

Государственный научный центр Российской Федерации  
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ им.Г.И. Будкера СО РАН

В.Н. Худик, К.В. Лотов

ИОННЫЕ КАНАЛЫ ПРИ ИНЖЕКЦИИ  
РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА  
ВДОЛЬ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

ИЯФ 96-61

НОВОСИБИРСК

1996

**Ионные каналы при инъекции  
релятивистского электронного пучка  
вдоль магнитного поля**

*В.Н. Худик, К.В. Лотов*

Институт ядерной физики им. Г.И.Будкера СО РАН  
630090 Новосибирск, Россия

**Аннотация**

Дано описание ионных каналов, образующихся при распространении релятивистских электронных пучков в разреженной плазме вдоль внешнего магнитного поля  $B_0$ . Определена зависимость радиуса канала от величины  $B_0$  и показано, что продольное магнитное поле в канале всегда меньше внешнего поля. Найдены основные характеристики плазмы: поле скоростей электронов и распределение их плотности в пространстве вне канала.

**Ion channels produced by  
ultrarelativistic electron beams  
in magnetized plasma**

*V.N. Khudik and K.V. Lotov*

Budker Institute of Nuclear Physics SB RAS  
630090 Novosibirsk, Russia

**Abstract**

Ion channels produced by ultrarelativistic electron beams in underdense magnetized plasmas are studied assuming the beam is injected along the external magnetic field  $B_0$ . The dependence of the channel width on  $B_0$  is found. The longitudinal magnetic field inside the channel is shown to be always less than the unperturbed external field. Plasma behavior outside the channel is determined, and the radial dependences of plasma electron density and velocity are analyzed.

---

## 1 Введение

Ионные каналы образуются в плазме при распространении пучков отрицательно заряженных частиц. Когда плотность такого пучка велика, электроны плазмы полностью выталкиваются из области избыточного отрицательного заряда, в то время как тяжелые ионы практически остаются на месте. Возникшая полость, в которой отрицательно заряженные частицы пучка окружены только ионами плазмы, и является ионным каналом. Вне ионного канала пучок индуцирует обратный плазменный ток. В отсутствии внешнего магнитного поля параметры ионного канала определяются только током пучка. Когда этот ток мал, создаваемое пучком собственное магнитное поле также мало, и радиус канала можно найти, потребовав обращение в ноль на границе канала электрического поля (то есть из условия зарядовой нейтральности канала). Когда же ток пучка велик, равновесие плазмы является следствием баланса как электрических, так и магнитных сил [1, 2]. Как показало аналитическое и численное исследование [3], образование каналов без колебаний его границ происходит при достаточно плавном переднем фронте пучка.

В настоящей работе мы исследуем ионные каналы, считая, что плазма находится в постоянном внешнем магнитном поле  $\vec{B}_0$ . Мы ограничимся рассмотрением случая, когда ось пучка параллельна этому полю. Оставляя в стороне вопросы, связанные с динамикой самого пучка [4] или с конкретным видом его равновесной конфигурации [5, 6], мы определим равновесное распределение плотности электронов плазмы и вычислим параметры канала в зависимости от величины внешнего поля. Перечислим основные допущения, принятые в работе:

- (а) Предполагается, что все электроны пучка в процессе взаимодействия с плазмой движутся с одной и той же неизменной скоростью  $\vec{v}_b$ , параллельной оси пучка, то есть пучок считается "жестким" [7]. Такое предположение является разумным для ультрарелятивистских электронных пучков с малым поперечным разбросом скоростей.
- (б) Ионы плазмы считаются неподвижными, а их плотность  $n_0$  постоянной.
- (в) Для описания электронов плазмы используются уравнения идеальной релятивистской гидродинамики. Следовательно, считается, что характерные направленные скорости электронов много больше их тепловых скоростей, и эффекты рассеяния электронов на ионах плазмы пренебрежимо малы.

Содержание работы следующим образом распределено по разделам. В разделе 2 даются основные уравнения релятивистской электронной гидродинамики и проводится их частичное интегрирование для жестких пучков, движущихся вдоль внешнего магнитного поля. В разделе 3 исследуется не усложненный геометрическими факторами случай плоских каналов. Вначале описываются каналы при малом токе пучка и произвольном внешнем магнитном поле. Далее рассматриваются случаи слабого и сильного магнитного поля (при этом на протекающий через ионный канал ток пучка не накладывается никаких ограничений). В разделе 4 исследуются цилиндрические каналы. Рассматриваются те же самые предельные случаи, что и в разделе 3, и, наконец, в разделе 5 приведено необходимое условие образования ионных каналов.

## 2 Основные уравнения

Рассмотрим жесткий пучок, распространяющийся вдоль магнитного поля, все частицы которого имеют одну и ту же скорость  $\vec{v}_b$  ( $\vec{v}_b \parallel \vec{B}_0$ ). Выбирая направление этой скорости в качестве оси  $z$ , мы можем плотность такого пучка записать в виде заданной функции координат и времени:

$$n_b = n_b(x, y, z - v_b t). \quad (1)$$

В ультрарелятивистском пределе скорость  $v_b$  мало отличается от скорости света  $c$ , и в нашей задаче это отличие совершенно несущественно. В дальнейшем мы будем считать, что функция  $n_b$  принимает максимальное значение на оси пучка и монотонно падает при удалении от оси  $z$ .

В гидродинамическом приближении для описания холодных электронов плазмы можно использовать представление об электронной "жидкости". Течение такой жидкости в электромагнитном поле задается уравнением

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{p} = -e \vec{E} - \frac{e}{c} [\vec{v} \times \vec{B}], \quad (2)$$

здесь  $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$  — импульс электрона,  $\gamma \equiv (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$  — релятивистский фактор, а  $m$  и  $-e$  — соответственно масса и заряд электрона. Из динамического уравнения (2) и уравнения Максвелла,

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3)$$

следует уравнение в замороженности:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathcal{H}} = \text{rot}[\vec{v} \times \vec{\mathcal{H}}], \quad \vec{\mathcal{H}} = \vec{B} - (c/e) \text{rot} \vec{p}. \quad (4)$$

До инъекции пучка электроны плазмы покоились, а магнитное поле было равно  $\vec{B}_0$ . Следовательно, в начальный момент времени

$$\vec{\mathcal{H}}|_{t=0} = \vec{B}_0. \quad (5)$$

Заметим, что при ламинарном течении плазмы, все величины вместе с плотностью пучка зависят только от разности  $\vec{r} - \vec{v}_b t$  ( $\vec{v}_b \approx (0, 0, c)$ ). Такая зависимость позволяет найти поле  $\vec{\mathcal{H}}$  в явном виде в произвольный момент времени  $t$ .

