

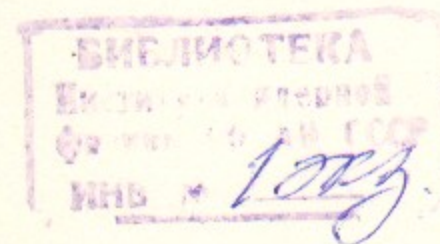


Государственный научный центр  
Российской Федерации  
Институт ядерной физики  
им. Г.И. Будкера

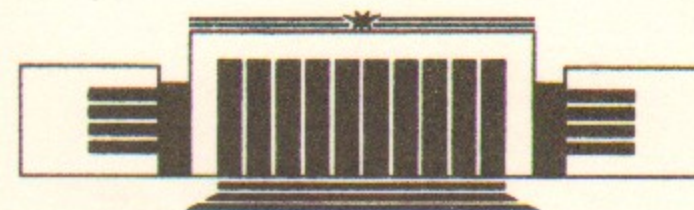
*В. В.*

В.В. Вечеславов

ДВИЖЕНИЕ В ОКРЕСТНОСТИ  
СЕПАРАТРИСЫ  
НЕЛИНЕЙНОГО РЕЗОНАНСА  
ПРИ АДИАБАТИЧЕСКИХ  
ВОЗМУЩЕНИЯХ



ИЯФ 95-46



НОВОСИБИРСК



# Движение в окрестности сепаратрисы нелинейного резонанса при адиабатических возмущениях

В.В.Вечеславов

Институт ядерной физики им. Г.И.Будкера, 630090, Новосибирск, Россия

## АННОТАЦИЯ

Аналитически и численно исследуется движение в хаотическом слое нелинейного резонанса при воздействии слабых высокочастотных сил. Показано, что уже во втором порядке по малому параметру спектр возмущения изменяется за счет появления вторичных гармоник на комбинациях исходных частот. Вторичные гармоники, среди которых в общем случае присутствуют и низкочастотные, могут вносить основной вклад в амплитуду сепаратрисного отображения системы и формирование хаотического слоя.

Государственный научный центр РФ  
Институт ядерной физики им.Г.И. Будкера СО РАН

## 1. Введение

Взаимодействие нелинейных резонансов относится к числу наиболее важных и сложных проблем современной теории нелинейных колебаний [1,2]. Обычно один из резонансов считается основным, а остальные рассматриваются как возмущения. Особенно важен случай адиабатических, т.е. слабых и высокочастотных возмущений [3,4]. Ниже рассматриваются системы, гамильтониан которых может быть записан в виде:

$$H(x, p, t) = \frac{p^2}{2} + \cos x + V(x, t), \quad V(x, t) = \varepsilon_n \cos(x - \Omega_n t), \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

здесь  $N$  – полное число возмущающих резонансов и предполагается суммирование по индексу  $n$ . Возмущение является слабым ( $\varepsilon_n \ll 1$ ) и высокочастотным ( $\Omega_n \gg 1$ ).

Установлено, что фазовое пространство гамильтоновой системы общего вида с числом степеней свободы больше единицы разделено на регулярную и хаотическую компоненты [1,2]. Образование хаотической компоненты – динамического хаоса – связывают с качественно описанным еще Пуанкаре и количественно исследованном уже в наши дни Мельниковым [5] эффектом расщепления сепаратрис. По порядку величины расщепление сепаратрис (и всего, что от него зависит) меньше любой степени малого параметра возмущения и потому не может быть обнаружено с помощью обычной техники разложения в ряды по этому параметру.

В последние годы стали появляться новые аналитические и численные результаты, касающиеся асимптотических оценок этого экспоненциально малого эффекта как для канонических отображений [6,7], так и для непрерывных одночастотных гамильтоновых систем [8]. В работе [8] исследуется, в частности, система (1) с возмущением вида  $V(x, t) = a \cos x \sin \Omega t$  в высокочастотной асимптотике  $\Omega \rightarrow \infty$ , но при любом значении параметра  $a$ .

Для практических приложений важной является другая характеристика динамического хаоса – полный размер неустойчивой области в окрестности разрушенной сепаратрисы, получившей название хаотического слоя. Метод Мельникова не дает никаких оценок ширины этого слоя и ее связи с величиной расщепления сепаратрис. К настоящему времени этот вопрос удалось решить полностью в адиабатическом пределе только для случая единственной гармоники возмущения  $V(x, t) = \varepsilon \cos(x - \Omega t)$  в (1) путем построения сепаратрисного отображения, приближенно описывающего динамическое состояние системы в моменты прохождения ею



положения устойчивого равновесия. Амплитуда гармоники частоты  $\Omega$  сепаратрисного отображения выражается через интеграл Мельникова-Арнольда (Приложение 1). С помощью полуэмпирического критерия перекрытия резонансов и свойств стандартного отображения было показано, что ширина хаотического слоя и величина расщепления сепаратрис имеют один порядок и связаны простым соотношением. Впервые это было сделано в работе [9], а затем в более общей форме, в [10] (см. также Приложение 1). Заметим, что только для этого частного случая одночастотного возмущения знание величины расщепления сепаратрис эквивалентно знанию амплитуды сепаратрисного отображения и ширины слоя (см. раздел 4). Если возмущение содержит гармоники нескольких различных частот ( $N > 1$ ), то ситуация может резко и качественно измениться (см. раздел 2).

