11

ИЯФ

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

В.Н. Худик

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ИМПУЛЬСА ПАКЕТА АЛЬФВЕНОВСКИХ ВОЛН

ПРЕПРИНТ 92-15

НОВОСИБИРСК

Об определении импульса пакета альфвеновских волн

В.Н. Худик

Институт Ядерной Физики им. Г.И. Будкера
630090, Новосибирск, 90

АННОТАЦИЯ

В работе рассмотрены различные определения импульса волнового возмущения, соответствующие в магнитной гидродинамике инвариантности функции Лагранжа относительно разных преобразований сдвига. Показано, что величина импульса пакета альфвеновских волн, вычисленного на основе принятого в электродинамике сплошных сред определения, не совпадает с суммарным импульсом частиц среды и электромагнитного поля в области локализации пакета.

1. ВВЕДЕНИЕ

Определение импульса волнового возмущения в сплошной среде является одной из самых фундаментальных задач электродинамики сплошных сред и обсуждение этого вопроса по-прежнему привлекает к себе внимание, несмотря на кажущуюся завершенность соответствующей теории [1]. В частности, недавно в связи с задачей о возбуждении токов в среде некоторые результаты по данной проблеме были приведены в работе [2]. Несколько парадоксальным их следствием является утверждение о том, что импульс альфвеновской волны равен нулю (при неравной нулю энергии!), что явно противоречит устоявшемуся суждению о пропорциональности импульса волнового пакета его энергии [3].

В интересах большей ясности изложения воспроизведём стандартное определение импульса волнового пакета, принятое в электродинамике сплошных сред. Напомним, что импульс волнового пакета может быть определён тем же путём, что и его энергия. Отправным пунктом в определении последней величины является вытекающий из уравнений Максвелла баланс энергии для электромагнитного поля:

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{\mathcal{E}^2+\mathcal{H}^2}{8\pi}+\mathrm{div}\frac{c[\vec{\mathcal{E}}\times\vec{\mathcal{H}}]}{4\pi}=-\vec{j}(\vec{\mathcal{E}})\vec{\mathcal{E}}-\vec{j}_s\vec{\mathcal{E}}\,. \tag{1}$$

Здесь предполагается, что рассматриваемая волна взаимодействует с системой распределённых в пространстве сторонних зарядов ρ_s и токов $\vec{j}_s$, индуцируя в среде заряды $\rho(\vec{\mathcal{E}})$ и токи $\vec{j}(\vec{\mathcal{E}})$. Для квазимонохроматического поля

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t)=\frac{1}{2}\,\{\vec{E}(\vec{r},t)\exp(-i\omega_o\vec{r}+i\vec{k}_o t)+\text{к. с.}\}\,, \tag{2}$$

с медленно меняющейся в пространстве и времени огибающей $\vec{E}(\vec{r},t)$ усреднение (1) по быстрому времени осцилляций поля позволяет получить известное уравнение, выражающее закон сохранения энергии волнового пакета [4]:

$$\frac{\partial}{\partial t} W + \mathrm{div}[(d\omega/d\vec{k})W] = 2\gamma W - \langle \vec{j}_s \vec{\mathcal{E}} \rangle , \qquad (3)$$

здесь угловые скобки означают усреднение по периоду $2\pi/\omega_o$; в плотности энергии волнового пакета

$$W = \frac{1}{\omega} \frac{\partial}{\partial\omega}(\omega^2 \varepsilon'_{\alpha\beta}) E^*_\alpha E_\beta / 16\pi , \qquad (4)$$

и декременте затухания

$$\gamma = \omega\ \varepsilon''_{\alpha\beta} E^*_\alpha E_\beta / 16\pi W , \qquad (5)$$

$\varepsilon'_{\alpha\beta}$ и $\varepsilon''_{\alpha\beta}$ означают соответственно эрмитову и антиэрмитову части тензора диэлектрической проницаемости.

