

42

46

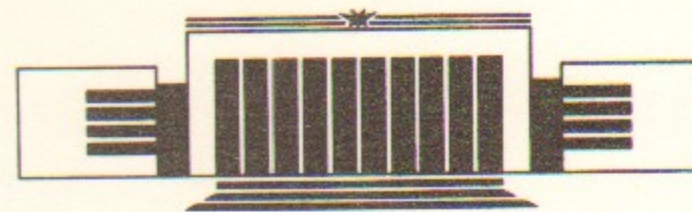


Государственный научный центр  
Российской Федерации  
Институт ядерной физики  
им. Г.И. Будкера

В.Н. Худик, М.П. Федорук

**ВЫСОКОЧАСТОТНЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ  
ПЛАЗМЫ ПРИ ИНЖЕКЦИИ  
ЖЕСТКОГО РЕЛЯТИВИСТСКОГО ПУЧКА  
ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ**

ИЯФ 95-71



НОВОСИБИРСК

# Высокочастотные неустойчивости плазмы при инжекции жесткого релятивистского пучка заряженных частиц

В.Н. Худик, М.П. Федорук<sup>1</sup>

ГНЦ РФ "Институт ядерной физики им.Г.И.Будкера СО РАН", 630090, Новосибирск, Russia

## Аннотация

В рамках уравнений идеальной релятивистской гидродинамики исследована устойчивость течения электронной компоненты плазмы, инициированного ультрарелятивистским пучком заряженных частиц малой плотности. Показано, что хотя такое течение является неустойчивым, инкременты растущих собственных мод экспоненциально малы.

© ГНЦ РФ "Институт ядерной физики им.Г.И.Будкера СО РАН"

<sup>1</sup>Институт вычислительных технологий

## 1 Введение

В ускорителях нового типа предполагается использовать в качестве рабочего поля кильватерную волну, возбуждаемую в плазме драйверным пучком ультрарелятивистских заряженных частиц [1,2]. Передача энергии от этой волны ускоряемым частицам носит резонансный характер, что предъявляет высокие требования к степени регулярности кильватерного электрического поля. Этим обусловлен интерес к вопросу об устойчивости течения плазмы, инициированного драйверным пучком.

Мы рассмотрим задачу об устойчивости течения электронной компоненты плазмы при инжекции длинного сгустка заряженных частиц малой плотности. Релятивистский пучок будем считать жестким, то есть будем предполагать, что все частицы пучка имеют одну и ту же скорость  $\vec{u}$ , а плотность есть заданная функция координат и времени

$$n_b = n_b(\vec{r} - \vec{u}t). \quad (1)$$

Интересуясь высокочастотными неустойчивостями, мы будем считать ионы плазмы неподвижными и их плотность  $n_0$  неизменной. Имея ввиду, что фактически полученные результаты справедливы вплоть до скоростей электронов плазмы лишь в несколько раз меньших скорости света, мы проведем исследование устойчивости течения электронной компоненты плазмы в рамках уравнений релятивистской гидродинамики, предполагая температуру электронов равной нулю.

Работа построена следующим образом. В разделе 2 приводятся основные уравнения релятивистской гидродинамики и кратко обсуждаются

стационарные течения, инициированные длинными сгустками заряженных частиц. В разделе 3 дана общая характеристика высокочастотной неустойчивости, выясняются характерные пространственные масштабы и поляризация растущих собственных мод. В разделе 4 в потенциальном приближении решается задача об устойчивости течения электронной компоненты плазмы и вычисляются инкременты самых неустойчивых мод, а затем в разделе 5 обсуждается возможность учета непотенциальности возмущений. В Заключение приводятся основные выводы работы.

## 2 Гидродинамика электронов плазмы

Однопоточное течение холодных электронов плазмы в электромагнитном поле описывается динамическим уравнением

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{p} = -e \vec{E} - \frac{e}{c} [\vec{v} \times \vec{B}], \quad (2)$$

здесь  $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$  — импульс электрона, а  $\gamma \equiv (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$  — релятивистский фактор. Уравнение (2) вместе с уравнениями Максвелла

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\text{div} \vec{E} = 4\pi e (n_0 - n_b - n_e) \quad (4)$$

$$\text{rot} \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{4\pi}{c} (en_e \vec{v} + en_b \vec{u}) \quad (5)$$

образуют замкнутую систему уравнений для определения электромагнитного поля, скорости  $\vec{v}$  и плотности  $n_e$  электронов. Для определенности в (2) - (5) считается, что пучок состоит из отрицательно заряженных частиц.

Применим операцию ротор к уравнению (2). С учетом (3) и тождества

$$(\vec{v} \nabla) \vec{p} = \nabla(\gamma m c^2) - \vec{v} \times \text{rot} \vec{p}, \quad (6)$$

получим уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = \text{rot}[\vec{v} \times \vec{B}], \quad \vec{B} = \vec{B} - (c/e) \text{rot} \vec{p}. \quad (7)$$

Если в обычной гидродинамике идеальной жидкости замороженной является завихренность  $\text{rot} \vec{p}$ , а в магнитной гидродинамике — магнитное поле

$\vec{B}$ , то в гидродинамике холодных электронов заморожена линейная комбинация этих величин — эффективное поле  $\vec{B}$ . Будучи тождественно равным нулю в начальный момент времени, это поле равно нулю и во все последующие моменты.<sup>1</sup> В этом случае магнитное поле равно:

$$\vec{B} = (mc/e) \text{rot}(\gamma \vec{v}) \quad (8)$$

Формулы (6), (8) позволяют переписать уравнение (2) в виде:

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} + \nabla(\gamma m c^2) = -e \vec{E}. \quad (9)$$

С помощью уравнения Максвелла (4) и уравнения (9) можно выразить плотность электронов через их скорость:

$$n_e = n_0 - n_b + n_0 \lambda_p^2 \Delta \gamma + n_0 \omega_p^{-2} \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \gamma \vec{v}, \quad (10)$$

здесь  $\omega_p = (4\pi e^2 n_0/m)^{1/2}$  — электронная плазменная частота, а  $\lambda_p \equiv c/\omega_p$ .

Подставляя в уравнение Максвелла (5) вместо  $\vec{B}$ ,  $\vec{E}$ ,  $n_e$  соответственно выражения (8)–(10), получим уравнение для определения поля скоростей  $\vec{v}$  [3]:

$$\lambda_p^2 \text{rot} \text{rot}(\gamma \vec{v}) = -\frac{1}{\omega_p^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\gamma \vec{v}) - \lambda_p^2 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \gamma - \left[ \frac{1}{\omega_p^2} \frac{\partial}{\partial t} \text{div}(\gamma \vec{v}) + \lambda_p^2 \Delta \gamma + 1 - \frac{n_b}{n_0} \right] \vec{v} - \frac{n_b}{n_0} \vec{u}. \quad (11)$$

Рассмотрим ультрарелятивистский пучок электронов, распространяющийся вдоль оси  $z$ , с медленно меняющейся плотностью в этом направлении:

$$n_b \approx n_b(\vec{r}_\perp), \quad (12)$$

здесь  $\vec{r}_\perp = (x, y, 0)$  — радиус-вектор в плоскости, перпендикулярной скорости пучка  $\vec{u} \approx (0, 0, -c)$ . Возникающее течение холодного электронного газа плазмы можно считать стационарным, а скорости частиц — параллельными оси пучка:  $\vec{v} = (0, 0, v)$ . При этих предположениях уравнение (11) можно записать в виде:

$$\lambda_p^2 \text{div}_\perp (\gamma^2 \nabla_\perp v) = (1 - n_b/n_0) \gamma v - (n_b/n_0) \gamma c. \quad (13)$$

<sup>1</sup> Именно такой случай имеет место в нашей задаче: до инъекции пучка в плазму скорости частиц и электромагнитное поле тождественно равны нулю.