Построим сепаратрисное отображение, описывающее динамическое состояние системы (1) при  $N > 1$  в моменты времени  $t_\pi$  прохождения ею положения устойчивого равновесия  $x = \pi$  [1]:

$$\bar{w} = w + W_m \sin(\Omega_m t_\pi), \quad \bar{t}_\pi = t_\pi + \ln \frac{32}{|\bar{w}|}, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (2)$$

здесь  $w = (p^2/2 + \cos x - 1)$  — относительное смещение от невозмущенной сепаратрисы по энергии,  $M$  — полное число гармоник сепаратрисного отображения и предполагается суммирование по индексу  $m$ . При несоизмеримых частотах моменты  $t_\pi$  отмечаются в шкале непрерывного времени. Если частоты возмущений соизмеримы и кратны некоторой опорной частоте  $\Omega_0$ , то второе из соотношений (2) может быть переписано в виде [1]:

$$\bar{t}_\pi = t_\pi + \Omega_0 \ln \frac{32}{|\bar{w}|}, \quad t_\pi = \Omega_0 t_\pi \text{ mod } (2\pi).$$

Уже первые численные эксперименты по измерению амплитуд гармоник отображения (2) показали, что в его спектре присутствуют не только все  $N$  частот возмущения  $V(x, t)$ , но и некоторые их комбинации, т.е. всегда имеет место неравенство  $M > N$ .

В следующем разделе делается попытка прояснить механизм проникновения в сепаратрисное отображение комбинационных частот и оценить их амплитуды. В разделе 3 полученные результаты используются для обоснования величины давно известного из экспериментов коэффициента усиления амплитуды сепаратрисной гармоники для стандартного отображения. Краткое описание методов вычислений и некоторые результаты численных исследований сепаратрисных отображений приведены в разделе 4.

## 2. Оценки амплитуд гармоник комбинационных частот сепаратрисного отображения.

Для анализа движения в хаотическом слое системы (1) удобно ввести новые координату и импульс, описывающие отклонения фазовых переменных  $x(t)$ ,  $p(t)$  от их значений на невозмущенной сепаратрисе основного резонанса  $x_s(t)$ ,  $p_s(t)$ :

$$y(t) = x(t) - x_s(t), \quad u(t) = \dot{y}(t) = p(t) - p_s(t),$$

$$x_s(t) = 4 \arctan(e^t), \quad p_s(t) = 2 \sin(x_s(t)/2).$$

С помощью производящей функции  $F_2(u, x, t) = (p_s(t) - u)(x - x_s(t))$  получаем гамильтониан  $y$ -движения (напоминаем о суммировании по индексу  $n$ ):

$$H(y, u, t) = u^2/2 + \cos y [\cos x_s + \varepsilon_n \cos(x_s - \Omega_n t)] - \sin y [\sin x_s + \varepsilon_n \sin(x_s - \Omega_n t)] + y \sin x_s. \quad (3)$$

Полагая, в силу адиабатичности возмущения,  $|y(t)| \ll 1$  и выполнив в гамильтониане приближенные замены  $\sin y \rightarrow y$ ,  $\cos y \rightarrow 1 - y^2/2$ , приходим к уравнению движения:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = y [\cos x_s + \varepsilon_n \cos(x_s - \Omega_n t)] + \varepsilon_n \sin(x_s - \Omega_n t). \quad (4)$$

Нас интересует только вынужденное (исчезающее при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) решение  $y_\varepsilon(t)$ , которое может быть построено методом последовательных приближений. Введем обозначение для разности правой и левой частей уравнения (4):

$$\Delta y_\varepsilon = \frac{d^2 y}{dt^2} - y [\cos x_s + \varepsilon_n \cos(x_s - \Omega_n t)] - \varepsilon_n \sin(x_s - \Omega_n t), \quad (5)$$

процесс приближений должен в пределе свести эту разность к нулю.

В качестве первого приближения примем выражение

$$y_\varepsilon^{(1)} = -\frac{\varepsilon_n}{(p_s - \Omega_n)^2} \sin(x_s - \Omega_n t)$$

и вычислим для него значение разности (5)

$$\Delta y_\varepsilon^{(1)} = -\frac{\varepsilon_n}{(p_s - \Omega_n)^2} \sin(\Omega_n t) - \frac{\varepsilon_n \varepsilon_m}{2} \times$$



$$\times \left[ \frac{1}{(p_s - \Omega_n)^2} - \frac{1}{(p_s - \Omega_m)^2} \right] \sin(\Omega_m - \Omega_n)t - \dots$$

Видно, что из  $\Delta y_\varepsilon$  исчезли члены вида  $\varepsilon_n \sin(x_s - \Omega_n t)$ , но зато появился ряд новых слагаемых, для компенсации которых необходимо ввести второе приближение

$$y_\varepsilon^{(2)} = -\frac{\varepsilon_n}{(p_s - \Omega_n)^2} \sin(x_s - \Omega_n t) - \frac{\varepsilon_n}{\Omega_n^2 (p_s - \Omega_n)^2} \sin(\Omega_n t) - \frac{\varepsilon_n \varepsilon_m}{2(\Omega_m - \Omega_n)^2} \left[ \frac{1}{(p_s - \Omega_n)^2} - \frac{1}{(p_s - \Omega_m)^2} \right] \sin(\Omega_m - \Omega_n)t \quad (6)$$

Знание  $y_\varepsilon^{(2)}$  позволяет вычислить  $\Delta y_\varepsilon^{(2)}$  и продолжить процесс построения приближений.

Необходимо отметить, что даже если исходная система (1) содержит относительно немного слагаемых, число членов в выражениях  $\Delta y_\varepsilon^{(1)}$ ,  $y_\varepsilon^{(2)}$ ,  $\Delta y_\varepsilon^{(2)}$ , ... оказывается велико и лавинно нарастает по мере повышения порядка приближения. Аккуратное построение решения  $y_\varepsilon(t)$  может быть выполнено, как правило, только с применением средств компьютерной алгебры и оказывается весьма громоздким. Однако, целью настоящей работы является не отыскание точных зависимостей, а получение правдоподобных оценок по порядку величины и мы ограничимся найденным выше вторым приближением (6) для  $y_\varepsilon^{(2)}$ .