Совершенно аналогично, усреднение по быстрому времени вытекающего из уравнений Максвелла баланса импульса для электромагнитного поля

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{[\vec{\mathcal{E}}\times\vec{\mathcal{H}}]}{4\pi c} + \frac{\partial}{\partial x_\beta} \vec{\sigma}_\beta = -\rho(\vec{\mathcal{E}})\vec{\mathcal{E}} - \frac{1}{c}[\vec{j}(\vec{\mathcal{E}})\times\vec{\mathcal{H}}] + \vec{l}_s , \qquad (6)$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{8\pi}(\mathcal{E}^2+\mathcal{H}^2)\delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{4\pi}(\mathcal{E}_\alpha\mathcal{E}_\beta+\mathcal{H}_\alpha\mathcal{H}_\beta) ,$$

$$\vec{l}_s = -\rho_s\vec{\mathcal{E}} - \frac{1}{c}[\vec{j}_s\times\vec{\mathcal{H}}] ,$$

приводит к следующей форме закона сохранения импульса волнового пакета:

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{\pi} + \frac{\partial}{\partial x_\beta}[(d\omega/d\vec{k}_\beta)\vec{\pi}] = 2\gamma\vec{\pi} + \langle \vec{l}_s \rangle . \qquad (7)$$

Плотность импульса волнового пакета $\vec{\pi}$ выражается через плотность энергии

$$\vec{\pi} = (\vec{k}_o/\omega_o)W . \qquad (8)$$

Наличие такой связи между импульсом и энергией позволяет пользоваться при описании волновых пакетов квантовым языком. Действительно, импульс одного кванта пропорционален $\hbar\vec{k}$, а его энергия $-\hbar\omega$, так что между импульсом всех квантов, составляющих пакет, и их энергией всегда должно иметь место соотношение (8).

Важной особенностью этих характеристик волнового пакета является их квадратичная зависимость от амплитуды электрического поля, что даёт возможность при их вычислении считать индуцированные в среде заряды и токи линейно зависящими от поля $\vec{\mathcal{E}}$, и, таким образом, оказывается вполне достаточно информации о среде, сосредоточенной в тензоре диэлектрической проницаемости.

Такая трактовка импульса волнового пакета не является

единственной. Можно естественным образом дать и другое определение этой величины, исходя из выражения для импульса единицы объёма среды

$$\vec{p} = \langle \rho\vec{v} + \frac{1}{c}\frac{[\vec{\mathcal{E}}\times\vec{\mathcal{H}}]}{4\pi} \rangle . \qquad (9)$$

Первое слагаемое в правой части есть импульс частиц единицы объёма с плотностью ρ и скоростью $\vec{v}$, второе слагаемое - импульс электромагнитного поля.

Плотность импульса $\vec{p}$, как выясняется, зависит от нелинейных свойств среды и, вообще говоря, не совпадает с плотностью $\vec{\pi}$. Например, при возбуждении в бездиссипативной среде волнового пакета в неё вкладывается сторонними токами некоторое количество импульса $\delta\vec{P}_s$. При этом суммарный импульс всей среды увеличивается на эту величину вне зависимости от того, какое из определений (8), (9) плотности импульса было использовано при подсчёте. Однако распределение в пространстве вложенного импульса совершенно различно для этих двух случаев: при использовании определения (8) весь импульс локализован в области волнового пакета и вместе с ним перемещается в пространстве с групповой скоростью $\vec{v}_g = d\omega/d\vec{k}$, в то время как при использовании (9) оказывается, что только часть импульса переносится вместе с пакетом со скоростью $\vec{v}_g$ (эту часть, очевидно, и следует отождествить в этом случае с собственно импульсом волнового пакета), другая же часть может, например, остаться на месте в области возбуждения пакета.

Предметом настоящей работы является обсуждение и сравнение определений импульса (8), (9) на примере альфвеновских волн, рассматриваемых в рамках уравнений магнитной гидродинамики.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИМПУЛЬСА И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СДВИГА

Для магнитогидродинамических волн нетрудно показать, что величины $\vec{p}$ и $\vec{\pi}$ связаны с инвариантностью функции Лагранжа относительно различных преобразований сдвига: импульс $\vec{p}$ связан с переносом точек среды, а величина $\vec{\pi}$, которую можно назвать квазиимпульсом, - с переносом характеристик среды из одной точки среды в другую (без переноса самой среды) [1].

