

40

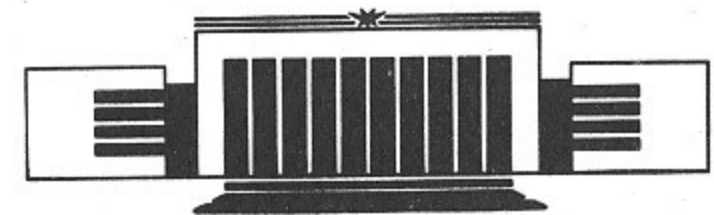


ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ  
им. Г.И. Будкера СО РАН

И.А. Котельников

ОПТИМИЗАЦИЯ РАСШИРИТЕЛЯ  
ГАЗОДИНАМИЧЕСКОЙ ЛОВУШКИ

ИЯФ 94-63



НОВОСИБИРСК

# Оптимизация расширителя газодинамической ловушки\*

И.А.Котельников

Как известно, МГД устойчивость в газодинамической ловушке (ГДЛ) обеспечивается наличием относительно плотной запробочной плазмы, находящейся в расширителе в области благоприятной кривизны (рис. 1). При достаточно большой степени расширения, т.е. достаточно большом радиусе расширителя, в принципе можно создать сколь угодно большой запас устойчивости. Однако в действительности радиус расширителя, а также радиус кривизны силовых линий не могут быть соответственно меньше и больше ларморовского радиуса ионов, который увеличивается приблизительно пропорционально квадрату радиуса расширителя. В противном случае расширитель теряет свойства стабилизатора. Пренебрегая изменением энергии иона в расширителе (вследствие ускорения электрическим полем или вследствие адиабатического остывания), указанные ограничения можно записать следующим образом

$$a \leq \mathfrak{C} \frac{a_0^2}{\rho_0}, \quad (1)$$

$$|a^2 a''| \leq \mathfrak{B} \frac{a_0^2}{\rho_0}, \quad (2)$$

где  $a = a(z)$  — уравнение силовой линии, ограничивающей плазму; штрих означает дифференцирование по  $z$ ;  $a_0$  и  $\rho_0$  — соответственно радиус плазмы и ларморовский радиус ионов в центральной части ГДЛ. Безразмерные коэффициенты  $\mathfrak{C}$  и  $\mathfrak{B}$  для выбранного обезразмеривающего множителя  $a_0^2/\rho_0$

\* Публикуется по рукописи 1987 года.

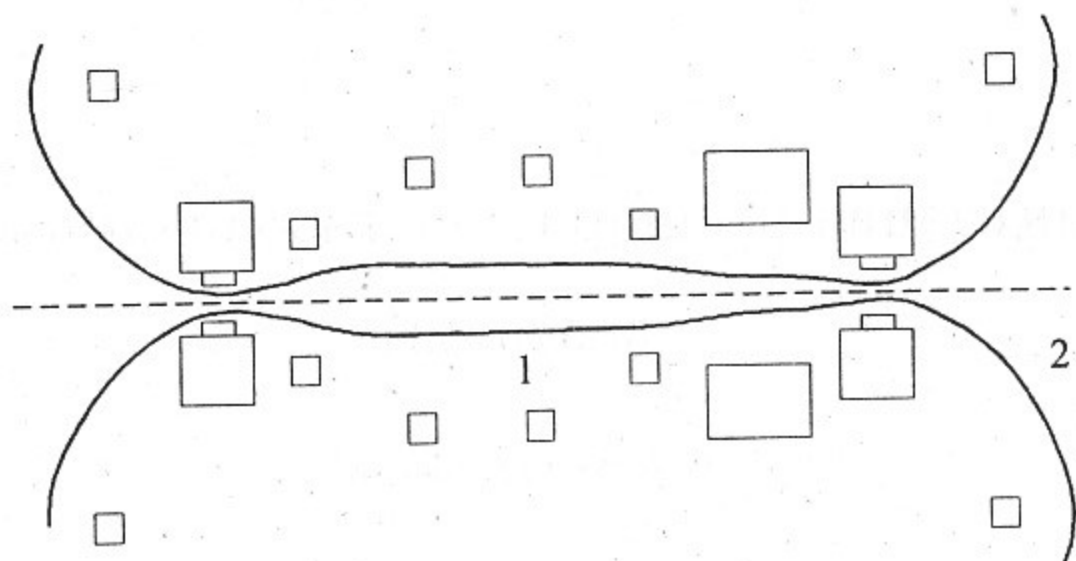


Рис. 1: Примерный вид силовых линий в ГДЛ; 1 — центральная секция, 2 — расширитель.

