



41  
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ  
им. Г.И. Будкера СО РАН

А.Н. Алейников, Б.Н. Брейзман, Б.А. Князев,  
Б.С. Черкасский

О РАСЧЕТАХ ДИАМАГНЕТИЗМА  
ИМПУЛЬСНОЙ  
ЗАМАГНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЫ  
С НЕОДНОРОДНЫМ ТОКОМ ПРИ  
ИЗМЕРЕНИЯХ МАГНИТНЫМ ЗОНДОМ

ИЯФ 92-53



НОВОСИБИРСК

О РАСЧЕТАХ ДИАМАГНЕТИЗМА ИМПУЛЬСНОЙ  
ЗАМАГНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЫ С НЕОДНОРОДНЫМ ТОКОМ  
В МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ КАМЕРЕ  
ПРИ ИЗМЕРЕНИЯХ МАГНИТНЫМ ЗОНДОМ

А. Н. Алейников, Б. Н. Брейзман, Б. А. Князев,  
В. С. Черкасский

АННОТАЦИЯ

Исходя из уравнений равновесия плазмы в магнитном поле, получено общее выражение для сигнала магнитного зонда, охватывающего плазму с неоднородным по сечению током, созданную в металлической камере. Выполнены численные расчеты диамагнитной и парамагнитной составляющих сигнала для нескольких характерных распределений тока. Показано, что при одной и той же величине тока, но разных его распределениях по сечению, величина парамагнитной составляющей может отличаться в 2-3 раза, что говорит о необходимости учета этого эффекта при обработке экспериментальных данных. Выполнен расчет для конкретных экспериментальных результатов, полученных на установке СПИН.

DIAMAGNETISM CALCULATIONS OF A PULSED MAGNETIZED PLASMA  
WITH NON-UNIFORM CURRENT DISTRIBUTION  
AT MEASUREMENTS BY MAGNETIC LOOP INSIDE CONDUCTING CHAMBER

A.N.Alejnikov, B.N.Breizman, B.A.Knyazev,  
V.S.Cherkassky

ABSTRACT

Using the equilibrium equations, general expression is obtained for signal of a magnetic loop encircling a plasma produced in the conducting chamber for non-uniform current distribution over the plasma cross-section. Numerical calculations of diamagnetic and paramagnetic components of the signal for a few typical current distributions are presented. For the same value of the current, but different current distributions, the value of paramagnetic component differ by a factor of 2-3. That means that the effect must be taken into account at experimental data processing. Calculations for real plasma current distributions which was observed on SPIN device are also presented.

1. Введение.

С самого начала термоядерных исследований [1-3] для определения поперечного давления (энергосодержания) замагниченной плазмы использовался "диамагнитный зонд", - виток, охватывающий плазму и регистрирующий изменение магнитного потока, - который далее будем называть просто магнитным зондом. Такие измерения можно проводить для плазмы в "сверхпроводящей" камере<sup>1</sup> [1] и в камере с конечной проводимостью [4,5], а также при прохождении через плазму мощных релятивистских электронных пучков [6-9].

При обработке результатов измерений в случае, если по плазме протекает ток, диамагнетизм плазмы может быть вычислен путем вычитания из полного сигнала изменения магнитного потока, регистрируемого зондом, парамагнитного сигнала, связанного с протеканием тока (об учете других составляющих, если таковые имеются, см., например, [10]). Если распределение тока, текущего по плазме, осесимметрично, то учет парамагнетизма элементарен. Если же, как это часто бывает на практике, ток неоднороден по сечению, то при использовании "осесимметричных" выражений в вычислениях возникает некоторая ошибка. В частности, в работе [11] на начальной неоднородной стадии прямого разряда в гелии наблюдалась значительная неоднородность разряда по сечению, поэтому величины вычисленных по сигналам магнитных зондов и лазерного интерферометра значений температуры плазмы могли содержать значительную погрешность. В настоящей работе получены общие выражения для вычисления диамагнетизма плазмы с током в "сверхпроводящей" камере и выполнены численные расчеты для некоторых характерных распределений тока по сечению плазмы.

