4

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

Ю.И. Эйдельман, В.Е. Якименко

РАСЧЕТ ОРБИТАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ МАГНИТНОЙ СИСТЕМЕ НАКОПИТЕЛЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕХНИКИ ЛИ ОПЕРАТОРОВ

ПРЕПРИНТ 91-6

НОВОСИБИРСК

Расчет орбитального движения в нелинейной магнитной системе накопителя с использованием техники Ли операторов.

Ю.И.Эйдельман, В.Е.Якименко

Институт ядерной физики
630090 Новосибирск, СССР

Обсуждено применение техники Ли операторов для решения уравнений орбитального движения частицы в нелинейном поле накопителя. Получены выражения для Ли операторов третьего порядка для различных элементов магнитной структуры. Рассмотрено действие экспоненциального Ли разложения на вектор Z динамических переменных. Обсуждены проблемы компьютерного вычисления Ли операторов и сохранения точности в этих вычислениях. Приведено разложение гамильтониана орбитального движения частицы вплоть до членов четвертого порядка по компонентам вектора Z.

The orbital motion calculation using Lie method in collider nonlinear magnetic field. Lie operator method to solving the orbital motion equation charge particle in nonlinear field of collider is obtained. Expression for Lie operators of third power for different magnetic structure elements are calculated. Action of exponential Lie operator on dynamical variables vector Z are considered. The problems of computer calculation of Lie operator and accuracy preservation in this calculation are discussed. The first four orders of orbital motion gamiltonian series are obtained.

Введение

Метод Ли операторов нашел в последнее время довольно широкое распространение для решения различных задач ускорительной физики [1-5]. Использование этого метода позволило продвинуться в рассмотрении таких типичных проблем, как трекинг в различных нелинейных магнитных структурах накопителей [5], расчеты динамических апертур [2] и т.п. Уже освоены методы вычисления Ли операторов высоких порядков для отдельных элементов накопителей [3]. Однако, при этом использовались разложения гамильтониана, в которых были учтены не все слагаемые (например, [4]). Это привело к тому, что полученные Ли операторы не учитывают нелинейное действие краевых полей синхротронного магнита, что особенно существенно для электронных накопителей. Настоящая работа "ликвидирует" этот пробел, а также содержит ряд других результатов, отсутствующих в вышеуказанных публикациях. В первую очередь это относится к найденному точному выражению действия экспоненциального разложения Ли оператора третьего порядка на вектор динамических переменных.

План работы следующий. Сначала приводятся основные сведения о Ли операторах. Далее методом Ли операторов решаются уравнения движения Гамильтона. В следующем разделе находится результат действия Ли разложений на вектор динамических переменных. Затем обсуждаются проблемы объединения Ли разложений. Следующий раздел посвящен получению разложения гамильтониана вплоть до членов четвертого порядка. Получение Ли операторов и обсуждение задачи сохранения точности при программировании их вычислений, содержатся в последнем разделе. В приложении приведены результат разложения гамильтониана до четвертого порядка и Ли операторы третьего порядка для различных элементов магнитной структуры накопителя.

§ 1. Основные сведения о Ли операторах

Вектор динамических переменных $\mathbf{z}$, как известно, представляет собой совокупность координат в 6-ти мерном фазовом пространстве: $(x, p_x, z, p_z, \sigma, p_\sigma)$. Под функцией динамических переменных будем подразумевать любую функцию, зависящую от компонент $\mathbf{z}$, в том числе и сам вектор $\mathbf{z}$. Ли оператором $:F:$, связанным с функцией f и действующим на произвольную функцию g динамических переменных, назовем оператор, вычисляемый как скобки Пуассона:

$$:F:g=\{f,g\}=\frac{df}{dq_i}\cdot\frac{dg}{dp_i}-\frac{dg}{dq_i}\cdot\frac{df}{dp_i}.$$

Далее малыми латинскими буквами обозначаются собственно функции, а большими, заключенными в двоеточия, - соответствующие им Ли операторы. Ли разложением назовем бесконечную сумму вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \,:F:^n,$$

где $:F:^n$ - степень Ли оператора, показывающая кратность его действия на функцию ($:F:^0 g=g,\ \ :F:^1 g=:F:g=\{f,g\},\ \ :F:^2 g=\ :F:(:F:g)=\{f,\{f,g\}\}$ и т.д.). Функции от Ли операторов определяются соответствующими им разложениями в ряды Тейлора. Частными примерами Ли разложений является экспоненциальное

$$\exp(:F:)\ =\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{:F:^n}{n!}$$

и логарифмическое

$$\log(:F:)\ =\ \log(1-(1-:F:))\ =\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-:F:)^n}{n}.$$

Приведем ряд полезных свойств Ли операторов [2].

Линейность:

$$:f:+:g:=:(f+g):\ ;$$

ассоциативность:

$$:f:(gh)=h:f:g+g:f:h\ ;$$

правило Лейбница:

$$:f:^n(gh)=\sum_{m=0}^{n} C_m^n(:f:^m g)(:f:^{n-m}h),\ \text{где}\ C_m^n=\frac{n!}{m!(n-m)!}\ ;$$

тождество Якоби:

$$:f:(:g:h)+:g:(:h:f)+:h:(:f:g)\ =\ 0.$$

Некоторые свойства экспоненциальных Ли разложений:

$$\exp(:f:)(gh)\ =\ h\ \exp(:f:)g\ +\ g\ \exp(:f:)h\ ;$$

$$\exp(:f:)\ g(\mathbf{z})\ =\ g(\exp(:f:)\mathbf{z})\ ;$$

$$\exp(:f:)\ :g:^m\ \exp(-:f:)=\ :\exp(:f:)g:^m\ ;$$

$$\exp(:f:)\ \exp(:g:)\ \exp(-:f:)=\ \exp(:\exp(:f:)g:)\ .$$

Формула Кемпбелла-Бакера-Хаусдорфа:

$$\exp(:f:)\ \exp(:g:)\ =\ \exp(:h:)\ ,\ \text{где}$$

$$h\ =\ f\ +\ g\ +\ \frac{:f:g}{2}\ +\ \frac{:f:^2g\ +\ :g:^2f}{12}\ +\ \ldots\ .$$

§ 2. Решение гамильтоновых уравнений движения методом Ли операторов

Нетрудно видеть, что гамильтоновы уравнения движения

$$\frac{dX_i}{dt}=\frac{dh}{dP_i}=\{X_i,h\},\qquad \frac{dP_i}{dt}=-\frac{dh}{dX_i}=\{P_i,h\},$$

где h-функция Гамильтона, записываются через соответствующий ей Ли оператор H:

$$\frac{dZ_i}{dt}=\frac{dZ_i}{dq_i}\cdot\frac{dq_i}{dt}+\frac{dZ_i}{dp_i}\cdot\frac{dp_i}{dt}=\frac{dZ_i}{dq_i}\cdot\frac{dh}{dp_i}-\frac{dZ_i}{dp_i}\cdot\frac{dh}{dq_i}=(Z_i,h)=-:H:Z_i.$$

Запишем теперь решение $\mathbf{z}_t$ гамильтоновых уравнений движения в момент времени t в виде ряда Тейлора (в предположении, что гамильтониан не зависит от времени явно):

$$\mathbf{z}_t=\mathbf{z}_0+\frac{d\mathbf{z}_0}{dt}\,t+\frac{d^2\mathbf{z}_0}{dt^2}\,t^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{d^n\mathbf{z}_0}{dt^n}t^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n(-:H:)^n}{n!}\,\mathbf{z}_0=$$

$$=\exp(-t:H:)\mathbf{z}_0.$$

Таким образом, решение гамильтоновых уравнений движения выражается через экспоненциальное Ли разложение.