Возвращаясь к системе (1) предположим, что возмущение содержит всего две высокочастотные ( $\Omega_1, \Omega_2 \gg 1$ ) гармоники и рассмотрим первую из них  $\varepsilon_1 \cos(x - \Omega_1 t)$ . В этом выражении фазовая переменная  $x$  при движении в окрестности слабо деформированной сепаратрисы может быть приближенно заменена суммой невозмущенного движения и отклонения от него  $x \approx x_s + y_\varepsilon^{(2)}$ . Такое представление, с учетом малости отклонения  $y_\varepsilon^{(2)}$  и при условии  $\Omega_1, \Omega_2 \gg p_{s, \max} \approx 2.0$  дает:

$$\varepsilon_1 \cos(x - \Omega_1 t) \approx \varepsilon_1 \cos(x_s - \Omega_1 t) + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \left[ \frac{1}{\Omega_2^2} \sin(x_s - \Omega_2 t) + \frac{1}{\Omega_2^4} \sin(\Omega_2 t) + \dots \right] \sin(x_s - \Omega_1 t).$$

Из этого соотношения четко видно, что в возмущении системы, наряду с первичными гармониками с частотами  $\Omega_1, \Omega_2$ , появляются вторичные гармоники на сумме и разности этих частот, которые внесут свой вклад в спектр сепаратрисного отображения. Важно заметить, что одна из вторичных гармоник вполне может быть низкочастотной и оказать решающее влияние на формирование хаотического слоя.

Напомним, что при построении сепаратрисного отображения вычисляются изменения гамильтониана системы за период вращения или полупериод колебания и вклад каждой гармоники возмущения в адиабатическом приближении пропорционален величине соответствующего ей интеграла Мельникова-Арнольда (см. [1] и Приложение 1). С помощью этой техники найдем амплитуды гармоник сепаратрисного отображения  $W$ , порожденных вторичными гармониками возмущения для следующих случаев комбинаций первичных частот  $\Delta\Omega$ :

1) две первичные частоты  $\Omega_1, \Omega_2 \gg 1$ , частота вторичной гармоники  $\Delta\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 > 0$ :

$$W(\Delta\Omega) = \frac{4\pi}{3} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \left[ \frac{1}{\Omega_1^2} + \frac{1}{\Omega_2^2} \right] \frac{e^{\pi\Delta\Omega/2}}{\sinh(\pi\Delta\Omega)} \Delta\Omega^4 \left( 1 - \frac{2}{\Delta\Omega^2} \right), \quad (7)$$

2) две первичные частоты  $\Omega_1, \Omega_2 \gg 1$ , частота вторичной гармоники  $\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1 > 0$ :

$$W(\Delta\Omega) = \pi \varepsilon_1 \varepsilon_2 \left[ \frac{1}{\Omega_1^2} - \frac{1}{\Omega_2^2} \right] \frac{e^{\pi\Delta\Omega/2}}{\sinh(\pi\Delta\Omega)}, \quad (8)$$

3) три первичные частоты  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3 \gg 1$ , частота вторичной гармоники  $\Delta\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 - \Omega_3 > 0$ :

$$W(\Delta\Omega) = 2\pi \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \frac{e^{\pi\Delta\Omega/2}}{\sinh(\pi\Delta\Omega)} \Delta\Omega^2 \times \left[ \frac{1}{\Omega_1 \Omega_2 (\Omega_1 + \Omega_2)^2} + \frac{1}{\Omega_1 \Omega_3^2 (\Omega_3 - \Omega_1)} + \frac{1}{\Omega_2 \Omega_3^2 (\Omega_3 - \Omega_2)} \right]. \quad (9)$$

Заметим, что случай 3), возможно, правильнее было бы назвать не вторичной, а третичной гармоникой в силу кубической зависимости  $W$  от параметра возмущения.

Из приведенных формул видно, в частности, что при  $\Delta\Omega = const$  и  $\Omega_n \rightarrow \infty$  амплитуды вторичных гармоник убывают не по экспоненциальному, а по степенному закону.

### 3. Оценка коэффициента усиления амплитуды сепаратрисной гармоники для стандартного отображения.

Первый пример использования полученных выше результатов мы хотим связать со стандартным отображением Чирикова, которое в обозначениях работы [1] имеет вид:

$$\bar{I} = I + K \sin \theta, \quad \bar{\theta} = \theta + \bar{I}. \quad (10)$$



В современной теории гамильтоновых систем это отображение — безусловный рекордсмен по количеству посвященных ему и выполненных с его помощью исследований. Давно известно, что значения теоретической  $W_{MA}$  и измеренной  $W_E$  амплитуд сепаратрисного отображения для системы (10) заметно отличаются друг от друга. По результатам проведенных в [1] численных экспериментов, их отношение не зависит от величины единственного параметра  $K$  и равно:

$$R_E = \frac{W_E}{W_{MA}} = 2.15 \pm 0.04. \quad (11)$$

Это отношение можно также получить по данным работы [6], где аналитически и численно определялся угол расщепления сепаратрис стандартного отображения:

$$R_S = \frac{|\theta_1|}{16\pi^3} = 2.2552463\dots, \quad (12)$$

здесь  $|\theta_1| = 1118.82770595$  найденная в этой работе фундаментальная постоянная.

Вводя другие переменные и используя свойства периодической  $\delta$ -функции можно показать, что эквивалентная стандартному отображению непрерывная система имеет вид [1]:

$$H = \frac{p^2}{2} + \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \cos\left(x - \frac{2\pi nt}{\sqrt{K}}\right), \quad (13)$$

т.е. является расширенным вариантом системы (1) с эквидистантным спектром, опорная частота которого равна  $\Omega_0 = \Omega = 2\pi/\sqrt{K}$ , и с параметрами  $\epsilon_n = 1$ . Мы будем полагать также  $K \ll 1$  чтобы возмущение оставалось высокочастотным.