<sup>1</sup>Камеру можно считать сверхпроводящей, если время диффузии магнитного поля в стенку камеры больше характерного времени жизни плазмы.

## 2. Постановка задачи.

На рис. 1 показана типичная для измерений магнитными зондами геометрия. Плазма создается в длинной цилиндрической металлической камере, помещенной в продольное магнитное поле  $B_0$ . Длина камеры много больше её радиуса  $L \gg R_c$ . Магнитный зонд, представляющий собой в данном случае один виток радиуса  $R$ , установлен соосно с камерой вдали от её торцов (что позволит в дальнейшем не учитывать их влияние на величину сигнала).

Плазменный столб с максимальным удалением внешней границы от оси  $R_p$  создается импульсным разрядом между торцевыми электродами камеры и распадается за времена, меньшие времени диффузии магнитного поля в стенку камеры. Предполагается, что всегда  $R_p < R$ , а распределение тока по сечению плазмы  $j(r_i, \varphi_i)^2$  может быть неоднородным. Будем считать также, что характерные времена изменения тока и энергосодержания плазмы много больше времени установления равновесия, т.е. будем рассматривать квазистационарную задачу. В этом случае в каждой точке сумма давлений магнитного поля и газокINETического давления плазмы должна сохраняться постоянной (заметим здесь, что пространственная конфигурация плазменного шнура однозначно определяется условиями равновесия, т.е. зависимостями от координаты  $z$ , вообще говоря, пренебречь

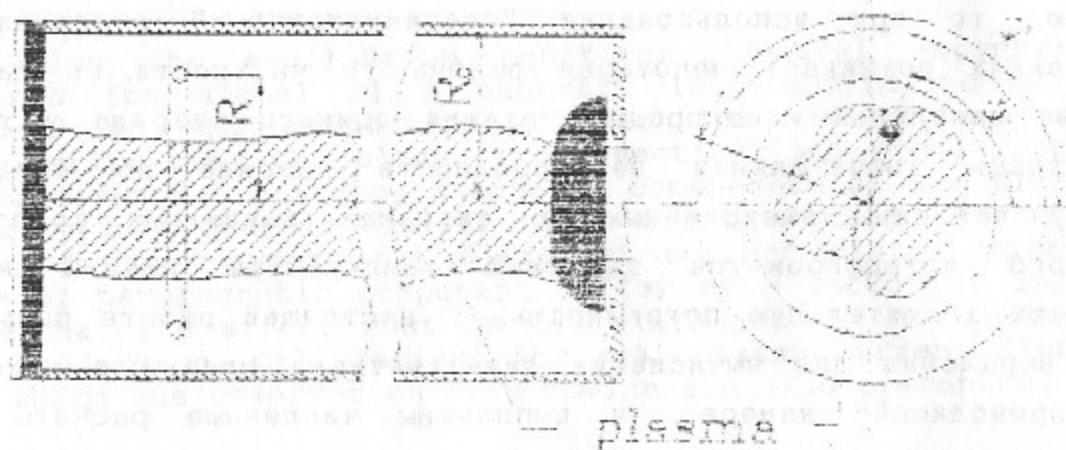


Рис. 1. Схема расчета диамагнетизма плазмы.

<sup>2</sup>Свяжем координаты  $r_i$  и  $\varphi_i$  с  $i$ -тым элементом тока, а текущие координаты будем обозначать  $r$  и  $\varphi$ .

нельзя). При изменении параметров плазмы и тока магнитный поток через сечение зонда изменяется, что приводит к возникновению ЭДС на концах витка. Именно этот сигнал и используется для вычисления диамагнетизма плазмы. Нашей задачей является выяснение зависимости величины сигнала от степени неоднородности тока, текущего через плазму.