Разобьем оператор $:H:$ на однородные полиномы $:H_n:$ по компонентам вектора динамических переменных $\mathbf{z}$:

$$:H: = \sum_{n=2}^{\infty} :H_n: .$$

Для решения уравнений движения удобно найти преобразование вида $\ldots\exp(-:F_4:)\exp(-:F_3:)\exp(-:F_2:)$, эквивалентное преобразованию $\exp(:-t\Sigma H_n:)$, где функции f_2, f_3, $f_4, \ldots$, определяющие операторы $:F_2:$, $:F_3:$, $:F_4:, \ldots$, - однородные полиномы второй, третьей, четвертой и т.д. степеней по $\mathbf{z}$. Ограничимся, например, в гамильтониане степенями не выше четвертой (октупольные слагаемые), тогда

$$\exp(:-t\Sigma\ H_n:)=\exp(-:F_4:)\exp(-:F_3:)\exp(-:F_2:).$$

Отметим, что оператор $:H_2:$ не изменяет степень операнда, оператор $:H_3:$ повышает ее на единицу, а $:H_4:$ увеличивает ее на двойку. Обозначим оператор $\exp(:-t\Sigma\ H_n:)$ через M и разделим его на $M_rM_0= \exp(-:F_r:)\exp(-:F_2:)$. Тогда с одной стороны :

$$\frac{dM}{ds} = M:H: =M_rM_0:(-H_2-H_r)=$$

$$=M_rM_0(-H_0)+M_rM_0(-H_r)=$$

$$=M_r\frac{dM_0}{ds}+M_rM_0(-H_r),$$

а с другой -

$$\frac{dM}{ds}=M_r\frac{dM_0}{ds}+\frac{dM_r}{ds}M_0,$$

так что

$$\frac{dM_r}{ds}M_0 = M_rM_0(-H_r).$$

Отсюда

$$\frac{dM_r}{ds} = M_rM_0(-H_r)M_0^{-1},$$

или, используя свойство Ли преобразований

$$M_0:g(\mathbf{Z}):M_0^{-1}=:g(M_0\mathbf{Z}):,$$

получим

$$\frac{dM_r}{ds} = M_r(-H_r(M_0\mathbf{Z})).$$

Интегрируя обе части последнего соотношения, найдем (J - единичный оператор):

$$M_r = J + \int_0^s ds'M_r(s')(-H_r(M_0\mathbf{Z},s')).$$

Решение этого интегрального уравнения легко получается в виде ряда, если в подинтегральное выражение последовательно подставлять правую часть :

$$M_r = J+\int_0^s ds'[J+\int_0^{s'} ds''M_r(s'')(-H_r(M_0\mathbf{Z},s''))](-H_r(M_0\mathbf{Z},s'))=$$

$$= J + \int_0^s ds'(-H_r(M_0\mathbf{Z},s'))+$$

$$+\int_0^s ds'\int_0^{s'} ds''M_r(s'')(-H_r(M_0\mathbf{Z},s''))\ (-H_r(M_0\mathbf{Z},s'))=$$

$$=J + \int_0^s ds'(-H_r(M_0\mathbf{Z},s')) +$$

$$+\int_0^s ds'\int_0^{s'} ds''\ [J + \int_0^{s''} ds'''M_r(s''')(-H_r(M_0\mathbf{Z},s'''))]\cdot$$

$$\cdot(-H_r(M_0\mathbf{Z},s''))(-H_r(M_0\mathbf{Z},s'))=$$

$$=J + \int_0^s ds'(-H_r(M_0\mathbf{Z},s')) +$$

$$+\int_0^s ds'\int_0^{s'} ds''(-H_r(M_0\mathbf{Z},s''))(-H_r(M_0\mathbf{Z},s')) +$$

$$+\int_0^s ds'\int_0^{s'} ds''\int_0^{s''} ds'''M_r(s''')(-H_r(M_0\mathbf{Z},s'''))\cdot$$

$$\cdot(-H_r(M_0\mathbf{Z},M_0\mathbf{S},s''))(-H_r(M_0\mathbf{Z},M_0\mathbf{S},s'))=\ldots\ .$$

Существует простой критерий обрыва этого ряда. Он связан с порядком его членов по степеням $\mathbf{z}$. В самом деле, оператор H_r повышает степень операнда как минимум на единицу. Поэтому, ограничиваясь членами со степенью не выше второй, можно отбросить слагаемые, содержащие H_r^3, и оборвать ряд :

$$M_r = J + \int_0^s ds'(-H_r(M_0Z,s')) + \int_0^s ds' \int_0^{s'} ds''(-H_r(M_0Z,s''))(-H_r(M_0Z,s')). \qquad (*)$$

M_r представляет собой произведение экспоненциальных операторов $\exp(-:F_4:)\exp(-:F_3:)\ldots$.Так как оператор $:F_3:$ повышает степень операнда на единицу, а оператор $:F_4:$ - на двойку, то, разлагая экспоненты в ряды и ограничиваясь членами не выше второго порядка, получим :

$$M_r = M_2M_1 = \exp(-:F_4:)\cdot\exp(-:F_3:) =$$

$$=(J - :F_4: + \frac{:F_4:^2}{2} - \ldots)\cdot(J - :F_3: + \frac{:F_3:^2}{2} - \ldots)=$$

$$= J - :F_3: - :F_4: + \frac{:F_3:^2}{2}.$$

Сравнивая с $(*)$, найдем :

$$:F_3: = - \int_0^s ds'(-H_3(M_0Z,s'))$$

и

$$:F_4: = \frac{:F_3:^2}{2} - \int_0^s ds'(-H_4(M_0Z,s')) - \int_0^s ds' \int_0^{s'} ds''(-H_3(M_0Z,s''))(-H_3(M_0Z,s')).$$

Но

$$:F_3:^2 = \int_0^s ds' \int_0^s ds''(-H_3(M_0Z,s''))(-H_3(M_0Z,s')),$$

поэтому, разбивая второе интегрирование на две области (от 0 до s' и от s' до s) и делая замену переменных во второй, получим :

$$:F_3:^2 = \int_0^s ds' \int_0^{s'} ds''(-H_3(M_0Z,s''))(-H_3(M_0Z,s')) + \int_0^s ds' \int_0^{s'} ds''(-H_3(M_0Z,s'))(-H_3(M_0Z,s'')).$$

Поэтому для $:f_4:$ находим окончательно :

$$:F_4: = - \int_0^s ds'(-H_4(M_0Z,s')) - \frac{1}{2}\int_0^s ds' \int_0^{s'} ds''[-H_3(M_0Z,s''),-H_3(M_0Z,s')],$$

где [,] - коммутатор операторов.

Таким образом, оператор M, определяющий решение Z_t гамильтоновых уравнений движения, равен

$$M = M_rM_0 = \exp(-:F_4:)\cdot\exp(-:F_3:)\cdot\exp(-:F_2:) \approx$$

$$\approx (J - :F_3: - :F_4: + \frac{:F_3:^2}{2}) M_0.$$

После нахождения Ли операторов Ли в зависимости от решаемой задачи возникает проблема либо записи результата действия его на вектор Z, либо "объединения" Ли операторов.

§ 3. Действие Ли оператора на вектор динамических переменных

Выше было показано, что решение гамильтоновых уравнений движения выражается через экспоненциальное Ли разложение, которое, в свою очередь, может быть представлено как произведение экспоненциальных Ли разложений, каждому из которых соответствует однородный полином степени n в гамильтониане $(\ldots\exp(-:F_4:)\exp(-:F_3:)\exp(-:F_2:))$. Рассмотрим в связи с этим действие экспоненциального Ли разложения на вектор динамических переменных Z.

Известно [2], что оператор $\exp(:F_2:)$ суммируется аналитически и образует для каждого конкретного элемента магнитной структуры ускорителя матрицу T^f (6x6) обычного линейного преобразования. Результат действия оператора $\exp(:F_3:)$ находится по более сложным рекуррентным формулам. Отметим, что результат действия $:F_3:$ на z_o представляет собой квадратичную функцию, которую в индексах можно представить в виде: $:F_3:z_n=3f_{ijk}J_{kn}z_iz_j$ *), где f_{ijk}-коэффициент кубического полинома f_3. Для упрощения формул удобно ввести конструкцию $B_{ijn}=3f_{ijk}J_{kn}$. Рекуррентные формулы преобразования $\exp(:F_3:)$ в этих обозначениях принимают вид:

$$\exp(:F_3:)z_o=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{(n)}}{n!}, \text{ где}$$

$$z_i^{(n)}=\sum_{m=0}^{n-1}C_{n-1}^{m}\cdot B_{ijk}z_j^{(m)}\cdot z_k^{(n-m-1)}. \qquad (*)$$

Действительно, так как

$$\exp(:F_3:)z_o=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{:F_3:^n}{n!}z_o,$$