Здесь и ниже операторы, снабженные символом "⊥", действуют на поперечные переменные  $x, y$ . Заметим, что любому решению уравнения (13) соответствует стационарное решение исходной системы уравнений (2) – (5), однако обратное утверждение не имеет места<sup>2</sup>

При малой плотности пучка инициированное течение электронов плазмы является дорелятивистским и вместо (13) можно использовать уравнение:

$$\lambda_p^2 \Delta_{\perp} v = v - (n_b/n_0)c. \quad (14)$$

Ниже мы ограничимся рассмотрением плоских и аксиально симметричных пучков и будем считать, что плотность пучка монотонно падает при удалении от его центра. При ширине пучка  $a$  меньше или порядка  $\lambda_p$  скорость электронов плазмы в области пучка оценочно равна

$$v/c \sim (a/\lambda_p)^s n_b/n_0 \quad (15)$$

( $s = 1$  – для плоского случая и  $s = 2$  – для аксиально симметричного случая), а производная этой скорости в поперечном направлении оценивается выражением

$$\max |\nabla_{\perp} v/\omega_p| \sim (a/\lambda_p) n_b/n_0 \ll 1. \quad (16)$$

При удалении от пучка поле скоростей экспоненциально быстро убывает на расстояниях порядка  $\lambda_p$ . Обратим внимание на то, что обратный ток плазмы, компенсирующий ток пучка, рассредоточен в плазме на этих расстояниях, даже если радиус пучка  $a \ll \lambda_p$  [5]. Отсутствие локальной токовой компенсации приводит к возникновению магнитного поля, которое оказывает существенное влияние на устойчивость течения электронного газа плазмы. В отличие от магнитного электрическое поле при малой плотности пучка всегда пренебрежимо мало.

При ширине пучка  $a$  много больше  $\lambda_p$  левая часть (14) оценочно мала, и для скорости электронов плазмы имеет место равенство

$$v/c \approx n_b/n_0, \quad (17)$$

<sup>2</sup>Исходная система уравнений (2)–(5) имеет бесконечно много стационарных решений. Например в [4] для описания течения, инициированного пучком малого радиуса, было взято решение:  $\vec{E} = 0, \vec{B} = 0, n_e = n_0 - n_b, n_e \vec{v} = -n_b \vec{u}$ , не удовлетворяющее уравнению (13).

### 3 Общая характеристика растущих возмущений

Релятивистский электронный пучок с плавным передним фронтом инициирует стационарное течение холодного электронного газа плазмы, в котором магнитное поле и скорость связаны соотношением (8). Как уже отмечалось выше, соответствующие этому течению функции

$$\vec{v}(\vec{r}_{\perp}), \quad n_e(\vec{r}_{\perp}), \quad \vec{E}(\vec{r}_{\perp}), \quad \vec{B}(\vec{r}_{\perp}), \quad (18)$$

удовлетворяют исходной системе уравнений (2)–(5). Линеаризуя эту систему на фоне стационарного решения (18), можно получить уравнения, описывающие эволюцию бесконечно малых возмущений.

Мы ограничимся исследованием растущих собственных мод, пропорциональных  $\exp(ik_z z - i\omega t)$  ( $\text{Im}\omega > 0$ ), считая для определенности число  $k_z \geq 0$ . В растущих модах возмущение магнитного поля также связано с возмущением скорости соотношением (8), что существенно упрощает рассмотрение этих мод. Помечая возмущения соответствующих величин с помощью штриха, с учетом равенства нулю стационарного эффективного поля получим из (7):

$$-i\omega \vec{B}'_{\perp} = -ik_z v \vec{B}'_{\perp}. \quad (19)$$

$$-i\omega \vec{B}'_{\parallel} = (\vec{B}'_{\perp} \nabla) \vec{v}. \quad (20)$$

Из этих уравнений следует, что для растущих собственных мод возмущение эффективного поля тождественно равно нулю, и в этих модах  $\vec{B}' = (c/e) \text{rot} \vec{p}'$ .

Из сказанного выше ясно, что растущие собственные возмущения могут быть описаны линеаризованным уравнением (11):

$$c^2 \text{rot rot}(\vec{\pi}) = \omega^2 \vec{\pi} + i\omega \nabla(v\pi_z) - [-i\omega \text{div} \vec{\pi} + \Delta(v\pi_z)] \vec{v} - \omega_p^2 (n_e/n_0) \vec{v}'. \quad (21)$$

здесь  $\vec{\pi} = \gamma^3 \vec{v}'_{\parallel} + \gamma \vec{v}'_{\perp}$  – возмущение величины  $\gamma \vec{v}$ , а невозмущенная плотность электронов плазмы  $n_e$  определяется формулой (10). В отсутствие пучка (при  $n_b \equiv 0, v_b \equiv 0, v \equiv 0$ ) из этого уравнения следует закон дисперсии ленгмюровских и электромагнитных волн, распространяющихся

в однородной плазме. Покажем, что растущие собственные моды для рассматриваемого течения обязательно являются коротковолновыми. Умножим уравнение (21) на  $\omega^* \vec{\pi}^*$ , проинтегрируем по пространственным координатам и возьмем мнимую часть от полученного равенства. В результате получим соотношение, выражающее собой общий баланс энергии для растущих собственных мод:

$$\text{Im} \omega \left[ c^2 \int d\vec{r} |\text{rot} \vec{\pi}|^2 + |\omega|^2 \int d\vec{r} |\vec{\pi}|^2 + \omega_p^2 \int d\vec{r} (\bar{n} |\pi_z|^2 + \hat{n} |\vec{\pi}_\perp|^2) \right] = \text{Im} \omega \int d\vec{r} |\nabla(v\pi_z)|^2, \quad (22)$$

здесь  $\bar{n} = (n_e/n_0)\gamma^{-3}$ ,  $\hat{n} = (n_e/n_0)\gamma^{-1}$ . Как видно из этого соотношения, источником энергии колебаний является течение электронного газа, так что при равной нулю скорости потока растущие моды отсутствуют. Имея в виду, что интеграл в правой части (22) равен

$$R = \int d\vec{r} v^2 \{ k_z^2 |\vec{\pi}|^2 + 2k_z \text{Im} [\vec{\pi} \times \text{rot} \vec{\pi}^*]_z + |(\text{rot} \vec{\pi})_\perp|^2 \} - \int d\vec{r} v \Delta_\perp v |\pi_z|^2, \quad (23)$$

из (22) нетрудно получить важные ограничения на диапазон изменения собственных чисел  $k_z$ ,  $\omega$  и поляризацию возмущений:

$$(\omega_p^2 + |\omega|^2) < k_z^2 v_m^2 \quad (24)$$

$$\int d\vec{r} |\text{rot} \vec{\pi}|^2 < (v_m/c)^2 k_z^2 \int d\vec{r} |\vec{\pi}|^2. \quad (25)$$

Здесь введено обозначение  $v_m = \max v$  и для простоты записи опущены множители, близкие к единице при  $v \ll c$ . Из неравенства (24) и оценок (15), (17) для скорости следует, в частности, что растущими могут быть только коротковолновые возмущения:

$$k_z a > \sim \left[ \left( \frac{\lambda_p}{a} \right)^{s-1} + \frac{a}{\lambda_p} \right] \frac{n_0}{n_b} \gg 1. \quad (26)$$

В Приложении 1 показано, что в правой части оценки завихренности возмущений множитель  $v^2/c^2$  следует заменить на  $v^4/c^4$ . Это означает, что растущие возмущения являются потенциальными, а магнитное поле в растущих модах пренебрежимо мало ( $\vec{B}' \propto \text{rot} \vec{\pi}'$ ).

