26

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

З.К. Силагадзе

О ВНУТРЕННЕЙ ЧЕТНОСТИ АНТИЧАСТИЦ

ПРЕПРИНТ 91-82

НОВОСИБИРСК

О ВНУТРЕННЕЙ ЧЕТНОСТИ АНТИЧАСТИЦ

З.К. Силагадзе

Институт ядерной физики
630090, Новосибирск, СССР

АННОТАЦИЯ

Показано, что обычная ситуация, когда внутренние четности частицы и античастицы одинаковы для бозонов и противоположны для фермионов, предполагает, в некотором смысле, локальность теории. В более общем случае, если квантовомеханический оператор четности определить при помощи математической техники расширения групп, возникает и аномальный оператор четности, для которого внутренние четности частицы и античастицы одинаковы для фермионов и противоположны для бозонов.

ABSTRACT

It is shown that the usual situation, when boson and its anti-particle have the same internal parity, while fermion and its antiparticle - the opposite one, assumes some kind of localicity of the theory. In general, when a guantum mechanical parity operator is defined by means of group extension technigue, the reversed situation is also possible.

Основная цель данной работы воскресить интерес к одной старой идее Мишеля [1], что математическая техника расширения групп может оказаться полезной при рассмотрении физических проблем. Хотя это выглядит правдоподобно, особенно если учесть, что расширения групп возникают, явно или неявно, при изучении таких важных для физики задач, как унитарные проэктивные представления группы Пуанкаре [2], связь между геометрическими (пространственно - временными) и внутренними симметриями [1, 3], оператор зарядового сопряжения [4] и другие [5] дискретные симметрии в квантовой теории поля, интерес к этой тематике в основном протекал в математическом русле [6]. Тем не менее, автору кажется, что было бы небезынтересным рассмотреть с точки зрения расширения групп, например, оператор зарядового сопряжения в калибровочных теориях [7] или дискретные симметрии в теориях типа Калуцы - Клейна [8], а также возможные обобщения на случай суперсимметрии.

Ниже мы рассмотрим квантово-механический оператор четности в случае свободных полей в духе работ [1, 5]. При этом можно обойтись вполне элементарными средствами, без привлечения теории расширения групп в полном объеме.

Симметрия объекта - это его свойство не изменяться при некотором нетривиальном преобразовании. Чем больше таких преобразований, тем симметричнее объект.

Состоянию квантовой системы соответствует вектор в Гильбертовом пространстве. Но объектом, который "наблюдается" в эксперименте, является не сам вектор состояния Φ, а вероятность перехода $|(\Phi, \Psi)|^2$. Поэтому квантовая система симметрична, если в Гильбертовом пространстве ее состояний существует такое $\Phi \longmapsto V(\Phi) \equiv V\Phi$ преобразование (оператор V), которое не меняет вероятности переходов:

$$|(V\Phi, V\Psi)| = |(\Phi, \Psi)| .$$

В определении V оператора симметрии имеется некоторая неоднозначность. Дело в том что Φ и $e^{i\alpha}\Phi$ соответствуют одному и тому же физическому состоянию. Поэтому оператор V', который действует так $V'\Phi = \lambda(\Phi)V\Phi$, $|\lambda(\Phi)| = 1$, с точки зрения физики ничем не отличается от V.

Согласно теореме Вигнера [9], фазы $\lambda(\Phi)$ можно выбрать так что V' будет либо линейным и унитарным, либо антилинейным (т. е. $V'(a\Phi) = a^* V'(\Phi)$) и антиунитарным (т. е. для всех Φ, Ψ $(V'\Phi, V'\Psi) = (\Psi, \Phi)$).

Кроме вышеописанной реализации "Шредингеровского типа" преобразований симметрии квантовой системы, когда средние значения наблюдаемых меняются из-за преобразования векторов состояний, тогда как сами эрмитовы операторы, соответствующие наблюдаемым, не изменяются, возможна и реализация "Гейзенберговского типа", когда преобразуются как раз операторы, а векторы состояния остаются неизменными. Связь между двумя картинами преобразования симметрии дает требование что обе они должны давать один и тот же закон для преобразования средних значений наблюдаемых, которые и имеют непосредственный физический смысл. Это приводит к следующему закону преобразования операторов при "Гейзенберговской картине" описания симметрии:

$$A' = \begin{cases} V^+ A\, V \equiv V^{-1} A V, & \text{если V унитарен .} \\ V^+ A^+\, V, & \text{если V антиунитарен .} \end{cases}$$

(Напомним что V^+ для антиунитарного оператора V определяется так: для всех Φ, Ψ имеем $(\Phi, V\Psi) = (\Psi, V^+\Phi)$).

В квантовой теории поля состояния системы образуют пространство Фока, которое есть прямая сумма Гильбертовых пространств одночастичных, двухчастичных и т. д. состояний. Оператор симметрии задается унитарным или антиунитарным оператором в этом

пространстве. Многочастичные состояния мы можем получить из вакуума при помощи операторов рождения. Поэтому оператор симметрии будет определен, если будет задано его действие на вакуум и на оператор поля.