Рассмотрим два электрона, которые до инжекции пучка находились на одной силовой линии на малом расстоянии друг от друга, и их положение в пространстве определялось радиус-векторами  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \delta\vec{r}_0$  ( $\delta\vec{r}_0 = (0, 0, \delta z_0)$ ) соответственно. В процессе инжекции пучка положение электронов меняется и через время  $t$  смещение первого электрона будет равно  $\vec{\zeta}(t)$ . Второй электрон в точности повторяет движение первого с задержкой на время  $\delta t = \delta z_0/c$ . Поэтому расстояние между этими электронами в рассматриваемый момент времени определяется формулой:

$$\delta\vec{r} = \delta\vec{r}_0 + \vec{\zeta}(t - \delta t) - \vec{\zeta}(t) = \delta\vec{r}_0 - \vec{v}\delta z_0/c. \quad (6)$$

Уравнение вмерзженности (4) означает, что величина  $\vec{\mathcal{H}}/n_e$  меняется с течением времени пропорционально расстоянию  $\delta\vec{r}$  между электронами [8]. С учетом (5), (6) получим

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{n_e}{n_0} \left( \vec{B}_0 - B_0 \frac{\vec{v}}{c} \right). \quad (7)$$

Таким образом, магнитное поле выражается через скорость и плотность электронов плазмы:

$$\vec{B} = \frac{c}{e} \text{rot}\vec{p} + \frac{n_e}{n_0} \left( \vec{B}_0 - B_0 \frac{\vec{v}}{c} \right). \quad (8)$$

Мы ограничимся рассмотрением электронных пучков с большим временем нарастания переднего фронта. В этом случае индуцированное течение можно считать стационарным и записать уравнение (2) в виде:

$$\vec{E} = -\frac{m}{e} (\vec{v}\nabla) \gamma \vec{v} - \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{B}], \quad (9)$$

Уравнения (8), (9) следует дополнить двумя уравнениями Максвелла:

$$\text{rot}\vec{B} = -\frac{4\pi}{c} (en_e\vec{v} + en_b\vec{v}_b), \quad (10)$$

$$\text{div}\vec{E} = 4\pi e(n_0 - n_b - n_e). \quad (11)$$

В отличие от общего случая [5], полученная система уравнений (8) - (11) для определения стационарного течения электронной "жидкости" в стационарных электрическом и магнитном полях является замкнутой.

При достаточно большой плотности пучка электроны плазмы полностью выталкиваются из области, занятой пучком. В образовавшемся ионном канале магнитное поле создается током пучка:

$$\text{div}\vec{B} = 0, \quad \text{rot}\vec{B} = -\frac{4\pi}{c} en_b\vec{v}_b, \quad (12)$$

а электрическое поле – зарядом пучка и неподвижного ионного фона канала:

$$\text{div}\vec{E} = 4\pi e(n_0 - n_b), \quad \text{rot}\vec{E} = 0. \quad (13)$$

В плоском и аксиально симметричном случаях магнитное и электрическое поля вычисляются с помощью элементарных формул магнитостатики и электростатики; их значения на границе ионного канала должны использоваться в качестве граничных условий при решении уравнений (8) – к (11).

В рассматриваемой системе сохраняется поток магнитного поля через плоскость, перпендикулярную оси пучка. В самом деле, при отсутствии электромагнитного излучения

поле  $\vec{E}$  быстро падает при удалении от оси пучка и интегрирование уравнения (3) в плоскости  $x - y$  приводит к равенству:

$$\int dx dy (B_z - B_0) = 0. \quad (14)$$

Проведя аналогичное интегрирование уравнения (10), можно убедиться, что в каждом поперечном сечении ток пучка полностью компенсируется обратным током, протекающим в плазме:

$$\int dx dy (n_e v_z + n_b v_b) = 0. \quad (15)$$

Точно так же из (11) следует общая зарядовая нейтральность пучка и плазмы в каждом поперечном сечении:

$$\int dx dy (n_0 - n_e - n_b) = 0. \quad (16)$$

Основное внимание в нашей работе будет уделено пучкам, все частицы которых находятся внутри ионного канала. Характеристики таких каналов не зависят от конфигурации пучка и полностью определяются двумя физическими величинами: силой тока пучка и напряженностью внешнего магнитного тока.

### 3 Плоские ионные каналы

Мы начнем анализ системы уравнений (8) – (9) с наиболее простого случая, не усложненного геометрическими факторами – со случая плоских каналов. Будем считать, что в плазме вдоль оси  $z$  распространяется пучок, плотность которого зависит только от координаты  $x$ . Введем обозначения

$$b_0 = \frac{B_0}{4\pi e n_0 \lambda_p}, \quad \lambda_p = \frac{c}{\omega_p}, \quad \omega_p = \left( \frac{4\pi e^2 n_0}{m} \right)^{1/2}, \quad (17)$$

и новые безразмерные переменные

$$\begin{aligned} \vec{b} &= \frac{\vec{B}}{4\pi e n_0 \lambda_p}, & \vec{e} &= \frac{\vec{E}}{4\pi e n_0 \lambda_p}, & \vec{u} &= \frac{\vec{v}}{c}, \\ \tilde{n} &= \frac{n_e}{n_0}, & \tilde{n}_b &= \frac{n_b}{n_0}, & \tilde{x} &= \frac{x}{\lambda_p}. \end{aligned} \quad (18)$$

В рассматриваемом случае  $x$  – компонента скорости и эта же компонента магнитного поля равны нулю и уравнения (8) и (10) в переменных (18) можно записать в виде:

$$b_y = -(\gamma u_z)' - b_0 \tilde{n} u_y, \quad (19)$$

$$b_z = (\gamma u_y)' + b_0 \tilde{n} - b_0 \tilde{n} u_z, \quad (20)$$

$$b_y' = -\tilde{n} u_z - \tilde{n}_b, \quad (21)$$

$$\delta b_z' = \tilde{n} u_y, \quad (22)$$

где штрих означает дифференцирование по координате  $\tilde{x}$ . Из равенства нулю действующей на электроны плазмы силы Лоренца находится электрическое поле:

$$\vec{e} = -[\vec{u} \times \vec{b}]. \quad (23)$$

Используя уравнения (19)–(22), дивергенцию электрического поля можно выразить через плотность  $\tilde{n}$ , скорость  $\vec{u}$  и магнитное поле  $\vec{b}$ . Подставив результат в уравнение (11) и произведя простую перегруппировку членов, получим

$$\tilde{n} = \frac{\gamma - \gamma(1 - u_z)\tilde{n}_b + b_z^2 + b_y^2 - \epsilon_x^2}{\gamma^{-1} + (1 - u_z)b_0b_z + u_yb_0(\epsilon_x - b_y)}. \quad (24)$$