## 4 Потенциальные возмущения

Положим  $\vec{\pi} = \nabla \Psi$  и возьмем дивергенцию от (21). Принимая во внимание, что с точностью до релятивистских поправок  $\text{div}[(n_e/n_0)\vec{v}'] \approx \text{div}(\bar{n}\nabla\Psi)$ , получим уравнение для потенциальных возмущений:

$$\text{div}[(\bar{n} - \bar{\Omega}^2)\nabla\Psi] = (\bar{\Omega}\Delta\bar{\Omega})\Psi, \quad (27)$$

здесь  $\bar{\Omega} = (\omega - k_z v)/\omega_p$ . После введения новой переменной

$$\psi = \sqrt{\bar{n} - \bar{\Omega}^2} \Psi \quad (28)$$

уравнение (27) приводится к виду, формально совпадающему с уравнением Шредингера:

$$k_z^{-2} \Delta_\perp \psi = (1 - U)\psi, \quad (29)$$

Потенциал  $U$  имеет резонансную структуру

$$U = \frac{f_+}{(\bar{n}^{1/2} + \bar{\Omega})^2} + \frac{f_-}{(\bar{n}^{1/2} - \bar{\Omega})^2} + \frac{f_0}{\bar{n} - \bar{\Omega}^2} \quad (30)$$

здесь

$$f_\pm = \frac{1}{4} k_z^{-2} (\nabla \bar{n}^{1/2} \pm \nabla \bar{\Omega})^2, \quad f_0 = f_+ + f_- - \frac{1}{2} k_z^{-2} \Delta \bar{n}. \quad (31)$$

При  $k_z$ , удовлетворяющих неравенству (26), все три функции  $f_+$ ,  $f_-$ ,  $f_0$  малы по абсолютной величине, и вместе с ними почти всюду мал потенциал  $U$ . С другой стороны, при наличии растущих собственных мод этот потенциал удовлетворяет неравенству:

$$\int d\vec{r} (\text{Re} U - 1) |\psi|^2 > 0. \quad (32)$$

Выполнение этого неравенства возможно только в том случае, когда существуют области пространства, где  $\text{Re} \bar{\Omega}$  близко к  $\bar{n}^{1/2}$ , а инкременты собственных мод малы:

$$\text{Im} \omega < \max(|f_+|^{1/2} + |f_-|^{1/2} + |f_0|) \omega_p. \quad (33)$$

Отметим, что в аксиально-симметричном случае во всех точках пространства

$$|\nabla_\perp v / \omega_p| \gg k_z^{-1} |\nabla_\perp \bar{n}|. \quad (34)$$

Исключение составляет лишь ось пучка, где обе стороны неравенства (34) обращаются в ноль. При этом отличие безразмерной плотности электронов от единицы совершенно не существенно и для потенциала можно использовать выражение:

$$U = \frac{|\nabla_{\perp} v / \omega_p|^2}{(1 - \Omega^2)^2}. \quad (35)$$

Рассматривая плоское течение, мы будем считать пучок не слишком узким:

$$a / \lambda_p \gg n_b / n_0, \quad (36)$$

и неравенство (34) также выполненным. В плоском случае скорость стационарного течения  $v$  и вместе с ней потенциал  $U$  зависят только от одной поперечной координаты  $x$ . Выделяя в "волновой" функции  $\psi$  зависимость от  $y$ :  $\psi \propto \exp(ik_y y)$ , вместо (29) будем иметь уравнение:

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} = [k_y^2 + k_z^2 (1 - U)] \psi. \quad (37)$$

Рассмотрим решение уравнения (37), имеющее при больших по абсолютной величине отрицательных значениях  $x$  асимптотику:

$$\psi|_{x \rightarrow -\infty} = e^{kx}, \quad k = \sqrt{k_y^2 + k_z^2}. \quad (38)$$

Справа от потенциальной ямы это решение имеет вид

$$\psi|_{x \rightarrow +\infty} = A_+ e^{kx} + A_- e^{-kx}. \quad (39)$$

При данных  $k_y, k_z$  спектр собственных мод определяется из условия:

$$A_+(\omega) = 0. \quad (40)$$

Для симметричного профиля скоростей с одним горбом (см. рис. 1a) условие резонанса  $|Re \omega - k_z v(x)| = \omega_p$  при фиксированном  $Re \omega$  и  $k_z$  выполняется, вообще говоря, в четырех точках:  $x = \pm x_{1*}, x = \pm x_{2*}$  ( $x_{2*} > x_{1*}$ ). Предположим вначале, что  $x_{1*}$  больше или порядка  $a$ , так что все резонансные точки находятся друг от друга на расстояниях много больше  $k_z^{-1}$ . Действуя в духе [6], рассмотрим уравнение (37) в комплексной плоскости переменной  $x$ . При аналитическом продолжении функции  $v(x)$  потенциал  $U(x)$  будет иметь только четыре полюса, соответствующие четырем резонансным точкам, в полосе шириной порядка  $a$ . Это

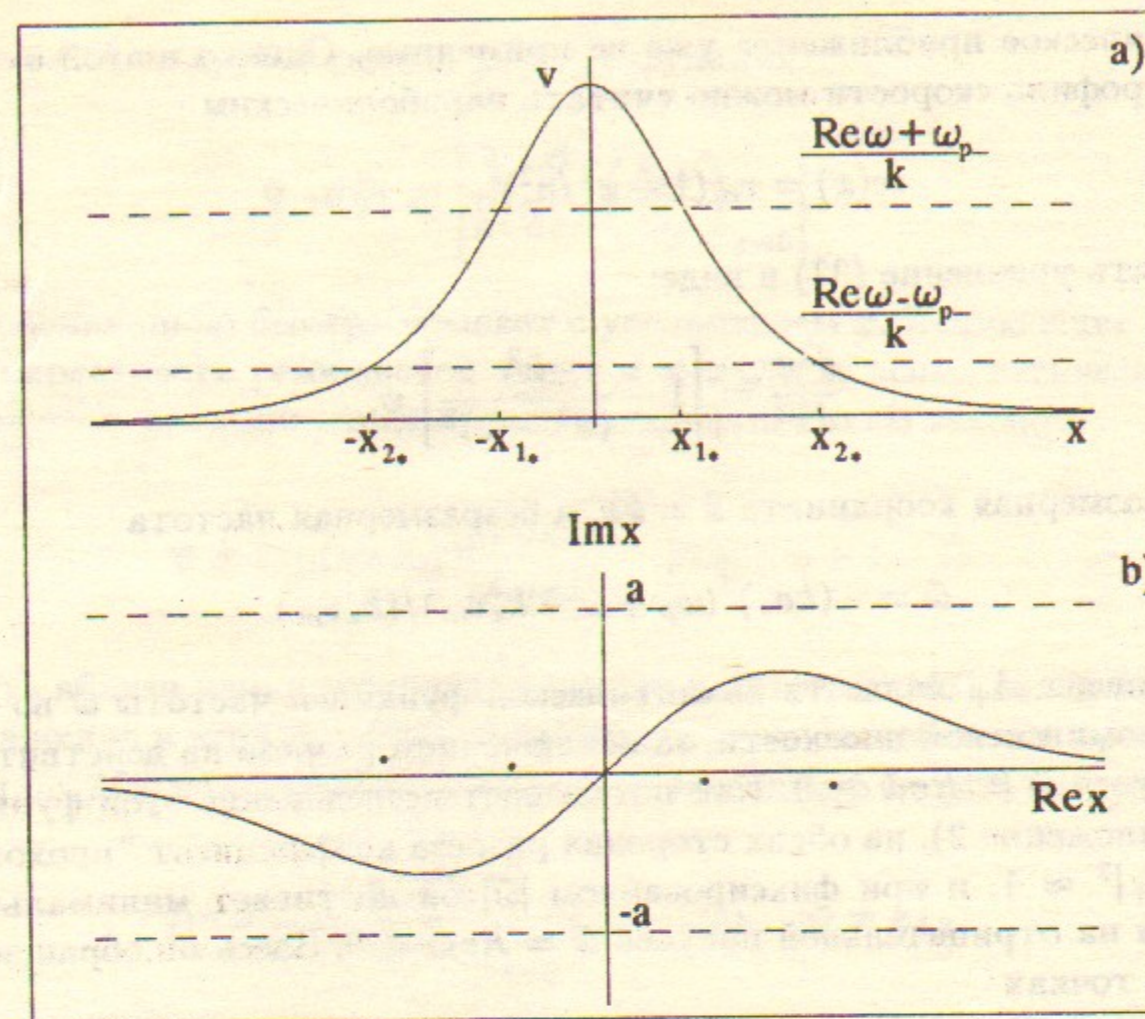


Рис. 1: Профиль скорости плоского течения (a) и путь в комплексной плоскости переменной  $x$ , во всех точках которого мал потенциал  $U$  (b).