## 3. Исходная система уравнений.

Будем исходить из условий равновесия

$$-\nabla p + \frac{1}{c} [\mathbf{j} \times \mathbf{B}] = 0$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0$$

Записав эти уравнения в цилиндрической системе координат, приняв, что величина продольного поля  $B_{\parallel} = B_0 + B_z$  и выразив  $j_{\varphi}$  и  $j_r$  через  $j_z$ , получим следующую систему уравнений:

$$-\frac{\partial}{\partial r} B_z + \frac{\partial}{\partial z} B_r = \frac{4\pi}{c} j_z \frac{B_{\varphi}}{B_0} + \frac{4\pi}{B_0} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} B_z - \frac{\partial}{\partial z} B_{\varphi} = \frac{4\pi}{c} j_z \frac{B_r}{B_0} - \frac{4\pi}{B_0} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \quad (2)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r B_{\varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} B_r = \frac{4\pi}{c} j_z \quad (3)$$

$$-\frac{\partial}{\partial z} B_z + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r B_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} B_{\varphi} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{B_r}{B_0} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{B_{\varphi}}{B_0} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0 \quad (5)$$

Решение нашей задачи существенно облегчается, если в уравнении (4) пренебречь членом  $\partial B_z / \partial z$ . Найдём критерий применимости такого приближения. Считая, что  $B_{\varphi}$  и  $B_r$  - величины одного порядка и обозначив их через  $B_{\perp}$ , из (3) получим оценку

$$j_z \sim B_{\perp} c / 4\pi R_p, \quad (6)$$

где  $R_p$  - характерный радиус плазмы.

Подставив  $j_z$  в (1), найдём, что

$$B_z \sim \frac{4\pi p}{B_0} + \frac{B_{\perp}^2}{B_0} + \frac{B_{\perp} R_p}{L} \quad (7)$$

Полагая, что  $\partial B_z / \partial z \sim B_z / L$ , замечая, что второй и третий члены уравнения (4) по порядку величины равны  $B_{\perp} / r$ , и используя (7), найдем три условия:

$$\left(\frac{r}{L}\right)^2 \ll 1, \quad \frac{B_{\perp} R}{B_0 L} \ll 1, \quad p \ll \frac{B_0^2 B_{\perp} L}{4\pi B_0 R_p}$$

Первые два, очевидно, всегда выполняются, а третье накладывает ограничение на величину газокINETического давления по сравнению с давлением магнитного поля  $p_B$ . Используя (6), нетрудно показать, что последнее эквивалентно требованию

$$\frac{p}{p_B} \ll \frac{j_z}{j_*}, \quad \text{где } j_* = \frac{B_0 c}{8\pi L} = \frac{1.0 \cdot B_0 (\text{Тл})}{8\pi L (\text{м})} \left(\frac{\text{кА}}{\text{см}^2}\right), \quad (8)$$

которое также выполняется во всех интересующих нас случаях.

#### 4. Вычисление магнитного потока через зонд.

Для вычисления потока через зонд умножим уравнение (1) на  $r^2 dr d\varphi$  и проинтегрируем его по частям. При этом для вычисления интегралов используем уравнения (3) и (4), которые домножим на  $r^2 B_{\varphi} dr d\varphi$  и на  $r^3 dr d\varphi$ , соответственно, и также проинтегрируем по частям. Если учесть также условие сохранения магнитного потока в камере

$$\int_0^R B_{\varphi} dS + \int_0^{R_c} B_r dS = \Phi_0, \quad (9)$$

которое приводит к выражению

$$\int_0^{2\pi} B_z(r) d\varphi = - \frac{2}{R_c^2 - R^2} \int_0^R B_z dS, \quad (10)$$

то окончательно получим изменение магнитного потока через зонд  $\Delta\Phi = \Phi - \Phi_0$ :

$$\Delta\Phi = - \frac{R_c^2 - R^2}{R_c^2} \frac{4\pi}{B_0} \left[ \int_0^R p dS - \frac{R^2}{16\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi (B_{\varphi}^2 - B_r^2) \Big|_{r=R} \right]. \quad (11)$$

Видно, что в квадратных скобках выражения (11) отсутствует член, описывающий "перекос" тока

$$\frac{B_0 R^3}{16\pi} \int d\varphi \frac{\partial}{\partial z} B_r(R), \quad (12)$$

который, согласно (4), равен нулю, если  $\partial B_z / \partial z$  можно полагать равным нулю.