Обычно принимают, что при преобразованиях Пуанкаре $x'_\mu = \Lambda_\mu^\nu x_\nu + a_\mu$, которые соответствуют переходу от одной инерциальной системы отсчета к другой и трансляциям в пространстве-времени, полевые функции преобразуются окальным образом $u'_i(x') = A_{ij}\, u_j(x)$, или, что то же самое

$$u'_i(x) = A_{ij}\, u_j(\Pi^{-1}x) . \qquad (1)$$

A_{ij} матрицы задают представление группы Лоренца и в зависимости от того, что это за представление говорят о скалярном, спинорном, векторном и т. д. поле.

Если квантовая теория поля описывает реальность, которая Пуанкаре - инвариантна, то для каждого преобразования Пуанкаре $\Pi : x' = \Lambda x + a$ найдется такой унитарный (или антиунитарный) оператор $L(\Lambda, a) \equiv L(\Pi)$, действующий в пространстве Фока состояний квантовой системы, что будем иметь:

$$A_{ij}\, u_j(\Pi^{-1}x) = \begin{cases} L^+(\Pi)\, u_i(x)\, L(\Pi) , & \text{если L унитарен .} \\ L^+(\Pi)\, u_i^+(x)\, L(\Pi) , & \text{если L антиунитарен .} \end{cases}$$

(1) подразумевает, что поле имеет только геометрические (Лоренцовы) степени свободы. Как учесть внутренние степени свободы?

Наблюдатели в двух разных системах отсчета могут выбрать разные базисы в пространстве внутренних степеней свободы. Изменению базиса в пространстве внутренней симметрии соответствует унитарный оператор симметрии S, который задает следующее преобразование полевых функций:

$$u'_{i\mu}(x) \equiv S^+\, u_{i\mu}(x)\, S = \alpha_{\mu\nu}\, u_{i\nu}(x) .$$

(i - это Лоренцов индекс; μ, ν соответствуют внутренним степеням свободы).

Поэтому общий закон преобразования полевых функции при переходе от одной системы отсчета к другой есть

$$u'_{i\mu}(x) = \alpha_{\mu\nu}\, A_{ij}\, u_{j\nu}(\Pi^{-1}x) . \qquad (2)$$

Таким образом преобразованию Пуанкаре Π соответствует в пространстве Фока не один оператор L, а целый класс операторов

LS, где S оператор внутренней симметрии. Другими словами, группа Пуанкаре является не подгруппой полной группы симметрии G квантово-механической системы, а она только изоморфна фактор-группе G/G_0, где G_0 – группа внутренних симметрий (G/G_0 определяется [10, 11] как множество gG_0, $g \in G$ классов, которое является группой относительно следующей операции умножения $(g_1G_0)\cdot(g_2G_0) = (g_1g_2)G_0$. Это умножение однозначно определено только тогда, когда G_0 является нормальной подгруппой G, т.е. для всех $g \in G$ имеем $gG_0g^{-1} \subset G_0$). Согласно этой идее Мишеля [1] определение полной квантово-механической группы симметрии сводится к математической задаче расширения групп [11].

Такая же конструкция применима и для дискретных симметрий, таких как пространственная инверсия или обращение времени. Заметим, что концепцию комбинированной четности [12] можно рассматривать как частный случай этой идеи.

Ограничимся той подгруппой $Z_2^{(P)}$ группы геометрических (пространственно-временных) симметрий, которая порождается пространственной инверсией, и пусть $G^{(P)}$ – соответствующая подгруппа в группе квантово-механических симметрий.

$G^{(P)}$ определяется условием $G^{(P)}/G_0 \approx Z_2^{(P)}$, т.е. она есть минимальное расширение группы внутренних симметрий G_0 (минимальное потому, что Z_2 есть наименьшая нетривиальная группа). Приведем классификацию минимальных расширений согласно [5].

Возьмем какой нибудь $P \in G^{(P)}$, $P \notin G_0$ (квантово-механический оператор четности). Тогда $G^{(P)}/G_0 = \{G_0, PG_0\}$ и $G_0 = (PG_0)^2 = P^2G_0$ показывает, что $P^2 \in G_0$. Обозначим $P^2 = e$.

Так как G_0 нормальная подгруппа, то $PG_0P^{-1} \subset G_0$, т.е. P индуцирует следующий I_P автоморфизм G_0:

$$I_P(h) = PhP^{-1} \text{ для всех } h \in G_0 .$$

Легко видеть, что I_P и e связаны так: $I_P(e) = e$, $I_P^2 = I_e$. Заметим еще, что умножение в $G^{(P)}$ можно осуществить с помощью умножения в G_0 и автоморфизма I_P: $(Ph_1)h_2 = P(h_1h_2)$, $h_1(Ph_2) = PP^{-1}h_1Ph_2 = P(I_P^{-1}(h_1)h_2)$ и $(Ph_1)(Ph_2) = Ph_1P^{-1}P^2h_2 = I_P(h_1)eh_2$. Это наводит на мысль, что каждая (I, e) пара, где $e \in G_0$, а I такой автоморфизм G_0, что $I(e) = e$ и $I^2 = I_e$, определяет некоторое G' минимальное расширение G_0. А именно, для каждого элемента $h \in G_0$ определим новый элемент h' и в удвоенном таким образом множестве