Подсчитаем вклады в сепаратрисное отображение от каждой из присутствующих в (13) гармоник как если бы она была единственным возмущением (Приложение 1). При  $\Omega \gg 1$  легко видеть, что в любом режиме движения существенна лишь одна гармоника с наименьшей частотой ( $n = 1$  для вращения с  $p > 0$ ,  $n = -1$  для вращения с  $p < 0$ ). Она порождает одночастотное сепаратрисное отображение, амплитуда которого равна ([1], Приложение 1):

$$W_{MA}(\Omega) = 8\pi\Omega^2 e^{-\pi\Omega/2}. \quad (14)$$

Приведенное рассуждение считалось достаточным основанием для того, чтобы просто отбросить в (13) всю бесконечную массу членов с  $|n| > 1$ .

Учитывая описанный выше механизм возникновения вторичных гармоник можно заметить, что в гамильтониане (13) каждая пара слагаемых вида

$$\cos[x - (n+1)\Omega t] + \cos(x + n\Omega t)$$

порождает на сумме частот вторичную гармонику основной частоты  $\Omega$ , тем самым усиливая действие главного члена возмущения и добавляя некоторую величину к амплитуде (14). Найдем суммарное значение  $\Delta W_1(\Omega)$  всех этих добавок, используя формулу (7) для сепаратрисной амплитуды вторичной гармоники на сумме частот, в которой следует положить  $\Omega_1 = (n+1)\Omega$ ,  $\Omega_2 = -n\Omega$ ,  $\Delta\Omega = \Omega \gg 1$ ,  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$ :

$$\Delta W_1(\Omega) = \frac{8\pi}{3} \Omega^2 e^{-\pi\Omega/2} \sum_{n \geq 1} \left[ \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \right] =$$

$$\frac{W_{MA}(\Omega)}{3} \left( \frac{\pi^2}{3} - 1 \right) \approx 0.76 W_{MA}(\Omega). \quad (15)$$

Числовой коэффициент в этом соотношении не зависит от  $\Omega$  и, следовательно, от параметра стандартного отображения  $K$ . С помощью формул предыдущего раздела нетрудно проверить, что при  $\Omega \gg 1$  вклады вторичных гармоник других комбинаций частот исчезающе малы.

Полученное таким образом расчетное отношение амплитуд

$$R_C = 1 + \Delta W_1(\Omega)/W_{MA}(\Omega) \approx 1.76$$

заметно приблизилось к измеренной величине (11), но различие все еще достаточно велико.

Отметим, что все использованные нами выше соотношения получены для системы вида (1) в предположении слабости возмущения  $\epsilon_n \ll 1$ , что явно не выполняется для стандартного отображения (13), где  $\epsilon_n = 1$ . Попытаемся понять, как отразится на величине  $R_C$  это обстоятельство.

Поскольку мы уже учли влияние высших ( $|n| > 1$ ) гармоник, вычислив их вклад (15), то теперь их действительно можно отбросить и вместо (13) рассмотреть укороченную систему вида:

$$H(x, p, t) = \frac{p^2}{2} + \cos x + \frac{a}{2} \cos(x - \Omega t) + \frac{a}{2} \cos(x + \Omega t) =$$

$$= \frac{p^2}{2} + \cos x + a \cos x \cos \Omega t, \quad (16)$$



где для нашего случая следует принять  $a = 2$ . Система (16) изучалась в работе [8] с целью определить поправочный множитель  $f(a)$  к интегралу Мельникова – Арнольда в зависимости от силы возмущения  $a$ . Из рис.4 этой работы следует, что при  $a = 2$   $f(a) \approx 1.38$  и мы можем теперь учесть силу возмущения как еще одну добавку  $\Delta W_2(\Omega)$  к амплитуде (14):

$$\Delta W_2(\Omega) \approx 0.38 W_{MA}(\Omega). \quad (17)$$

И в этом соотношении числовой коэффициент не зависит от параметра стандартного отображения  $K$ . Если предположить, что рассмотренные эффекты действуют независимо, то результирующее расчетное отношение амплитуд равно :

$$R_C = 1 + \frac{\Delta W_1(\Omega) + \Delta W_2(\Omega)}{W_{MA}(\Omega)} \approx 2.14. \quad (18)$$

Эта величина находится достаточно близко к экспериментальному значению (11), но несколько отличается от найденного по углу расщепления (12). Возможно, расхождение объясняется действием дополнительных, не учтенных нами эффектов.

#### 4. Методы и результаты численного счета.

Для изучения эффектов, обусловленных возникновением вторичных гармоник, проводилось численное определение угла  $\gamma_s$  пересечения сепаратрис, фазового объема  $A_s$  области между соседними точками пересечения, максимальной величины расщепления по импульсу  $\Delta P_{max}$  и амплитуд  $W_E$  гармоник сепаратрисного отображения.

Надежность результатов численного интегрирования гамильтоновых уравнений движения может быть обеспечена только при использовании канонических, сохраняющих фазовый объем вычислительных алгоритмов. Многие популярные методы счета (например, Рунге – Кутта) не удовлетворяют этому требованию, что приводит к подавлению слабых реальных и возникновению ложных динамических эффектов. Используемый в настоящей работе канонический алгоритм второго порядка, основанный на предложенном в работе [11] методе построения производящих функций, описан в Приложении 2.

Система (1) обладает симметрией вида  $(x, p, t) \leftrightarrow (2\pi - x, p, -t)$ , использование которой позволяет, в частности, ограничиться вычислением одной сепаратрисы вместо двух. Из этой симметрии следует также, что

центральная гомоклиническая точка  $\mathcal{P}_{fb}(\pi)$  лежит на прямой  $x = \pi$  и, при слабом возмущении, близка к величине  $p_{s,max} = 2$ . Для отыскания угла пересечения сепаратрис  $\gamma_s$  достаточно исследовать малую окрестность этой точки, а для подсчета площади  $A_s$  надо дойти до соседней гомоклинической точки. Кроме того, знание  $\mathcal{P}_{fb}(\pi)$  необходимо для гарантированного размещения начальных условий в хаотическом слое при построении сепаратрисного отображения. По этой причине практически всегда поиск величины  $\mathcal{P}_{fb}(\pi)$  становился первым шагом вычислений.