Первое из слагаемых в выражении (11) характеризует диамагнетизм плазмы, второе - парамагнетизм тока, протекающего в камере. Видно, что изменение магнитного потока через зонд пропорционально  $B_0^{-1}$ . Кроме того, очевидно, что чем ближе зонд расположен к плазме (и, соответственно, дальше от стенки), тем больше величина полезного сигнала с зонда. При этом, однако, растет и влияние несимметрии токового шнура.

В случае, если ток осесимметричен, то член, содержащий  $B_r^2$  выпадает, и второй интеграл равен

$$P_0 = 8\pi I^2 / c^2 R^2. \quad (13)$$

Именно это значение интеграла обычно и используется при обработке экспериментальных данных для учета вклада парамагнетизма. Тогда погрешность, возникающая при вычислении парамагнетизма из-за неучета несимметрии тока, может быть представлена коэффициентом

$$q = q_{\varphi} + q_r = \frac{\int d\varphi B_{\varphi}^2(R, \varphi)}{P_0} - \frac{\int d\varphi B_r^2(R, \varphi)}{P_0}. \quad (14)$$

#### 5. Вычисление $B_{\varphi}$ и $B_r$ .

Для вычисления составляющих магнитного поля от тока, текущего параллельно оси трубы, воспользуемся тем, что магнитный зонд расположен вдали от торцов разряда и краевыми эффектами можно пренебречь. Помня, что  $B_r(R_c) = 0$  и векторный потенциал коллинеарен с осью камеры, методом изображений [13], найдем

$$A(r, \varphi) = \int dA(r, \varphi; r_1, \varphi_1) = - \frac{1}{c} \int j(r_1, \varphi_1) r_1 dr_1 d\varphi_1 \ln \frac{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos(\varphi - \varphi_1)}{r^2 + R_c^2/r_1^2 - 2r(R_c^2/r_1) \cos(\varphi - \varphi_1)} \quad (15)$$

с граничным условием  $A(R_c, \varphi) = \text{const}$  [12], где координаты  $r_1, \varphi_1$  относятся к элементам тока.

Взяв производные  $A$  по  $\varphi$  и  $r$

$$B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \varphi}, \quad B_{\varphi} = - \frac{\partial A}{\partial r}$$

и перейдя к безразмерным переменным (см. рис. 1)

$$\tilde{R} = R_c/R, \quad \tilde{r} = r_1/R, \quad \tilde{\varphi} = \varphi - \varphi_1, \quad \tilde{j}(\tilde{r}, \varphi_1) = \frac{R^2 j(\tilde{r}, \varphi_1)}{I}$$

где

$$\int j(\tilde{r}, \varphi_1) \tilde{r} d\tilde{r} d\varphi_1 = 1,$$

получим:

$$B_r(R, \varphi) = \int_0^R \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{I}{cR} \tilde{j}(\tilde{r}, \varphi_1) \tilde{r} d\tilde{r} d\varphi_1 \times \frac{2\tilde{r}(\tilde{R}^2 - 1)(\tilde{R}^2 - \tilde{r}^2) \sin \tilde{\varphi}}{(1 + \tilde{r}^2)(\tilde{r}^2 + \tilde{R}^4) - 2\tilde{r}(1 + \tilde{R}^2)(\tilde{r}^2 + \tilde{R}^2) \cos \tilde{\varphi} + 4\tilde{R}^2 \tilde{r}^2 \cos^2 \tilde{\varphi}}, \quad (16)$$

$$B_\varphi(R, \varphi) = \int_0^R \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{I}{cR} \tilde{j}(\tilde{r}, \varphi_1) \tilde{r} d\tilde{r} d\varphi_1 \times \frac{2(\tilde{R}^4 - \tilde{r}^4) - 2\tilde{r}(\tilde{R}^2 - \tilde{r}^2)(1 + \tilde{R}^2) \cos \tilde{\varphi}}{(1 + \tilde{r}^2)(\tilde{r}^2 + \tilde{R}^4) - 2\tilde{r}(1 + \tilde{R}^2)(\tilde{r}^2 + \tilde{R}^2) \cos \tilde{\varphi} + 4\tilde{R}^2 \tilde{r}^2 \cos^2 \tilde{\varphi}}. \quad (17)$$

Выражение (11) с учетом (16) и (17) дает нам полное решение поставленной задачи. При этом погрешность, возникающая при обработке экспериментальных данных, в случае, когда игнорируется истинное распределение тока и используется выражение (13), определяется из выражения (14).