G' продолжим умножение из G_0 таким образом:

$$h_1'\cdot h_2 = (h_1\cdot h_2)' \qquad\qquad h_1'\cdot h_2' = I(h_1)\cdot e\cdot h_2$$

$$h_1\cdot h_2' = (I^{-1}(h_1)\cdot h_2)' . \qquad\qquad (3)$$

Можно проверить, что определенное таким образом умножение ассоциативно и обратимо, а единичный элемент из G_0 остается единичным элементом и в G', т.е. G' действительно группа. Обозначим $P = 1'$, тогда из $1' = (h\cdot h^{-1})' = h'\cdot h^{-1}$ получим $h' = P\cdot h$ для каждого $h \in G_0$. Множество G'/G_0 состоит из двух классов G_0 и PG_0, т.е. $G'/G_0 \approx Z_2$ и G' действительно минимальное расширение. Заметим, что $P\cdot h\cdot P = h'\cdot 1' = I(h)\cdot e \equiv I(h)\cdot P^2$ показывает, что $I(h) = P\cdot h\cdot P^{-1}$, т.е. $I = I_P$.

Соответствие между минимальным расширением $G_0 \longrightarrow G^{(P)}$ и парой (I, e) не однозначно. А именно, имеем свободу выбора элемента P (квантово-механического оператора четности): в его роли можно взять любой элемент из класса PG_0 (например, оператор комбинированной четности). При замене $P \longrightarrow P\cdot g$, $g \in G_0$ имеем $I_P \longrightarrow I_{P\cdot g} = I_P \circ I_g$ и $e \longrightarrow (P\cdot g)^2 = P\cdot g\cdot P^{-1}\cdot P^2\cdot g = I_P(g)\cdot e\cdot g$, поэтому (I, e) и $(I\circ I_g, I(g)\cdot e\cdot g)$ пары определяют эквивалентные (фактически одно и то же) расширения. Задача классификации неэквивалентных минимальных расширений сводится, таким образом, к задаче классификации неэквивалентных (I, e) пар.

В первую очередь говорят о центральных и нецентральных минимальных расширениях, в зависимости от того, является ли соответствующий автоморфизм I внутренним автоморфизмом G_0 (т.е. найдется такой элемент $h \in G_0$, что $I = I_h$) или внешним автоморфизмом.

Пусть пара (I_h, e) определяет центральное расширение $G_0 \longrightarrow G^{(P)}$. Этому же расширению соответствует эквивалентная пара $(I_h \circ I_{h^{-1}}, I_h(h^{-1})\cdot e\cdot h^{-1}) = (1, h^{-1}\cdot e\cdot h^{-1})$, т.е. можно считать, что центральному минимальному расширению соответствует тождественный автоморфизм. Тогда (3) показывает, что, если g принадлежит центру группы G_0, то он принадлежит и центру группы $G^{(P)}$ (центр группы определяется как множество элементов, которые коммутируют со всеми элементами группы). Таким образом, при таком расширении центр группы не уменьшается (поэтому он и называется центральным). Классификация центральных минимальных расширений такова:

α_1 ——— $(I, e) = (1, q^2)$ и q принадлежит центру группы

G_0. Заметим, что при этом $I_{q^{-1}} = 1$, поэтому эквивалентная пара $(1\circ I_{q^{-1}},\ q^{-1}\cdot q^2\cdot q^{-1}) = (1,\ 1)$, т.е. в этом случае $P^2 = 1$ и P коммутирует с G_0. Таким образом имеем прямое произведение $G^{(P)} = G_0 \otimes Z_2^{(P)}$. Можно сказать, что в этом случае четность и внутренняя симметрия полностью независимы.

α_2 —— $(I,\ e) = (1,\ q^2)$ и q не принадлежит центру группы G_0. Эквивалентная пара $(I_{q^{-1}},\ 1) \equiv (I_P,\ 1)$, т.е. $P^2 = 1$ и закон умножения в $G^{(P)}$ имеет вид $h_1\alpha h_2\beta = h_1 I_\alpha(h_2)\alpha\beta$, где $\alpha,\ \beta = \{1$ или $P\}$. P не коммутирует с G_0. На самом деле имеем полупрямое произведение $G^{(P)} = G_0 \odot Z_2^{(P)}$ (полупрямое произведение групп G и H определяется [3] как множество $(g,\ h)$, $g\in G$, $h\in H$ пар со следующей операцией умножения $(g_1,\ h_1)\cdot(g_2,\ h_2) = (g_1\cdot\sigma_{h_1}(g_2),\ h_1\cdot h_2)$, где $\sigma_h \in \mathrm{Aut}\ G$ есть автоморфизм группы G и $h \longrightarrow \sigma_h$ соответствие является $H \longrightarrow \mathrm{Aut}\ G$ гомоморфизмом, т.е. $\sigma_{h_1\cdot h_2} = \sigma_{h_1}\circ\sigma_{h_2}$).