следует считать по порядку величины равными единице. Ограничив дальнейшее рассмотрение рамками параксиального приближения, потребуем, чтобы наклон силовых линий к оси  $z$  был не очень велик:

$$|a'| \leq \mathfrak{A}, \quad (3)$$

где  $\mathfrak{A} \sim 1$ .

В настоящем сообщении мы найдём уравнение силовой линии, обеспечивающей при заданных ограничениях (1)–(3) максимизацию запаса устойчивости. Поскольку по заданной силовой линии можно восстановить (хотя и неоднозначно) конфигурацию магнитной системы, тем самым будет решена задача о нахождении оптимального параксиального расширителя.

Будем считать для простоты, что плазма имеет резкую границу. Такая плазма устойчива относительно желобковых возмущений, если

$$\int dz a'' a^3 P > 0,$$

где  $P$  есть сумма продольного и поперечного давления плазмы и может быть выражена как функция радиуса  $a(z)$ :  $P = P(a)$ . Задача оптимизации расширителя заключается в максимизации интеграла

$$W = \int_{z_m}^{z_w} dz a'' a^3 P \quad (4)$$

между координатами магнитной пробки  $z_m$  и стенки поглотителя  $z_w$  при заданных ограничениях (1)–(3) и заданных значениях  $a(z_m) = a_m \ll a_0$ ,  $a'(z_m) = 0$ . Значения  $a(z_w) = a_w$  и  $a'(z_w) = a'_w$ , вообще говоря, предстоит найти.

Варьируя  $W$ , нетрудно найти уравнение экстремали:

$$a' = \beta / \sqrt{\frac{d}{da} P(a) a^3}, \quad (5)$$

где  $\beta$  — произвольная константа. Производная под знаком корня в (5) положительна: обычно функция  $P(a)$  уменьшается при увеличении  $a$  несколько медленнее чем пропорционально  $a^{-2}$ .

Искомая оптимальная траектория силовой линии помимо участков экстремали (5) может также состоять из отрезков кривых, таких, что на них одно из неравенств (1)–(3) становится равенством:

$$a = \mathfrak{C} \frac{a_0^2}{\rho_0}, \quad (6)$$

$$a^2 a'' = +\mathfrak{B} \frac{a_0^2}{\rho_0}, \quad (7a)$$

$$a^2 a'' = -\mathfrak{B} \frac{a_0^2}{\rho_0}, \quad (7b)$$

$$a' = \pm \mathfrak{A}. \quad (8)$$

Константы  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{C}$  считаются положительными. Условие сшивки участков (6)–(8) заключается в непрерывности  $a(z)$  и  $a'(z)$ , причём непрерывность  $a'(z)$  является следствием ограничения (2).

Наличие участка постоянного радиуса (6) конечной длины в оптимальной траектории только увеличило бы длину расширителя  $z_w - z_m$ , не изменив величины интеграла (4). Поэтому равенство (6), если и выполняется где-либо, то только в концевой точке силовой линии (при  $z = z_w$ ). Участки постоянного наклона силовой линии (8) также вносят нулевой вклад в интеграл (4). Поэтому такие участки заведомо не могут быть окончанием