Наиболее просто эта связь выявляется при использовании лагранжевых переменных для описания среды. В этих переменных состояние среды определяется заданием в момент времени t положения $\vec{r}$ каждой частицы как функции того положения $\vec{R}$, которое она занимала в состоянии с невозмущённой плотностью ρ_o. Функция Лагранжа L в магнитной гидродинамике, выраженная через смещение частиц $\vec{\xi} = \vec{r}(\vec{R},\ t)-\vec{R}$, имеет вид:

$$L=\int d^3\vec{R}\ \Lambda, \qquad \Lambda= \frac{1}{2}\rho_o\dot{\vec{\xi}}_t^2 - \rho_o\varepsilon(\rho) - (\rho_o/\rho)\ \vec{\mathcal{H}}^2/8\pi\ , \qquad (10)$$

$$\varepsilon(\rho)=\int d\rho\ p(\rho)/\rho^2, \quad \rho=\rho_o/\det(\delta_{ik}+\partial\xi_i/\partial X_k)\ ,$$

$$\vec{\mathcal{H}} = (\rho/\rho_o)(\varkappa_{oi}\ \frac{\partial}{\partial X_i})(\vec{R} + \vec{\xi})\ ,$$

здесь $\Lambda=\Lambda(\dot{\vec{\xi}}_t,\ \partial\xi_i/\partial X_k,\ \vec{R})$ - плотность Лагранжиана, $\varepsilon(\rho)$ - энергия единицы массы, $\vec{\mathcal{H}}$, $\vec{\mathcal{H}}_o$-соответственно возмущённое и невозмущённое магнитные поля. Неизменность функции Лагранжа при переносе всех точек среды $\vec{\xi} \to \vec{\xi} + \vec{\varepsilon}$ приводит к сохранению импульса:

$$\vec{\mathcal{P}} = \int d^3\vec{R}\ \partial\Lambda/\partial\dot{\vec{\xi}}_t= \int d^3\vec{R}\ \rho_o\dot{\vec{\xi}}_t= \int d^3\vec{r}\ \rho\vec{v}\ . \qquad (11)$$

В рамках магнитной гидродинамики импульсом электромагнитного поля можно пренебречь [5], так что импульс возмущения слагается только из импульса частиц среды. В (11) предполагается, что скорость $\vec{v} = \dot{\vec{\xi}}_t$ быстро падает с увеличением расстояния, и последний интеграл сходится при больших r.

Неизменность функции Лагранжа при переносе характеристик среды $\vec{R} \to \vec{R} - \vec{\varepsilon}$ приводит к сохранению квазиимпульса

$$\vec{\mathcal{K}} = -\int d^3\vec{R}\ (\partial\Lambda/\partial\dot{\xi}_{it})(\partial\xi_i/\partial\vec{R})\ . \qquad (12)$$

Сохранение этой величины тесно связано с пространственной однородностью равновесного состояния: квазиимпульс перестаёт сохраняться, когда плотность ρ_o или магнитное поле $\vec{\mathcal{H}}_o$ в невозмущённой среде зависят от координат.

Квазиимпульс $\vec{\mathcal{K}}$ является квадратичной функцией смещения, и потому при его вычислении для возмущений малой амплитуды достаточно ограничиться линейным приближением. Для пакета (2)

$$\rho_o(\partial\xi_i/\partial t)(\partial\xi_i/\partial\vec{R}) \cong -\rho_o(\vec{k}_o/\omega_o)\ v^2\ ,$$

$$\vec{\mathcal{K}} = (\vec{k}_o/\omega_o)\int d^3\vec{R}\ \rho_o v^2 = (\vec{k}_o/\omega_o)\int d^3\vec{r}\ W\ .$$

Таким образом, для магнитогидродинамических волн величину $\vec{p}$ следует отождествить с плотностью истинного импульса, а величину $\vec{\pi}$ - с плотностью квазиимпульса волнового пакета.

3. ИМПУЛЬС АЛЬФВЕНОВСКОЙ ВОЛНЫ

Конкретное вычисление импульса пакета альфвеновских волн удобно провести, исходя из уравнений бездиссипативной магнитной гидродинамики и считая, что этот пакет возбуждается некоторой сторонней механической силой:

$$\rho[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\ \nabla)\vec{v}] = -\nabla(p+ \frac{1}{8\pi}\mathcal{H}^2) + \frac{1}{4\pi}(\vec{\mathcal{H}}\ \nabla)\vec{\mathcal{H}} + \vec{f}\ , \qquad (13)$$

$$\frac{\partial\vec{\mathcal{H}}}{\partial t} = \mathrm{rot}[\vec{v}\times\vec{\mathcal{H}}]\ , \qquad (14)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\ \rho\vec{v} = 0, \quad p=p(\rho)\ . \qquad (15)$$