позволяет произвести переход от отрицательных к положительным значениям  $x$  по пути, всюду проходящему вдали от точек сингулярности потенциала (см. рис. 1б). На этом пути  $|U| \ll 1$  и характерный пространственный масштаб изменения потенциала много больше величины  $k_z^{-1}$ . Используя известную формулу квазиклассического приближения для вычисления "волновой" функции, получим:

$$\psi \approx e^{kx}. \quad (41)$$

Следовательно, при рассматриваемых значениях  $Re \omega$  и  $k_z$  коэффициент  $A_+$  приближенно равен единице, и растущие собственные моды отсутствуют. Пусть теперь числа  $Re \omega, k_z$  таковы, что расстояние от начала координат до точки резонанса  $x_{1*} \sim k_z^{-1} \ll a$ . В этом случае путь, соединяющий отрицательные и положительные значения  $x$ , проходит между двумя близкими резонансными точками, так что в окрестности нуля ква-

зиклассическое приближение уже не применимо. Однако в этой окрестности профиль скорости можно считать параболическим

$$v(x) = v_m(1 - x^2/a_*^2), \quad a_* \sim a, \quad (42)$$

и записать уравнение (37) в виде:

$$\frac{d^2\psi}{d\tilde{x}^2} = \left[ 1 - \frac{\tilde{x}^2}{(\tilde{x}^2 - \tilde{\omega})^2} \right] \psi, \quad (43)$$

где безразмерная координата  $\tilde{x} = kx$ , а безразмерная частота

$$\tilde{\omega} = -(ka_*)^2(\omega_p + \omega - k_z v_m)/(k_z v_m). \quad (44)$$

Коэффициент  $A_+$  является аналитической функцией частоты  $\tilde{\omega}$  во всех точках комплексной плоскости, за исключением разреза на действительной полуоси  $\tilde{\omega} = Re \tilde{\omega} \geq 0$ . Как показывает исследование этой функции (см. Приложение 2), на обеих сторонах разреза коэффициент "прохождения"  $|A_+|^2 \approx 1$ , и при фиксированном  $|\tilde{\omega}|$  он достигает минимального значения на отрицательной полуоси  $\tilde{\omega} = Re \tilde{\omega} < 0$ . Здесь он обращается в нуль в точках

$$\tilde{\omega}_0 = -0.1, \quad \tilde{\omega}_n = a^+ Q^n, \quad n = 2, 4, 6, \dots, \quad (45)$$

$$\tilde{\omega}_n = a^- Q^{n-1}, \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (46)$$

Константы  $a^+$ ,  $a^-$ ,  $Q$  равны:

$$a^+ = -0.125\dots, \quad a^- = -0.00452\dots, \quad Q = \exp(-2\pi/\sqrt{3}).$$

Формула (45) описывает спектр симметричных нейтральных колебаний, а формула (46) - антисимметричных.

Рассматриваемое в рамках уравнения (37) с потенциалом (35), нейтральное колебание переходит в собственную моду с не равным нулю инкрементом. Чтобы получить выражение для  $Im \omega$ , умножим уравнение (27) для потенциальных возмущений на  $\Psi$  и проинтегрируем по  $x$ . Взяв мнимую часть от полученного равенства, будем иметь:

$$\int_0^\infty k dx \left[ 2Re \tilde{\omega} \left( \frac{1}{k^2} \left| \frac{d\Psi}{dx} \right| + |\Psi|^2 \right) - k^{-2} \Delta_\perp (Re \tilde{\omega}) |\Psi|^2 \right] = 0. \quad (47)$$

При  $x \sim k^{-1}$  по грубой оценке  $\psi \sim 1$ , а функция

$$\Psi \sim \Psi_0 \equiv \left| \frac{1}{k^2} \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{k_z v}{\omega_p} \right)_{x=0} \right|^{-1/2}$$

и экспоненциально быстро убывает с увеличением  $x$ . Исключение составляет окрестность резонансной точки  $x = x_{2*}$ , где асимптотическое поведение этой функции определяется логарифмическим законом:

$$\Psi \propto \exp(-kx_{2*}) \left| \frac{1}{k} \frac{d\eta}{dx} \right|^{-1/2} \ln \eta, \quad \eta \equiv 1 - \tilde{\omega}. \quad (48)$$

Область вблизи начала координат вносит в интеграл (47) вклад порядка  $|\Psi_0|^2$ , а вклад в этот интеграл окрестности резонансной точки пропорционален  $(\omega_p/Im \omega) \exp(-2kx_{2*})$ . С учетом сказанного из (47) следует:

$$Im \omega = C \left| \frac{k_z}{k^2} \frac{d^2 v}{dx^2} \right|_{x=0} \exp(-2\Phi), \quad \Phi = kx_{2*}. \quad (49)$$

Коэффициент  $C$  падает с увеличением номера моды. Для основной моды (с частотой  $\tilde{\omega}_0 = -0.10$ ) при больших значениях  $\Phi$  он может быть вычислен с помощью приближенной формулы:

$$C \approx 0.76 + \frac{17.5}{\Phi^2}. \quad (50)$$

Аналогично проводится рассмотрение устойчивости аксиально симметричного течения. Выделяя в волновой функции зависимость от азимутального угла,  $\psi \propto \exp(im\theta)$ , приведем уравнение (29) к виду:

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} = k_z^2 [1 + m^2/(k_z r)^2 - U] \psi, \quad (51)$$

здесь  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Зафиксируем азимутальное число  $m$  и для простоты рассуждений будем считать, что оно не слишком велико. Рассмотрим регулярное в начале координат решение уравнения (51):

$$\psi|_{r \rightarrow 0} = \frac{1}{m!} \left( \frac{r}{2} \right)^m. \quad (52)$$