### 6. Численные расчеты и обсуждение результатов.

Для того, чтобы получить представление о численных значениях поправок  $q_r$  и  $q_\varphi$  в зависимости от степени неоднородности тока при различных соотношениях между диаметрами магнитного зонда ( $\tilde{R} \equiv 1$ ) и стенок камеры ( $\tilde{R}_c$ ), а также характерным поперечным размером плазмы ( $\tilde{R}_p$ ), были выполнены численные расчеты для нескольких модельных функций  $j(\tilde{r}, \varphi_1)$ . В качестве наиболее типичных распределений, были взяты двумерная  $\delta$ -функция и кольцевой сегмент. Имея графики величины  $q$  в зависимости от характерных размеров, полученные для этих функций, можно оценивать  $q$  и для более сложных распределений. В качестве примера, были проведены вычисления для распределения, моделирующего наблюдавшееся в эксперименте [11, 14].

Расчеты по формулам (14, 16, 17) выполнялись численным интегрированием методом Ромберга [15]. Основная идея метода Ромберга состоит в проведении к последовательных вычислений интеграла по формуле трапеций (для каждого следующего  $k$  число

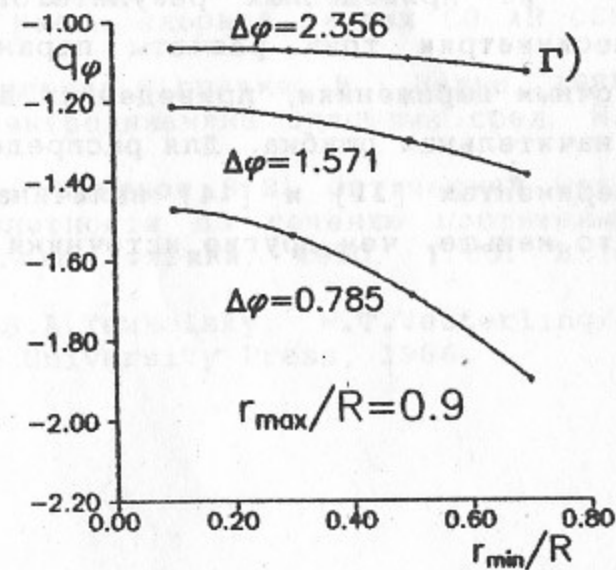
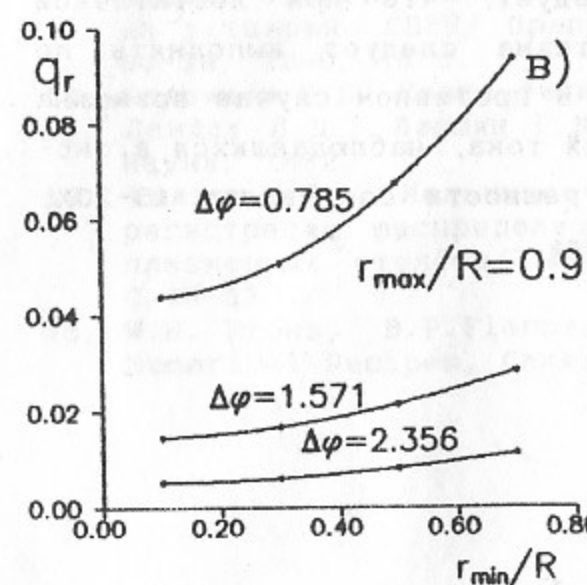
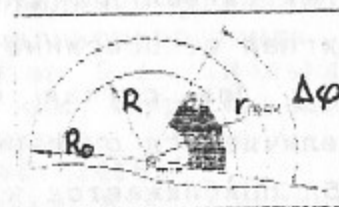
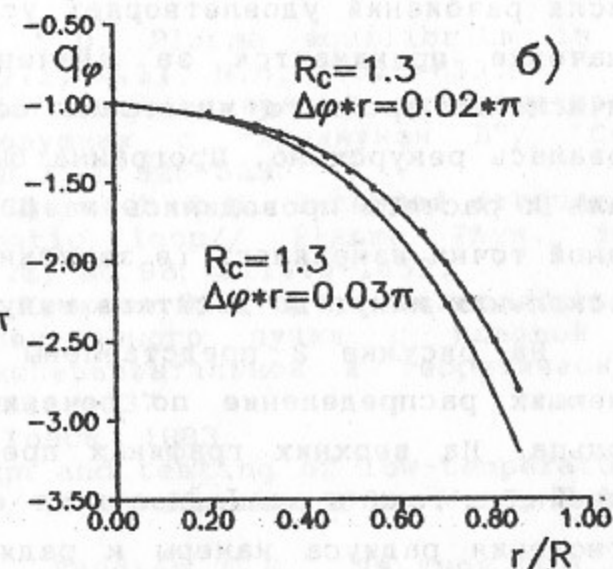
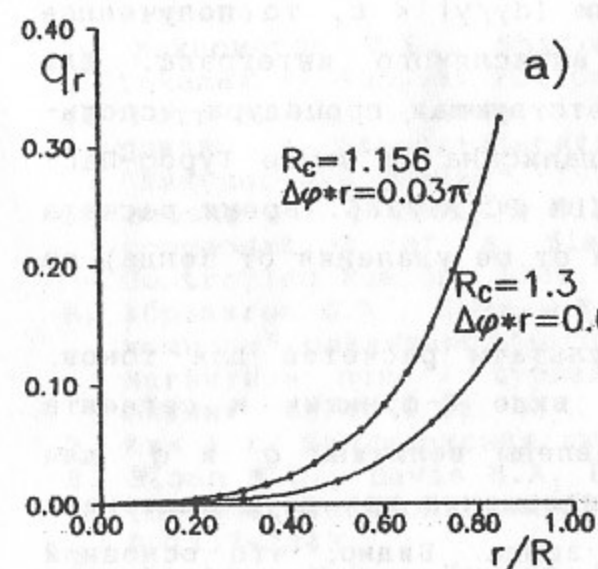
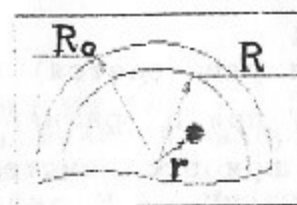


Рис. 2. Результаты численных расчетов поправочного коэффициента  $q$  для двух модельных функций.