При протекании тока пучка в пределах ионного канала плотность  $\tilde{n}_b$  в уравнениях (21), (24) следует считать равной нулю. Система уравнений, определяющих магнитное поле вне канала и скорости электронов плазмы, должна быть дополнена граничными условиями. Проинтегрируем уравнение (20) по области вне канала. Используя интегральные равенства (14)–(16) и учитывая то обстоятельство, что  $z$ -компонента магнитного поля не меняется внутри канала, найдем следующее условие:

$$\gamma_* u_{y*} = b_{z*} \tilde{x}_*, \quad (25)$$

где  $\tilde{x}_*$  – полуширина ионного канала, измеренная в единицах  $\lambda_p$ ,  $\gamma_* = \gamma|_{\tilde{x}=\tilde{x}_*}$ ,  $u_{y*} = u_y|_{\tilde{x}=\tilde{x}_*}$  и  $b_{z*} = b_z|_{\tilde{x}=\tilde{x}_*}$  (всюду ниже символ ”\*” относится к параметрам плазмы и полям вблизи границы канала). Определяя из (12) компоненту  $b_y$  магнитного поля на границе канала, получим второе граничное условие:

$$b_{y*} = -\tilde{I}_b, \quad (26)$$

где  $\tilde{I}_b$  – ток пучка на единицу длины в направлении  $y$ , измеряемый в единицах  $I_c = 2en_0c\lambda_p$ :

$$\tilde{I}_b = \frac{1}{I_c} \int_{-x_*}^{x_*} dx en_b c.$$

Решая уравнения (13), найдем компоненту  $E_x$  электрического поля на границе канала. После этого с учетом равенства (23) нетрудно получить еще одно условие:

$$\gamma_*(1 - u_{z*})\tilde{I}_b = \tilde{x}_*(\gamma_* + b_{z*}^2), \quad (27)$$

При заданных значениях  $\tilde{I}_b$ ,  $b_0$  общее решение уравнений (19)–(24) с граничными условиями (25)–(27) зависит от двух параметров, в качестве которых можно взять  $u_{y*}$ ,  $u_{z*}$ . На больших расстояниях от канала электроны плазмы покоятся и должны выполняться следующие условия:

$$u_y(\tilde{x}; u_{y*}, u_{z*}, \tilde{I}_b, b_0)|_{\tilde{x} \rightarrow \infty} = 0, \quad (28)$$

$$u_z(\tilde{x}; u_{y*}, u_{z*}, \tilde{I}_b, b_0)|_{\tilde{x} \rightarrow \infty} = 0, \quad (29)$$

определяющие  $u_{y*}$ ,  $u_{z*}$  как функции величин  $\tilde{I}_b$ ,  $b_0$ .

Анализ системы нелинейных уравнений (19) – (24) мы начнем со случая, когда величина тока, протекающего через канал, мала.

## А. Плоские каналы при малом токе пучка

В системе, состоящей из пучка, плазмы и внешнего магнитного поля, пучок, грубо говоря, является возмущающим плазму фактором, а внешнее магнитное поле  $\vec{B}_0$  – стабилизирующим фактором. Поэтому естественно предположить, что при  $\tilde{I}_b \ll 1$  индуцированное течение плазмы является нерелятивистским, а возмущение магнитного поля мало:

$$|\vec{u}| \ll 1, \quad b_{\perp}^2 \ll 1 + b_0^2, \quad |\delta b_z| \ll 1, \quad (30)$$

здесь  $b_{\perp}^2 = b_x^2 + b_y^2$ , а  $\delta b_z = b_z - b_0$ . При этих предположениях плотность электронов плазмы вне канала, вычисленная с помощью формулы (24), оказывается почти постоянной величиной,  $\tilde{n} \approx 1$  ( $n_e \approx n_0$ ). Малая поправка к единице равна:

$$\delta \tilde{n} = \tilde{n} - 1 \approx \frac{b_0}{1 + b_0^2} (\delta b_z + b_0 u_z). \quad (31)$$

Полагая  $\gamma \approx 1$  и опуская малые члены, пропорциональные  $\delta \tilde{n} u_z$ ,  $\delta \tilde{n} u_y$ , мы можем использовать вместо (19)–(22) следующие линейные уравнения:

$$b_y = -u'_z - b_0 u_y, \quad \delta b_z = (1 + b_0^2) u'_y - b_0 u_z, \quad (32)$$

$$b'_y = -u_z, \quad \delta b'_z = u_y, \quad (33)$$

С учетом (30) из условия (27) находится полуширина канала:

$$\tilde{x}_* \approx \frac{\tilde{I}_b}{1 + b_0^2}. \quad (34)$$

Как видно из (34), при фиксированном токе пучка канал сужается с ростом внешнего магнитного поля. При этом средняя в пределах канала плотность частиц пучка растет:  $\langle \tilde{n}_b \rangle = 1 + b_0^2$ .

Удовлетворяющее граничным условиям

$$u_{y*} = b_0 \tilde{x}_*, \quad b_{y*} = -\tilde{I}_b \quad (35)$$

и убывающее при больших  $\tilde{x}$ , решение системы линейных уравнений (32), (33) имеет вид:

$$b_y = -\tilde{I}_b \operatorname{Re} [e^{k(\tilde{x}_* - \tilde{x})}], \quad \delta b_z = -\tilde{I}_b \operatorname{Im} [k e^{k(\tilde{x}_* - \tilde{x})}], \quad (36)$$

$$u_y = \tilde{I}_b \operatorname{Im} [k^2 e^{k(\tilde{x}_* - \tilde{x})}], \quad u_z = -\tilde{I}_b \operatorname{Re} [k e^{k(\tilde{x}_* - \tilde{x})}]. \quad (37)$$

где  $k = (1 - ib_0)^{-1/2}$ . Поле внутри канала отличается от приложенного внешнего магнитного поля на малую величину:

$$b_{z*} = b_0 - \tilde{I}_b \operatorname{Im} k, \quad (38)$$

а плотность электронов вне канала равна

$$\tilde{n} = 1 - \tilde{I}_b b_0 \operatorname{Im} [k^3 e^{k(\tilde{x}_* - \tilde{x})}]. \quad (39)$$

Отметим, что в формулах (36), (37) и (39) член  $k \tilde{x}_*$  в показателе экспоненты может быть опущен без нарушения точности рассматриваемого приближения.

При произвольных значениях тока пучка уравнения (19)–(22) удается проинтегрировать только численно. Исключение составляют предельные случаи малой и большой напряженности внешнего магнитного поля.

## В. Плоские каналы в слабом магнитном поле

При малом  $b_0$  компонента поля  $b_z$  мала во всем пространстве и в нулевом приближении можно вообще пренебречь влиянием внешнего магнитного поля на движение электронов плазмы. В этом случае плазма вне канала описывается уравнениями:

$$(\gamma u_z)' = -b_y, \quad b'_y = -\tilde{n} u_z, \quad (40)$$



$$\tilde{n} = \gamma^2 + b_y'^2/\gamma, \quad (41)$$

решение которых должно удовлетворять граничным условиям:

$$u_{z*} = 1 - \frac{\tilde{x}_*}{\tilde{I}_b}, \quad b_{y*} = \tilde{I}_b. \quad (42)$$

Сделав широко употребительную в релятивистской кинематике замену  $u_z = \text{th } \chi$ , мы можем переписать (40)–(42) в виде:

$$\chi'' = \text{sh } \chi, \quad (43)$$

$$\chi_*' = \tilde{x}_* e^\chi, \quad \chi_* = \frac{1}{2} \ln \left( 2 \frac{\tilde{I}_b}{\tilde{x}_*} - 1 \right), \quad (44)$$

С учетом условий (44) локализованное решение уравнения (43) имеет вид:

$$\text{th}(\chi/4) = \text{th}(\chi_*/4) e^{\tilde{x}_* - \tilde{x}}, \quad (45)$$