Зависимость частоты альфвеновской волны от волнового вектора такова

$$\omega=c_a k_z, \quad c_a=\mathcal{H}_o/\sqrt{4\pi\rho_o}\ ,$$

что эта волна всегда бежит с альфвеновской скоростью c_a вдоль оси z (направление которой выбрано совпадающим с направлением однородного невозмущённого поля $\vec{\mathcal{H}}_o$); в линейном приближении скорость $\vec{v}'$ частиц среды в этой волне лежит в плоскости, перпендикулярной оси z, и носит вихревой характер :

$$\vec{v}'=\mathrm{rot}\ \vec{\Omega}, \quad \vec{\Omega} =(0,\ 0,\ \Omega)\ .$$

Будем предполагать, что сторонняя механическая сила представляет собой локализованный в пространстве пакет, бегущий с альфвеновской скоростью вдоль оси z. Амплитуду силы будем считать экспоненциально медленно растущей во времени (с показателем роста $\gamma \ll \omega_o$), а среднее за период значение силы равным нулю. Кроме того, поляризацию сторонней силы выберем такой, чтобы возбуждались именно альфвеновские волны:

$$\vec{f} = \frac{1}{2}(\vec{F} + \text{к.с.}),\ \vec{F} = \mathrm{rot}\vec{\mathcal{F}},\ \vec{\mathcal{F}} = (0,0,\mathcal{F})\ \exp(\gamma t)\ , \qquad (16)$$

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_o(x,y,z-c_a t)\exp(-i\omega_o t+i\vec{k}_o\vec{r})\ .$$

Соответствующие этой силе возмущение магнитного поля и скорость среды в линейном приближении находятся в явном виде

$$\vec{\mathcal{H}}'= \frac{1}{2}(\vec{H}'+ \text{к.с.}),\ \vec{H}'=-\mathcal{H}_o(1-i\gamma/2\omega_o)\vec{F}/2\gamma\rho_o c_a\ ,$$

$$\vec{v}'= \frac{1}{2}(\vec{v}'+ \text{к.с.}),\ \vec{v}'=(1+i\gamma/2\omega_o)\vec{F}/2\gamma\rho_o\ .$$

и, естественно, представляют собой такие же волновые пакеты с экспоненциально растущей во времени амплитудой.

В альфвеновской волне в линейном приближении не происходит возмущения плотности среды, и, вследствие этого обстоятельства, плотность импульса альфвеновского пакета, вычисляемая только на основе линейного приближения, равна нулю, и её значение определяется величинами более высокого порядка малости:

$$\vec{p} = \rho\langle\vec{v}'\rangle + \langle\rho'\vec{v}'\rangle + \rho_o\langle\vec{v}''\rangle = \rho_o\langle\vec{v}''\rangle .$$

Уравнения для медленно меняющихся величин второго порядка

$$\vec{u} = \langle\vec{v}''\rangle, \quad n = \langle\rho''/\rho_o\rangle, \quad \vec{h} = \langle\vec{\mathcal{H}}''/\mathcal{H}_o\rangle ,$$

получаются усреднением точных уравнений (13)-(15) по периоду волны $2\pi/\omega_o$ после отбрасывания членов $\sim \gamma/\omega_o$, $(\gamma/\omega_o)^2$

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{u} = -c_s^2\nabla n - c_a^2\nabla h_z + c_a^2\frac{\partial}{\partial z}\vec{h} - \frac{1}{\rho_o}\nabla\frac{W}{2} , \qquad (17)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{h} = \mathrm{rot}[\,\vec{u}\times\vec{e}_z], \qquad \vec{e}_z = \vec{\mathcal{H}}_o/\mathcal{H}_o , \qquad (18)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} n + \mathrm{div}\,\vec{u} = 0, \qquad c_s^2 = dp/d\rho , \qquad (19)$$

и совпадают по форме с обычными линеаризованными уравнениями магнитной гидродинамики, в которых роль внешней силы играет пондеромоторная сила. Она создаётся давлением высокочастотного поля, медленно меняющегося во времени и пространстве, и равного с точностью до множителя 1/2 плотности энергии W

$$\frac{1}{2}W = \langle\vec{\mathcal{H}}'^2/8\pi\rangle, \quad W(\vec{r},t) = W_o(x,y,z-c_a t)\exp(2\gamma t) . \qquad (20)$$

Отметим, что амплитуда ВЧ давления перестаёт увеличиваться с течением времени при прекращении воздействия сторонней механической силы (16).

