях аргумента λ. В результате получаем

$$\sigma_{\gamma\gamma} \simeq \frac{20}{63}\left(\frac{2}{3}\right)^{1/3}\frac{\Gamma(5/6)}{\Gamma(7/6)}\frac{\Lambda}{\varkappa^{4/3}}\pi r_e^2. \qquad (34)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные выше результаты основываются на двух существенных предположениях — релятивистском характере поперечного движения частицы и однородности поля F_{ex} на длине формирования рассматриваемых процессов. В указанных рамках найденные выражения зависят от локальных значений координаты, скорости и спина частицы, что позволяет включить радиационные эффекты в уравнения движения. Это дает возможность, в частности, определить характеристики излучения частицы за все время ее движения в поле.

Авторы благодарны А.И. Мильштейну за ценные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Redmond P.* // Jour. Math. Phys., 1965, v.6, p.1163.
2. *Баталин И.А., Фрадкин Е.С.* // ТМФ, 1970, т.5, с.190.
3. *Baier V.N. and Milstein A.I.* // Jour. Phys. 1978, v.A11, p.297.
4. *Байер В.Н., Мильштейн А.И.* // ЖЭТФ, 1978, т.75, с.390.
5. *Тернов И.М., Халилов В.Р., Родионов В.М.* Взаимодействие заряженных частиц с сильным электромагнитным полем. М.: Издательство Московского университета, 1982.
6. *Байер В.Н., Катков В.М.* //ЖЭТФ, 1967, т.53, с.1478; 1968, т.55, с.1542.
7. *Байер В.Н., Катков В.М., Страховенко В.М.* // ЖЭТФ, 1987, т.92, с.1228.
8. *Ритус В.И.* Сб. Проблемы теоретической физики. М.: Наука, 1972, с.306.
9. *Байер В.Н., Катков В.М., Фадин В.С.* Излучение релятивистских электронов. М.: Атомиздат, 1973.
10. *Ритус В.И.* // Квантовая электродинамика явлений в интенсивном поле. Труды ФИАН. — 1979. — т.111. — с.5.
11. *Байер В.Н., Катков В.М., Страховенко В.М.* Электромагнитные процессы при высокой энергии в ориентированных монокристаллах. Новосибирск: Наука, 1989, с.355.
12. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1963.
13. *Жуковский В.Ч., Никитина Н.С.* // ЖЭТФ, 1973, т.64, с.1169.

В.Н. Байер, В.М. Катков, В.М. Страховенко

Квазиклассическая теория электромагнитных процессов в поле плоской волны и постоянном поле

Ответственный за выпуск С.Г.Попов

Работа поступила 2 апреля 1991 г.
Подписано в печать 8.04 1991 г.
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 1,5 печ.л., 1,2 уч.-изд.л.
Тираж 200 экз. Бесплатно. Заказ № 32.

---

*Набрано в автоматизированной системе на базе фотонаборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и отпечатано на ротапринте Института ядерной физики СО АН СССР,
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.*