α_3 —— $(I,\ e) = (1,\ e)$, e не является квадратом в G_0. При помощи преобразования эквивалентности нельзя свести e к единице (так как $1 = 1(g)\cdot e\cdot g \equiv g\cdot e\cdot g$ означает $e = (g^{-1})^2$). Таким образом нет квантово-механического оператора четности с единичным квадратом.

Для расширений α_2 и α_3 внутренние симметрии и четность более тесно переплетены друг с другом.

Перейдем к нецентральным расширениям, т.е. пусть I является внешним автоморфизмом G_0.

β_1 —— $(I,\ e) = (I,\ 1)$ P не коммутирует с G_0, так как $I \neq 1$ и имеем полупрямое произведение $G^{(P)} = G_0 \odot Z_2^{(P)}$. Заметим что $I^2 = I_1 = 1$.

β_2 —— e принадлежит центру C_0, но его нельзя свести к единице при помощи преобразования эквивалентности (т.е. $I(g)\cdot e\cdot g = 1$ не имеет решения относительно g).

В этом случае в классе PG_0 нет элемента с единичным квадратом. Т.е. нет такого квантово-механического оператора четности P, чтобы было $P^2 = 1$. Для расширения β_2 $I^2 = I_e = 1$ так же как для β_1.

β_3 —— e не принадлежит центру G_0 и его нельзя ввести в центр при помощи преобразования эквивалентности.

При этом мы имеем ситуацию аналогичную β_2, но уже $I^2 \neq 1$.

Чтобы конкретизировать группу внутренних симметрий, рассмотрим случай свободного комплексного скалярного поля. Лагранжиан такого поля $L = \partial_\mu\varphi^*\ \partial^\mu\varphi - m^2\ \varphi^*\ \varphi$ инвариантен относительно фазовых преобразований $\varphi \longrightarrow e^{i\alpha}\ \varphi$, $\varphi^* \longrightarrow e^{-i\alpha}\ \varphi^*$, которые образуют $U(1)$ группу. В пространстве Фока этому соответствует оператор симметрии $V = e^{i\alpha Q}$, где Q - оператор "заряда" системы. Имеем еще симметрию относительно $\varphi \longrightarrow \varphi^*$, которой в пространстве Фока отвечает оператор зарядового сопряжения $\mathbb{C}$. При этом $\mathbb{C}Q = -Q\mathbb{C}$, т.е. $\mathbb{C}$ не коммутирует с $U(1)$. На самом деле для группы внутренней симметрии имеем [3] полупрямое произведение $G_0 = U(1) \odot Z_2^{(\mathbb{C})}$ (соответствующий гомоморфизм $\sigma : Z_2^{(\mathbb{C})} \longrightarrow \mathrm{Aut}\ U(1)$ определяется так : $\sigma_1 = 1$ и $\sigma_{\mathbb{C}}(e^{i\alpha Q}) = e^{-i\alpha Q}$).

Покажем, что каждый автоморфизм G_0 является автоморфизмом и $U(1)$. Пусть $\sigma\in\mathrm{Aut}\ G_0$ и $\sigma(e^{i\alpha Q}) = e^{i\beta Q}\ \mathbb{C}$. Тогда должно быть $[\sigma(e^{i\alpha Q/2})]^2 = \sigma(e^{i\alpha Q}) = e^{i\beta Q}\ \mathbb{C}$, но легко видеть, что $e^{i\beta Q}\ \mathbb{C}$ не является квадратом в G_0 ни при каком β. Таким образом, σ отображает $U(1)$ в себя и является его автоморфизмом. $U(1)$ - абелева группа, поэтому каждый ее внутренний автоморфизм является тождественным преобразованием. Продолжим этот автоморфизм до автоморфизма σ группы G_0. Для этого надо задать $\sigma(\mathbb{C})$. Условие $[\sigma(\mathbb{C})]^2 = \sigma(\mathbb{C}^2) = 1$ оставляет следующие четыре варианта $\sigma(\mathbb{C}) = \{1,\ e^{i\pi Q},\ \mathbb{C}$, или $e^{i\beta Q}\ \mathbb{C}\}$. Но из $e^{i\alpha Q}\ \mathbb{C} = \mathbb{C}\ e^{-i\alpha Q}$ вытекает условие $e^{i\alpha Q}\ \sigma(\mathbb{C}) = \sigma(\mathbb{C})\ e^{-i\alpha Q}$, что исключает первые два варианта, т.е. остаются тождественный автоморфизм и автоморфизм σ_β, при котором $\sigma_\beta(\mathbb{C}) = e^{i\beta Q}\mathbb{C}$. Но оба они внутренние автоморфизмы, так как $e^{i\beta Q}\ \mathbb{C} = e^{i\beta Q/2}\ \mathbb{C}\ e^{-i\beta Q/2}$.