где полуширина канала  $\tilde{x}_*$  задается формулой

$$\tilde{x}_* = -2 \text{sh}(\chi_*/2) e^{-\chi_*}, \quad (46)$$

а отрицательный параметр  $\chi_*$  взаимно однозначно связан с током пучка:

$$\tilde{I}_b = -2 \text{sh}(\chi_*/2) \text{ch } \chi_*. \quad (47)$$

Когда  $\tilde{I}_b \ll 1$ , параметр  $\chi_* \approx -\tilde{I}_b$ , а  $u_z \approx \chi \approx -\tilde{I}_b e^{\tilde{x}_* - \tilde{x}}$ . В этом случае полуширина канала  $\tilde{x}_* \approx \tilde{I}_b$ , а средняя плотность частиц пучка в пределах канала равна:  $\langle n_b \rangle = n_0(\tilde{I}_b/\tilde{x}_*) \approx n_0$ . Когда же  $\tilde{I}_b \gg 1$ ,  $\chi_* \approx -\frac{2}{3} \ln(2\tilde{I}_b)$ ,  $\tilde{x}_* \approx 2\tilde{I}_b$ , и средняя плотность частиц пучка  $\langle n_b \rangle \approx \frac{1}{2} n_0$ . При этом основная масса вытесненных из канала электронов движется в тонком приграничном слое толщиной  $\delta \tilde{x}_* \sim \tilde{I}_b^{-1/3}$ . Релятивистский фактор этих частиц  $\gamma \sim \tilde{I}_b^{2/3} \gg 1$ , а их плотность  $\tilde{n} \sim \tilde{I}_b^{4/3}$ .

Таким образом, пренебрегая внешним магнитным полем, с помощью формул (45)–(47) можно вычислить функцию  $\chi$ , а затем найти скорость  $u_z$  и плотность  $\tilde{n}$  электронов вне канала и компоненту  $b_y$  магнитного поля. Наличие малого внешнего поля  $b_0$  приводит в первом приближении к медленному движению электронов плазмы вдоль направления  $y$ , описываемому уравнениями (20), (22). Эти уравнения сводятся к одному уравнению для скорости  $u_y$ :

$$(\gamma u_y)'' - \tilde{n} u_y = -b_0 [\tilde{n}(1 - u_z)]', \quad (48)$$

которое решается методом вариации постоянных ( $\gamma$ ,  $\tilde{n}$  и  $u_z$  в (48) являются известными функциями координаты  $\tilde{x}$ !) [9]. В частности, оказывается, что продольное магнитное поле в канале равно:

$$b_{z*} = b_0 \left( \frac{1}{2} + \frac{3e^{-\chi_*} - 3e^{\chi_*} + 4\chi_*}{2e^{-3\chi_*} - 4e^{-2\chi_*} + 6e^{-\chi_*} - 4} \right). \quad (49)$$

При малом токе пучка  $b_{z*} \approx b_0 \left(1 - \frac{1}{2} \tilde{I}_b\right)$ . Такой же результат получается из (38), в котором вместо  $\text{Im } k$  подставлено  $b_0/2$ . Когда  $\tilde{I}_b \gg 1$ , продольное поле в канале  $b_{z*} \approx \frac{1}{2} b_0$ . Вытесненное поле находится в тонком приграничном слое (толщиной  $\delta \tilde{x}_*$ ) и, по порядку величины, равно  $b_{max} \sim \tilde{I}_b^{4/3} b_0$ .

### С. Плоские каналы в сильном магнитном поле

Сильное магнитное поле подавляет движение электронов плазмы во всем пространстве вне канала. Вследствие этого для достаточно больших значений  $b_0$  неравенства (30) выполняются при произвольном токе пучка. В этом случае возмущение плотности электронов плазмы вне канала мало и для вычисления магнитных полей и электронных скоростей можно использовать формулы линейного приближения, выражения (36) - (39). При  $b_0 \gg 1$  выражения (36) - (39) примут вид:

$$b_y = -\tilde{I}_b e^{-k_1 \tilde{x}} \cos k_1 \tilde{x}, \quad (50)$$

$$\delta b_z = k_1 \tilde{I}_b e^{-k_1 \tilde{x}} (\sin k_1 \tilde{x} - \cos k_1 \tilde{x}), \quad (51)$$

$$u_y = (\tilde{I}_b / b_0) e^{-k_1 \tilde{x}} \cos k_1 \tilde{x}, \quad (52)$$

$$u_z = -k_1 \tilde{I}_b e^{-k_1 \tilde{x}} (\cos k_1 \tilde{x} + \sin k_1 \tilde{x}). \quad (53)$$

где  $k_1 = 1/|2b_0|^{1/2}$ . Полуширина канала и поле внутри канала равны:

$$\tilde{x}_* \approx \frac{\tilde{I}_b}{b_0^2}, \quad b_{z*} \approx b_0 \left( 1 - \frac{2\tilde{I}_b}{|2b_0|^{3/2}} \right). \quad (54)$$

Плотность электронов вне канала близка к плотности ионов ( $\delta \tilde{n} = u_z \propto b_0^{-1/2}$ ), а средняя плотность частиц пучка (в пределах канала) растет с ростом  $b_0$  ( $\langle n_b \rangle \approx b_0^2$ ).

Рассмотренные предельные случаи позволяют качественно проследить за изменением параметров плоского канала при изменении внешнего магнитного поля. Также как и в случае малых токов пучка, при  $\tilde{I}_b$  больше или порядка единицы ширина канала максимальна при  $b_0 \rightarrow 0$ . При этом вытесненные электроны плазмы движутся вблизи границы канала с релятивистскими скоростями. При малых значениях  $b_0$  максимально также вытеснение внешнего магнитного поля из области канала (однако, всегда в канале  $z$ -компонента магнитного поля  $b_{z*} > b_0/2$ ). Когда  $b_0 \sim 1$ , ширина канала равна, грубо говоря, половине первоначальной ширины. При дальнейшем росте  $b_0$  ширина канала быстро уменьшается, а проникновение магнитного поля в канал увеличивается, так что в конце концов становятся справедливы асимптотические формулы (54). Примечательно, что при больших значениях  $b_0$  движение электронов плазмы всегда происходит с нерелятивистскими скоростями (независимо от величины тока пучка).