разбиений полного интервала интегрирования удваивается) с последующей экстраполяцией результата к пределу при  $h$  (размер последнего интервала) стремящемуся к нулю. Если при этом экстраполяция сходится, т.е. относительная ошибка экстраполяции при удвоении числа разбиений удовлетворяет условию  $|dy/y| < \epsilon$ , то полученное значение принимается за значение вычисляемого интеграла. Для вычисления тройного интеграла соответствующая процедура использовалась рекурсивно. Программа была написана на языке Турбо-Паскаль и расчеты проводились на ПЭВМ IBM PC AT/286. Время расчета одной точки изменялось (в зависимости от ее удаления от зонда) от нескольких минут до десятков минут).

На рисунке 2 представлены результаты расчетов для токов, имеющих распределение по сечению в виде  $\delta$ -функции и сегмента кольца. На верхних графиках представлены величины  $q_r$  и  $q_\phi$  для линейного тока в зависимости от его положения при двух значениях отношения радиуса камеры к радиусу зонда. Видно, что основной вклад дает составляющая  $q_\phi$ , и парамагнитный сигнал для смещенного от оси тока может в три раза превышать сигнал от осесимметричного тока. Внизу представлены коэффициенты  $q$  для случая сегмента кольца. Видно, что величина множителя увеличивается с возрастанием несимметрии и для кольцевого сектора  $0.25\pi$  приближается к двум.