Из уравнений (17), (18) легко усмотреть, что для векторов $\vec{u}$, $\vec{h}$ выполняются равенства

$$\vec{e}_z\,\mathrm{rot}\,\vec{u} = 0, \quad \vec{e}_z\,\mathrm{rot}\,\vec{h} = 0 ,$$

означающие, что поперечные компоненты этих векторов являются градиентами скалярных потенциалов

$$\vec{u}_\perp = \nabla_\perp\phi , \quad \vec{h}_\perp = \nabla_\perp\psi , \quad \nabla_\perp \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, 0\right) .$$

Разрешение уравнений (17)-(19) относительно неизвестных u_z, ϕ, n приводит к уравнениям

$$\hat{\mathcal{L}}u_z = -\frac{\partial^2}{\partial t\partial z}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_a^2\Delta\right)\frac{W}{2\rho_o} , \quad \hat{\mathcal{L}}\phi = -\frac{\partial^3}{\partial t^3}\frac{W}{2\rho_o} , \qquad (21)$$

$$\hat{\mathcal{L}}n = \Delta\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_a^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{W}{2\rho_o} , \qquad (22)$$

здесь через $\hat{\mathcal{L}}$ обозначен оператор

$$\hat{\mathcal{L}}\left(\frac{\partial}{\partial t},\nabla\right) = \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_s^2\Delta\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_a^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right] + \hat{\mathcal{L}}_1\left(\frac{\partial}{\partial t},\nabla\right) ,$$

$$\hat{\mathcal{L}}_1 \equiv -c_a^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla_\perp^2 .$$

Дисперсионное уравнение

$$\hat{\mathcal{L}}(-i\omega, i\vec{k}) = 0 ,$$

определяет быструю и медленную магнитозвуковые волны, так что уравнения (21), (22) описывают возбуждение этих волн под воздействием ВЧ давления (и, следовательно, во втором порядке альфвеновские волны вообще не возбуждаются).

Рассмотрим решение уравнений (21), (22) в случае, когда скоростью звука можно пренебречь, и будем для простоты считать, что ВЧ давление имеет вид, изображённый на рис 1, и величина его

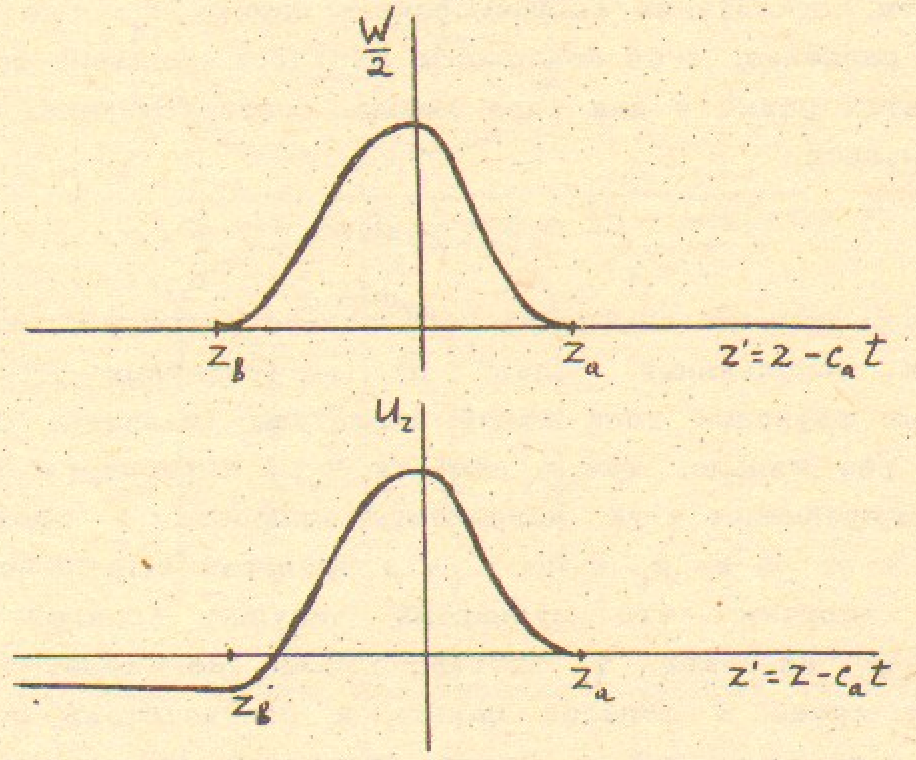

Рис. 1. Зависимость ВЧ давления и продольной скорости от z координаты (при одних и тех же поперечных координатах x, y).