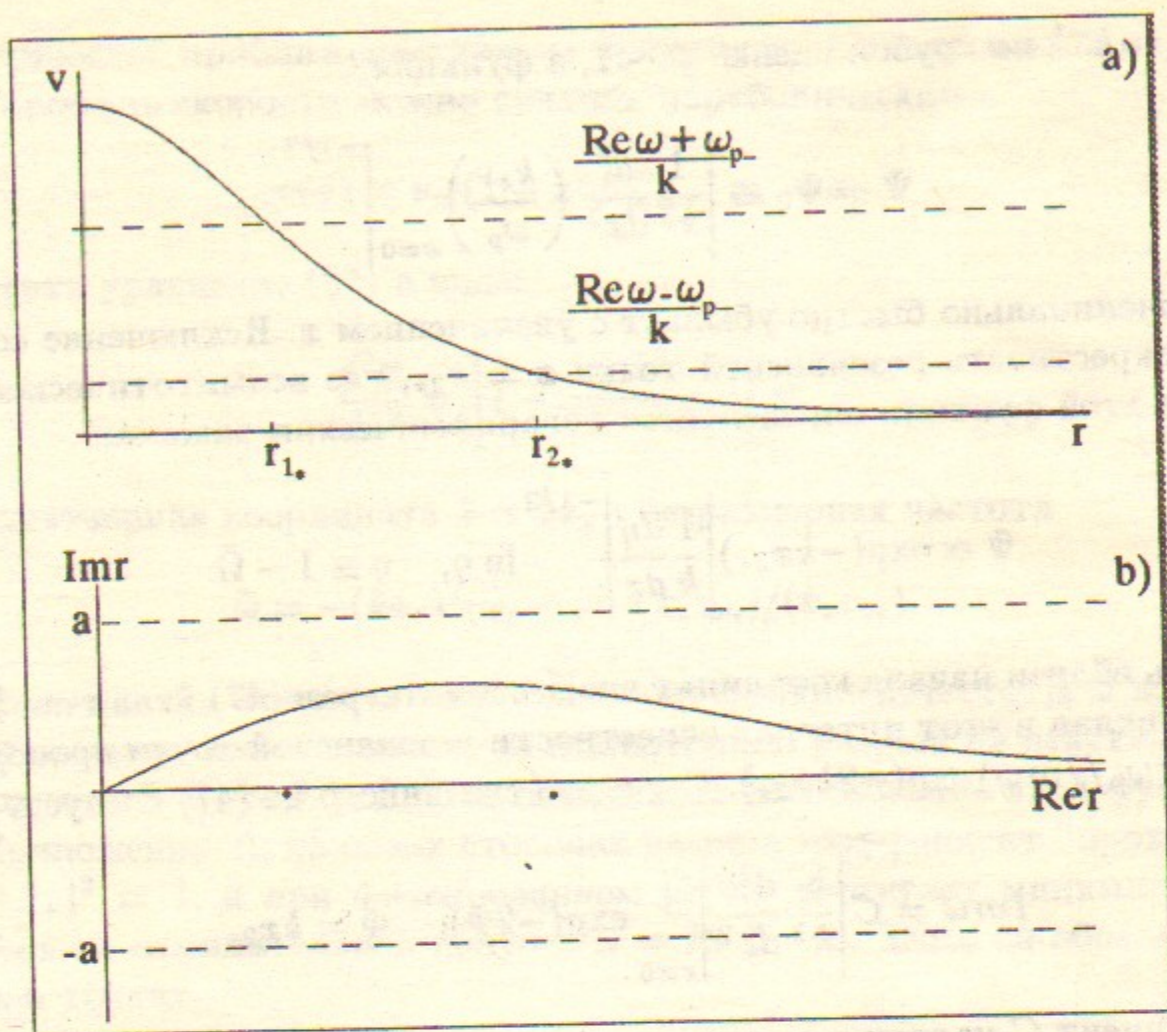


Рис. 2: Профиль скорости аксиально симметричного течения (а) и путь в комплексной плоскости переменной  $r$ , во всех точках которого мал потенциал  $U$  (б).

Вне потенциальной ямы это решение представимо в виде:

$$\psi|_{r \rightarrow \infty} = A_+ \left( \frac{1}{2\pi r} \right)^{1/2} e^r + A_- \left( \frac{1}{2\pi r} \right)^{1/2} e^{-r} \quad (53)$$

(здесь приведены только главные члены независимых асимптотик). Численные множители в (52), (53) выбраны таким образом, чтобы при потенциале  $U$ , равном нулю, коэффициент  $A_+$  был равен единице. Для течения с монотонным профилем (см. рис. 2а) условие резонанса  $|Re \omega - k_z v(r)| = \omega_p$  выполняется, вообще говоря, в двух точках:  $r = r_{1*}$ ,  $r = r_{2*}$  ( $r_{2*} > r_{1*}$ ). При  $r_{1*} \sim a$  резонансные точки можно обойти в комплексной плоскости переменной  $r$  по пути, изображенному на рисунке 2б. На этом пути потенциал  $U$  мал, и всюду, кроме малой окрестности начала координат, в квазиклассическом приближении выражение для волновой

функции имеет вид:

$$\psi \approx \left( \frac{1}{2\pi r} \right)^{1/2} e^r. \quad (54)$$

Следовательно, при рассматриваемых числах  $Re \omega$  и  $k_z$  коэффициент  $A_+$  близок к единице, и растущие собственные моды отсутствуют. Пусть теперь числа  $Re \omega$ ,  $k_z$  таковы, что расстояние от особой точки  $r = 0$  уравнения (51) до точки резонанса  $r_{1*} \sim k_z^{-1} \ll a$ . В окрестности начала координат квазиклассическое приближение не применимо, однако здесь профиль скорости можно считать параболическим

$$v(x) = v_m (1 - r^2/a_*^2), \quad a_* \sim a, \quad (55)$$

и записать уравнение (51) в виде:

$$\frac{d^2 \psi}{d\tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{d\psi}{d\tilde{r}} = \left[ 1 + \frac{m^2}{\tilde{r}^2} - \frac{\tilde{r}^2}{(\tilde{r}^2 - \tilde{\omega})^2} \right] \psi, \quad (56)$$

где безразмерная координата  $\tilde{r} = k_z r$ , а безразмерная частота определяется формулой (44), в которой  $k \rightarrow k_z$ . Как и раньше, коэффициент  $A_+$  является аналитической функцией частоты во всех точках комплексной плоскости, за исключением разреза на действительной полуоси  $\tilde{\omega} = Re \tilde{\omega} \geq 0$ . Свойства этой функции существенно зависят от значения азимутального числа  $m$  (см. Приложение 2). При  $m = 0$  на обеих сторонах разреза коэффициент "прохождения"  $|A_+|^2 \approx 1$ , и при фиксированном  $|\tilde{\omega}|$  он достигает минимального значения на отрицательной полуоси  $\tilde{\omega} = Re \tilde{\omega} < 0$ . Здесь он обращается в нуль в точках

$$\tilde{\omega}_n = aQ^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (57)$$

$$a = -0.042\dots, \quad Q = \exp(-2\pi).$$

При  $m \geq 1$  коэффициент "прохождения"  $|A_+|^2$  также достигает минимального значения (при фиксированном  $|\tilde{\omega}|$ ) на отрицательной полуоси  $\tilde{\omega} = Re \tilde{\omega} < 0$ . Однако наличие центробежной добавки к потенциалу  $m^2/\tilde{r}^2$  приводит к вытеснению связанных состояний при отрицательных значениях  $\tilde{\omega}$  и отсутствию нейтральных колебаний<sup>3</sup>. С ростом  $m$  эта добавка растет, так что при фиксированном  $\tilde{\omega} \neq 0$  коэффициент  $A_+ \rightarrow 1$  при  $m \rightarrow \infty$ .

<sup>3</sup>Формально это видно из того, что при отрицательных значениях  $\tilde{\omega}$  выражение в квадратных скобках в правой части (56) больше нуля для всех азимутальных чисел  $m \geq 1$ .