## 4 Цилиндрические ионные каналы

В аксиально симметричном случае каждый электрон плазмы движется по спирали, ось которой совпадает с осью пучка. Используя обозначения (17), (18) и переменную  $\vec{\rho} = (x, y, 0)/\lambda_p$ , в цилиндрических координатах  $\rho$ ,  $\varphi$  и  $z$  уравнения (8), (10) можно записать в виде:

$$b_\varphi = -\frac{d}{d\rho}(\gamma u_z) - b_0 \tilde{n} u_\varphi, \quad (55)$$

$$\delta b_z = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}(\rho \gamma u_\varphi) + b_0 \delta \tilde{n} - b_0 \tilde{n} u_z, \quad (56)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}(\rho b_\varphi) = -\tilde{n} u_z - \tilde{n}_b, \quad (57)$$

$$\frac{d}{d\rho} \delta b_z = \tilde{n} u_\varphi. \quad (58)$$

Приравнивая силу Лоренца к центростремительной силе, нетрудно найти электрическое поле:

$$\vec{\epsilon} = -[\vec{u} \times (\vec{b} - \vec{\omega})], \quad (59)$$

где  $\vec{\omega} = (0, 0, \gamma u_\varphi / \rho)$  с точностью до  $\gamma$  совпадает с угловой скоростью вращения электронов плазмы, находящихся на расстоянии  $\rho$  от оси канала. Выразив дивергенцию электрического поля через плотность  $\tilde{n}$ , скорость  $\vec{u}$  и магнитное поле  $\vec{b}$ , вместо (24) для плотности получим выражение:

$$\tilde{n} = \frac{\gamma - \gamma(1 - u_z)\tilde{n}_b + (b_z - \omega_z)^2 + \omega_z^2 + b_\varphi^2 - \epsilon_\rho^2}{\gamma^{-1} + (1 - u_z)b_0(b_z - 2\omega_z) + u_\varphi b_0(\epsilon_\rho - b_\varphi)}. \quad (60)$$

Для пучков, частицы которых находятся в пределах канала, плотность  $\tilde{n}_b$  в уравнениях (57), (60) должна быть положена равной нулю.

Проведя те же рассуждения, что и в случае плоских каналов, можно найти условия, которым должны удовлетворять скорости электронов и магнитные поля на границе цилиндрического канала:

$$\gamma_* u_{\varphi*} = \frac{1}{2} b_{z*} \rho_*, \quad (61)$$

$$b_{\varphi*} = -\frac{\tilde{I}_b}{2\rho_*}, \quad (62)$$

$$\gamma_*(1 - u_{z*})\tilde{I}_b = \rho_*^2(\gamma_* + b_{z*}^2/2), \quad (63)$$

здесь  $\rho_*$  – радиус ионного канала, измеренный в единицах  $\lambda_p$ , а  $\tilde{I}_b$  – ток пучка (в единицах  $I_c = mc^3/4e$ ).

При заданных внешнем магнитном поле и токе пучка общее решение уравнений (55)–(60) с граничными условиями (61)–(63) зависит от двух параметров:  $u_{y*}$  и  $u_{z*}$ . Эти величины определяются из условий:

$$v_\varphi|_{\rho \rightarrow \infty} = 0, \quad v_z|_{\rho \rightarrow \infty} = 0. \quad (64)$$

## А. Цилиндрические каналы при малом токе пучка

Как и в плоском случае, при малом токе пучка, протекающем через цилиндрический ионный канал, движение электронов плазмы происходит с нерелятивистскими скоростями, а возмущение магнитного поля мало. Считая выполненными неравенства (30), из граничного условия (63) можно найти радиус канала:

$$\rho_*^2 \approx \frac{\tilde{I}_b}{1 + b_0^2/2}. \quad (65)$$

и среднюю плотность частиц пучка в канале:  $\langle \tilde{n}_b \rangle = \tilde{I}_b / \rho_*^2 = 1 + b_0^2/2$ . Отбрасывая малые члены, для плотности электронов вне канала из (60) получим выражение:

$$\tilde{n} \approx 1 + \frac{(b_0/2 - \omega_z)(\delta b_z + b_0 u_z) + \omega_z^2}{b_0(\beta + b_{z*}/2 - \omega_z)}, \quad (66)$$

в котором  $\beta = 1/(2b_0)$ ,  $b_{z*} \approx b_0$ , а  $\omega_z \approx u_\varphi/\rho$ . Как видно из (66), плотность электронов вблизи цилиндрического канала сильно отличается от плотности ионов плазмы при не слишком малом внешнем поле:  $\tilde{n}_* \approx 1 + b_0^2/2$ .

Будем для простоты считать, что  $b_0 \sim 1$ . Тогда вблизи канала  $\omega_z \sim 1$ ,  $\delta\tilde{n} \sim 1$  так что с учетом неравенств (30) вместо (56) можно использовать уравнение:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \rho^2 \omega_z + \frac{\omega_z^2}{\beta + b_{z*}/2 - \omega_z} \approx 0, \quad (67)$$

С учетом граничного условия (61) интегрирование (67) позволяет найти угловую скорость вращения электрона плазмы, находящегося на расстоянии  $\rho$  от оси канала:

$$\omega_z = \beta + \frac{b_{z*}}{2} - \frac{1}{\rho} \sqrt{\left(\beta + \frac{b_{z*}}{2}\right)^2 (\rho^2 - \rho_*^2) + \beta^2 \rho_*^2}, \quad (68)$$

а также его азимутальную скорость:  $u_\varphi \approx \omega_z \rho$ . При  $\rho_* \ll \rho \ll 1$  эта скорость падает обратно пропорционально расстоянию

$$u_\varphi = \frac{b_0 \tilde{I}_b}{2(1 + b_0^2)\rho}. \quad (69)$$

Возмущение плотности электронов плазмы при малых  $\rho$  равно:

$$\delta\tilde{n} = \frac{2u_\varphi^2}{\rho \sqrt{(1 + b_0^2)^2 (\rho^2 - \rho_*^2) + \rho_*^2}}. \quad (70)$$

Из этого выражения видно, что плотность имеет резкий пик на границе канала. Высота пика  $\tilde{n}_{max} = 1 + b_0^2/2$ , а его ширина (на полувысоте)  $\delta\rho \sim \rho_*/(1 + b_0^2)^2$ . При  $\rho \sim \rho_*$  возмущение плотности  $\delta\tilde{n} \sim 1$ , так что общее число частиц в пике по порядку величины равно  $\delta N \sim \tilde{I}_b/b_0^2$ .

Вблизи канала легко находится и  $\varphi$ -компонента магнитного поля. В области  $\rho \ll 1$  токовая компенсация пренебрежимо мала, так что азимутальная составляющая поля создается в основном током пучка:

$$b_\varphi \approx -\frac{1}{2\rho} \tilde{I}_b. \quad (71)$$

Зная  $u_\varphi$ ,  $\tilde{n}$  и  $b_\varphi$ , нетрудно проинтегрировать уравнения (55), (58) и найти  $u_z$  и  $b_z$  при  $\rho \ll 1$ :

$$u_z = u_{z*} + \Phi(u_\varphi) - \Phi(u_{\varphi*}), \quad (72)$$

$$b_z = b_{z*} - \frac{1}{b_0} [\Phi(u_\varphi) - \Phi(u_{\varphi*})] + \frac{\tilde{I}_b}{2b_0} \ln \frac{\rho}{\rho_*}. \quad (73)$$

где

$$\Phi(u_\varphi) = \Lambda \left( u_\varphi^2 - \frac{\rho_*^2}{2} \ln u_\varphi \right), \quad \Lambda = \frac{1 + b_0^2/2}{1 + b_0^2}.$$

С другой стороны, вдали от канала отношение  $u_\varphi/\rho$  мало и мало также возмущение плотности. В этой области  $\delta\tilde{n}$  определяется формулой (31) и для описания каналов можно использовать линейную систему уравнений:

$$b_\varphi = -\frac{d}{d\rho} u_z - b_0 u_\varphi, \quad (74)$$

$$\delta b_z = (1 + b_0^2) \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \rho u_\varphi - b_0 u_z, \quad (75)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho b_\varphi) = -u_z, \quad \frac{d}{d\rho} \delta b_z = u_\varphi \quad (76)$$