Неподвижные точки σ_β - это элементы из $U(1)$ и условие $\sigma_\beta^2 = I_e$ однозначно выбирает $e = e^{i\beta Q}$. Т.е. соответствующее расширение определяется парой $(\sigma_\beta,\ e^{i\beta Q}) \equiv (I_{e^{i\beta Q/2}},\ e^{i\beta Q})$, которая эквивалентна паре $(1,\ e^{-i\beta Q/2}\ e^{i\beta Q}\ e^{-i\beta Q/2}) = (1,\ 1)$. Это означает, что все автоморфизмы σ_β дают одно и то же расширение типа α_1, для которого $P^2 = 1$, P коммутирует с G_0 и $G^{(P)} = [U(1)\odot Z_2^{(\mathbb{C})}]\otimes Z_2^{(P)}$. Так как P и $\mathbb{C}$ коммутируют, можно сказать что расширение α_1 соответствует случаю, когда внутренние четности частицы и античастицы одинаковы.

Для того, чтобы пара $(1,\ e)$ определяла минимальное расширение, e должен принадлежать центру G_0 (для выполнения условия

$1^2 = I_e$). Это последнее состоит из двух элементов 1 и $e^{i\pi Q}$. Таким образом, тождественный автоморфизм кроме расширения типа α_1, определяемого парой (1, 1), дает еще расширение типа α_2, которому соответствует пара $(1, e^{i\pi Q})$. При этом P коммутирует с G_0, но $P^2 = e^{i\pi Q} = (-1)^Q$.

Пара $(1, e^{i\pi Q})$ эквивалентна паре $(I_{e^{-i\pi Q/2}}\ 1)$. Это означает что в классе PG_0 можно выбрать такой оператор четности P', квадрат которого равен единице, но он больше не коммутирует с $\mathbb{C}$: $P'\cdot\mathbb{C} = I_{e^{-i\pi Q/2}}(\mathbb{C})\cdot P' = e^{-i\pi Q}\cdot\mathbb{C}\cdot P' \equiv (-1)^Q\ \mathbb{C}\cdot P'$ (ясно, что $P' = e^{-i\pi Q/2}\cdot P$). Группой квантово-механической симметрии является $G^{(P)} = [U(1) \odot Z_2^{(\mathbb{C})}] \odot Z_2^{(P')}$. В случае свободного комплексного скалярного поля, который мы рассматриваем, одночастичные состояния имеют "заряд" ± 1, поэтому в подпространстве одночастичных состояний P' и $\mathbb{C}$ антикоммутируют, т.е. частица и античастица имеют противоположные внутренние четности.

Единственный внешний автоморфизм U(1), квадрат которого есть внутренний автоморфизм (т.е. тождественный автоморфизм) это τ: $e^{i\alpha Q} \longmapsto e^{-i\alpha Q}$. Действительно, пусть $\tau(e^{i\alpha Q}) = e^{if(\alpha)Q}$. Так как τ автоморфизм, то $\tau(e^{i\alpha Q}\, e^{i\beta Q}) = \tau(e^{i\alpha Q})\, \tau(e^{i\beta Q})$, т.е. должны иметь $f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta)$, отсюда $f(\alpha) = m\alpha + m_0$. Но условие $\tau^2(e^{i\alpha Q}) = e^{i\alpha Q}$ дает $m^2 = 1$, $m_0 = 0$.

Снова имеем два варианта для продолжения τ на G_0: $\tau(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ или $\tau(\mathbb{C}) = e^{i\beta Q}\,\mathbb{C}$. Но оба варианта дают внутренние автоморфизмы G_0 : $\tau(x) = \mathbb{C}\cdot x\cdot\mathbb{C}^{-1}$ или $\tau_\beta(x) = (e^{i\beta Q/2}\mathbb{C})\ x\ (e^{i\beta Q/2}\mathbb{C})^{-1}$.

Как видим, G_0 имеет только внутренние автоморфизмы, поэтому возможны только центральные минимальные расширения его, которые определяются (1, e) парой, где e принадлежит центру G_0 и эти расширения исчерпываются α_1 и α_2 случаями.

Построим соответствующие операторы четности в пространстве Фока для свободного поля.

Ясно, что оператор четности P коммутирует с оператором инфинитезимального смещения во времени $1 + iH\Delta t$, т.е. $PiH = iHP$ и если P антилинеен, получаем $PH = -HP$ —— оператор четности меняет знак энергии состояния, что недопустимо. Таким образом, P унитарный оператор.

Унитарный оператор четности P антикоммутирует с оператором импульса $\overrightarrow{p}$ (так как пространственная инверсия и потом смещение