Также, как и в плоском случае, рассматриваемые в рамках уравнения (51) нейтральные колебания с азимутальным числом  $m = 0$  трансформируются в растущие собственные моды с неравным нулю инкрементом. Проводя аналогичные рассуждения, получим

$$Im\omega = C \left| \frac{1}{k_z} \frac{d^2 v}{dr^2} \right|_{r=0} \exp(-2\Phi), \quad \Phi = k_z r_{2*}. \quad (58)$$

Коэффициент  $C$  падает с увеличением номера моды. Для основной моды (с частотой  $\tilde{\omega}_0 = -0.042$ ) при больших значениях  $\Phi$  он может быть вычислен с помощью приближенной формулы:

$$C \approx 0.5 + \frac{9.5}{\Phi^2}. \quad (59)$$

Резонансные условия

$$Re\omega - k_z v_m + \omega_p \approx 0, \quad (60)$$

$$Re\omega - k_z v(r_{2*}) - \omega_p \approx 0, \quad (61)$$

позволяют определить "фазу"  $\Phi$ , соответствующую максимальному инкременту:

$$\Phi = 2 \min \left[ \frac{r_{2*}/\lambda_p}{|v_m - v(r_{2*})|/c} \right]. \quad (62)$$

Интересно выяснить, как зависит максимальный инкремент от радиуса пучка  $a$ . При  $a \ll \lambda_p$  характерный профиль скорости изображен на рис. 3. В точке максимума инкремента

$$r_{2*} \sim a, \quad \frac{v_m - v(r_{2*})}{c} \sim \left( \frac{a}{\lambda_p} \right)^2 \frac{n_b}{n_0}, \quad \Phi \sim \frac{\lambda_p n_0}{a n_b}.$$

При  $a \gg \lambda_p$  для одномасштабного профиля

$$r_{2*} \sim a, \quad \frac{v_m - v(r_{2*})}{c} \sim \frac{n_b}{n_0}, \quad \Phi \sim \frac{a n_0}{\lambda_p n_b}.$$

Следовательно, в общем случае для максимального инкремента имеет место оценка:

$$\frac{Im\omega}{\omega_p} \propto \frac{\exp(-2\Phi)}{\Phi^2}, \quad \Phi \sim \left( \frac{\lambda_p}{a} + \frac{a}{\lambda_p} \right) \frac{n_0}{n_b}. \quad (63)$$

Как видно из этой формулы, при фиксированном отношении  $n_b/n_0$  наиболее неустойчивы течения, возникающие при инъекции пучков с радиусом  $a \sim \lambda_p$ .

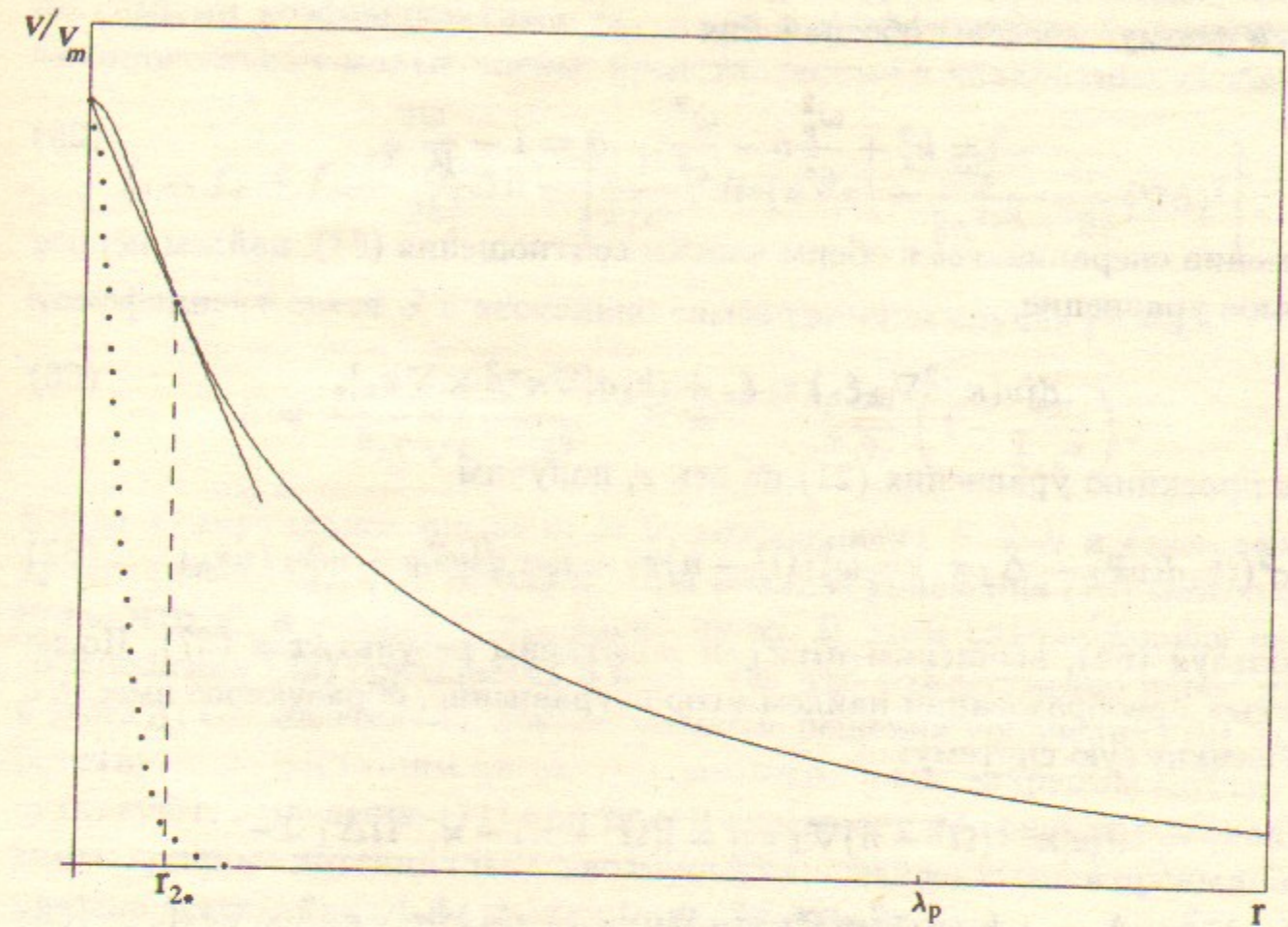


Рис. 3: Профиль скорости течения, инициированного аксиально симметричным пучком малого радиуса. Зависимость плотности пучка от радиуса изображена пунктирной линией.

## 5 Учет непотенциальности

Электростатические волны, локализованные в окрестности максимума скорости  $v$ , оказываются неустойчивыми при выполнении двух резонансных условий, и в потенциальном приближении их инкременты экспоненциально малы (при  $n_b \ll n_0$ ). Учет степенных поправок, связанных с непотенциальностью возмущений, в принципе может изменить порядок величины этих инкрементов. Обсуждению этого вопроса и посвящен настоящий раздел работы.

Векторное уравнение (21) можно свести к двум уравнениям на функции  $\pi_z, \xi_z = (\text{rot} \vec{\pi})_z$ . Проецируя это уравнение на плоскость, перпендикулярную оси  $z$ , нетрудно получить равенство

$$\vec{\pi}_\perp = \kappa^{-2} \vec{b} \times \nabla_\perp \xi_z - ik_z \kappa^{-2} \nabla_\perp (\sigma \pi_z), \quad (64)$$

здесь  $\vec{b}$  – единичный вектор, направленный вдоль оси  $z$ , и для сокращения записи формул введены обозначения

$$\kappa^2 = k_z^2 + \frac{\omega_p^2}{c^2} \hat{n} - \frac{\omega^2}{c^2}, \quad \sigma = 1 - \frac{\omega v}{k_z c^2}. \quad (65)$$

Применив операцию *rot* к обеим частям соотношения (64), найдем первое искомое уравнение

$$\text{div}(\kappa^{-2} \nabla_{\perp} \xi_z) = \xi_z + ik_z \sigma [\nabla \kappa^{-2} \times \nabla \pi_z]_z \quad (66)$$

Взяв проекцию уравнения (21) на ось  $z$ , получим

$$c^2 (ik_z \text{div} \vec{\pi}_{\perp} - \Delta_{\perp} \pi_z) = \omega_p^2 (\bar{\Omega}^2 - \bar{n}) \pi_z + i\omega v \text{div} \vec{\pi}_{\perp} - v \Delta_{\perp} (v \pi_z). \quad (67)$$