мало меняется за время прохождения пакетом расстояний порядка его размера L (то есть $\gamma L/c_a \ll 1$). В этом случае альфвеновская скорость является максимальной скоростью распространения возмущений в рассматриваемой среде, поэтому перед пакетом возмущение всех величин равно нулю. Продольная скорость u_z пр $c_s=0$ определяется из уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}u_z=-\frac{\partial}{\partial z}\frac{W}{2\rho_o}, \tag{23}$$

простым интегрированием по времени и оказывается равной (см. тот же рис. 1)

$$u_z(\vec{r},t) = 0, \qquad z-c_a t > z_a, \tag{24}$$

$$u_z(\vec{r},t) = \frac{W(\vec{r},t)}{2\rho_o c_a}, \quad z_b \le z-c_a t \le z_a, \tag{25}$$

$$u_z(\vec{r},t) = -\frac{\bar{W}_o(x,y)}{2\rho_o c_a}\exp(k_\gamma z), \quad z-c_a t < z_b, \tag{26}$$

здесь

$$\bar{W}_o(x,y)= -k_\gamma \int_{z_b}^{z_a} dz' W_o(x,y,z'), \quad k_\gamma=2\gamma/c_a .$$

В области локализации альфвеновского пакета V_W, где отлично от нуля ВЧ давление, z-ая компонента импульса согласно формуле (25) оказывается ровно в два раза меньше соответствующей компоненты квазиимпульса

$$\mathcal{P}_z = \int_{V_W} d\vec{r}\, \rho_o u_z = \frac{1}{2c_a}\int d\vec{r}\, W = \frac{1}{2}K_z .$$

В процессе накачки альфвеновского пакета сторонней силой за ним остаётся неподвижный "след" из возбуждённых ВЧ давлением вторичных звуковых волн малой амплитуды (величина u_z здесь в $(k_\gamma L)^{-1}$ раз меньше, чем в области V_W). Интегрируя соотношение (26), определяющее z-ую компоненту скорости в области "следа," по z от $-\infty$ до z_b и по x, y в пределах поперечного сечения пакета, получим, что суммарный импульс "следа" равен по абсолютной величине и противоположен по знаку суммарному импульсу среды в области пакета в соответствии с тем, что импульс, вкладываемый в среду сторонней механической силой, равен нулю.

Потенциал поперечной скорости ϕ при $c_s = 0$ находится из уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi - c_a^2\Delta\phi = -\frac{\partial}{\partial t}\frac{W}{2\rho_o}, \tag{27}$$

в котором скорость источника в правой части равна скорости распространения возмущений. При отсутствии сторонней механи-

ческой силы

$$W(\vec{r}, t) = W_o(\vec{r}_\perp, z-c_a t) , \tag{28}$$

и формально решение этого уравнения можно искать в виде бегущей вдоль оси z волны $\phi = \phi(\vec{r}_\perp, z-c_a t)$. Это даёт возможность легко проинтегрировать (27)

$$\vec{u}_\perp = -\frac{1}{2\pi}\nabla_\perp \int d\vec{r}\,'_\perp \ln|\vec{r}_\perp-\vec{r}\,'_\perp| \frac{\partial}{\partial z} W_o(\vec{r}\,'_\perp, z-c_a t)/2\rho_o c_a . \tag{29}$$

Определяемое формулами (25) (с ВЧ давлением $W(\vec{r}, t)$ из (28)), (29) бездивергентное поле скоростей изображено на рис. 2. Однако