по вектору $\overrightarrow{a}$ то же самое, что смещение по вектору $\overrightarrow{-a}$ и потом инверсия). Поэтому рассмотрим четырехмерное подпространство в пространстве Фока, инвариантное относительно P, $\overrightarrow{p}$, Q и $\mathbb{C}$, которое порождено векторами состояния $|1\rangle = a_+^+(\overrightarrow{k})|0\rangle \equiv \Phi_+(\overrightarrow{k})$, $|2\rangle = a_-^+(\overrightarrow{k})|0\rangle \equiv \Phi_-(\overrightarrow{k})$, $|3\rangle = a_+^+(\overrightarrow{-k})|0\rangle \equiv \Phi_+(\overrightarrow{-k})$ и $|4\rangle = a_-^+(\overrightarrow{-k})|0\rangle \equiv \Phi_-(\overrightarrow{-k})$. Здесь $a_\sigma^+(\overrightarrow{k})$, $\sigma = \pm$ есть оператор рождения кванта с "зарядом" ±1 и импульсом $\overrightarrow{k}$. Он и соответствующий оператор уничтожения $a_\sigma(\overrightarrow{k})$ определяются из Фурье разложения оператора поля:

$$\varphi(x) = \varphi^{(+)}(x) + \varphi^{(-)}(x) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\overrightarrow{k}}{\sqrt{2k_0}} [e^{ikx}\, a_-^+(\overrightarrow{k}) + e^{-ikx}\, a_+(\overrightarrow{k})] ,$$

$$\varphi^*(x) = \varphi^{*(+)}(x) + \varphi^{*(-)}(x) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\overrightarrow{k}}{\sqrt{2k_0}} [e^{ikx}\, a_+^+(\overrightarrow{k}) + e^{-ikx}\, a_-(\overrightarrow{k})] .$$

В этом подпространстве операторам импульса, заряда и зарядового сопряжения соответствуют матрицы (σ_i - матрицы Паули):

$$\overrightarrow{p} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{k} & 0 \\ 0 & -\overrightarrow{k} \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad \mathbb{C} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{pmatrix} .$$

Оператор четности P, соответствующий расширению α_1, определяется условиями $P^2 = P^+P = PP^+ = 1$, $P\overrightarrow{p} = -\overrightarrow{p}\,P$, $PQ = QP$ и $P\mathbb{C} = \mathbb{C}P$, которые дают

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \eta_P^* \\ \eta_P & 0 \end{pmatrix} , \quad \eta_P = e^{i\alpha_P} .$$

Как видим $P\Phi_\sigma(\overrightarrow{k}) = \eta_P(\overrightarrow{k})\Phi_\sigma(\overrightarrow{-k})$, где $|\eta_P(\overrightarrow{k})| = 1$ и $\eta_P(\overrightarrow{-k}) = \eta_P^*(\overrightarrow{k})$. Для дальнейшего ограничения фазового множителя заметим, что $\Phi_\sigma(\overrightarrow{k}) = \Lambda(\overrightarrow{k})\Phi_\sigma(0)$, где $\Lambda(\overrightarrow{k})$ соответствует преобразованию Лоренца. Но $P\Lambda(\overrightarrow{k}) = \Lambda(\overrightarrow{-k})P$, поэтому $P\Phi_\sigma(\overrightarrow{k}) = \Lambda(\overrightarrow{-k})P\Phi_\sigma(0) = \eta_P(0)\Phi_\sigma(\overrightarrow{-k})$, т.е. $\eta_P(\overrightarrow{k}) = \eta_P(0)$ - не зависит от импульса, но тогда $\eta_P(\overrightarrow{-k}) = \eta_P^*(\overrightarrow{k})$ показывает, что η_P действительно и $\eta_P = \pm 1$. Таким образом,

$$P\Phi_\sigma(\overrightarrow{k}) = \pm\, \Phi_\sigma(\overrightarrow{-k}) \ \text{и}\ P^+a_\sigma^+(\overrightarrow{k})P = \pm\, a_\sigma^+(\overrightarrow{-k}) .$$

Закон преобразования оператора поля при этом будет

$$P^+\varphi(x_0, \overrightarrow{x})P = \pm\ \varphi(x_0, -\overrightarrow{x}) .$$

Это соответствует обычному скалярному или псевдоскалярному полю.

Пусть теперь оператор четности P соответствует расширению α_2, тогда имеем $P^2 = P^+P = PP^+ = 1$, $P\overrightarrow{\mathbb{P}} = -\overrightarrow{\mathbb{P}}P$, $PQ = QP$, но $\mathbb{C}P_- = e^{i\pi Q}P\mathbb{C}$. Последнее условие означает, что в подпространстве векторов $\Phi_\pm(\pm\overrightarrow{k})$ матрицы, соответствующие $\mathbb{C}$ и P, антикоммутируют. Так же как в случае расширения α_1, получаем

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \pm\sigma_3 \\ \pm\sigma_3 & 0 \end{pmatrix} ,$$

т. е.

$$P\Phi_\sigma(\overrightarrow{k}) = \pm\sigma\ \Phi_\sigma(-\overrightarrow{k}) \text{ и } P^+a^+_\sigma(\overrightarrow{k})P = \pm\ \sigma\ a^+_\sigma(-\overrightarrow{k}) \qquad (4)$$

Заметим, что такой оператор четности, который соответствует ситуации, когда бозон и его античастица имеют противоположную внутреннюю четность, не дает для оператора поля локального закона преобразования типа (1) или (2):

$$P^+\varphi(x_0, \overrightarrow{x})P = \pm\ [\ \varphi^{(-)}(x_0, -\overrightarrow{x}) - \varphi^{(+)}(x_0, -\overrightarrow{x})\ ] , \qquad (5)$$

- правую часть невозможно локально выразить через $\varphi(x_0, -\overrightarrow{x})$ и $\varphi^*(x_0, -\overrightarrow{x})$.