Из приведенных результатов следует, что при достаточной несимметрии тока расчеты парамагнетизма следует выполнять по точным выражениям, приведенным выше. В противном случае возможна значительная ошибка. Для распределений тока, наблюдавшихся в экспериментах [11] и [14] величина погрешности составляет 15-20%, что меньше, чем другие источники ошибок.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Брежечко Л.В., Павличенко А.С., Швеиц О.М. О влиянии металлической камеры на измерение параметров плазмы с помощью диамагнитного зонда // Атомная энергия, 1966, Т.20, В.1, С.52
2. Rothman M.A. Measurement of plasma diamagnetism by a coil located near a conducting wall// Plasma Phys., 1968, N.10, P.86-90.
3. Mukhovatov V.S., Shafranov V.D. Plasma equilibrium in a tokamak // Nuclear Fusion, 1971, V.11, N.6, P.625-633.
4. Готт Ю.В., Соболев Р.И. Методика измерения диамагнетизма плазмы в адиабатических ловушках с "минимумом В"// Сб. "Диагностика плазмы", 1973, В.3, С.525-529.
5. Booske J.H., Getly W.D., Gilgenbach R.M. Extended frequency compensation of a diamagnetic loop// Plasma Phys. and Controlled Fusion, 1986, V. 28, No.9B, P.1449-1459.
6. Абрашитов Ю.И., Койдан В.С., Конохов В.В. и др. Взаимодействие мощного релятивистского электронного пучка с плазмой в магнитном поле// Журнал Экспериментальной и Теоретической физики, 1974, Т.66, N.4, С.1324-1337.
7. Ким А.А. Кандидатская дис., Томск, 1983.
8. Sloan M.L., Davis H.A. Design and testing of low-temperature intense electron beam diodes// Phys. Fluids, 1982, V.25, N.12, P.2337-2343.
9. Ерофеев В.И., Князев Б.А., Лебедев С.В., Чикунов В.В. Об определении углового разброса замагниченного РЭП с помощью диамагнитного зонда, ЖТФ, 1989, Т.59, В.10, С.111-120.
10. Князев Б.А., Мельников П.И., Чикунов В.В. Транспортировка 100-кДж микросекундного РЭП через газ и плазму в сильном магнитном поле// Физика плазмы, 1990, Т.16, В.12, С.1447-1456.
11. Князев Б.А., Мельников П.И., Чикунов В.В. Характеристики плазмы замагниченного прямого разряда в металлической камере на установке СПИН/ Препринт Инст. ядерной физики СО АН СССР 90-39, 1990, 16 с.
12. Кадомцев Б.Б. Коллективные явления в плазме, М.: Наука, 1988.
13. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
14. Князев Б.А., Мельников П.И., Чикунов В.В. Оптический метод регистрации распределения плотности по сечению протяженных плазменных столбов/ Журн. Техн. физики, 1990, Т.60, В.10, С.48-53.
15. W.H. Press, B.P.Flannery, S.A.Teukolsky, W.T.Vetterling// Numerical Recipes, Cambridge University Press, 1986:

А.Н. Алейников, Б.Н. Брейзман, Б.А. Князев,  
В.С. Черкасский

О расчетах диамагнетизма  
импульсной замагниченной плазмы  
с неоднородным током в металлической камере  
при измерениях магнитным зондом

ИЯФ 92-53

Ответственный за выпуск С.Г. Попов

---

Работа поступила 9 июля 1992 г.

Подписано в печать 9.07. 1992 г.

Формат бумаги 60×90 1/16. Объем 0,8 печ.л.; 0,7 уч.-изд.л.

Тираж 200 экз. Бесплатно. Заказ N 53.

---

Обработано на IBM PC и отпечатано на  
ротапринте ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН,  
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.