

Государственный научный центр Российской Федерации

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

им. Г.И. Будкера СО РАН

В.В. Вечеславов

ФОРМИРОВАНИЕ ХАОТИЧЕСКОГО СЛОЯ
НЕЛИНЕЙНОГО РЕЗОНАНСА
ДВУХЧАСТОТНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ

ИЯФ 96-24

НОВОСИБИРСК

1996

**Формирование хаотического слоя нелинейного
резонанса двухчастотным возмущением**

V.V. Vecheslavov

Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера СО РАН
630090 Новосибирск, Россия

Аннотация

На примере маятника с двухчастотным возмущением детально обсуждается описанный в работе [3] новый эффект — появление низкочастотных вторичных гармоник в сепаратрисном отображении системы. Отыскиваются области параметров возмущения, где именно эти гармоники дают основной вклад в формирование хаотического слоя основного резонанса. Приводятся результаты сравнения аналитического и численного методов определения амплитуд вторичных гармоник.

V.V. Vecheslavov

**Chaotic layer of a nonlinear resonance
driven by two-frequencies perturbation**

Budker Institute of Nuclear Physics SB RAS
630090 Novosibirsk, Russia

Abstract

Dynamics of the pendulum driven by two different high-frequencies is considered. New phenomenon of the appearance of low frequency secondary harmonics in the separatrix map of the system recently discovered in [3], is studied in details. Regions of perturbation parameters are found where the secondary harmonics give the main contribution in the formation of a chaotic layer near the separatrix.

e-mail: vecheslavov@inp.nsk.su

Многие проблемы взаимодействия нелинейных резонансов и образования динамического хаоса в гамильтоновых системах приводят к необходимости исследования модели, которую можно интерпретировать как маятник (основной резонанс, вблизи которого выбираются начальные состояния системы), подверженный действию квазипериодического в общем случае возмущения [1,2,3]:

$$H(x, p, t) = \frac{p^2}{2} + \cos x + V(x, t), \quad (1)$$

$$V(x, t) = \varepsilon_n \cos(a_n x - \Omega_n t), \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (2)$$

здесь N – полное число возмущающих резонансов и предполагается суммирование по индексу n . Амплитуды гармоник возмущения $V(x, t)$ будем считать малыми $\varepsilon_n \ll 1$, а частоты (по отношению к принятой за единицу частоте малых колебаний маятника) высокими $\Omega_n \gg 1$.

Известно, что под влиянием возмущения сепаратриса основного резонанса разрушается и на ее месте образуется неустойчивая область, получившая название хаотического слоя [4]. Полный размер этой области является весьма важной для приложений характеристикой динамического хаоса [1,2]. Отметим, в частности, что скорость развития универсальной неустойчивости движения в многомерных гамильтоновых системах – диффузия Арнольда – определяется квадратом ширины хаотического слоя ведущего резонанса [5].

Прямое измерение этой ширины может быть выполнено двумя способами. Первый – численное интегрирование уравнений движения системы, находящейся внутри исследуемой части (вращение или колебание фазы) хаотического слоя и отыскание минимального периода движения T_{min} (период движения T есть интервал времени между соседними моментами t_π прохождения устойчивой фазы $x = \pi$; это либо период вращения, либо полупериод колебания). Ширина слоя определяется затем по соотношению $w_s(T_{min}) = 32 \exp(-T_{min})$ [1]; здесь и далее $w = (p^2/2 + \cos x - 1)$ – безразмерное отклонение от невозмущенной сепаратрисы по энергии.

Второй способ – численный или теоретический анализ отвечающего за формирование слоя так называемого “сепаратрисного отображения”. Это отображение, введенное в работе [4], приближенно описывает динамическое состояние движущейся

вблизи сепаратрисы основного резонанса системы в моменты прохождения ею положения устойчивого равновесия и для многочастотного ($N > 1$) возмущения (2) может быть записано в виде [1]:

$$\bar{w} = w + W_l \sin(\Omega_l t_\pi), \quad \bar{t}_\pi = t_\pi + \ln \frac{32}{|w|}, \quad l = 1, 2 \dots L, \quad (3)$$

где t_π – моменты прохождения системой положения устойчивого равновесия $x = \pi$, L – полное число гармоник и предполагается суммирование по индексу l . Ширина слоя $w_s \approx w_{max}$ определяется максимальным отклонением от невозмущенной сепаратрисы по энергии в процессе итераций отображения (3).