Аналогично можно рассмотреть свободное спинорное поле:

$$\Psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d\overrightarrow{k}[e^{ikx}\ a^+_{-,\ s}(\overrightarrow{k})v^{s,+}(\overrightarrow{k}) +$$

$$+\ e^{-ikx}\ a_{+,s}(\overrightarrow{k})v^{s,-}(\overrightarrow{k})] ,$$

$$\overline{\Psi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d\overrightarrow{k}[e^{ikx}\ a^+_{+,s}(\overrightarrow{k})\overline{v}^{\ s,+}(\overrightarrow{k}) +$$

$$+\ e^{-ikx}\ a_{-,s}(\overrightarrow{k})\overline{v}^{\ s,-}(\overrightarrow{k})] ,$$

здесь подразумевается суммирование по двум независимым поляризациям фермиона $s = \pm\ \frac{1}{2}$, а спиноры $v^{s,\sigma}(\overrightarrow{k})$ определяются условием ортонормированности и уравнениями

$$(\hat{k} \pm m)\ v^{s,\sigma}(\overrightarrow{k}) = 0 \quad \Sigma_3\ v^{s,\sigma}(0) = -s\sigma\ v^{s,\sigma}(0) \quad \Sigma_3 = \frac{i}{2}\ \gamma^1\gamma^2 .$$

Так же как для скалярного поля, получаем, что в случае расширения α_1, когда фермион и его античастица обладают одинаковой внутренней четностью, имеем

$$P^+\ a^+_{\sigma,s}(\overrightarrow{k})\ P = \pm\ a^+_{\sigma,s}(-\overrightarrow{k}) ,$$

что для оператора поля дает неканонический закон преобразования (при выводе надо использовать уравнение $\gamma^0v^{s,\pm}(-\overrightarrow{k}) = \mp\gamma^0v^{s,\pm}(\overrightarrow{k})$, которое следует из определения спиноров $v^{s,\sigma}(\overrightarrow{k})$):

$$P^+\ \Psi(x_0, \overrightarrow{x})\ P = \pm\ \gamma^0\ [\ \Psi^{(-)}(x_0, -\overrightarrow{x}) - \Psi^{(+)}(x_0, -\overrightarrow{x})] . \qquad (6)$$

В отличие от скалярного поля, для спинорного поля канонический закон преобразования дает расширение типа α_2, для которого $P^+a^+_{\sigma,s}(\overrightarrow{k})\ P = \pm\sigma\ a^+_{\sigma,s}(-\overrightarrow{k})$ $P^+\ \Psi(x_0, \overrightarrow{x})\ P = \pm\ \gamma^0\ \Psi(x_0, -\overrightarrow{x})$.

Как видим, обычная ситуация, когда внутренние четности частицы и античастицы одинаковы для бозонов и противоположны для фермионов, предполагает, в некотором смысле, локальность теории (закон преобразования полевых операторов типа (1)). Если отказаться от этого требования, возникает аномальный оператор четности, для которого внутренние четности частицы и античастицы одинаковы для фермионов и противоположны для бозонов. Конечно, чтобы придать физический смысл такой ситуации, надо построить соответствующую теорию взаимодействующих полей, наверно нелокальную, как подсказывает вид законов преобразования (5) и (6). Нижеследующее рассуждение не претендует на такую попытку, а носит скорее иллюстративный характер для одной занятной мысли, которую можно рассматривать как модификацию "сумасшедшей" идеи Будкера [13], что $\mathbb{C}$P - несохранение в распадах каонов является следствием их рождения на фиксированной мишени и будет отсутствовать в экспериментах со встречными пучками.

Пусть поле $\varphi(x)$, с неканоническим законом преобразования (5) при пространственной инверсии, описывает K^0 и $\overline{K}^0$ мезоны. Тогда $\Phi_+ = |K^0\rangle$, $\Phi_- = |\ \overline{K}^0\rangle$ и согласно (4) (для определенности мы выбрали верхний знак и рассматриваем систему покоя) $P|K^0\rangle =$

$= -|K^0>$, $P|\overline{K}^0> = |\overline{K}^0>$. Тогда для CP будем иметь

$$CP|K^0> = -|\overline{K}^0> \quad CP|\overline{K}^0> = |K^0> .$$

Никакая линейная комбинация $|K^0>$ и $|\overline{K}^0>$ не будет собственным состоянием CP с действительным собственным значением, так как $(CP)^2 = -1$. Можно сказать, что четность одночастичных состояний неизмеряема. Но двухчастичные состояния могут обладать определенной (действительной) CP четностью. Это и нелокальный характер закона преобразования (5) наводит на аналогию [14] с парадоксом Эйнштейна - Подольского - Розена [15]. В частности, вопрос о сохранении или несохранении CP имеет смысл только для системы $K^0\overline{K}^0$ в целом, а не для ее части. Наличие распада $K_L \longrightarrow 2\pi$ еще не означает нарушение CP - инвариантности в глобальном смысле. Чтобы убедиться в ее нарушении, надо проследить судьбу сопутствующего K_S мезона. Заметим также, что в такой ситуации только эксперименты на встречных пучках могут дать ответ на вопрос о CP - несохранении, так как в экспериментах с фиксированной мишенью пара $K^0\overline{K}^0$ не рождается в определенном CP-состоянии.