то обозначим $:F_3:^n z_o$ через $z^{(n)}$ и докажем (*) по индукции. Для n=0 имеем по определению:

$$:F_3:^0 z_n=z_n=z_n^{(0)}.$$

Пусть выражение (*) справедливо для некоторого n. Тогда:

$$z_i^{(n+1)}=:F_3:z_i^{(n)}=\sum_{k=o}^{n-1}C_{n-1}^{k}\cdot B_{lmi}(:F_3:z_l^{(k)}\cdot z_m^{(n-1-k)}+$$

$$+z_l^{(k)}\cdot :F_3:z_m^{(n-1-k)})=\sum_{k=o}^{n-1}C_{n-1}^{k}\cdot B_{lmi}\cdot(z_l^{(k+1)}\cdot z_m^{(n-1-k)}+$$

$$+z_l^{(k)}\cdot z_m^{(n-k)})=C_{n-1}^{o}\cdot B_{lmi}\cdot(z_l^{(1)}\cdot z_m^{(n-1)}+z_l^{(o)}\cdot z_m^{(n)})+$$

$$+C_{n-1}^{1}\cdot B_{lmi}\cdot(z_l^{(2)}\cdot z_m^{(n-2)}+z_l^{(1)}\cdot z_m^{(n-1)})+\dots+$$

$$+C_{n-1}^{n-1}\cdot B_{lmi}\cdot(z_l^{(n-1)}\cdot z_m^{(1)}+z_l^{(n-2)}\cdot z_m^{(2)})+$$

$$+C_{n-1}^{n}\cdot B_{lmi}\cdot(z_l^{(n)}\cdot z_m^{(o)}+z_l^{(n-1)}\cdot z_m^{(1)})=C_{n-1}^{o}\cdot B_{lmi}\cdot z_l^{(o)}\cdot z_m^{(n)}+$$

*) Используя свойства скобок Пуассона $\{X_i,P_j\}=\sigma_{ij}$, $\{X_i,X_j\}=\{P_i,P_j\}=0$, определим матрицу J : $\{z_i,z_j\}=J_{ij}$.

$$+(C_{n-1}^{o}+C_{n-1}^{1})\cdot B_{lmi}\cdot z_l^{(1)}\cdot z_m^{(n-1)}+(C_{n-1}^{1}+C_{n-1}^{2})B_{lmi}\cdot z_l^{(1)}\cdot z_m^{(n-1)}+$$

$$+\dots+(C_{n-1}^{n-2}+C_{n-1}^{n-1})\cdot B_{lmi}\cdot z_l^{(n-1)}\cdot z_m^{(1)}+C_{n-1}^{o}\cdot B_{lmi}\cdot z_l^{(n)}\cdot z_m^{(o)}.$$

Но $C_{n-1}^{o}=C_{n-1}^{n-1}\equiv 1=C_n^{o}=C_n^{n}$ и $C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^{k}=C_n^{k}$, тогда

$$z_i^{(n+1)}=C_n^{o}\cdot B_{lmi}\cdot z_l^{(o)}\cdot z_m^{(n)}+C_n^{1}\cdot B_{lmi}\cdot z_l^{(1)}\cdot z_m^{(n-1)}+\dots+$$

$$+C_n^{n-1}\cdot B_{lmi}\cdot z_l^{(n-1)}\cdot z_m^{(1)}+C_n^{n}\cdot B_{lmi}\cdot z_l^{(n)}\cdot z_m^{(o)}, \text{ что и т.д.}$$

Рекуррентная формула для $z^{(n)}$ очень удобна, так как обеспечивает возможность компьютерного вычисления действия экспоненциального Ли разложения на вектор динамических переменных с нужной точностью (некоторые авторы ограничиваются только первыми двумя или тремя членами экспоненциального Ли разложения, что может привести при вычислениях к появлению нефизических эффектов).

К сожалению, рекуррентные формулы для $\exp(:F_4:)$ не собираются, что соответствует отсутствию для $(a+b+c)^n$ выражения, аналогичного биному Ньютона. Действительно:

$$:F_4:^0 z_n=z_n=z_n^{(0)},$$

$$:F_4:z_n=C_{ijkn}z_iz_jz_k=z_n^{(1)},$$

$$:F_4:^2 z_n=:F_4:C_{ijkn}z_iz_jz_k=$$

$$=C_{ijkn}z_iz_j(:F_3:z_k)+C_{ijkn}z_i(:F_3:z_j)z_k+C_{ijkn}(:F_3:z_i)z_jz_k=$$

$$=3C_{ijkn}z_iz_j(:F_3:z_k)=3C_{ijkn}z_iz_jz_k^{(1)}=z_k^{(2)}$$

$$:F_4:^3 z_n=:F_4:3C_{ijkn}z_iz_jz_k^{(1)}=$$

$$=3C_{ijkn}z_i^{(1)}z_jz_k^{(1)}+3C_{ijkn}z_iz_j^{(1)}z_k^{(1)}+3C_{ijkn}z_iz_jz_k^{(2)}=$$

$$=6C_{ijkn}z_iz_j^{(1)}z_k^{(1)}+3C_{ijkn}z_iz_jz_k^{(2)}=z_n^{(3)}$$

И для $\exp(:F_4:)$ можно учесть лишь фиксированное число членов экспоненциального ряда.

Итак, последовательно находя результат линейного и более старших преобразований на каждом элементе, можно найти с любой требуемой точностью изменение $\mathbf{z}$ через оборот.

§ 4. Объединение экспоненциальных Ли разложений

При рассмотрении "объединения" Ли операторов будем также использовать последовательное экспоненциальное Ли разложение. Обозначим через

$$M^f=\exp(:F_4:)\exp(:F_3:)\exp(:F_2:),$$

$$M^g=\exp(:G_4:)\exp(:G_3:)\exp(:G_2:),M^h=\exp(:H_4:)\exp(:H_3:)\exp(:H_2:).$$

Для решения задачи нахождения преобразования $M^f=M^gM^h$, соответствущего последовательному действию M^h и M^g на $\mathbf{z}$: $z^f=M^fz^o=M^gz^h=M^g(M^hz^o)$, необходимо определить функции f_2, f_3, $f_4,\ldots$, удовлетворяющие уравнению

$$\exp(:F_4:)\exp(:F_3:)\exp(:F_2:)=$$

$$=\exp(:G_4:)\exp(:G_3:)\exp(:G_2:)\exp(:H_4:)\exp(:H_3:)\exp(:H_2:)\ .$$

Разлагая в ряды $\exp(:G_4:)\ \exp(:G_3:)\ldots$, $\exp(:H_4:)\exp(:H_3:)\ldots$, собирая члены при одинаковых степенях $\mathbf{z}$ и учитывая, что $\exp(:G_2:)$, $\exp(:H_2:)$ сохраняют степень операнда, можно найти:

$$\exp(:F_2:)=\exp(:G_2:)\exp(:H_2:)$$

или в эквивалентной матричной форме: $T^f=T^gT^h$, а также

$$f_3=g_3+\exp(:G_2:)h_3,\ f_4=g_4+\exp(:G_2:)h_4+\{g_3,f_3\}/2\ ^{*)}.$$

Таким образом, "добавляя" на каждом очередном элементе магнитной структуры ускорителя преобразование M^h этого элемента к суммарному преобразованию M^g предыдущих элементов, можно найти преобразование, соответствующее кольцу в целом, а затем выразить через него нелинейные характеристики движения. Однако следует отметить, что важную роль играют слагаемые вида $\{g_3,f_3\}$, которые, оставаясь существенными по величине,

*) Следует заметить, что при суммировании операторов элементов, имеющих только третий порядок (т.е. $g_4=h_4=0$), в суммарном преобразовании, тем не менее, появляются члены четвертого порядка (слагаемое $\{g_3,h_3\}/2$ в f_4), отбрасывание которых приводит к потере точности.