Этот способ приводит к желаемому результату значительно (как правило, в сотни раз) быстрее по сравнению с вычислением периодов движения, но для его реализации необходимо уметь вычислять амплитуды всех существенных гармоник сепаратрисного отображения квазипериодической гамильтоновой системы. На этом пути возникли неожиданные трудности: оказалось (подробности в [3]), что для многочастотного ($N > 1$) возмущения (2) механизм формирования хаотического слоя качественно отличается от хорошо изученного к настоящему времени механизма для случая одной частоты [1].

Численные эксперименты показали, что в спектре отображения (3) в общем случае присутствуют не только все первичные (явно содержащиеся в гамильтониане $H(x, p, t)$) частоты, но и их комбинации и всегда имеет место неравенство $L > N$ [3]. Гармоники различных комбинационных частот появляются во всех порядках по малому параметру возмущения, начиная со второго. Однако, величины некоторых формально присутствующих в (3) слагаемых могут быть пренебрежимо малы и поэтому на практике, как правило, число существенных гармоник сепаратрисного отображения оказывается невелико.

С вычислением вкладов в сепаратрисное отображение (3) от первичных возмущений (2) проблем не возникает поскольку их амплитуды ε_n и частоты Ω_n заданы. Напомним, что возмущение вида

$$V(x, t) = \varepsilon \cos(mx/2 - \Omega t), \quad (4)$$

(m - параметр) порождает в сепаратрисном отображении (3) гармонику той же частоты Ω с амплитудой

$$W_{MA}(\Omega > 0) = \varepsilon \Omega A_m(\Omega),$$

$$W_{MA}(\Omega < 0) = W_{MA}(|\Omega|)(-1)^m e^{-\pi|\Omega|}, \quad (5)$$

где $A_m(\Omega)$ интеграл Мельникова-Арнольда [1]. Формула (5) справедлива для любых, в том числе и меньших единицы значений частоты $|\Omega|$. Если возмущение не содержит других частот, то теоретическая ширина хаотического слоя определяется простым соотношением :

$$w_{st} \approx \Omega |W_{MA}(\Omega)| \left(1 + \frac{4\xi}{\Omega}\right), \quad (6)$$

где параметр $0 \leq \xi \leq 1$ зависит от конкретных условий перекрытия резонансов на краю слоя (в частности, от величины амплитуды $|W_{MA}(\Omega)|$) [1]. Из формулы (6) следует, что ее практическое применение ограничено дополнительным условием $|\Omega| \gg 1$ и мы будем использовать ее в основном для оценок по порядку величины, принимая $\xi = 0.5$.

Положение с комбинационными гармониками возмущения осложняется тем, что их амплитуды заранее неизвестны. Вместе с тем, из-за экспоненциальной зависимости от частоты даже очень слабые, но низкочастотные комбинационные возмущения могут играть в образовании динамического хаоса главную роль и фактически полностью определять формирование хаотического слоя (см. ниже). Строгая теория здесь пока отсутствует, однако общий подход к проблеме и приближенные аналитические соотношения для определения амплитуд вторичных (возникающих во втором порядке) комбинационных гармоник предложены недавно в работе [3]. Ниже приводятся результаты численной проверки этих соотношений и следствий из них, а также показывается их важность для построения сепаратрисных отображений и отыскания размеров хаотических областей многочастотных гамильтоновых систем. В настоящей работе мы ограничимся самым простым нетривиальным случаем двухчастотного возмущения, рассмотрение которого выявляет основные характерные для проблемы в целом черты. Подробное изучение взаимодействия с тремя различными частотами будет проведено отдельно (один из примеров такого рода имеется в [3]).

Допустим, что возмущение системы (1) содержит две высокочастотные первичные гармоники

$$V(x, t) = \varepsilon_1 \cos(x - \Omega_1 t) + \varepsilon_2 \cos(x - \Omega_2 t) \quad (7)$$

и введем обозначения:

$$\Delta\Omega_+ = \Omega_1 + \Omega_2 \quad \Delta\Omega_- = \Omega_2 - \Omega_1$$

. Из результатов работы [3] следует, что в возмущении появятся вторичные гармоники с частотами $\Delta\Omega_+$, $\Delta\Omega_-$ и мы рассмотрим каждую из них в предположении, что система движется в верхней ($p > 0$) части хаотического слоя в режиме вращения фазы.