При построении сепаратрисного отображения (2) начальные условия для траекторий выбирались случайным образом из узкого интервала внутри исследуемой части (вращательной или колебательной) хаотического слоя. Каждая траектория либо совершала предписанное ей число периодов движения  $T_m$  (интервал времени между соседними моментами  $t_\pi$  пересечения устойчивой фазы  $x = \pi$ ), либо прерывалась из-за смены режима движения. В любом случае запускалась новая траектория и процесс повторялся до тех пор, пока не набиралось полное заданное число периодов  $N_p$ . Для каждого периода вычислялась средняя энергия  $w$  по формуле [1]:

$$w = 32 \exp(-T_m). \quad (19)$$

Определяя изменение  $\delta w$  энергии для каждой пары соседних периодов и приписывая его к общему для этих периодов моменту  $t_\pi$ , мы получали сепаратрисное отображение  $(\delta w_k, t_{\pi,k})$ ,  $k = 1, 2, \dots, (N_p - 1)$  в шкале непрерывного времени. В случае соизмеримых частот его удобно пересчитать на фазу  $\tau_\pi = \Omega_0 t_\pi \bmod(2\pi)$  по опорной частоте (см. раздел 1). Отметим, что этого пересчета можно и не делать, поскольку величины амплитуд гармоник, как показал опыт, от этого не зависят. При вычислении периодов  $T_m$  фиксировался самый короткий из них  $T_{m,min}$ , что позволяло получать оценку полной ширины исследуемой части хаотического слоя:

$$w_{s,m} = 32 \exp(-T_{m,min}). \quad (20)$$

Прежде всего, интересно проверить, как согласуются между собой и с теорией результаты всех описанных выше измерений. С этой целью была исследована система (1) с единственной гармоникой возмущения

$$V(x, p) = \varepsilon \cos(x - \Omega t), \quad \varepsilon = 0.075, \quad \Omega = 10.0. \quad (21)$$

Сепаратрисное отображение для этого и всех других примеров настоящего раздела вычислялось в режиме вращения с  $p > 0$ .

Были найдены следующие характеристики расщепленных сепаратрис: угол  $\gamma_s \approx 7.09 \cdot 10^{-5}$ , площадь  $A_s \approx 5.66 \cdot 10^{-6}$ , максимальное



расщепление  $\Delta \mathcal{P}_{max} \approx 1.44 \cdot 10^{-5}$ . Все три величины дают практически одинаковое ожидаемое значение  $W_{sp}$  для амплитуды сепаратрисной гармоники:

$$W_{sp} \approx \frac{4}{\Omega} \gamma_s \approx \frac{\Omega}{2} \mathcal{A}_s \approx p_{max} \Delta \mathcal{P}_{max} \approx 2.84 \cdot 10^{-5}, \quad (22)$$

что хорошо согласуется как с измеренным по сепаратрисному отображению значением  $W_E \approx 2.87 \cdot 10^{-5}$  (см. рис 1), так и с найденным через интеграл Мельникова – Арнольда  $W_{MA} \approx 2.84 \cdot 10^{-5}$ . Вычисленная по минимальному периоду и формуле (20) ширина вращательной части слоя  $w_{s,r} \approx 2.95 \cdot 10^{-4}$  также близка к своему теоретическому значению  $\Omega W_{MA} \approx 2.84 \cdot 10^{-4}$  (Приложение 1). На рис.1 показано несколько периодов сепаратрисного отображения. На этом рисунке, как и на всех остальных рисунках настоящего раздела, точками представлено сепаратрисное отображение, сплошная кривая есть результат подгонки наименьшими квадратами и для значений амплитуд  $W_E$  в скобках указаны отвечающие им частоты.

И качественно и количественно ничего не изменилось после того, как к возмущению была добавлена симметричная гармоника и оно приняло вид

$$V(x, t) = \varepsilon_1 \cos(x - \Omega_1 t) + \varepsilon_2 \cos(x - \Omega_2 t), \\ \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.075, \quad \Omega_1 = 10.0, \quad \Omega_2 = -10.0. \quad (23)$$

Это понятно, поскольку единственная возникающая здесь (на разности частот) вторичная гармоника имеет частоту  $2\Omega$  и ее влияние экспоненциально мало.

Картина оказалась совершенно иной когда две гармоники возмущения были сделаны несимметричными по частоте

$$V(x, t) = \varepsilon_1 \cos(x - \Omega_1 t) + \varepsilon_2 \cos(x - \Omega_2 t), \\ \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.075, \quad \Omega_0 = 2.0, \quad \Omega_1 = 6\Omega_0 = 12.0, \quad \Omega_2 = -5\Omega_0 = -10.0. \quad (24)$$

Во второй строке этих соотношений отражен тот факт, что частоты гармоник соизмеримы.

Измеренная для этого случая полная амплитуда сепаратрисного отображения  $W_E \approx 1.33 \cdot 10^{-4}$  почти в пять раз выше чем для возмущения (23) и это несмотря на то, что мы увеличили частоту  $\Omega_1$ . Причина – появление вторичной гармоники с частотой  $\Delta\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 = \Omega_0 = 2.0$ . На рис.2 построен один период сепаратрисного отображения и приведены полученные методом наименьших квадратов амплитуды для всех