переходят в старшие порядки и отбрасываются. Именно они и ограничивают точность вычисления объединения Ли операторов в единый оператор. С другой стороны, благодаря существованию этих слагаемых есть возможность, собирая преобразование кубичных Ли операторов не в одну, а в две результирующие экспоненты, поднять точность суммарного преобразования до четвертого порядка, не рассчитывая операторы этого порядка. Однако, требуемое для корректного расчета повышение порядка Ли операторов для структур с сильными магнитными элементами (различные секступолями, октуполи и т.д., где собственно и существенна величина $\{g_3,f_3\}$), определяется числом таких элементов. Другими словами, для структуры, имеющей N сильно нелинейных элементов, нужно рассчитать N Ли преобразований третьего порядка для учета секступольной коррекции, четвертого - для октупольной и т.д.. Это соответствует разбиению ускорительного кольца на N участков с одним сильно нелинейным элементом на каждом и требует расчета для каждого из них отдельного преобразования, а затем последовательного "протаскивания" через них вектора динамических переменных. Учитывая вычислительные мощности компьютеров, такой метод расчета структуры с несколькими нелинейными элементами вполне реализуем, хотя и не позволяет рассчитывать единое преобразование через один оборот, затем через два и так далее (по степеням двойки). Таким образом, возможны следующие варианты расчета: разбиение структуры и расчет Ли преобразований сравнительно низкого порядка, либо расчет единого оборотного преобразования, для которого требуются Ли операторы более высоких порядков.

§ 5. Разложение гамильтониана

Для получения Ли операторов необходимо знать разложение гамильтониана в магнитных полях различных элементов магнитной структуры накопителя. Нет сомнений, что это разложение уже получено ранее неоднократно, но попытки найти опубликованный результат, включая члены четвертого порядка с сохранением любой конфигурации магнитного поля вдоль плоской орбиты*), не имели успеха. Ниже приводится требуемое разложение гамильтониана.

§ 5.1. Натуральная система координат

Гамильтониан заряженной частицы в электромагнитном поле записывается, как известно, в виде:

$$H={}^{1}/_{2}(\mathbf{P}-{}^{e}/_{c}\mathbf{A})^{2}-eA_{o},$$

где $\mathbf{A}, A_o$ - 4^{x} потенциал электромагнитного поля. Для изучения движения заряженной частицы в поле ускорителя необходимо это представление гамильтониана переписать покомпонентно в удобной системе координат. Наиболее подходящей является так называемая натуральная система координат [6], образованная следующей базисной тройкой векторов:

$\mathbf{n}$-единичный вектор, нормальный к траектории;

$\boldsymbol{\tau}$-единичный тангенциальный вектор;

$\mathbf{b}$-единичный бинормальный вектор.

Формулы Френе для плоской орбиты, имеющей кривизну K, дают соотношения для производных базисных векторов:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \qquad \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = -K\mathbf{n}, \qquad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = K\boldsymbol{\tau}, \qquad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = 0 .$$

В этой системе координат приращение радиус-вектора имеет вид: $d\mathbf{r}=(d\mathbf{r}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}+(d\mathbf{r}\cdot\mathbf{b})\mathbf{b}$ (его $\boldsymbol{\tau}$-компонента равна нулю по определению вектора $\boldsymbol{\tau}$). При рассмотрении орбит, имеющих горизонтальные и вертикальные плоские участки, в этой системе координат возникает неудобство, связанное со сменой $\mathbf{n}$ и $\mathbf{b}$ при переходе от горизонтальных орбит к вертикальным и наоборот. Поэтому удобнее ввести:

$\mathbf{e}_x=\mathbf{n}$, $\mathbf{e}_z=\mathbf{b}$ -если орбита лежит в горизонтальной плоскости и $\mathbf{e}_x=-\mathbf{b}$, $\mathbf{e}_z=\mathbf{n}$ - если в вертикальной. В новом базисе при условии, что $K_xK_z=0$, формулы Френе принимают вид:

*)Исключена конфигурация поля, порождающая кручение орбиты.

$$\frac{d\mathbf{e}_x}{ds} = K_x\boldsymbol{\tau}, \qquad \frac{d\mathbf{e}_z}{ds} = K_z\boldsymbol{\tau}, \qquad \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = -(K_x\mathbf{e}_x+K_z\mathbf{e}_z).$$

Дальнейшее рассмотрение будет проводится именно в этом базисе.

§ 5.2. Преобразование полей в натуральной системе координат

Запишем уравнение $\mathbf{B}=\mathrm{rot}\mathbf{A}$, связывающее магнитное поле $\mathbf{B}$ и векторный потенциал $\mathbf{A}$, покомпонентно в натуральной системе координат, обозначив через $h=1+K_xx+K_zz$:

$$B_s = \frac{dA_z}{dx} - \frac{dA_x}{dz};$$

$$B_x = \frac{1}{h}\left[\frac{dhA_s}{dz} - \frac{dA_z}{ds}\right]; \quad B_z = -\frac{1}{h}\left[\frac{dhA_s}{dx} - \frac{dA_x}{ds}\right].$$

Подставим в эти уравнения разложения $\mathbf{B}$ и $\mathbf{A}$ в ряд Тейлора и, собирая члены при одинаковых степенях x и z, получим соотношения между производными на равновесной орбите (x=z=0):

$$(d_x)^n(d_z)^k\, B_s=(d_x)^{n+1}(d_z)^k\, A_z-(d_x)^n(d_z)^{k+1}\, A_x;$$

$$(d_x)^n(d_z)^k\, (hB_x)=(d_x)^n(d_z)^{k+1}\, (hA_s)-d_s(d_x)^n(d_z)^k\, A_z\ ;$$

$$(d_x)^n(d_z)^k\, (hB_z)=d_s(d_x)^n(d_z)^k\, A_x-(d_x)^{n+1}(d_z)^k\, (hA_s)\ .^{*)}$$

Зафиксируем калибровку векторного потенциала, наложив условие $(d_x)^n(d_z)^kA_x=-(d_z)^n(d_x)^kA_z$, и разрешим уравнение $\mathbf{B}=\mathrm{rot}\mathbf{A}$ относительно компонент векторного потенциала:

$$A_z=-{}^{1}/_{2}\Sigma\ (d_x)^{n-1}(d_z)^k\ B_s\ x^n/n!\ z^k/k!;$$

$$A_x=\ {}^{1}/_{2}\Sigma\ (d_x)^n(d_z)^{k-1}\ B_s\ x^n/n!\ z^k/k!;$$

$$hA_s=\Sigma\ [(d_z)^n(hB_x)\ x^n/n!+(d_x)^n(hB_z)\ z^n/n!]\ +$$

$$+{}^{1}/_{2}\ \Sigma\ [(d_x)^n(d_z)^{k-1}\ (hB_x)-(d_x)^{n-1}(d_z)^k\ (hB_s)]\ x^n/n!\ z^k/k!.$$

Теперь необходимо выразить коэффициенты разложения в ряд Тейлора магнитного поля через параметры, характеризующие физические свойства элемента. Для этого введем следующие величины (в этих выражениях и далее

*)Здесь введено обозначение $d_x \equiv d/dx$.

под B_x, B_z, B_s предполагаются "нормированные" на энергию и заряд частицы значения компонент поля, измеряемые, таким образом, в см$^{-1}$):

$$H=B_s;$$

$$g=d_xB_z;$$

$$q={}^1/_2(d_xB_x-d_zB_z);$$

$$m_x=(d_x)^2B_z;$$

$$m_z=d_xd_zB_z;$$

$$o_x=(d_x)^3B_z;$$

$$o_z=d_x(d_z)^2B_z;$$

$$o=d_z(d_x)^2B_z.$$

Подставляя в уравнения Максвелла $\mathrm{rot}B=0$, $\mathrm{div}B={}^1/_h[d_x(hB_x)+d_z(hB_z)+d_sB_s] = 0$ разложение $\mathbf{B}$ в ряд Тейлора и собирая члены при одинаковых степенях x и z, получим следующие соотношения:

$$d_zB_x=d_xB_z=g;$$

$$d_xB_x=q-{}^1/_2d_sB_s;$$

$$d_zB_z=-q-{}^1/_2d_sB_s;$$

$$d_zd_xB_x=(d_x)^2B_z=m_x;$$

$$(d_z)^2B_x=d_xd_zB_z=m_z;$$

$$(d_x)^2B_x=-K_xq-K_zg-(d_s)^2B_x-m_z;$$

$$(d_z)^2B_z=K_zq-K_xg-(d_s)^2B_z-m_x;$$

$$d_z(d_x)^2B_x=(d_x)^3B_z=o_x;$$

$$(d_z)^3B_x=d_x(d_z)^2B_z=o_z;$$

$$d_x(d_z)^2B_x=d_z(d_x)^2B_z=o;$$

$$(d_x)^3B_x=3(K_x)^2q-(d_s)^2q+{}^1/_2(d_s)^3B_s+K_xm_z-K_zm_x-o;$$

$$(d_z)^3B_z=-3(K_z)^2q+(d_s)^2q+{}^1/_2(d_s)^3B_s+K_zm_x-K_xm_z-o;$$

$$d_xB_s=d_sB_x;$$

$$d_zB_s=d_sB_z;$$

$$(d_x)^2B_s=d_sq-{}^1/_2(d_s)^2B_s;$$

$$(d_z)^2B_s=-d_sq-{}^1/_2(d_s)^2B_s;$$

$$d_zd_xB_s=d_sg-K_xd_sB_z-K_zd_sB_x.$$

Это позволяет записать варажения для компонент векторного потенциала с нужными степенями по x, z для последующей их подстановки в гамильтониан:

$$A_x=-{}^1/_2Hz-{}^1/_2d_sB_xxz-{}^1/_4d_sB_zz^2-{}^1/_4(d_sg-K_xd_sB_z-K_zd_sB_x)xz^2-$$
$$-{}^1/_4(d_sq-{}^1/_2(d_s)^2B_s)zx^2+{}^1/_{12}(d_sq+{}^1/_2(d_s)^2B_s)z^3+\ldots;$$

$$A_z={}^1/_2Hx+{}^1/_2d_sB_zxz+{}^1/_4d_sB_xx^2+{}^1/_4(d_sg-K_xd_sB_z-K_zd_sB_x)zx^2-$$
$$-{}^1/_4(d_sq+{}^1/_2(d_s)^2B_s)xz^2-{}^1/_{12}(d_sq-{}^1/_2(d_s)^2B_s)x^3-\ldots;$$

$$hA_s=B_xz-B_zx+{}^1/_2(K_xB_z+g)z^2-{}^1/_2(K_zB_x+g)x^2+qxz-$$
$$+{}^1/_2[(K_zq+K_xg+m_x+{}^1/_4(d_s)^2B_z)xz^2+(K_xq-K_zg-m_z-{}^1/_4(d_s)^2B_x)zx^2]-$$
$$-{}^1/_6[(2K_xg+m_x)x^3-(2K_zg+m_z)z^3]+{}^1/_{24}[(3K_zm_z+o_z)z^4+(3K_xm_x+o_x)x^4]+$$
$$+{}^1/_8[g(K_x{}^2-K_z{}^2)+K_x(d_s)^2B_z-K_z(d_s)^2B_x-3K_zm_z-o_z+3K_xm_x+o_x]z^2x^2+$$
$$+{}^1/_{12}(2K_xm_z+2o+4K_zm_x-(d_s)^2q-{}^1/_2(d_s)^3B_s)z^3x-$$
$$-{}^1/_{12}(2K_zm_x+2o+4K_xm_z+(d_s)^2q-{}^1/_2(d_s)^3B_s)x^3z-\ldots.$$

Теперь можно получить требуемое разложение в натуральной системе координат для гамильтониана, описывающего движение частицы, с сохранением в нем членов не выше 4$^{-х}$ степеней компонент вектора $\mathbf{Z}$.

§ 5.3. Разложение гамильтониана

В натуральной системе координат производная по времени от радиус-вектора (скорость) записывается в виде

$$\frac{dr}{dt}=\frac{ds}{dt}\left(\frac{dr_o}{ds}+x\frac{de_x}{ds}+z\frac{de_z}{ds}\right)+\frac{dx}{dt}e_x+\frac{dz}{dt}e_z=$$

$$=\frac{ds}{dt}(1-K_xx-K_zz)\tau+\frac{dx}{dt}e_x+\frac{dz}{dt}e_z,$$

используя которую нетрудно записать Лоренц-фактор y:

$$y=[1-({}^v/_c)^2]^{1/2}=[1-({}^1/_c)^2((d_tx)^2+(d_tz)^2+(h\,d_ts)^2)]^{1/2},$$

скалярное произведение скорости на произвольный вектор:

$$(d_tr,\mathbf{A})=A_s\,d_ts(1+K_xx+K_zz)+d_tx\,A_x+d_tz\,A_z,$$

и выражение для квадрата импульса частицы: *)

*) В предположении, что скалярный потенциал равен нулю ($A_o=0$).

$$(p_x-{}^e/_c A_x)^2+(p_z-{}^e/_c A_z)^2+(p_\sigma/h-{}^e/_c A_s)^2+(m_o c)^2=(\gamma_o m_o c)^2.$$

Используя полученный квадрат импульса, запишем гамильтониан:

$$H=Pc=c[(p_x-{}^e/_c A_x)^2+(p_z-{}^e/_c A_z)^2+(p_s/h-{}^e/_c A_s)^2+(m_o c)^2]^{1/2}.$$

Теперь, последовательно осуществив переход к гамильтониану, выраженному в канонических переменных $(x,p_x,z,p_z,\sigma,p_\sigma)$, где $\sigma=s-ct$, $p_\sigma=(E-E_o)/E_o$, окончательно запишем :

$$H=1+p_\sigma+h[(1+p_\sigma)^2-({}^1/_\gamma)^2-(p_x-{}^e/_c A_x)^2-(p_z-{}^e/_c A_z)^2]^{1/2}-hA_s.$$

Подставляя сюда выражения для компонент вектор-потенциала из предыдущего раздела и проведя разложение до нужных порядков, получим искомое разложение гамильтониана. Результат представлен в приложении в виде коэффициентов при соответствующих произведениях компонент вектора $\mathbb{Z}$.

§ 6. Получение Ли операторов

В соответствии с приведенными ранее формулами Ли операторы определяются функциями, связанными с гамильтонианом и Ли операторами младших порядков. Получим выражения для коэффициентов Ли операторов, соответствующих квадратичным и кубичным слагаемым гамильтониана. Сначала рассмотрим младший Ли оператор $\exp(-sH_2)$. Он вычисляется суммированием бесконечного экспоненциального ряда и, как уже упоминалось выше, дает обычные матрицы линейного движения. Чтобы вычислить функцию, определяющую кубический Ли оператор, необходимо проинтегрировать результат действия оператора $\exp(-sH_2)$ на кубический гамильтониан. Напомним, что результат действия Ли оператора $\exp(-sH_2)$ на произвольную функцию $g(\mathbb{Z})$ равен:

$$\exp(-sH_2)g(\mathbb{Z})=g(\exp(-sH_2)\mathbb{Z}).$$

Рассмотрим получение кубического Ли оператора на примере скью-квадруполя, вклад которого в кубический гамильтониан равен $H_3={}^1/_2 p_\sigma(p_x{}^2+p_z{}^2)$. Подставим в гамильтониан значения импульсов, преобразованных матрицей $\exp(-sH_2)$, и, проинтегрировав, получим:

$$f_3=-{}^1/_2\int_o^s ds\ \exp(-sH_2)\ p_\sigma(p_x{}^2+p_z{}^2)=$$

$$={}^1/_{16}p_\sigma[x^2(\sin(2Q^+L)Q^+ +\sin(2Q^-L)Q^-)-$$

$$-2xp_x(2-\cos(2Q^+L)-\cos(2Q^+L))]\ \ldots\ ^{*)}.$$

Гамильтониан третьего порядка содержит слагаемые, имеющие производные по s, которые описывают взаимодействие пучка с "вывалившимся" полем. Их можно проинтегрировать следующим образом. После замен $B'(s)=B\sigma(s-s_o)/a$, $B''(s)=B\sigma(s-s_o)/a^2$, где $\sigma(s-s_o)$-дельта функция, s_o-азимут края элемента, a - малый параметр, описывающий область взаимодействия (a в конечный ответ не входит), члены, содержащие первые производные, легко интегрируются обычным способом, а члены со вторыми производными - по частям. Результат вычисления Ли операторов для различных элементов приведен в приложении.