Убывающее с ростом  $\rho$  решение системы уравнений (74)–(76) выражается через модифицированные функции Бесселя второго рода  $K_0$  и  $K_1$ :

$$b_\varphi = -\operatorname{Re} [AkK_1(k\rho)], \quad (77)$$

$$\delta b_z = -\operatorname{Im} [Ak^2K_0(k\rho)], \quad (78)$$

$$u_\varphi = \operatorname{Im} [Ak^3K_1(k\rho)], \quad (79)$$

$$u_z = -\operatorname{Re} [Ak^2K_0(k\rho)], \quad (80)$$

где, как и в плоском случае,  $k = (1 - ib_0)^{-1/2}$ , а  $A$  – некоторая, вообще говоря, комплексная константа. В области  $\rho_* \ll \rho \ll 1$  формулы (79), (77) для  $u_\varphi$ ,  $b_\varphi$  должны переходить в формулы (69), (71). Этим определяется константа  $A$ :

$$A = \frac{1}{2} \tilde{I}_b. \quad (81)$$

После сшивки формул (80), (78) с формулами (72), (73) в области  $\rho_* \ll \rho \ll 1$ , находятся  $z$ -компонента скорости электронов на границе канала и  $z$ -компонента магнитного поля в канале:

$$u_{z*} = \tilde{I}_b \operatorname{Im} W, \quad b_{z*} = b_0 - \tilde{I}_b \operatorname{Re} W, \quad (82)$$

$$W \equiv \frac{1}{4} [k^2 b_0 + 2ik^2 \ln(\tilde{\gamma} \Lambda k \rho_*/2)] + \frac{\ln \Lambda}{2b_0}, \quad (83)$$

где постоянная  $\tilde{\gamma} \approx 1.78107$  выражается через постоянную Эйлера-Маскерони  $C$  [9]:  $\tilde{\gamma} = e^C$ . В случае большого внешнего поля

$$u_{z*} \approx \frac{1}{4} \tilde{I}_b, \quad b_{z*} \approx b_0 - \frac{\tilde{I}_b}{4b_0} \left( \ln \frac{2b_0^3}{\tilde{\gamma}^2 \tilde{I}_b} + 1 \right). \quad (84)$$

Для вычисления возмущения плотности плазмы во всей области  $\rho \geq \rho_*$  можно использовать следующую формулу:

$$\delta \tilde{n} = \frac{2u_\varphi^2}{\rho \sqrt{(1 + b_0^2)^2 (\rho^2 - \rho_*^2) + \rho_*^2}} - \frac{\tilde{I}_b}{2} b_0 \operatorname{Im} [k^4 K_0(k\rho)]. \quad (85)$$

Отметим, что определенное таким образом возмущение плотности плазмы удовлетворяет условию зарядовой нейтральности:

$$\frac{1}{2} (1 - \langle n_b \rangle) \rho_*^2 - \int_{\rho_*}^{\infty} \delta \tilde{n} \rho d\rho = 0.$$

До сих пор мы считали, что  $b_0$  больше или порядка единицы. Когда  $b_0 \ll 1$ , возмущение плотности электронов плазмы всюду вне канала мало, а магнитные поля и скорости электронов определяются формулами линейной теории (77)–(81). В частности,  $z$ -компонента магнитного поля в канале равна

$$b_{z*} \approx b_0 - \frac{\tilde{I}_b}{4} b_0 \left( \ln \frac{4}{\tilde{\gamma}^2 \tilde{I}_b} - 1 \right). \quad (86)$$

В этом разделе предполагалось, что протекающий через ионный канал ток пучка мал. В дальнейшем мы рассмотрим цилиндрические каналы при слабом и сильном магнитном поле, считая, что ток пучка имеет произвольную величину.

## В. Цилиндрические каналы в слабом магнитном поле

Когда  $b_0$  мало, при вычислении параметров канала можно полностью пренебречь внешним магнитным полем. Радиус канала  $\rho_*$  оказывается, грубо говоря, пропорциональным  $\sqrt{\tilde{I}_b}$  (см. кривую 1 рис.1). При  $\tilde{I}_b \ll 1$  радиус канала  $\rho_* \approx \sqrt{\tilde{I}_b}$ , а средняя плотность частиц

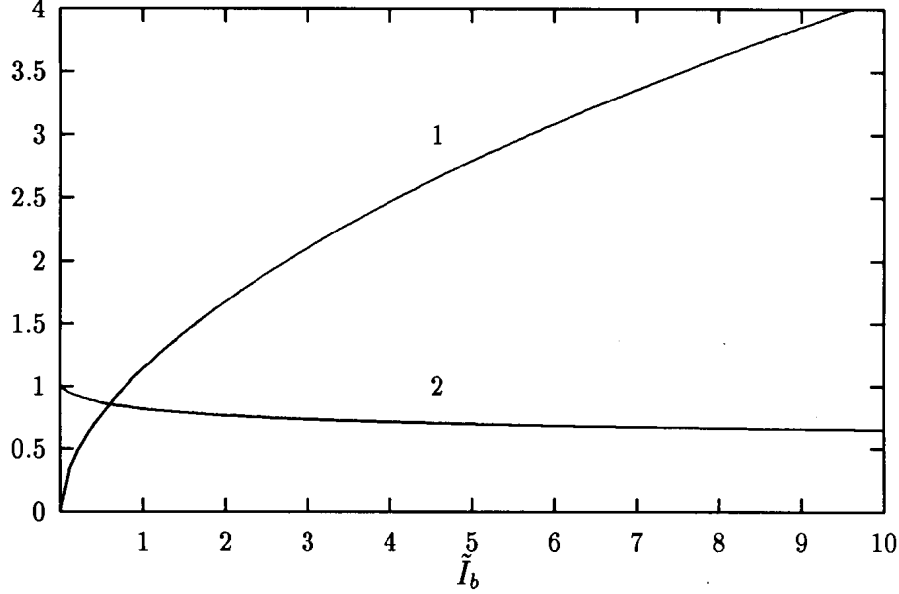


Рис. 1: Зависимость радиуса канала  $\rho_*$  (кривая 1) и относительной величины продольного магнитного поля в канале  $b_{z^*}/b_0$  (кривая 2) от тока пучка  $\tilde{I}_b$  (при  $b_0 \rightarrow 0$ ).

пучка в пределах канала равна плотности ионов. Всюду вне канала возмущение плотности электронов плазмы мало. При  $\tilde{I}_b \gg 1$   $\rho_* \approx \sqrt{2\tilde{I}_b}$ , а средняя плотность частиц пучка в пределах канала равна половине плотности ионов. Вытесненные из канала электроны движутся в тонком приграничном слое толщиной  $\delta\rho_* \sim \tilde{I}_b^{-1/6}$ . Релятивистский фактор этих частиц  $\gamma \sim \tilde{I}_b$ , а их плотность  $\tilde{n} \sim \tilde{I}_b^{2/3}$ .