Используя (64), вычислим  $\text{div} \vec{\pi}_{\perp}$  и подставим результат в (67). После простых преобразований найдем второе уравнение, образующее вместе с (66) замкнутую систему:

$$\text{div}[\kappa^{-2} (\bar{\Omega}^2 - \bar{n}) \nabla_{\perp} \pi_z] = [(\bar{\Omega}^2 - \bar{n}) - \kappa^{-2} \bar{\Omega} \Delta_{\perp} \bar{\Omega} - (c\kappa)^{-2} \hat{n} v \Delta_{\perp} v + k_z \omega \omega_p^{-2} \sigma (\nabla \kappa^{-2} \cdot \nabla v)] \pi_z + ik_z \lambda_p^2 \sigma [\nabla \kappa^{-2} \times \nabla \xi_z]_z \quad (68)$$

После введения новых переменных<sup>4</sup>

$$\tilde{\psi} = \frac{mc}{e\kappa} (\text{rot} \vec{\pi})_z, \quad \psi = \frac{im\omega_p}{e\kappa} (\bar{n} - \bar{\Omega}^2)^{1/2} \pi_z. \quad (69)$$

уравнения, описывающие распространение волн в движущейся плазме, приводятся к каноническому виду [7]:

$$k_z^{-2} \Delta_{\perp} \tilde{\psi} = (1 - \tilde{U}) \tilde{\psi} + iS\psi. \quad (70)$$

$$k_z^{-2} \Delta_{\perp} \psi = (1 - \tilde{U} - U) \psi + iS\tilde{\psi}, \quad (71)$$

При выполнении неравенства (24) абсолютная величина потенциала  $\tilde{U}$  много меньше единицы во всех точках пространства:

$$\tilde{U} = \frac{\omega^2}{k_z^2 c^2} - \frac{\omega_p^2}{k_z^2 c^2} \left\{ \hat{n} - \frac{1}{2\kappa^2} \Delta \hat{n} + \frac{3\omega_p^2}{4\kappa^4 c^2} (\nabla \hat{n})^2 \right\}. \quad (72)$$

<sup>4</sup> Нормировочные множители в (69) выбраны таким образом, чтобы связь между "волновыми" функциями и возмущениями электромагнитного поля имела вид:  $\tilde{\psi} = \kappa^{-1} B'_z$ ,  $\psi = \kappa^{-1} (1 - \bar{n}/\bar{\Omega}^2)^{1/2} E'_z$ .

Потенциал  $U$  вычисляется при помощи прежней формулы (30) с теми же самыми коэффициентами  $f_+$ ,  $f_-$ , а в коэффициенте  $f_0$  появляются дополнительные малые члены, представленные в квадратных скобках:

$$f_0 = f_+ + f_- - \frac{1}{2k_z^2} \Delta \bar{n} - \left[ \frac{1}{k_z^2 c^2} v \text{div}(\hat{n} \nabla v) - \frac{\omega_p^2}{2\kappa^2 c^2} \frac{1}{\gamma^2 k_z^2} (\nabla \hat{n})^2 \right].$$

Коэффициент связи  $S$  в аксиально симметричном случае равен:

$$S = -\frac{m}{k_z r} \frac{K}{\sqrt{\bar{n} - \bar{\Omega}^2}}, \quad K = \frac{\omega_p}{k_z c} \frac{k_z}{\kappa^2} \frac{\partial \bar{n}}{\partial r} \left( 1 - \frac{\omega v}{k_z c^2} \right). \quad (73)$$

Когда азимутальное число  $m = 0$ , коэффициент  $S \equiv 0$  и связь между уравнениями (70), (71) исчезает. При анализе уравнения (70) можно считать, что  $\psi$ , а значит и  $\pi_z$ , равно нулю. В этом случае правая часть соотношения (22) обращается в ноль, так что тождественно равен нулю и  $(\text{rot} \vec{\pi})_z$ . Следовательно, локализованные решения уравнения (70), соответствующие растущим аксиально симметричным вихревым модам, отсутствуют. Уравнение (71) при  $m = 0$  описывает по существу аксиально симметричные потенциальные возмущения, с найденными в предыдущем разделе экспоненциально малыми инкрементами.

При  $m \geq 1$  коэффициент  $S$  уже не равен нулю. Он обращается в бесконечность в тех же точках комплексной плоскости, что и потенциал  $U$ . Однако низкая степень сингулярности коэффициента  $S$  и его малость вне окрестности особых точек ( $K \propto (v/c)(n_b/n_0)(1/k_z a)!$ ) позволяют использовать теорию возмущений для учета связи между уравнениями (70), (71). Проводя все рассуждения предыдущего раздела, можно прийти к прежнему выводу о том, что возмущения с азимутальным числом  $m \geq 1$  не оказывают влияния на устойчивость течения электронной компоненты плазмы.

## 6 Заключение

Течение электронной компоненты плазмы, инициированное жестким пучком заряженных частиц малой плотности, является неустойчивым. При инъекции аксиально симметричного пучка неустойчивые возмущения представляют собой аксиально симметричные электростатические колебания, локализованные вблизи оси пучка, где скорость течения максимальна. Инкременты растущих собственных мод экспоненциально малы

и при фиксированном отношении  $n_b/n_0$  максимальны для пучков с радиусом  $a \sim c/\omega_p$ .

Отметим, что неустойчивость течения электронной компоненты плазмы, возникающего при инжекции жесткого пучка заряженных частиц, развивается только при одновременном выполнении двух резонансных условий (60), (61). Выполнение первого условия обеспечивает существование собственных мод, а второго — рост их амплитуды. Этим рассмотренная неустойчивость качественно отличается от так называемой "slipping"-неустойчивости, описываемой уравнением Рэлея [8] и имеющей относительно большие инкременты  $Im \omega \sim (v/c)\omega_p$  [4].

Авторы благодарны И.А. Котельникову и Ю.А. Цидулко за стимулирующие дискуссии.

### Приложение 1

Уточним оценку для  $\vec{\xi} = rot \vec{\pi}$ . Умножив (66) на  $\xi_z^*$  и проинтегрировав по пространственным координатам, получим

$$\int d\vec{r} (\kappa^{-2} |\nabla_{\perp} \xi_z|^2 + |\xi_z|^2) = -ik_z \int d\vec{r} \sigma \xi_z^* [\nabla \kappa^{-2} \times \nabla \pi_z]_z. \quad (74)$$

Имея в виду, что в аксиально симметричном (или плоском) случае

$$\xi_z^* [\nabla \kappa^{-2} \times \nabla \pi_z]_z = -\pi_z [\nabla \kappa^{-2} \times \nabla \xi_z^*]_z, \quad (75)$$

с помощью неравенства Коши-Буняковского можно получить оценку для правой части (74)

$$\left| \int d\vec{r} \sigma \xi_z^* [\nabla \kappa^{-2} \times \nabla \pi_z]_z \right|^2 \leq \max |\sigma|^2 \int d\vec{r} |\nabla_{\perp} \kappa^{-2}|^2 |\pi_z|^2 \cdot \int d\vec{r} |\nabla_{\perp} \xi_z|^2 \quad (76)$$

При выполнении неравенства (24) имеют место равенства:

$$Re \kappa^{-2} = [1 + O(v^2/c^2)] k_z^{-2}, \quad \max |\sigma|^2 = 1 + O(v^2/c^2). \quad (77)$$

Взяв реальную часть (74), с учетом (76), (77) получим следующую оценку для  $\xi_z$ :

$$\int d\vec{r} (k_z^{-2} |\nabla_{\perp} \xi_z|^2 + |\xi_z|^2) \leq \frac{\omega_p^4}{k_z^4 c^4} \int d\vec{r} |\nabla_{\perp} \hat{n}|^2 |\pi_z|^2, \quad (78)$$

здесь для упрощения записи в правой части опущен численный множитель  $[1 + O(v^2/c^2)]$ .