Вторичная гармоника возмущения на сумме частот имеет вид:

$$\varepsilon_+ \cos(2x - \Delta\Omega_+ t), \quad \varepsilon_+ = -\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{2} \left[\frac{1}{\Omega_1^2} + \frac{1}{\Omega_2^2} \right]. \quad (8)$$

Она порождает в сепаратрисном отображении (3) гармонику той же частоты с амплитудой (5):

$$W_+(\Delta\Omega_+ > 0) = \frac{4\pi}{3} a_+ \varepsilon_1 \varepsilon_2 \left[\frac{1}{\Omega_1^2} + \frac{1}{\Omega_2^2} \right] \frac{e^{\pi \Delta\Omega_+ / 2}}{\text{sh}(\pi \Delta\Omega_+)} \Delta\Omega_+^2 (\Delta\Omega_+^2 - 2), \quad (9)$$

$$W_+(\Delta\Omega_+ < 0) = W_+(|\Delta\Omega_+|) e^{-\pi |\Delta\Omega_+|}$$

Учитывая приближенный характер этой формулы, мы ввели в нее дополнительный множитель a_+ , который определяется подгонкой наименьшими квадратами к результатам численного счета.

Соотношение (9) проверялось путем численного построения сепаратрисного отображения (3) системы (1), (7) в довольно широком диапазоне параметров возмущения (метод счета описан в [3]) и на рис.1 представлены основные результаты. Видно, что формула (9) отлично передает качественное поведение вторичной гармоники на сумме частот, хотя природа подгоночного множителя a_+ неясна. Сравнивая амплитуду этой гармоники с найденной по формуле (5) амплитудой $W_{MA}(\Omega_1)$ главной первичной гармоники возмущения, можно найти области параметров, где $W_+(\Delta\Omega_+) \gg W_{MA}(\Omega_1)$ и где именно вторичная гармоника, являясь единственной существенной компонентой сепаратрисного отображения (3), полностью отвечает за формирование хаотического слоя. В частности, для параметров рис.1 имеются две такие области, задаваемые неравенствами $0.3 \lesssim \Delta\Omega_+ \lesssim 1.3$ и $\Delta\Omega_+ \gtrsim 1.6$.

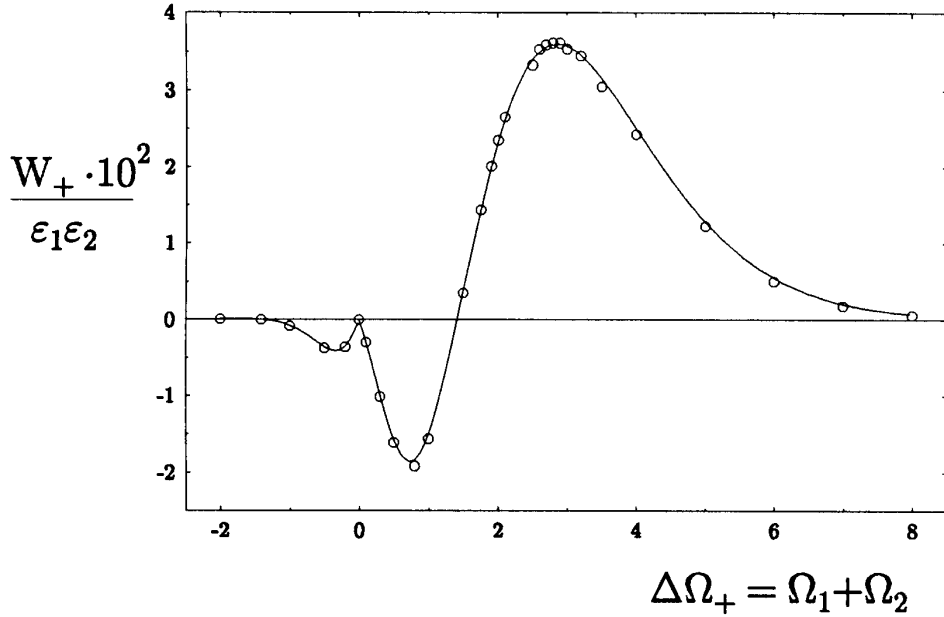


Рис. 1: Приведенная амплитуда вторичной гармоники частоты $\Delta\Omega_+$ сепаратрисного отображения (3). Возмущение имеет вид (7) с параметрами: $\Omega_1 = var$; $\Omega_2 = -10.0 = const$; $0.01 \leq \epsilon_1 = \epsilon_2 \leq 0.5$. Кружками представлены результаты численного интегрирования системы (1) при движении в верхней ($p > 0$) части хаотического слоя в режиме вращения фазы. Сплошная линия построена по формуле (9) при значении подгоночного множителя $a_+ = 0.473$.