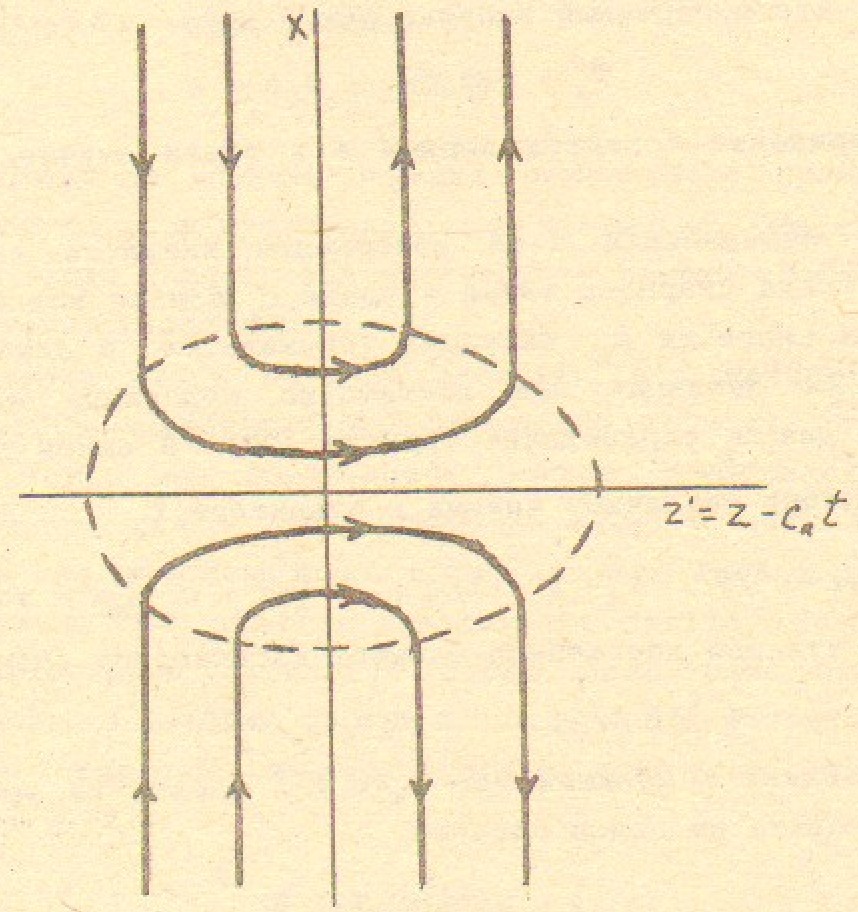

Рис. 2. Поле скоростей $\vec{u}$ в отсутствии сторонней механической силы (пунктиром очерчена область локализации альфвеновского пакета).

решение (29) является предельным, не достигаемым при конечных временах t. Это связано с тем, что при больших $r_\perp$ поперечная скорость падает слишком медленно $u_\perp \sim 1/r_\perp$, и установление этого решения во всём пространстве означало бы наличие у среды бесконечно большой кинетической энергии. Можно показать, что в действительности асимптотика $u_\perp \sim 1/r_\perp$ имеет место только до тех пор, пока $r_\perp$ не превосходит некоторого размера $L_\perp \sim \sqrt{Lc_a\tau}$, τ – характерное время задачи (при нарастающем по закону (20) ВЧ давлении точное решение задачи даёт значение $L_\perp = \sqrt{Lc_a/\gamma}$). При больших же $r_\perp$ скорость $u_\perp$ экспоненциально быстро падает. Очевидно, что при вычислении поперечных компонент импульса волнового пакета размеры области интегрирования в плоскости x, y должны превышать размер $L_\perp$, и, таким образом, область локализации этих компонент не совпадает с областью локализации ВЧ давления волнового пакета. Она зависит от вида решаемой задачи и, вообще говоря, меняется с течением времени.

Из того факта, что поперечная скорость является градиентом потенциала, достаточно быстро падающего на больших расстояниях, следует, что поперечный импульс равен нулю:

$$\vec{\mathcal{P}}_\perp = \int dz \int d\vec{r}_\perp \, \rho_o \nabla_\perp \phi = 0 .$$

Это утверждение остаётся верным и в общем случае, когда c_s не равно 0.

При определении z-ой компоненты импульса альфвеновского пакета, когда скорость звука в среде c_s больше или порядка альфвеновской скорости c_a, ситуация усложняется. С одной стороны, в области ВЧ давления при достаточно медленном изменении его величины для u_z справедлива формула (25). В самом деле, проведя грубую оценку различных членов в операторе $\hat{\mathcal{L}}$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \sim c_a^2/r^2, \quad \nabla_\perp^2 \sim \Delta \sim 1/r^2, \qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_a^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \sim \gamma c_a/r ,$$