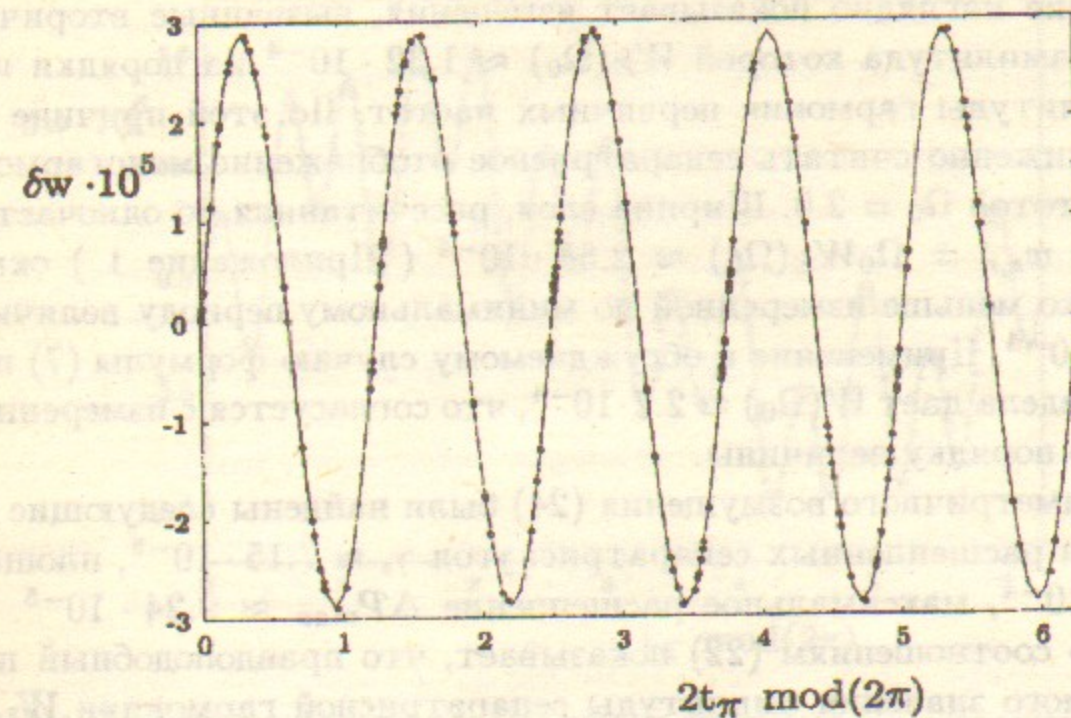


Рис.1. Сепаратрисное отображение системы (1) с одночастотным возмущением (21). Амплитуда гармоники  $W_E(10.0) \approx 2.87 \cdot 10^{-5}$ .

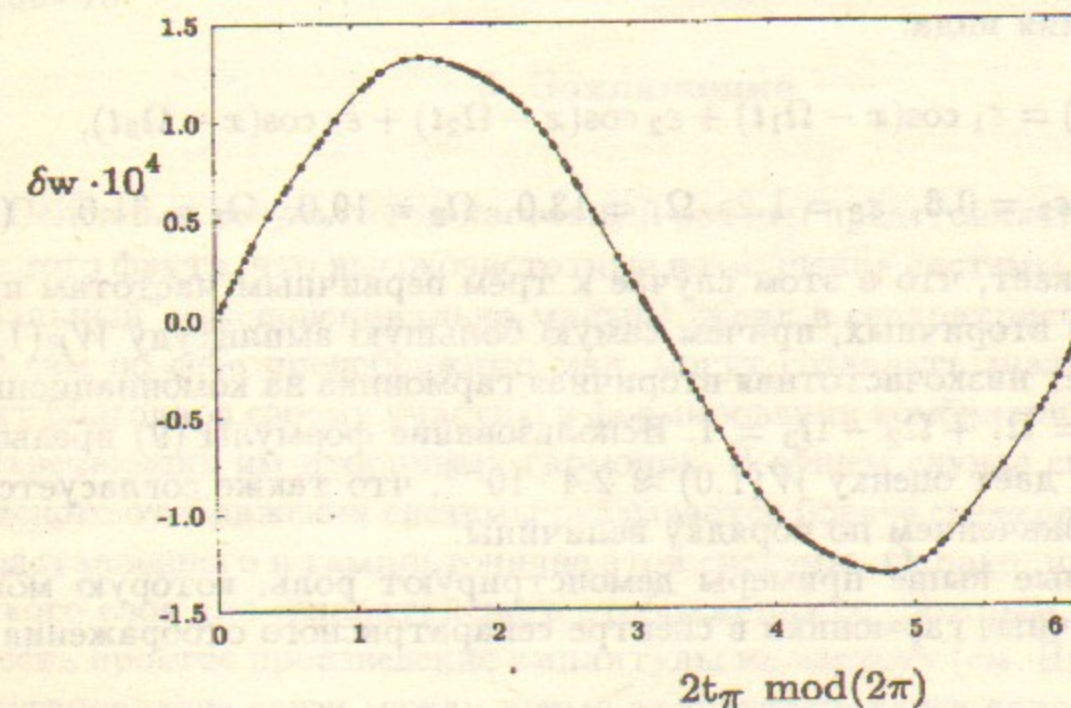


Рис.2. Сепаратрисное отображение системы (1) с двухчастотным несимметричным возмущением (24). Амплитуды первичных гармоник  $W_E(12.0) \approx 1.91 \cdot 10^{-6}$ ,  $W_E(-10.0) \approx -2.13 \cdot 10^{-7}$ , амплитуда вторичной гармоники  $W_E(2.0) \approx 1.32 \cdot 10^{-4}$ .



трех гармоник. Горизонтальные масштабы рисунков 1 и 2 одинаковы и их сравнение наглядно показывает изменения, вызванные вторичной гармоникой, амплитуда которой  $W_E(\Omega_0) \approx 1.32 \cdot 10^{-4}$  на порядки превышает амплитуды гармоник первичных частот. По этой причине мы можем приближенно считать сепаратрисное отображение моногармоническим с частотой  $\Omega_0 = 2.0$ . Ширина слоя, рассчитанная по одночастотной формуле  $w_{s,r} = \Omega_0 W_E(\Omega_0) \approx 2.64 \cdot 10^{-4}$  ( Приложение 1 ) оказалась несколько меньше измеренной по минимальному периоду величины  $w_{s,r} \approx 3.47 \cdot 10^{-4}$ . Применение к обсуждаемому случаю формулы (7) предыдущего раздела дает  $W(\Omega_0) \approx 2.7 \cdot 10^{-4}$ , что согласуется с измеренным значением по порядку величины.