Для выяснения ряда деталей рассмотрим подробнее конкретную ситуацию со следующим набором параметров возмущения (7):

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0.075, \quad \Omega_1 = 13.0, \quad \Omega_2 = -10.0. \quad (10)$$

Численное интегрирование системы (1), (7), (10) и спектральный анализ показали, что амплитуда вторичной гармоник сепаратрисного отображения частоты $\Delta\Omega_+ = 3.0$ равна $W_+(3.0) \approx 2.01 \cdot 10^{-4}$ (см.рис.1), в то время как вклад от гармоник первичных частот составил менее четверти процента этой величины (теоретические амплитуды (5) первичных гармоник в исследуемой части слоя $W_{MA}(13.0) \approx 4.31 \cdot 10^{-7}$ и $W_{MA}(-10.0) \approx -6.45 \cdot 10^{-19}$). Таким образом, гамильтоновой системе (1), (7), (10) отвечает практически одночастотное сепаратрисное отображение вида

$$\begin{aligned} \bar{w} &= w + W_+ \sin(\tau_\pi), \quad \bar{\tau}_\pi = \tau_\pi + \Delta\Omega_+ \ln \frac{32}{|\bar{w}|}, \\ W_+ &= 2.01 \cdot 10^{-4}, \quad \Delta\Omega_+ = 3.0, \end{aligned} \quad (11)$$

где введена новая переменная $\tau_\pi = \Delta\Omega_+ t_\pi \bmod(2\pi)$.

Мы столкнулись с одной из характерных для многочастотных возмущений ситуаций: непрерывная гамильтонова система (1), (7), (10) не содержит в явном виде частоту $\Delta\Omega_+ = 3.0$, а в отвечающем этой системе сепаратрисном отображении (11) фактически отсутствуют гармоник первичных частот Ω_1 и Ω_1 (они породили мощную вторичную гармонику и на этом их участие в формировании хаоса закончилось). Спектры этих конструкций совершенно различны и тем не менее они правильно определяют главную характеристику исследуемой части хаотического слоя – его ширину.

В этом примере хаос образуется так, как будто бы первичных гармоник вообще нет, а есть одна вторичная. Что произойдет, если мы на самом деле заменим исходное двухчастотное возмущение (7), (10) на одночастотное с параметрами вторичной гармоник ? Для ответа рассмотрим вновь систему (1) с возмущением точно того вида (8), какой имеет вторичная гармоник :

$$V(x, t) = \varepsilon \cos(2x - \Omega t), \quad \varepsilon = 2.11 \cdot 10^{-5} \quad \Omega = \Delta\Omega_+ = 3.0. \quad (12)$$

Амплитуда возмущения ε в (12) с помощью формулы (5) подобрана так, чтобы движение системы (1), (12) в верхней вращательной части хаотического слоя описывалось тем же самым сепаратрисным отображением (11).

Таким образом, имеются две различные гамильтоновы системы (1), (7), (10) и (1), (12), которым отвечает одно и то же сепаратрисное отображение (11). Определение ширины слоя по минимальному периоду дает для обеих систем одно и то же значение $w_s(T_{min}) \approx 1.30 \cdot 10^{-3}$, что разумно согласуется с величиной $w_s \approx w_{max} \approx 1.45 \cdot 10^{-3}$, найденной итерациями общего для них отображения (11). Поскольку обе системы формируют вращательные сверху ($p > 0$) части слоя одинаковой ширины, то в этом смысле их следует признать эквивалентными, хотя в любой другой области фазового пространства (и в других частях слоя) эти две динамические модели могут не иметь ничего общего. Наличие этой эквивалентности и доказывает, на наш взгляд, что вторичные (а в общем случае и более высокие комбинационные) гармоник – реальные объекты, активно участвующие в образовании динамического хаоса.