Чтобы получить оценку для  $\vec{\xi}$ , выразим из (64)  $\nabla_{\perp} \pi_z$  и подставим в определение завихренности:  $\vec{\xi}_{\perp} = [\vec{b} \times (ik_z \vec{\pi}_{\perp} - \nabla_{\perp} \pi_z)]$ . В результате получим

$$ik_z \sigma \vec{\xi}_{\perp} = \nabla_{\perp} \xi_z - \frac{1}{c^2} (\omega \Omega - \omega_p^2 \bar{n}) [\vec{b} \times \vec{\pi}_{\perp}] - \frac{i\omega}{c^2} [\vec{b} \times \nabla_{\perp} v] \pi_z. \quad (79)$$

С учетом (24), (78) отсюда следует искомая оценка:

$$\int d\vec{r} |\vec{\xi}|^2 \leq O(v^4/c^4) \int d\vec{r} k_z^2 |\vec{\pi}|^2, \quad (80)$$

### Приложение 2

Исследуем аналитические свойства коэффициента  $A_+(\tilde{\omega})$ . При больших значениях  $|\tilde{\omega}|$  переход от отрицательных к положительным значениям  $\tilde{x}$  может быть произведен по такому пути, где всюду применимо квазиклассическое приближение. Коэффициент  $A_+$  при этом оказывается равным

$$A_+ = e^I, \quad I = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \left( 1 - \frac{\tilde{x}^2}{(\tilde{x}^2 - \tilde{\omega})^2} \right)^{1/2} - 1 \right] d\tilde{x} = \quad (81)$$

$$- \frac{\pi}{4\sqrt{-\tilde{\omega}}} \left[ 1 - \frac{1}{32\tilde{\omega}} + \frac{3}{(32\tilde{\omega})^2} - \dots \right],$$

здесь и ниже вне разреза  $|\arg(-\tilde{\omega})| < \pi$ . Сравнение с результатами численного интегрирования уравнения (43) показывает, что формула (81) имеет точность выше одного процента уже при  $|\tilde{\omega}| \geq 1/2$ . Обратим внимание, что на обеих сторонах разреза (то есть при положительных действительных значениях  $\tilde{\omega}$ ), интеграл  $I$  является чисто мнимой величиной, так что здесь  $|A_+| = 1$ .

Аналитическое выражение для коэффициента  $A_+$  может быть найдено и при малых значениях  $|\tilde{\omega}|$ .

Найдем вначале решение уравнения (43) при отрицательных значениях  $x$ . При  $|x| \gg |\tilde{\omega}|$  можно пренебречь отличием частоты  $\tilde{\omega}$  от нуля, так что функция  $\psi$  при этих значениях  $x$  удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d^2 \psi}{d\tilde{x}^2} = \left( 1 - \frac{1}{\tilde{x}^2} \right) \psi. \quad (82)$$

Решение этого уравнения с асимптотикой

$$\psi|_{x \rightarrow -\infty} = e^x \quad (83)$$

выражается через функцию Ганкеля:

$$\psi = i\sqrt{\frac{\pi}{2}}|x| \exp(-\nu\pi/2) H_{i\nu}^{(1)}(i|x|), \quad \nu = \sqrt{3}/2. \quad (84)$$

При  $|\tilde{\omega}| \ll |x| \ll 1$  можно найти асимптотику  $\psi$ , используя разложение функции Ганкеля вблизи нуля:

$$\psi = -\sqrt{\frac{2|x|}{\nu \sinh(\nu\pi)}} \sin[\nu \ln(-x/2) - \Gamma_0], \quad (85)$$

здесь константа  $\Gamma_0$  выражается через аргумент гамма-функции:  $\Gamma_0 = \arg[\Gamma(1+i\nu)] = -0.3070$ .

С другой стороны, при  $|x| \ll 1$  в уравнении (43) потенциал велик по сравнению с единицей, так что при этих значениях  $x$  функция  $\psi$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2\psi}{d\tilde{x}^2} = -\frac{\tilde{x}^2}{(\tilde{x}^2 - \tilde{\omega})^2} \psi, \quad (86)$$

решение которого выражается через гипергеометрические функции. Используя известные соотношения между рядами Куммера [9], можно продолжить решение (85) в область положительных значений  $x$ . При  $|\tilde{\omega}| \ll x \ll 1$  оно имеет вид:

$$\psi = A_+ \sqrt{\frac{2x \sinh(\nu\pi)}{\nu}} \cos[\nu \ln(x/2) - \Gamma_0] + A \sqrt{x} \sin[\nu \ln(x/2) - \Gamma_0], \quad (87)$$

Явный вид константы  $A$  для нас не существенно, а

$$A_+ = -p_1 p_2 \left( \frac{1}{2} e^{iq} + \frac{1}{2} e^{-iq} - \frac{p_1}{p_2} \right), \quad q \equiv \frac{\sqrt{3}}{2} \ln(-\tilde{\omega}) - \alpha_0. \quad (88)$$

Здесь числовые константы равны

$$p_1 = \frac{1}{\sinh(\nu\pi)} = 0.132..., \quad p_2 = \frac{\cosh(\nu\pi)}{\sinh(\nu\pi)} = 1.008..., \quad (89)$$

$$\alpha_0 = \arg \left[ 2\pi i \frac{\Gamma(1+2i\nu)\Gamma(2i\nu)}{\Gamma^4(1/2+i\nu)} \right] + 2\Gamma_0 = 3.047... \quad (90)$$

При  $x \gg |\tilde{\omega}|$  искомое решение выражается через функции Ганкеля и имеет асимптотику

$$\psi|_{x \rightarrow +\infty} = A_+ e^x + A_- e^{-x} \quad (91)$$

с коэффициентом  $A_+$ , определяемым формулой (88). Формула (88) имеет двухпроцентную точность при  $|\tilde{\omega}| \leq 0.05$ . На разрезе

$$A_+ \approx e^{\pm iq}, \quad q \equiv \frac{\sqrt{3}}{2} \ln |\tilde{\omega}| - \alpha_0 \quad (92)$$

(знак "+" - относится к верхней стороне разреза, а "-" - к нижней), так что здесь  $|A_+| \approx 1$ . Равенство нулю коэффициента  $A_+$  определяет спектр нейтральных колебаний (45), (46), кроме значения  $\tilde{\omega}_0$ , которое приходится находить численно. Численно также исследовалась зависимость  $A_+(\tilde{\omega})$  в диапазоне  $0.05 < |\tilde{\omega}| < 0.5$ , где происходит плавная сшивка формул (81) и (88).

## Литература

1. Dawson J.M. Plasma Accelerators and Lenses. Plasma Physics and Controlled Fusion, 1992, v.34, N 13, p.2039-2046.
2. Chen P., Su J.J. et al. Energy Transfer in a Plasma Wake-Field Accelerator. Phys. Rev. Lett., 1986, v.56, N 12, p.1252-1255.
3. Котельников И.А., Худик В.Н. Равновесие плазмы при инжекции жесткого пучка заряженных частиц. Препринт ИЯФ 95-53, Новосибирск: ИЯФ, 1995.
4. Лотов К.В., Рюттов Д.Д. Плазменные неустойчивости в схеме кильватерного ускорения. Препринт ИЯФ 94-32, Новосибирск, ИЯФ, 1994.
5. Рухадзе А.А., Богданкевич Л.С., Росинский С.Е., Рухлин В.Г. Физика сильноточных релятивистских электронных пучков, стр.50. М.: Атомиздат, 1980.
6. Тимофеев А.В. Резонансные эффекты в колебаниях неоднородных течений сплошных сред. В сб.: Вопросы теории плазмы (Под редакцией Б.Б. Кадомцева). /М.: Энергоатомиздат, 1989, вып. 17, с.157.
7. Заславский Г.М., Мейтлиц В.П., Филоненко Н.Н. Взаимодействие волн в неоднородных средах. Новосибирск, Наука, 1982.
8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988.
9. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, М.: Наука, 1965.