Для несимметричного возмущения (24) были найдены следующие характеристики расщепленных сепаратрис: угол  $\gamma_s \approx 7.15 \cdot 10^{-5}$ , площадь  $A_s \approx 1.32 \cdot 10^{-4}$ , максимальное расщепление  $\Delta P_{max} \approx 9.24 \cdot 10^{-5}$ . Их обработка по соотношениям (22) показывает, что правдоподобный прогноз ожидаемого значения амплитуды сепаратрисной гармоники  $W_{sp} = \Omega_0 A_s / 2 \approx 1.32 \cdot 10^{-4}$  можно получить только путем измерения фазового объема  $A_s$ . Однако, и эта возможность исчезает, если сепаратрисное отображение нельзя считать одночастотным.

Многочастотное сепаратрисное отображение имеет место, например, для возмущения вида:

$$V(x, t) = \varepsilon_1 \cos(x - \Omega_1 t) + \varepsilon_2 \cos(x - \Omega_2 t) + \varepsilon_3 \cos(x - \Omega_3 t),$$

$$\varepsilon_1 = 0.1, \quad \varepsilon_2 = 0.6, \quad \varepsilon_3 = 1.2, \quad \Omega_1 = 13.0, \quad \Omega_2 = 19.0, \quad \Omega_3 = 31.0 \quad (25)$$

Рис.3 показывает, что в этом случае к трем первичным частотам прибавились три вторичных, причем самую большую амплитуду  $W_E(1) \approx 1.0 \cdot 10^{-6}$  имеет низкочастотная вторичная гармоника на комбинационной частоте  $\Delta\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 - \Omega_3 = 1$ . Использование формулы (9) предыдущего раздела дает оценку  $W(1.0) \approx 2.4 \cdot 10^{-6}$ , что также согласуется с измеренным значением по порядку величины.

Приведенные выше примеры демонстрируют роль, которую могут играть вторичные гармоники в спектре сепаратрисного отображения.

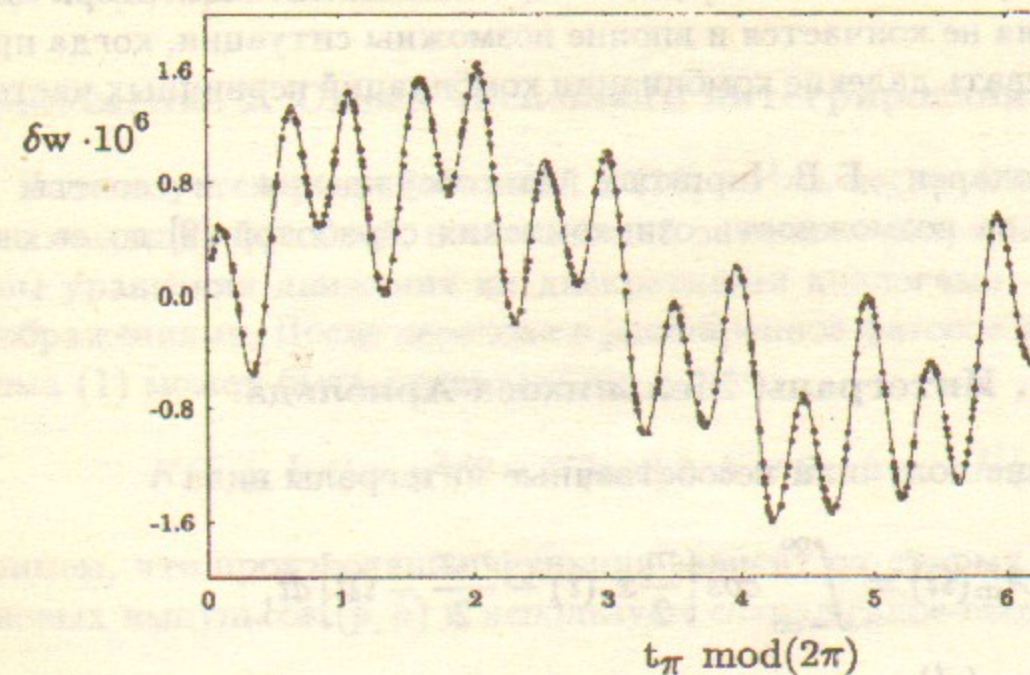


Рис.3. Сепаратрисное отображение системы (1) с трехчастотным возмущением (25). Амплитуды первичных гармоник  $W_E(13.0) \approx 5.88 \cdot 10^{-7}$ ,  $W_E(19.0) \approx 2.48 \cdot 10^{-8}$ ,  $W_E(31.0) \approx 1.91 \cdot 10^{-8}$ . Амплитуды вторичных гармоник  $W_E(1.0) \approx 9.78 \cdot 10^{-7}$ ,  $W_E(6.0) \approx -3.67 \cdot 10^{-7}$ ,  $W_E(12.0) \approx -1.36 \cdot 10^{-9}$ .

## 5. Заключение

Основным результатом настоящей работы представляется установление того факта, что высокочастотные возмущения системы (1), чей "персональный" (экспоненциально малый) вклад в сепаратрисное отображение сам по себе пренебрежимо мал, могут создавать значительный эффект благодаря своему участию в формировании комбинационных частот и отвечающих им вторичных гармоник. В общем случае спектр сепаратрисного отображения системы оказывается богаче спектра возмущения, представленного в гамильтониане этой системы. Однако, ширина хаотического слоя для сепаратрисного отображения со сложным спектром уже не есть простое произведение амплитуды на частоту (см. Приложение 1) и установление связи между этими атрибутами хаоса является актуальной задачей.