При учете в первом приближении внешнего поля  $b_0$  можно найти малую азимутальную компоненту скорости электронов плазмы. Вращение этих электронов вокруг оси пучка приводит к частичному вытеснению из канала продольного магнитного поля. Это вытеснение мало при малом токе пучка. С ростом силы тока оно растет и при больших  $\tilde{I}_b$  продольное магнитное поле в канале приближается к половине  $b_0$  (см. кривую 2 рис. 1). Вытесненное поле находится в приграничном слое толщиной  $\delta\rho_*$  и по порядку величины равно  $\tilde{I}_b^{2/3}b_0$ .

## С. Цилиндрические каналы в сильном магнитном поле

При исследовании плоских каналов мы видели, что случай  $b_0 \rightarrow \infty$  во многом аналогичен случаю  $\tilde{I}_b \rightarrow 0$ . Такая же аналогия имеет место и для цилиндрических каналов. При больших полях радиус канала  $\rho_* \sim \sqrt{\tilde{I}_b}/b_0$ , а возмущение  $z$ -компоненты магнитного поля в канале  $\delta b_{z^*} \sim \tilde{I}_b/b_0$ . Как видно из условий (60),  $\gamma u_{\varphi^*} \sim \sqrt{\tilde{I}_b}$ , так что теперь при  $\tilde{I}_b$  больше или порядка единицы движение электронов на границе канала носит релятивист-

ский характер. Такой характер движения сохраняется в области примыкающей к каналу на расстояниях  $\rho \sim \tilde{I}_b/b_0$ . Однако находящийся здесь пространственный заряд и протекающий плазменный ток невелики ( $\sim \tilde{I}_b^2/b_0^2$ ), и, следовательно, имеют место приближенные равенства

$$\epsilon_\rho \approx -\frac{\tilde{I}_b}{2\rho}. \quad (87)$$

$$b_\varphi \approx -\frac{\tilde{I}_b}{2\rho}. \quad (88)$$

При  $\rho \gg \tilde{I}_b/b_0$  скорости электронов и возмущение магнитного поля малы и определяются формулами линейной теории (77)–(80). Одно из соотношений, определяющих константу  $A$  можно получить из условия совпадения формул (77) и (88) в общей области применимости  $\tilde{I}_b/b_0 \ll \rho \ll \sqrt{b_0}$ :  $\text{Re } A \approx \tilde{I}_b/2$ . Сохранение магнитного потока (14) с учетом малости поперечных размеров области, где неприменима формула (78), приводит к равенству:  $\text{Im } A \approx 0$ .

Для дальнейшего продвижения заметим, что из исходной системы уравнений (8)–(11) нетрудно получить уравнение (см. Приложение):

$$\delta b_z = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \rho \left[ \gamma u_\varphi - b_0 \frac{d}{d\rho} (\gamma - \gamma u_z) \right]. \quad (89)$$

Разность в круглых скобках в правой части (89) в области  $\tilde{I}_b/b_0 \ll \rho \ll \sqrt{b_0}$  (где можно использовать формулы (77)–(80)) является почти постоянной величиной:  $\gamma - \gamma u_z \approx 1 + (\pi/8)\tilde{I}_b/b_0$ . С учетом малых размеров области, где неприменимо линейное приближение, интегрирование (89) дает:

$$\gamma - \gamma u_z = \alpha + \mathcal{O}(b_0^{-2}), \quad \alpha \equiv 1 + \frac{\pi \tilde{I}_b}{8 b_0}. \quad (90)$$

Это равенство имеет место при любом  $\rho$  из интервала  $\rho_* \leq \rho \ll \sqrt{b_0}$ . Из (90) можно представить  $\gamma$  и  $\gamma u_z$  как функции от  $\gamma u_\varphi$ :

$$\gamma = 1 + \frac{(\gamma u_\varphi)^2}{2\alpha} + \mathcal{O}(b_0^{-2}), \quad (91)$$

$$\gamma u_z = \frac{(\gamma u_\varphi)^2}{2\alpha} + (1 - \alpha) + \mathcal{O}(b_0^{-2}). \quad (92)$$

Интегрируя (55) и учитывая (58), (88) и (92), получим выражение для  $\delta b_z$ :

$$\delta b_z = -\frac{(\gamma u_\varphi)^2}{2b_0} - \frac{1}{2b_0} \tilde{I}_b \ln \frac{\bar{\gamma}|k|\rho}{2} + \mathcal{O}(b_0^{-2}). \quad (93)$$

С помощью формулы (90) из условия (63) находится радиус канала

$$\rho_*^2 = \frac{2\tilde{I}_b\alpha}{b_0^2} \left[ 1 + \mathcal{O}(b_0^{-2}) \right], \quad (94)$$

так что средняя плотность частиц пучка в канале  $\langle \tilde{n}_b \rangle \approx b_0^2/2\alpha$ .

При больших внешних полях выражение (60) для плотности электронов плазмы также можно существенно упростить. Вследствие (87), (88) справедливо неравенство

$$|b_\varphi^2 - \epsilon_\rho^2| \ll b_0^2.$$

Эта оценка позволяет всюду вне канала для вычисления  $\tilde{n}$  использовать выражение, аналогичное (66):

$$\tilde{n} \approx 1 + \frac{(b_0/2 - \omega_z)(\delta b_z + b_0 u_z) + \omega_z^2}{b_0(1 - u_z)(\beta + b_{z^*}/2 - \omega_z)}, \quad (95)$$

где

$$\beta = \frac{1}{2} \left[ \delta b_z - \delta b_{z^*} + \frac{1 + b_0 \gamma u_\varphi (\epsilon_\rho - b_\varphi)}{(\gamma - \gamma u_z) b_0} \right].$$

На границе канала

$$\beta \approx (\alpha^{-1} + \tilde{I}_b/2)/(2b_0), \quad (96)$$

так что  $\beta + b_{z^*} - \omega_z \propto b_0^{-1}$  при  $\rho = \rho_*$ . Уже на небольших расстояниях от канала (при  $\rho - \rho_* \sim \rho_* \tilde{I}_b/b_0^4$ ) разность  $b_{z^*} - \omega_z$  становится порядка  $\beta$ , тогда как изменение величины  $\beta$  на этих расстояниях пренебрежимо мало. При  $\rho - \rho_* \gg \rho_* \tilde{I}_b/b_0^4$  разность  $b_{z^*} - \omega_z \gg \beta$  и при вычислении плотности на таких расстояниях от канала точные значения  $\beta$  несущественны. Следовательно, мы можем в формуле (95) при всех  $\rho$  считать  $\beta$  постоянной величиной, определяемой равенством (96).