При программировании вычисления Ли операторов возникла проблема сохранения точности этих вычислений. Дело в том, что приходится вычислять, например, выражения вида :

$$W=[30Q_xL-45\sin(Q_xL)+9\sin(2Q_xL)-\sin(3Q_xL)]/Q_x{}^7$$

(коэффициент при m_x в Ли операторе для $p_\sigma{}^3$ в синхротронном магните). Для "разумных" элементов Q_x мало (для магнита с полем $B_z=2$ кГс и $HR=20000$ кГс*см имеем $Q_x=K_x=B_z/HR=10^{-4}$см$^{-1}$). При точности ЭВМ 11 знаков точность вычисления W будет составлять $10^{-11}/(10^{-4})^7=10^{17}$. С другой стороны, при этих Q_x и длине магнита L=100см находим, раскрывая неопределенность для W, что $W\approx L^7/280\approx10^{12}$, что много меньше точности вычисления. Следовательно вычислять W, используя стандартные функции, неприемлемо. Но неприемлемо также и "ручное" раскрытие всех неопределенностей такого типа в выражениях для Ли операторов, так как оказывается, что и следущие слагаемые разложения W в ряд по Q_xL существенны. Для сохранения точности на уровне машинной

*) Используются обозначения Q^+, Q^- введенные в приложении.

выражения типа W вычислялись через несколько "опорных" сумм, аналогичных ряду Тейлора для синуса, но начатых с более высоких номеров n:

$$S_i(k)=\sum_{n=i}^{\infty}\frac{(-1)^n(kQ_xL)^{2(n-i)}}{(2n+1)!}.$$

Через эти суммы W, например, можно записать без Q_x в знаменателе:

$$W=L^7[45\ S_3(1)-9*2^4\ S_3(2)+3^4\ S_3(3)],$$

и т.д. Некоторые коэфициенты, в знаменателе которых появлялась неопределенность типа Q_x+Q_z, пришлось вычислять через "опорные" двойные ряды вида:

$$SS(k,l_x,l_z,m_x,m_z)=\sum_{i=o}^{\infty}\frac{(-1)^i}{(2i+k)!}\sum_{j=o}^{\infty}\frac{(l_xQ_xL)^{2(i-j)}(l_zQ_zL)^{2j}}{[(2(i-j)+m_x)!(2j+m_z)]!}.$$

Используя рекуррентные соотношения для "опорных" одиночных сумм $S_i(k)=S_{i+1}(k)*(QL)^2+1/(2i+1)!$ *) и более сложные для двойных, удалось выразить все коэффициенты Ли операторов только через шесть одиночных и девять двойных рядов.

Для проверки полученных выражений для Ли операторов а также вышеизложенных соображений об их компьютерном вычислении была написана специальная программа. В ней была применена техника Ли операторов для нахождения некоторых характеристик накопителя, которые могут быть найдены независимо каким-либо другим способом (например, линейный и нелинейный коэффициенты удлинения орбиты, нелинейный хроматизм магнитной структуры и т.п.). Сравнение результатов, полученных в программе, с независимым расчетом подтвердило правильность найденных Ли операторов и методики их вычисления.

---

*) Специфика подобных рекуррентных соотношений состоит в том, что сначала вычисляется сумма с максимальным номером i, а затем остальные суммы в порядке убывания их номера.

Литература.

1. J.Dragt, M.Finn. J.Math.Phys. 17,2215,1976.
2. J.Dragt. Lectures on nonliner dynamics. AIP Conf. Proc. 87,151,1981.
3. J.Dragt, E.Forest. J.Math.Phys. 24,2734, 1983.
4. F.C.Iselin. Lie transformations and transport equations for combined function dipoles. CERN LEP-TH/84-17.
5. F.C.Iselin. The MAD program, User's reference manual. CERN LEP-TH/87-33.
6. H.Mais, G.Ripkin. Theory of spin-orbit motion in electron-positron storage rings. Preprint DESY 83-62, 1983.

Приложение

Введем обозначения (как всегда, значения полей и их производных берутся на равновесной орбите, т.е. при $x=z=o$) :

$$K_{x,z}=\pm\frac{e}{E_o}B_{oz,ox}\ ;\qquad g=-\frac{e}{E_o}\frac{dB_x}{dz}\ ;\qquad q=\frac{e}{2E_o}\left[\frac{dB_x}{dx}-\frac{dB_x}{dz}\right]\ ;$$

$$m_{x,z}=-\frac{e}{E_o}\frac{d^2B_{z,x}}{dzdx}\ ;\qquad o_{x,z}=-\frac{e}{E_o}\frac{d^3B_{z,x}}{(d\,x,z)^3}\ ;\qquad o=-\frac{e}{E_o}\frac{d^3B_z}{dz^2dx}\ ;$$

$$G_{x,z}=(K^2_{x,z}\pm g)\ ;\quad Q_{x,z}=(G_{x,z})^{1/2}\ ;\quad W_{x,z}=Q_{x,z}s\ ;\quad Q^{\pm}=(\pm q)^{1/2}\ .$$

Гамильтониан первого и второго порядков

Здесь и далее под B_x , B_z , B_s подразумеваются нормированные на e/E_o величины, а штрих означает дифференцирование по s.

$$H_1=\left(1-\frac{1}{2y_o^2}\right)(K_xx+K_zz)-\frac{p_\sigma}{2y_o^2}-B_{ox}z+B_{oz}x\ ;$$

$$H_2=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2y_o^2}\right)\left(p_x^2+p_z^2+B_{os}(p_xz-xp_z)+\frac{1}{4}B_{os}^2(x^2+z^2)-\right.$$

$$\left.-2p_\sigma(K_xx+K_zz)\right)-\frac{p_\sigma^2}{2y_o^2}+\frac{1}{2}\left((K_xB_{oz}+g)x^2-(K_zB_{ox}+g)z^2\right)-qxz.$$

Гамильтониан более высокого порядка удобно представить в виде коэффициентов при сооответствующих произведениях компонент вектора z.

Гамильтониан третьего порядка

1 x^3 : $\frac{1}{6}(2K_xg+m_x)$;

2 x^2z : $\frac{1}{2}(K_zg-K_xq+m_z+\frac{1}{2}B''_{ox})$;

3 x^2p_z : $-\frac{1}{4}B'_{ox}$;

4 x^2p_σ : $-\frac{1}{8}B_{os}^2$;

10 xp_xp_σ: $\frac{1}{2}B_{os}$;

11 p_xz^2 : $\frac{1}{2}K_z$;

12 $p_x^2p_\sigma$: $-\frac{1}{2}$;

13 p_xz^2 : $\frac{1}{4}B'_{oz}$;

5 xp_x^2 : $\frac{1}{2}K_x$;

6 xp_xz : $\frac{1}{2}B'_{ox}$;

7 xz^2 : $-\frac{1}{2}(K_xg+K_zq+m_x+\frac{1}{2}B''_{oz})$;

8 xzp_z : $-\frac{1}{2}B'_{oz}$;

9 xp_z^2 : $\frac{1}{2}K_x$;

14 p_xzp_σ: $-\frac{1}{2}B_{os}$;

15 z^3 : $-\frac{1}{6}(2K_zg+m_z)$;

16 z^2p_σ: $-\frac{1}{8}B_{os}^2$;

17 $z\,p_z^2$: $\frac{1}{2}K_z$;

18 $p_z^2p_\sigma$: $-\frac{1}{2}$.

Гамильтониан четвертого порядка

1 x^4 : $\frac{1}{24}((q'-\frac{1}{2}B''_{os})B_{os}+3K_xm_x+o_x)+\frac{1}{128}B_{os}^4+\frac{1}{32}B'^2_{ox}$;

2 x^3z : $\frac{1}{12}(2K_zm_x+4K_xm_z+2o+q''-\frac{1}{2}B'''_{os})+\frac{1}{8}B'_{os}q'$;

3 x^3p_z: $-\frac{1}{16}B_{os}^3-\frac{1}{12}(q'-\frac{1}{2}B''_{os})$;

4 $x^2p_x^2$: $\frac{1}{16}B_{os}^2$;

5 x^2p_xz: $\frac{1}{16}B_{os}^3+\frac{1}{4}(q'-\frac{1}{2}B''_{os})$;

6 x^2z^2 : $\frac{1}{64}B_{os}^4+\frac{1}{8}(B'^2_{ox}+B'^2_{oz}-B''_{os}B_{os}-$

$-K_x(K_xg+B''_{oz}+3m_x)-o_x+K_z(K_zg+B''_{ox}+3m_z)+o_z)$;

7 x^2zp_z: $-\frac{1}{4}(g'+K_xB'_{oz})$;

8 $x^2p_z^2$: $\frac{3}{16}B_{os}^2$;

9 $x^2 p_z p_\sigma: \frac{1}{4} B'_{ox}$;