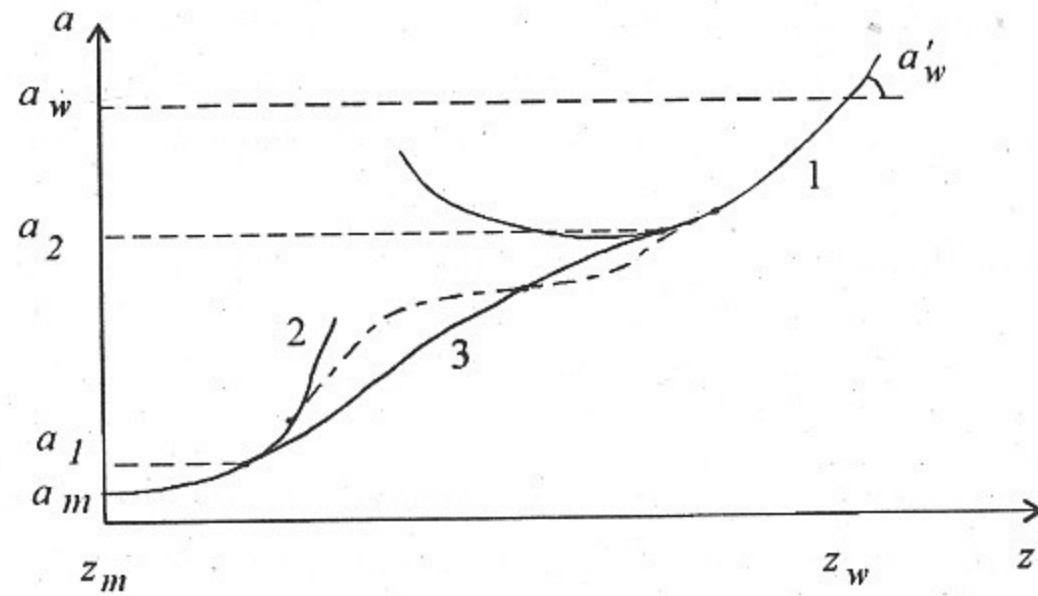


Рис. 2: К построению оптимальной силовой линии. 1 и 2 — линии максимальной кривизны (9) и (10), 3 — касающаяся их экстремаль (5). Пунктиром изображена возможная кривая, составленная из нескольких участков линий, описываемых уравнениями (5), (7а), (7б). Интеграл (4) по пунктирной кривой меньше, чем по экстремали 3.

силовой линии. Очевидно также, что на конце оптимальной траектории силовой линии не может находиться участок с отрицательной кривизной  $a''$ , иначе этот участок можно "отрезать", увеличив тем самым интеграл (4). Отсюда сразу следует, что оптимальная траектория оканчивается уравнением (7а), так как уравнение (7б), а также экстремаль (5) дают кривые с отрицательной кривизной. Выбрав теперь некоторые значения  $a(z_w) = a_w$  и  $a'(z_w) = a'_w$ , удовлетворяющие ограничениям (1) и (3), построим соответствующее решение уравнения (7а):

$$a' = \sqrt{a_w'^2 + \frac{2\mathfrak{B}a_0^2}{\rho_0} \left( \frac{1}{a_w} - \frac{1}{a} \right)}. \quad (9)$$

Построим также решение этого уравнения, выходящее из точки  $a(z_m) = a_m$ ,  $a'(z_m) = 0$  (см. рис. 2):

$$a' = \sqrt{\frac{2\mathfrak{B}a_0^2}{\rho_0} \left( \frac{1}{a_m} - \frac{1}{a} \right)}. \quad (10)$$

Нетрудно понять, что это единственная из всех траекторий (5)–(8), удовлетворяющая условиям  $a'(z_m) = 0$  и  $a'(z) > 0$  при  $z > z_m$ . Построим теперь экстремаль (5) так, чтобы она касалась кривых (9) и (10). Поскольку, как можно показать, экстремаль (5) в действительности доставляет максимум интегралу (4), проведённое построение даёт искомую траекторию силовой линии.<sup>1</sup> Обозначив через  $a_1$  и  $a_2$  радиус силовой линии в точках касания (рис. 2), запишем условие непрерывности там производной  $a'$ :

$$\begin{aligned} \beta / \sqrt{\frac{d}{da_1} P(a_1) a_1^3} &= \sqrt{\frac{2\mathfrak{B}a_0^2}{\rho_0} \left( \frac{1}{a_m} - \frac{1}{a_1} \right)}, \\ \beta / \sqrt{\frac{d}{da_2} P(a_2) a_2^3} &= \sqrt{a_w'^2 + \frac{2\mathfrak{B}a_0^2}{\rho_0} \left( \frac{1}{a_w} - \frac{1}{a_2} \right)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Дополнив эти уравнения соотношением

$$z_w - z_m = \int_{a_m}^{a_w} da/a', \quad (12)$$

можно найти  $\beta$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  и вычислить интеграл (4) при фиксированных  $a'_w$  и  $a_w$ :

$$W = \int_{a_m}^{a_w} da P(a) a^3 \frac{da'}{da}. \quad (13)$$

Дальнейшие вычисления проведём, предположив, что

$$P(a) = P_m a_m^2 / a^2, \quad (14)$$

где  $P_m$  — давление в магнитной пробке. Это позволит получить результат в аналитическом виде:

$$\begin{aligned} W = P_m a_m^2 \sqrt{\frac{\mathfrak{B}a_0^2}{2\rho_0}} &\left\{ \sqrt{a_m} \ln \left[ \frac{\sqrt{a_m^{-1}} + \sqrt{a_m^{-1} - a_1^{-1}}}{\sqrt{a_m^{-1}} - \sqrt{a_m^{-1} - a_1^{-1}}} \right] + \right. \\ &\left. + \frac{\sqrt{a_w}}{\sqrt{1+x}} \ln \left[ \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{a_w^{-1}(1+x)} - \sqrt{a_m^{-1} - a_1^{-1}}}{\sqrt{a_w^{-1}(1+x)} + \sqrt{a_m^{-1} - a_1^{-1}}} \right] \right\} \quad (15) \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Априори нельзя исключить, что участок занятый экстремалью можно заменить комбинацией участков кривых (5), (7а) и (7б).