Подстановка (95), (96) в (56) приводит вблизи канала к упрощенному уравнению (67). Зависимость  $\omega_z$  от  $\rho$  по-прежнему дается формулой (68), чем определяется также и азимутальная скорость электронов:  $\gamma u_\varphi = \omega_z \rho$ . При  $\rho \gg \rho_*$   $\gamma u_\varphi \approx \tilde{I}_b/(2b_0\rho)$ , что приближенно совпадает с зависимостью (79) при  $\rho \ll \sqrt{b_0}$ . Для вычисления плотности электронов плазмы при всех  $\rho \geq \rho_*$  можно использовать формулу (95). В частности, на границе канала

$$\tilde{n}_* \approx b_z^2 \frac{1 + \tilde{I}_b/4}{2 + \alpha \tilde{I}_b/2}.$$

При изменении внешнего магнитного поля изменение параметров цилиндрических каналов носит тот же характер, что и в случае плоских каналов. Радиус канала всегда максимален при  $b_0 \rightarrow 0$ . При малых значениях  $b_0$  максимально также вытеснение внешнего магнитного поля из области канала (однако, всегда  $b_{z^*} > b_0/2$ ). Когда  $b_0 \sim 1$ , радиус канала, грубо говоря, уменьшается вдвое. С дальнейшим ростом  $b_0$  происходит быстрое уменьшению радиуса канала, так что при  $b_0 \gg \tilde{I}_b$   $\rho_* \propto b_0^{-1}$ . При этом проникновение магнитного поля в канал с ростом внешнего магнитного поля увеличивается, и в конце концов для  $b_{z^*}$  становится справедлива асимптотическая формула (84). Отметим, что когда протекающий через канал ток пучка больше или порядка единицы, движение электронов плазмы вблизи границы происходит с релятивистскими скоростями при всех значениях  $b_0$ .

## 5 Заключение

Проинтегрировав уравнение вмороженности (4) в случае жесткого пучка, распространяющегося вдоль внешнего магнитного поля, мы выяснили, что описание ионных каналов не зависят от деталей процессов, происходящих на переднем фронте пучка (при медленном нарастании этого фронта). В нескольких предельных случаях уравнения, описывающие ионные каналы, удалось решить аналитически. Это позволило составить достаточно полное представление о пространственном распределении электронов плазмы вне канала при



различных значениях напряженности внешнего магнитного поля. Оказалось, в частности, что внешнее поле качественно меняет размеры ионного канала, когда циклотронная частота  $\omega_{B0} = eB_0/mc$  больше или порядка плазменной частоты  $\omega_p$  (то есть, когда параметр  $b_0$  больше или порядка единицы).

Известно, что при  $B_0 = 0$  для образования каналов необходимо, чтобы плотность релятивистского электронного пучка превышала некоторое пороговое значение, совпадающее с  $n_0$  при  $I_b \ll I_c = mc^3/4e \approx 4.2kA$  и равное  $n_0/2$  при  $I_b \gg I_c$ . Найдем условие образования цилиндрических каналов в присутствии внешнего магнитного поля в частном случае малых токов пучка ( $I_b \ll I_c$ ). При таких токах пучка движение электронов плазмы является нерелятивистским, а возмущение магнитного поля мало. Как следует из (61) с учетом (62), плотность электронов плазмы обращается в ноль на оси пучка (в момент образования канала), если на этой оси

$$n_b \approx n_0 \left( 1 + \frac{\omega_{B0}^2}{2\omega_p^2} \right).$$

Этим выражением и определяется искомое пороговое значение плотности пучка при его распространении вдоль внешнего магнитного поля  $B_0$ .

**Благодарности.** Авторы выражают благодарность М.П. Федоруку за своевременную помощь при численном решении уравнений, описывающих ионные каналы.

## Приложение

Покажем, как из уравнений (8) - (11) можно получить уравнение (88). Используя равенство

$$(\vec{u} \cdot \nabla)\gamma\vec{u} = \nabla\gamma - \vec{u} \times \text{rot}\gamma\vec{u}$$

и уравнения (8), (10), мы можем переписать соотношение (9) в виде

$$\vec{\epsilon} = -\nabla\gamma - \vec{b}_0 \times \text{rot}\vec{b}.$$

После чего получим из (11)

$$\delta\vec{n} = \Delta(\gamma + \vec{b}_0 \cdot \delta\vec{b}). \quad (97)$$

Далее перепишем уравнение (8) в виде

$$\delta\vec{b} = \text{rot}\gamma\vec{u} + \delta\vec{n}\vec{b}_0 + b_0\text{rot}\delta\vec{b}, \quad (98)$$

где  $\delta\vec{b} = \vec{b} - \vec{b}_0$ . Применяя операцию  $\text{rot}$  к обеим частям этого уравнения и подставляя найденное значение  $\text{rot}\delta\vec{b}$  в правую часть (98), получим

$$\delta\vec{b} = \text{rot}\gamma\vec{u} + \delta\vec{n}\vec{b}_0 - b_0\Delta(\gamma\vec{u} + \vec{b}) + \nabla\vec{n} \times \vec{b}_0. \quad (99)$$

Подставив в (99) значение  $\delta\vec{n}$  из (97) и взяв  $z$ -компоненту полученного уравнения, получим искомое уравнение ( ).

## Литература

- [1] *Lotov K.V.* Plasma response to ultrarelativistic beam propagation. - *Phys. Plasmas*, 1996, v.3(7), p. 2753–2759.
- [2] *Котельников И.А., Худик В.Н.* Равновесие плазмы при инжекции жесткого пучка заряженных частиц. - Препринт ИЯФ 95-53, Новосибирск: Институт ядерной физики им. Будкера, 1995.
- [3] *Uhm H.S., Joyce G.* Theory of wake-field effects of a relativistic beam propagating in a plasma. - *Phys. Fluids B*, 1991, v. 3(7), p.1587–1598.
- [4] *Росинский С.Е., Рухлин В.Г.* Динамика плотного электронного пучка, инжектируемого в плазму. - *ЖТФ* 1972, т.42(3), с.511–521.
- [5] *Рухадзе А.А., Богданкевич Л.С., Росинский С.Е., Рухлин В.Г.* Физика сильноточных релятивистских электронных пучков. М.: Атомиздат, 1980.
- [6] *Davidson R.C., Uhm H.S.* Thermal equilibrium properties of an intense relativistic electron beam. - *Phys. Fluids*, 1979, v.22(7), p.1375–1383.
- [7] *Breizman B.N., Tajima T., Fisher D.L., Chebotaev P.Z.* Excitation of Nonlinear Wake Field for Particle Acceleration. *Research Trends in Physics: Coherent Radiation and Particle Acceleration*. La Jolla International Scholl of Physics, The Institute for Advanced Studies, La Jolla, Calofornia, 1992, p.263–287.
- [8] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
- [9] *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике, М.: Наука, 1973.

*В.Н. Худик, К.В. Лотов*

**Ионные каналы при инъекции  
релятивистского электронного пучка  
вдоль магнитного поля**

*V.N. Khudik, K.V. Lotov*

**Ion channels produced by  
ultrarelativistic electron beams  
in magnetized plasma**

ИЯФ 96-61

Ответственный за выпуск А.М. Кудрявцев

Работа поступила 11.09.1996 г.

---

Сдано в набор 16.09.1996 г.

Подписано в печать 16.09.1996 г.

Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 1.7 печ.л., 1.2 уч.-изд.л.

Тираж 180 экз. Бесплатно. Заказ N° 61

---

Обработано на IBM PC и отпечатано на  
ротапринте ГНЦ РФ "ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН",  
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.