Неясно также, какую пользу в этом случае может принести знание угла пересечения  $\gamma_s$ , фазового объема  $A_s$  и максимальной величины расщепления  $\Delta P_{max}$  сепаратрис.



Наконец, как упоминалось в разделе 2, с возникновением вторичных гармоник история не кончается и вполне возможны ситуации, когда придется рассматривать далекие комбинации комбинаций первичных частот.

Автор благодарен Б.В.Чирикову за обсуждения и советы и В.Г.Гельфрейху за возможность ознакомления с работой [8] до ее опубликования.

### Приложение 1. Интегралы Мельникова-Арнольда.

Такое название получили несобственные интегралы вида

$$A_m(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos \left[ \frac{m}{2} x_s(t) - \frac{m\pi}{2} - \Omega t \right] dt,$$

где  $x_s(t) = 4 \arctan(e^t)$  описывает движение по сепаратрисе невозмущенного маятника  $H = p^2/2 + \cos(x)$ ;  $m$  и  $\Omega$  - параметры. Вывод приведенных ниже формул содержится в обзоре [1]:

$$A_m(\Omega > 0) = \frac{2\pi}{(m-1)!} \frac{e^{\pi\Omega/2}}{\sinh(\pi\Omega)} (2\Omega)^{m-1} (1 + f_m(\Omega)),$$

$$f_1 = f_2 = 0, \quad f_{m+1} = f_m - (1 + f_{m-1})m(m-1)/4\Omega^2.$$

При  $\Omega \gg 1$  эта формула может быть переписана в виде, явно демонстрирующем факт экспоненциально быстрого убывания величины интеграла с ростом частоты возмущения:

$$A_m(\Omega) \approx \frac{4\pi}{(m-1)!} e^{-\pi\Omega/2} (2\Omega)^{m-1} (1 + f_m(\Omega)).$$

Если слабое ( $\epsilon \ll 1$ ) возмущение системы (1) содержит единственную гармонику вида  $\epsilon \cos(mx/2 - \Omega t)$ , то сепаратрисное отображение также оказывается гармоническим с той же частотой  $\Omega$  и амплитудой [1]:

$$W_{MA}(\Omega) = \epsilon \Omega A_m(\Omega).$$

Для этого случая с помощью полуэмпирического критерия перекрытия резонансов и свойств стандартного отображения было показано, что хаотическая неустойчивость имеет место в слое  $|w| \lesssim w_s$ , ширина которого равна:

$$w_s \approx \Omega |W_{MA}(\Omega)|,$$

здесь  $w$  - относительное смещение от невозмущенной сепаратрисы по энергии [9,10].

### Приложение 2. Схема численного интегрирования.

Используется разработанный в [11] метод построения канонических производящих функций, позволяющий заменить непрерывные гамильтоновы уравнения движения их дискретными аналогами - каноническими отображениями. После перехода в расширенное фазовое пространство система (1) может быть представлена в виде:

$$K(x, p, h, t) = p^2/2 + V(x, t) + h = 0, \quad h = -H(x, p, t).$$

Примем, что производящая функция зависит от старых координат  $(x, t)$  и новых импульсов  $(\bar{p}, \bar{h})$  и используем сокращенное обозначение

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial t^m \partial x^n} V(x, t) = V_{mn}.$$

Производящая функция второго порядка ( $\tau$  - шаг по времени)

$$S = \tau(\bar{p}^2/2 + \bar{h} + V_{00}) + (\tau^2/2)(\bar{p}V_{01} + V_{10})$$

порождает явное каноническое отображение вида:

$$\bar{p} = \frac{p - \tau V_{01} - (\tau^2/2)V_{11}}{1 + (\tau^2/2)V_{02}},$$

$$\bar{x} = x + \tau \bar{p} + (\tau^2/2)V_{01},$$

$$\bar{h} = h - \tau V_{10} - (\tau^2/2)(\bar{p}V_{11} + V_{20}).$$



## Литература

1. *B. V. Chirikov*. Phys. Reports, **52** (1979) 263.
2. *A. Lichtenberg and M. Lieberman*. Regular and Chaotic Dynamics, (Springer, 1992).
3. *B. V. Chirikov and V. V. Vecheslavov*. KAM Integrability, in: Analysis etc, Eds. P. Rabinowitz and E. Zehnder (Academic Press, 1990) p.219.
4. *B. V. Chirikov and V. V. Vecheslavov*. How Fast is the Arnold diffusion? Proc. ICFA Beam Dynamics Workshop, Novosibirsk 1989, p.39.
5. *В. К. Мельников*. ДАН **148**, 1257 (1983).
6. *V. F. Lazutkin, I. G. Schachmannsky, M. B. Tabanov*. Physica D, **40** (1989) 235.
7. *V. G. Gelfreich, V. F. Lazutkin, M. B. Tabanov*. Chaos **1** (2) (1991) 137.
8. *V. G. Gelfreich*. Reference System for Splitting of Separatrices, to be published.
9. *Filonenko N. N., Sagdeev R. Z., Zaslavsky G. M.* Nuclear Fusion **7** (1967) 253.
10. *Заславский Г. М., Чуриков Б. В.* УФН **105** 1 (1971) 3.
11. *В. В. Вечеславов*. Метод канонического интегрирования любого порядка. Препринт 89-35 ИЯФ СО РАН, Новосибирск, 1989.

*В. В. Вечеславов*

**Движение в окрестности сепаратрисы нелинейного резонанса  
при адиабатических возмущениях**

ИЯФ 95-46

Ответственный за выпуск С. Г. Попов  
Работа поступила 29.05.1995 г.

---

Сдано в набор 5.06.1995 г.

Подписано в печать 05.06.1995 г.

Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 1.3 печ.л., 1.0 уч.-изд.л.

Тираж 200 экз. Бесплатно. Заказ № 46

---

Обработано на IBM PC и отпечатано на  
ротапринте ГНЦ РФ "ИЯФ им. Г. И. Будкера СО РАН",  
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.