где введено обозначение

$$x = a_w'^2 \rho_0 a_w / 2\mathfrak{B} a_0^2$$

и учтено соотношение<sup>2</sup>

$$a_w(1+x) - a_2 = a_m^{-1} - a_1^{-1},$$

вытекающее из (11) и (14). Первое слагаемое в (15) представляет вклад припробочной области, где силовая линия описывается уравнением (10); им можно пренебречь по сравнению со вторым слагаемым. Второе слагаемое соответствует вкладу конечного участка силовой линии (9); оно увеличивается при уменьшении разности  $a_m^{-1} - a_1^{-1}$ , что равнозначно уменьшению угла наклона силовой линии на участке  $[a_1, a_2]$  и удлинению расширителя (см. (11), (12)). Участок, соответствующий экстремали (5) в приближении (14) даёт нулевой вклад. В пределе

$$z_w - z_m \gg a_w^{3/2} (2\mathfrak{B} a_0^2 / \rho_0)^{-1/2}, \quad (16)$$

означающем

$$a_m^{-1} - a_1^{-1} \ll a_w^{-1},$$

приближённо находим

$$\begin{aligned} a_2 &= a_w / (1+x), \\ \beta &= a_2 \sqrt{P_m a_m^2} / (z_w - z_m), \\ W &= \sqrt{\frac{2\mathfrak{B} a_0^2 a_w}{(1+x) \rho_0}} P_m a_m^2 \ln [\sqrt{1+x} + \sqrt{x}]. \end{aligned} \quad (17)$$

Найдём теперь не определённые до сих пор параметры  $a_w$  и  $a_w'$  (или  $a_w$  и  $x$ ). Величина  $W$  только возрастает при увеличении  $a_w$  (см. (17)). Поэтому радиус  $a_w$  должен быть максимальным:

$$a_w = \mathfrak{E} \frac{a_0^2}{\rho_0}. \quad (18)$$

<sup>2</sup>Из него, в частности, следует, что участок экстремали (являющийся прямой линией в случае  $P(a) \propto a^{-2}$ ) существует (т.е.  $a_2 > a_1$ ) при условии  $a_w^{-1}(1+x) < a_m^{-1}$ , которое практически всегда выполняется.

Максимум функции

$$\sqrt{\frac{2}{1+x}} \ln [\sqrt{1+x} + \sqrt{x}]$$

находится при  $x = x_0 = 2,277$  и равен 0,938. Следовательно,

$$a_w' = \mathfrak{A}, \quad W = \sqrt{\frac{2\mathfrak{B}\mathfrak{E}}{1+x_A}} \ln [\sqrt{1+x_A} + \sqrt{x_A}] \frac{P_m a_0^2 a_m^2}{\rho_0}, \quad (19a)$$

если  $x_0 \geq x_A = \mathfrak{A}^2 \mathfrak{E} / 2\mathfrak{B}$ , и

$$a_w' = \mathfrak{A}, \quad W = 0,938 \sqrt{\mathfrak{B}\mathfrak{E}} \frac{P_m a_0^2 a_m^2}{\rho_0}, \quad (19b)$$

если  $x_0 > x_A$ .

Для сравнения приведём результат вычисления  $W$  для степенного профиля силовой линии [1]:

$$a(z) = a_w / \left[ 1 + \frac{z_w - z}{z_w - z_m} \left( \frac{a_w^{1/k}}{a_m^{1/k}} - 1 \right) \right]^k, \quad k \geq 1,$$

часто использовавшегося ранее для оценок запаса устойчивости. Соответствующий интеграл (4), вычисленный с учётом ограничений (1)–(3), в 1,5–2 раза меньше максимального (19a), (19b):

$$W = \frac{P_m a_0^2 a_m^2}{\rho_0} \begin{cases} (k+1) \mathfrak{A} \mathfrak{E} / (2k+1), & \text{при } \mathfrak{A}^2 \mathfrak{E} / \mathfrak{B} \leq k / (k+1) \\ \sqrt{\mathfrak{B}\mathfrak{E} k(k+1)} / (2k+1), & \text{при } \mathfrak{A}^2 \mathfrak{E} / \mathfrak{B} > k / (k+1) \end{cases}$$

## Литература

- [1] Бушкова О.А., Мирнов В.В. Влияние конфигурации магнитного поля на МГД устойчивость газодинамической ловушки. — Препринт, ИЯФ 85-103, Новосибирск, 1985.

*И.А. Котельников*

**Оптимизация расширителя  
газодинамической ловушки**

**ИЯФ 94-63**

Ответственный за выпуск С.Г. Попов  
Работа поступила 23 июня 1994 г.

---

Сдано в набор 23 июня 1994 г.

Подписано в печать 27 июня 1994 г.

Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 0.7 печ.л., 0.6 уч.-изд.л.

Тираж 200 экз. Бесплатно. Заказ № 63

---

Обработано на IBM PC и отпечатано на  
ротапринте ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН,  
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.