10 $x^2 p_\sigma^2: \frac{1}{8} B_{os}^2$;

11 $x p_x^2 p_z: -\frac{1}{4} B_{os}$;

12 $x p_x^2 p_\sigma: -\frac{1}{2} K_x$;

13 $x p_x z^2 : \frac{1}{4}(q'+K_z B'_{ox})$;

14 $x p_x z p_z: -\frac{1}{4} B_{os}^2$;

15 $x p_x z p_\sigma: -\frac{1}{2} B'_{ox}$;

16 $x z^3 :-\frac{1}{12}(2K_x m_z+4K_z m_x+2o-q''-\frac{1}{2} B'''_{os})+\frac{1}{8} B'_{os} q'$;

17 $x z^2 p_z: -\frac{1}{16} B_{os}^3+\frac{1}{4}(q'+\frac{1}{2} B''_{os})$;

18 $x z p_z p_\sigma: \frac{1}{2} B'_{oz}$;

19 $x p_z^3 : -\frac{1}{4} B_{os}$;

20 $x p_z^2 p_\sigma : -\frac{1}{2} K_x$;

21 $x p_z p_\sigma^2 : -\frac{1}{2} B_{os}$;

22 $p_x^4 : \frac{1}{8}$;

23 $p_x^3 z : \frac{1}{4} B_{os}$;

24 $p_x^2 z^2 : \frac{3}{16} B_{os}^2$;

25 $p_x^2 p_z^2 : \frac{1}{4}$;

26 $p_x^2 z p_\sigma : -\frac{1}{2} K_z$;

27 $p_x^2 p_\sigma^2 : \frac{1}{2}$;

28 $p_x z^3 : \frac{1}{16} B_{os}^3 - \frac{1}{12}(q'+\frac{1}{2} B''_{os})$;

29 $p_x z^2 p_\sigma: -\frac{1}{4} B'_{oz}$;

30 $p_x z p_z^2 : \frac{1}{2} B_{os}$;

31 $p_x z p_\sigma^2 : \frac{1}{2} B_{os}$;

32 $z^4 :-\frac{1}{24}((q'+\frac{1}{2} B''_{os}) B_{os}+3K_z m_z+o)+\frac{1}{128} B_{os}^4+\frac{1}{32} B'^2_{oz}$;

33 $z^2 p_z^2 : \frac{1}{16} B_{os}^2$;

34 $z^2 p_\sigma^2 : \frac{1}{8} B_{os}^2$;

35 $z p_z^2 p_\sigma: -\frac{1}{2} K_z$;

36 $p_z^4 : \frac{1}{8}$; 37 $p_z^2 p_\sigma^2 : \frac{1}{2}$.

Операторы Ли третьего порядка

Обозначения:

$$C_{nm}=\frac{1-\cos(nW_x+mW_z)}{(n^2G_x+m^2G_z)}\ ,\qquad S_{nm}=\frac{\sin(nW_x+mW_z)}{(nQ_x+mQ_z)}\ ,$$

$$\overset{0}{C}_{nm}=\frac{1-\cos(nW_x+mW_z)}{(nQ_x+mQ_z)}\ ,\qquad C^{x,z}{}_{n}=\cos(nW_{x,z})\ ,$$

$$P_{nm}=(n^2G_x-m^2G_z)\ ,$$

$$C^{-}{}_{nm}=\frac{1}{2mQ_z}[\overset{0}{C}_{nm}-\overset{0}{C}_{n,-m}]=\frac{1}{P_{nm}}[n^2G_xS_{no}S_{om}-1+C^{x}{}_{n}C^{z}{}_{m}]\ ,$$

$$C^{+}{}_{nm}=\frac{1}{2nQ_x}[\overset{0}{C}_{nm}+\overset{0}{C}_{n,-m}]=\frac{1}{P_{nm}}[m^2G_zS_{no}S_{om}-1+C^{x}{}_{n}C^{z}{}_{m}]\ ,$$

$$S^{-}{}_{nm}=\frac{1}{2nmQ_xQ_z}[S_{nm}-S_{n,-m}]=\frac{1}{P_{nm}}[S_{om}C^{x}{}_{n}-S_{no}C^{z}{}_{m}]\ ,$$

$$S^{+}{}_{nm}=\frac{1}{2}[S_{nm}+S_{n,-m}]=\frac{1}{P_{nm}}[n^2G_xS_{no}C^{z}{}_{m}-m^2G_zS_{om}C^{x}{}_{n}]\ .$$

Ниже приводятся коэффициенты Ли операторов третьего порядка при соответствующих произведениях компонент вектора **Z** для различных элементов магнитной структуры накопителя.

Дрейфовый промежуток:

26 $p_x{}^2p_\sigma:\ -\frac{L}{2}\ ;$ 49 $p_z{}^2p_\sigma:\ -\frac{L}{2}\ .$

Центр синхротронного магнита:

1 $x^3\ :\ \frac{1}{8}S_{10}(3K_xg+K_x{}^3+m_x)-\frac{1}{24}S_{30}(K_xg+3K_x{}^3-m_x)\ ;$

2 $x^2p_x\ :\ \frac{1}{8}C_{10}(3K_xg+K_x{}^3+m_x)-\frac{3}{8}C_{30}(K_xg+3K_x{}^3-m_x)\ ;$

3 $x^2z\ :\ \frac{1}{4}[S_{01}(2K_zg+m_z)+S^{+}{}_{21}m_z]\ ;$

4 $x^2p_z\ :\ \frac{1}{4}[C_{01}(2K_zg+m_z)+C^{-}{}_{21}m_z]\ ;$

6 $x^2p_\sigma\ :-\frac{g}{4}(L-S_{20})+\frac{K_z}{4G_z}[(L-S_{01})(2K_zg+m_z)+(S_{20}-S^{+}{}_{21})m_z]+$

$+\frac{K_x}{8G_x}[2(L+S_{20})(2K_xg+m_x)-3S_{10}(3K_xg+K_x{}^3+m_x)+S_{30}(K_xg+3K_x{}^3-m_x)]\ ;$

7 $x\,p_x{}^2\ :\ \frac{1}{8G_x}[S_{10}(3K_xg+K_x{}^3+m_x)+S_{30}(K_xg+3K_x{}^3-m_x)]\ ;$

8 $xp_xz\ :\ C^{+}{}_{21}m_z\ ;$

9 $xp_xp_z:\ -S^{-}{}_{21}m_z\ ;$

11 $xp_xp_\sigma:-\frac{K_x}{4G_x}[C_{10}(K_x{}^3+3K_xg+m_x)-4C_{20}(2K_xg+m_x)-$

$-3C_{30}(K_xg+3K_x{}^3-m_x)]+\frac{K_zm_z}{G_z}(C_{20}-C^{+}{}_{21})+gC_{20}\ ;$

12 $x\,z^2\ :\ -\frac{1}{4}[S_{10}(2K_xg+m_x)+S^{+}{}_{21}m_x]\ ;$

13 $xzp_z\ :\ -C^{-}{}_{12}m_x\ ;$

15 $xzp_\sigma\ :\ \frac{1}{2}[\frac{K_xm_z}{G_x}(2S^{+}{}_{11}-S_{01}-S^{+}{}_{21})-\frac{K_zm_x}{G_z}(2S^{+}{}_{11}-S_{10}-S^{+}{}_{12})]\ ;$

16 $xp_z{}^2\ :\ -\frac{1}{4G_z}[S_{10}(2K_xg+m_x)-S^{+}{}_{12}m_x)]\ ;$

18 $xp_zp_\sigma:\ \frac{K_xm_z}{2G_x}(2C^{-}{}_{11}-C_{01}-C^{+}{}_{21})-\frac{K_zm_x}{G_z}(C^{-}{}_{11}-C^{-}{}_{12})\ ;$

21 $xp_\sigma{}^2:\ \frac{1}{2}K_x(L-S_{20})-\frac{K_x{}^2}{8G_x{}^2}[4L(3K_xg+K_x{}^3+m_x)-S_{10}(3K_x{}^3+17K_xg+7m_x)+$

$+4S_{20}(K_xg-K_x{}^3+m_x)+S_{30}(K_xg+3K_x{}^3-m_x)]-\frac{K_z{}^2m_x}{4G_z{}^2}(3S_{10}+S^{+}{}_{12}-4S^{+}{}_{11})\ ;$