На разности частот возникают две симметричных вторичных гармоники :

$$\varepsilon_- [\cos(x - \Delta\Omega_- t) - \cos(x + \Delta\Omega_- t)], \quad \varepsilon_- = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{4} \left| \left[\frac{1}{\Omega_1^2} - \frac{1}{\Omega_2^2} \right] \right|. \quad (13)$$

Они порождают в сепаратрисном отображении (3) гармонику частоты $\Delta\Omega_-$ с амплитудой:

$$W_-(\Delta\Omega_-) = -\pi a_- \varepsilon_1 \varepsilon_2 \left| \left[\frac{1}{\Omega_1^2} - \frac{1}{\Omega_2^2} \right] \right| \frac{e^{\pi|\Delta\Omega_-|/2}}{\text{sh}(\pi|\Delta\Omega_-|)} (1 - e^{-\pi|\Delta\Omega_-|}) = \\ -\frac{\pi a_- \varepsilon_1 \varepsilon_2}{\text{ch}(\pi\Delta\Omega_-/2)} \left| \left[\frac{1}{\Omega_1^2} - \frac{1}{\Omega_2^2} \right] \right|. \quad (14)$$

И в эту формулу мы также ввели подгоночный множитель a_- .

Результаты численного счета и их сравнение с формулой (14) даны на рис.2. Качественное поведение передано несколько хуже, чем для случая суммы частот, но и здесь можно выделить область $W_-(\Delta\Omega_-) \gg W_{MA}(\Omega_1), W_{MA}(\Omega_2)$, где вторичная гармоника определяет размер хаотического слоя. Для параметров рис.2 эта область определяется неравенством $\Delta\Omega_- = \Omega_2 - \Omega_1 \geq 0.5$.

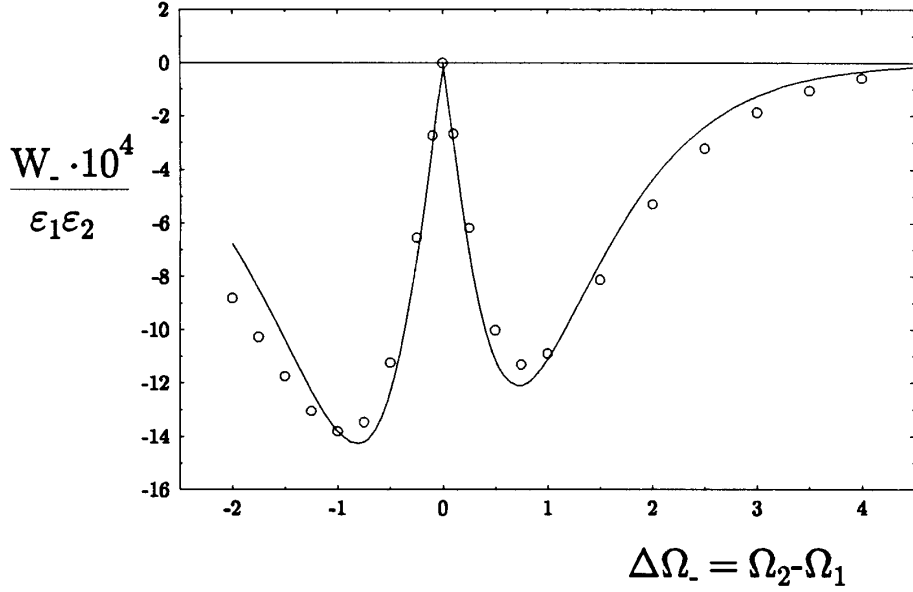


Рис. 2: Приведенная амплитуда вторичной гармоники частоты $\Delta\Omega_-$ сепаратрисного отображения (3). Возмущение имеет вид (7) с параметрами: $\Omega_1 = 14.0 = const$; $\Omega_2 = var$; $0.01 \leq \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \leq 0.5$. Кружками представлены результаты численного интегрирования системы (1) при движении в верхней ($p > 0$) части хаотического слоя в режиме вращения фазы. Сплошная линия построена по формуле (14) при значении подгоночного множителя $a_- = 1.35$.