получим, что при достаточно большом характерном времени задачи

$$\gamma^{-1} \gg L/c_* , \qquad c_* \equiv c_a (c_a/c_s)^2 \qquad (30)$$

на расстояниях r меньших чем $L_* = c_* \gamma^{-1}$ первое из уравнений (21) можно заменить на более простое

$$\hat{\mathcal{L}}_1 u_z \approx \frac{\partial^2}{\partial t \partial z} c_a^2 \Delta_\perp \frac{W}{2\rho_o} .$$

Интегрирование этого уравнения с учётом малости u_z на расстояниях ~ L_* приводит к искомой формуле для u_z. Это означает, что в области V_W локализации ВЧ давления импульс среды, как и ранее, равен половине величины квазиимпульса. Однако вне области V_W скорость u_z, будучи всюду малой по абсолютной величине, теперь уже отлична от нуля не только за пакетом в области "следа". Это связано с тем, что при $c_s \neq 0$ альфвеновская скорость меньше максимальной скорости распрстранения возмущений в среде, так что в движение в этом случае вовлекаются и области среды, находящиеся

впереди пакета. Картина возникающего во всём пространстве течения зависит от отношения c_s/c_a, и конкретное её определение выходит за рамки настоящей работы.

Несжимаемой среде формально соответствуют бесконечно большие значения скорости звука c_s, так что все процессы в ней являются быстрыми в том смысле, что вместо (30) всегда имеет место противоположное неравенство

$$\gamma^{-1} \ll (L/c_a)\,(c_s/c_a)^2 . \qquad (31)$$

В такой среде возмущение давления компенсирует давление, создаваемое высокочастотным полем

$$c_a n + \frac{W}{2\rho_o} \approx 0 ,$$

а скорость среды во втором порядке оказывается пренебрежимо малой величиной во всём пространстве. В частности, она мала и в области локализации пакета, так что импульс пакета альфвеновских волн в этом случае равен нулю.

В заключении этого раздела заметим, что найденная выше величина импульса альфвеновского пакета не зависит от способа возбуждения. Так, при возбуждении пакета сторонними токами средняя за период сила, действующая со стороны этих токов на среду, теперь уже не равна нулю, что приводит лишь к изменению величины импульса вне области локализации пакета. Например, в среде с равной нулю скоростью звука продольная компонента вложенного импульса делится теперь поровну между бегущим пакетом и неподвижным "следом"; импульс пакета при этом по-прежнему равен величине $\mathcal{K}_z/2$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Принятое в электродинамике сплошных сред определение импульса волнового пакета (8) и определение этой же величины, исходящее из выражения для импульса единицы объёма среды (9), приводят для альфвеновского пакета к несовпадающим результатам. В частности, при достаточно больших временах задачи проекции этих величин вдоль магнитного поля отличаются ровно в два раза: $\mathcal{K}_z = 2\mathcal{P}_z$. В несжимаемой среде всегда выполняется неравенство (31) (и в этом смысле характерные времена задачи в ней всегда малы), и величина $\vec{\mathcal{P}} = 0$.

Соответствующие плотности импульса $\vec{\pi}$ и $\vec{p}$ в магнитной гидродинамике оказываются связанными с инвариантностью функции

Лагранжа относительно разных преобразований сдвига: импульс $\vec{\pi}$, который точнее называть квазиимпульсом, связан с переносом характеристик среды (без переноса самой среды), а импульс $\vec{p}$ - с обычным переносом точек среды.

Отметим, что аналогичные результаты могут быть получены и при рассмотрении пакетов волн другого типа.

Автор выражает благодарность Рютову Д.Д. и Цидулко Ю.А. за полезные обсуждения и критические замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пайерлс Р.* УФН, 1991, т. 161, с. 161.
2. *Mett R.R., Tataronis J.A.* Preprint. University of Wisconsin, PTMR-90-11, October 30, 1990.
3. *Кадомцев Б.Б.* Коллективные явления в плазме. М.: Наука, 1988.
4. *Шафранов В.Д.* В сб.: Вопросы теории плазмы, вып. 3, с. 3, М., Атомиздат, 1963
5. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.

В.В. Худик

Об определении импульса пакета альфвеновских волн

Ответственный за выпуск С.Г. Попов

Работа поступила 27 февраля 1992 г.
Подписано в печать 27 02 1992 г.
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 1,4 печ.л., 1,1 уч.-изд.л.
Тираж 180 экз. Бесплатно. Заказ N 15

Обработано на IBM PC и отпечатано на
ротапринте ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН,
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.