Автор благодарит Голубева В.Б., Липатова Л.Н, Фадина В.С., Кураева Э.А., Хрипловича И.Б. за обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *L. Michel*. Nucl. Phys.57 (1964), 356.
   L. Michel. Phys. Rev. B137 (1965), 405.
   F. Lurcat. L. Michel. Nouvo Cimento 21 (1961), 574.
   L. Michel. "Invariance in Quantum Mechanics and Group Extension". В книге Group Theoretical Concepts and Methods in Elementary Particle Physycs, edited by F. Gürsey (Gordonand Breach, New York, 1965).
   L. Michel. "The problem of Group Extensions of the Poincaré Group and SU(6) Symmetry". В книге Symmetry Principles at High-Energy, edited by B. Kurşunoǧlu, A. Perlmutter and I. Sakmar (Freeman, San Francisco, 1965), vol. II.
   L. Michel. "Relativistic Invariance". В книге Particle Symmetries and Axiomatic Field Theory, edited by M. Chretienand S. Deser (Gordon and breach, New York, 1966).

2. *E. Wigner*. Ann. Math. 40 (1939), 149.
   V. Bargmann. Ann. Math. 59 (1954), 1.
   B. Zumino, D. Zwanziger. Phys. Rev. 164 (1967), 1959.
3. *T.K. Kuo*. Phys. Rev. D4 (1971), 3620.
   T.K. Kuo. Phys. Rev. D4 (1971), 3637.
   T.K. Kuo. Phys. Rev. D5 (1972), 1033.
4. *S. Okubo*. Phys. Rev. D12 (1975), 3835.
   A.O. Barut, H. Kleinert. J. Math. Phys. 8 (1967), 685.
5. *T.D. Lee, G.C. Wick*. Phys. Rev. 148 (1966), 1385.
6. *U. Cattaneo, A. Janner*, J. Math. Phys. 15 (1974), 1155.
   U. Cattaneo, A. Janner, J. Math. Phys. 15 (1974), 1166.
   F. Herbut, M. Vujizic, Dj. Šija ki. J. Math. Phys. 14(1973), 1121.
   M. Flato, D. Sternheimer. J. Math. Phys. 7 (1966), 1932.
   O. Fleischman, J.G. Nagel. J. Math. Phys. 8 (1967), 1128.
7. *R. Slansky*. "Charge Conjugation and its Violation in Unified Models". В книге Proceedings of the First Workshop Grand Unification, edited by P. Frampton, L.S. Glashow, and A. Yildiz, J Math. Science Press, New Hampshire, 1980.
   R. Slansky. Phys. Rep. C79 (1981), 1.
   R.V. Moody, J. Patera. "General Charge Conjugation Operators in Simple Lie Groups", preprint CALT-68-1064, 1984.
   J. Kiskis. Phys. Rev. D17 (1978), 3196.
   Н.В. Смоляков. ТМФ 50 (1982), 344.
   С.П. Баранов, А.А. Комар. Труды физ. ин.-та АН СССР им. П.Н. Лебедева. т.152 (1983), 194.
   Ю.В. Тютин, Б.Б. Лохвицкий. Известия ВУЗ-ов СССР - Физика т.25 (1982), 62.
8. *C. Wetterich*. "Discrete Symmetries in Kaluza-Klein Theories", preprint TH.3692-CERN, 1983.
   M.B. Gavela, R.I. Nepomechie. Class. Quantum Grav. 1 (1984), L21.
9. *Е.П. Вигнер*. Теория групп и ее приложения к квантово-механической теории атомных спектров, М., Изд. Иностр. Лит., 1961.
10. *С. Ленг*. Алгебра, М., "Мир", 1968.
11. *А.Г. Курош*. Теория групп, М., "Наука", 1967.
12. *Л.Д. Ландау*. ЖЭТФ 32 (1957), 405.
    E.P. Wigner. Rev. Mod. Phys. 29 (1957), 255.
    A. Salam. Nuovo Cimento 5 (1957), 229.

13. *Г.И. Будкер.* Не опубликовано.

14. *T. Day.* Phys. Rev. 121 (1961), 1204.

Г. Липкин. Квантовая механика, М., "Мир", 1977.

15. *A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen.* Phys. Rev. 47 (1935), 777.

Д. Бом. Квантовая теория, М., "Наука", 1965.

З.К. Силагадзе

О внутренней четности античастиц

Ответственный за выпуск: С.Г. Попов

Работа поступила - 15 августа 1991 г.
Подписано к печати 15. 08. 1991 г.
Формат бумаги 60×90 1/16
Объём 1,3 п.л., 1,0 уч.-изд.л.
Тираж 150 экз. Бесплатно. Заказ N 82.

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г. Новосибирск, 90.