Из рассмотренных выше ситуаций может возникнуть впечатление, что комбинационные частоты работают только на усиление хаоса. Наш последний пример показывает, что это не так. Пусть возмущение (2) системы (1) содержит единственную гармонику:

$$V(x, t) = \varepsilon_1 \cos(2x - \Omega_1 t), \quad \varepsilon_1 = 2.0 \cdot 10^{-5}, \quad \Omega_1 = 4.0. \quad (15)$$

Применение формул (5), (6) дает для амплитуды сепаратрисной гармоники и ширины исследуемой части (вращение фазы при $p > 0$) хаотического слоя значения $W_{MA}(4.0) = 1.402 \cdot 10^{-4}$ и $w_{st} = 8.43 \cdot 10^{-4}$ соответственно, что вполне согласуется с результатами численного счета $W(4.0) = 1.404 \cdot 10^{-4}$ и $w_s = 8.62 \cdot 10^{-4}$. Добавим к возмущению (15) еще две гармоники, после чего оно примет вид:

$$V(x, t) = \varepsilon_1 \cos(2x - \Omega_1 t) + \varepsilon_2 \cos(x - \Omega_2 t) + \varepsilon_3 \cos(x - \Omega_3 t),$$

$$\varepsilon_1 = 2.0 \cdot 10^{-5}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0.075549, \quad \Omega_1 = 4.0,$$

$$\Omega_2 = 14.0 \quad \Omega_3 = -10.0, \quad (16)$$

Если вновь использовать формулу (5) в отношении каждого из слагаемых (16), то никаких серьезных изменений в сепаратрисном отображении по сравнению со случаем (15) не предвидится, поскольку собственные вклады от добавленных гармоник $W_{MA}(14.0) = 1.047 \cdot 10^{-7}$ и $W_{MA}(-10.0) = -6.49 \cdot 10^{-19}$ на фоне амплитуды первой гармоники $W(4.0) = 1.404 \cdot 10^{-4}$ пренебрежимо малы. Этот прогноз кардинально противоречит результатам численного счета, согласно которому сепаратрисное отображение, хотя и осталось по-прежнему одночастотным, перестроилось на совершенно другую частоту $\Omega_2 = 14.0$. Измеренные значения амплитуды $W(14.0) = 1.046 \cdot 10^{-7}$ и ширины слоя $w_s = 1.47 \cdot 10^{-6}$ упали почти на три порядка, но хорошо согласуются с теоретическими значениями $W_{MA}(14.0) = 1.047 \cdot 10^{-7}$ и $w_{st} = 1.67 \cdot 10^{-6}$ одночастотной теории.

Объяснение этого эффекта простое: используя соотношения (5), (8), (9), мы настроили параметры второго и третьего слагаемых в (16) так, чтобы возникающая на сумме их частот $\Delta\Omega = \Omega_2 + \Omega_3 = \Omega_1$ вторичная гармоника полностью “убила” первичное (на первый взгляд – главное) возмущение частоты Ω_1 . В результате основная роль в формировании исследуемой части хаотического слоя досталась второй (на первый взгляд – несущественной) гармонике возмущения самой высокой частоты $\Omega_2 = 14.0$.

Автор благодарен Б.В.Чирикову за обсуждения и советы. Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 95-01047).

Литература

- [1] *B.V. Chirikov*. Phys. Reports, **52** (1979) 263.
- [2] *А. Лихтенберг и М. Либерман*. Регулярная и стохастическая динамика, М: Мир, 1984.
- [3] *В.В. Вечеславов*. Движение в окрестности нелинейного резонанса при высокочастотных возмущениях, предварительно: ЖЭТФ, т.109, вып.5 (1996).
- [4] *Г.М. Заславский и Н.Н. Филоенко*. ЖЭТФ **54** (1968), с.1590.
- [5] *B.V. Chirikov and V.V. Vecheslavov*. КАМ Integrability, in: Analysis etc, (Eds. P. Rabinowitz and E. Zehnder), Academic Press, 1990, p.219.

V.V. Vecheslavov

**Формирование хаотического слоя нелинейного резонанса
двухчастотным возмущением**

V.V. Vecheslavov

**Chaotic layer of a nonlinear resonance
driven by two-frequencies perturbation**

ИЯФ 96-24

Ответственный за выпуск С.Г. Попов

Работа поступила 18.04. 1996 г.

Сдано в набор 19.04.1996 г.

Подписано в печать 19.04.1996 г.

Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 0.7 печ.л., 0.6 уч.-изд.л.

Тираж 170 экз. Бесплатно. Заказ № 24

Обработано на IBM PC и отпечатано на
ротапринте ГНЦ РФ "ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН",
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.