22 $p_x{}^3\ :\ \frac{1}{8G_x}[C_{10}(3K_xg+K_x{}^3+m_x)+C_{30}(K_xg+3K_x{}^3-m_x)]\ ;$

23 $p_x^2 z : \frac{1}{4G_x}[S_{01}(2K_zg+m_z)-S^+_{21}m_z]$;

24 $p_x^2 p_z: \frac{1}{4G_x}[C_{01}(2K_zg+m_z)-C^-_{21}m_z]$;

26 $p_x^2 p_\sigma: -\frac{1}{4}(L+S_{20})+\frac{K_z}{4G_zg}[(L-S_{01})(2K_zg+m_z)-(S_{20}-S^+_{21})m_z]+$

$+\frac{K_x}{8G_x^2}[(2L-S_{10})(3K_xg+K_x^3+m_x)-2S_{20}(K_xg-K_x^3+m_x)-S_{30}(K_xg+3K_x^3-m_x)]$;

27 $p_x z^2 : -\frac{1}{4}[C_{10}(2K_xg+m_x)+C^+_{12}m_x]$;

28 $p_x z p_z : S^-_{12}m_x$;

30 $p_x z p_\sigma: \frac{K_x m_z}{G_x}(C^+_{11}-C^+_{21})-\frac{K_z m_x}{2G_z}(2C^+_{11}-C_{10}-C^+_{12})$;

31 $p_x p_z^2:-\frac{1}{4G_z}[C_{10}(2K_xg+m_x)-C^+_{12}m_x]$;

33 $p_xp_zp_\sigma: \frac{K_xm_z}{G_x}(S^-_{21}-S^-_{11})-\frac{K_zm_x}{G_z}(S^-_{12}-S^-_{11})$;

36 $p_xp_\sigma^2: -\frac{K_z^2m_x}{4G_z^2}(3C_{10}+C^+_{12}-4C^+_{11})-K_xC_{20}+$

$+\frac{K_x^2}{8G_x^2}[C_{10}(11K_xg+K_x^3+5m_x)-8C_{20}(K_xg-K_x^3+m_x)-3C_{30}(K_xg+3K_x^3-m_x)]$;

37 $z^3 :-\frac{1}{8}S_{01}(3K_zg-K_z^3+m_z)+\frac{1}{24}S_{03}(K_zg-3K_z^3-m_z)$;

38 $z^2p_z :-\frac{1}{8}C_{01}(3K_zg-K_z^3+m_z)+\frac{3}{8}C_{03}(K_zg-3K_z^3-m_z)$;

40 $z^2p_\sigma : \frac{g}{4}(L-S_{02})-\frac{K_x}{4G_x}[(L-S_{10})(2K_xg+m_x)+(S_{02}-S^+_{12})m_x]-$

$-\frac{K_z}{8G_z}[2(L+S_{02})(2K_zg+m_z)-3S_{01}(3K_zg-K_z^3+m_z)+S_{03}(K_zg-3K_z^3-m_z)]$;

41 $zp_z^2 :-\frac{1}{8G_z}[S_{01}(3K_zg-K_z^3+m_z)+S_{03}(K_zg-3K_z^3-m_z)]$;

43 $zp_zp_\sigma:\frac{K_z}{4G_z}[C_{01}(3K_zg-K_z^3+m_z)-4C_{02}(2K_zg+m_z)-$

$-3C_{03}(K_zg-3K_z^3-m_z)]-\frac{K_xm_x}{G_x}(C_{02}-C^-_{12})-gC_{02}$;

46 $zp_\sigma^2: \frac{K_z}{2}(L-S_{02})+\frac{K_z^2}{8G_z^2}[4L(3K_zg-K_z^3+m_z)-S_{01}(17K_zg-3K_z^3+7m_z)+$

$+4S_{02}(K_zg+K_z^3+m_z)+S_{03}(K_zg-3K_z^3-m_z)]+\frac{K_x^2m_z}{4G_x^2}(3S_{01}+S^+_{21}-4S^+_{11})$;

47 $p_z^3 :-\frac{1}{8G_z}[C_{01}(3K_zg-K_z^3+m_z)+C_{03}(K_zg-3K_z^3-m_z)]$;

49 $p_z^2p_\sigma: -\frac{1}{4}(L+S_{02})+\frac{K_x}{4G_xg}[(L-S_{10})(2K_xg+m_x)-(S_{02}-S^+_{12})m_x]-$

$-\frac{K_z}{8G_z^2}[(2L-S_{01})(3K_zg-K_z^3+m_z)-2S_{02}(K_zg+K_z^3+m_z)-S_{03}(K_zg-3K_z^3-m_z)]$;

52 $p_zp_\sigma^2: \frac{K_x^2m_z}{4G_x^2}(3C_{01}+C^-_{21}-4C^-_{11})-K_zC_{02}-$

$-\frac{K_z^2}{8G_z^2}[C_{01}(11K_zg-K_z^3+5m_z)-8C_{02}(K_zg+K_z^3+m_z)-3C_{03}(K_zg-3K_z^3-m_z]$;

56 $p_\sigma^3 :\frac{K_x^3}{24G_x^3}[2L(13K_xg+3K_x^3+5m_x)-3S_{10}(11K_xg+K_x^3+5m_x)+$

$+6S_{20}(K_xg-K_x^3+m_x)+S_{30}(K_xg+3K_x^3-m_x)]-\frac{K_x^2}{4G_x}(L-S_{20})-$

$-\frac{K_z^3}{24G_z^3}[2L(13K_zg-3K_z^3+5m_z)-3S_{01}(11K_zg-K_z^3+5m_z)+$

$+6S_{02}(K_zg+K_z^3+m_z)+S_{03}(K_zg-3K_z^3-m_z)]-\frac{K_z^2}{4G_z}(L-S_{02})$.

Край синхротронного магнита

вход:

4 $x^2p_z : -\frac{1}{2}B_{ox}$;   27 $p_xz^2 : \frac{1}{2}B_{oz}$;

выход:

4 $x^2p_z : \frac{1}{2}B_{ox}$;   27 $p_xz^2 : -\frac{1}{2}B_{oz}$.

Скью квадруполь:

6 $x^2p_\sigma : \frac{1}{16}[\sin(2Q^+L)Q^+ + \sin(2Q^-L)Q^-]$;

11 $xp_xp_\sigma : -\frac{1}{8}[2-\cos(2Q^+L)-\cos(2Q^-L)]$;

15 $xzp_\sigma : \frac{1}{8}[4Lq+\sin(2Q^-L)Q^- - \sin(2Q^+L)Q^+]$;

18 $xp_zp_\sigma : \frac{1}{8}[\cos(2Q^-L)-\cos(2Q^+L)]$;

26 $p_x^2p_\sigma : -\frac{1}{16}[4L+\sin(2Q^+L)/Q^+ + \sin(2Q^-L)/Q^-]$;

30 p_xzp_σ : "18" ;

33 $p_xp_zp_\sigma : \frac{1}{8}[\sin(2Q^+L)/Q^+ - \sin(2Q^-L)/Q^-]$;

40 z^2p_σ : "6" ;

43 zp_zp_σ : "11" ;

49 $p_z^2p_\sigma$: "26" .

Краевые эффекты скью квадруполя в третьем порядке отсутствуют!

Центр соленоида:

6 $x^2p_\sigma : -\frac{B_{os}^2L}{8}$;   30 p_xzp_σ : -"18" ;

18 $xp_zp_\sigma : -\frac{B_{os}L}{2}$;   30 z^2p_σ : "6" ;

26 $p_x^2p_\sigma : -\frac{L}{2}$;   49 $p_z^2p_\sigma$: "26" .

Краевые эффекты соленоида в третьем порядке отсутствуют!

Ю.И.Эйдельман, В.Е.Якименко

РАСЧЕТ ОРБИТАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ МАГНИТНОЙ СИСТЕМЕ НАКОПИТЕЛЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕХНИКИ ЛИ ОПЕРАТОРОВ

Препринт 91-6

Работа поступила - 11 января 1991 г.

~~~~~~

Ответственный за выпуск С.Г.Попов.
Подписано к печати 11.I.1991 г.
Формат бумаги 60x90 1/16.
Объем 2,2 усл.печ.л., 1,8 учетно-изд.л.
Тираж 200 экз. Бесплатно. Заказ N 6.

~~~~~~

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90.