

Государственный научный центр Российской Федерации
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ им.Г.И. Будкера СО РАН

С.В. Фалеев

ЭВОЛЮЦИЯ ШИРИНЫ ВОЛНОВОГО ПАКЕТА
ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЙ
С КВАНТОВЫМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

ИЯФ 96-63

НОВОСИБИРСК

1996

**Эволюция ширины волнового пакета
высокотемпературной плазмы заряженной
частицы, взаимодействующей с квантовым
электромагнитным полем**

С.В. Фалеев

Институт ядерной физики им. Г.И.Будкера СО РАН
630090 Новосибирск, Россия

Аннотация

С помощью метода функционального интегрирования исследуется эволюция ширины волнового пакета релятивистской заряженной частицы, взаимодействующей с квантовым электромагнитным полем. Получено общее выражение для распределения плотности частицы, движущейся в произвольных внешних потенциалах. В качестве конкретного примера рассмотрен электронный синхротрон со слабой фокусировкой. Найдена ширина волнового пакета электрона в данном ускорителе.

**Evolution of the wave packet width
of a charged particle interacting
with quantum electro-magnetic field**

S. V. Faleev

Budker Institute of Nuclear Physics SB RAS
630090 Novosibirsk, Russia

Abstract

On the basis of a path integral approach the evolution of the wave packet width of relativistic charged particle interacting with quantum electro-magnetic field is considered. A general expression for the density distribution of the particle moving in arbitrary external potentials has been obtained. For a specific example of ultrarelativistic electron moving in weak-focusing synchrotron the explicit expression for the wave packet width has been found.

e-mail: S.V.Faleev@inp.nsk.su

1. ВВЕДЕНИЕ

Как хорошо известно, ширина волнового пакета электрона в циклическом ускорителе на достаточно больших временах определяется двумя конкурирующими эффектами – классическим радиационным затуханием [1, 2] и увеличением ширины пакета вследствие квантового характера излучения [3]. Однако, используемый на сегодняшний день метод расчета ширины волнового пакета [1, 2] имеет полуклассический, статистический характер. Электрон в данном подходе рассматривается как классическая частица, случайным образом излучающая фотоны с заданой (классической) средней интенсивностью излучения. Строго говоря, при таком рассмотрении нужно использовать такое понятие как ширина пучка частиц, а не ширина волнового пакета одной частицы.

В настоящей работе мы попытаемся развить общий метод для строгого квантового расчета распределения плотности волнового пакета релятивистской заряженной частицы, взаимодействующей с квантовым электромагнитным полем. Для решения поставленной задачи релятивистскую квантовую механику удобнее всего формулировать на языке функциональных интегралов. В рамках этого подхода влияние на частицу квантового электромагнитного поля можно учитывать с помощью техники функционала влияния [4, 5].

В разделе 2 мы получим выражение для функционала влияния для случая, когда в начальный момент времени электромагнитное поле находилось в тепловом равновесии с некоторой температурой T . В квазиклассическом приближении, когда ширина пакета много меньше характерных масштабов внешних потенциалов, учет взаимодействия с квантовым электромагнитным полем приводит к возникновению трех дополнительных сил в уравнении на классическую траекторию частицы – силы радиационного трения и двух флуктуационных сил, которые учитывают квантовый, дискретный характер излучения. В разделе 3 будет получено общее выражение (в форме функциональных интегралов по флуктуационным силам) для распределения плотности волнового пакета заряженной частицы, движущейся в произвольных внешних потенциалах. В последнем разделе мы рассмотрим эволюцию волнового пакета электрона в конкретной системе – синхротроне со слабой фокусировкой. Будет показано, что при каждой фиксированной конфигурации флуктуационных сил волновой пакет имеет некоторое ”собственное” относительное распределение плотности, которое определяется начальной волновой функцией, не зависит от флуктуационных сил и экспоненциально затухает со временем. С другой стороны, координата центра этого распределения как целого сильно зависит от флуктуационных сил, и, при усреднении по ним, мы получим так называемый ”броуновский”, лидирующий при больших временах, вклад в ширину пакета.

Рассматриваемая система является примером квантовой диссипативной системы. Простейшая модель квантовой диссипативной системы – частица, линейно связанная с ансамблем невзаимодействующих гармонических осцилляторов – исследовалась в работе [6]. Несмотря на формальные

отличия нашей и обсуждаемой в [6] моделей (релятивистский формализм и более сложная связь), ширина пакета в обеих имеет одинаковую структуру, а именно, разделяется на ”броуновскую” и ”собственную” части, которые характерным образом зависят от времени.

2. ФУНКЦИОНАЛ ВЛИЯНИЯ

Действие рассматриваемой системы дается следующим выражением

$$S[q, A] = S_0[q] + S_I[q, A] + S_A[A] = \int_0^t d\tau (-M \sqrt{1 - \dot{q}^2} + e\dot{q}A^{(ex)}(q, \tau) - eU^{(ex)}(q, \tau)) \quad (1)$$

$$+ e \int_0^t d\tau \dot{q}A(q, \tau) - \frac{1}{4} \int_0^t d\tau \int d^3x (F_{\mu\nu}(x, \tau))^2 ,$$

где q , e и M – координата, электрический заряд и масса электрона, $A^{(ex)}$ и $U^{(ex)}$ – внешние векторный и скалярный потенциалы, $F_{\mu\nu}(x, \tau) = \partial_\mu A_\nu(x, \tau) - \partial_\nu A_\mu(x, \tau)$ – тензор напряженности квантового электромагнитного поля. Скорость света и константа Планка в данной работе приняты равными единице $\hbar = c = 1$. Здесь и ниже (где возможно) мы будем опускать векторные индексы для координаты электрона \vec{q} , электромагнитного поля \vec{A} и т.д.. Также, выберем наиболее удобную для наших целей кулоновскую калибровку поля

$$A_0 = 0 \quad \text{и} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(x) = 0 . \quad (2)$$

Выразим лагранжиан электромагнитного поля L_A в терминах фурье-компонент поля $A(k, \tau) = \int d^3x A(x, \tau) \exp(-ikx)$:

$$L_A[A] = \sum_{k_z > 0} ((Re[\dot{A}(k, \tau)])^2 + (Im[\dot{A}(k, \tau)])^2 - k^2(Re[A(k, \tau)])^2 - k^2(Im[A(k, \tau)])^2) , \quad (3)$$

где, для удобства последующих вычислений, мы дискретизовали импульсы \vec{k} и заменили интеграл по \vec{k} на сумму: $\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \rightarrow \sum_k$. Обозначение области суммирования $\sum_{k_z > 0}$ в (3) означает, что в качестве независимых переменных мы выбрали реальную и мнимую части Фурье компонент $A(k) = Re[A(k)] + iIm[A(k)]$ в полупространстве $k_z > 0$ ($A(-k) = Re[A(k)] - iIm[A(k)]$), так как поле $A(x)$ – реальная величина).

Лагранжиан взаимодействия L_I в терминах переменных $Re[A(k)]$ и $Im[A(k)]$ имеет вид

$$L_I = e \int d^3x \dot{q}(\tau) \delta^3(x - q(\tau)) A(x) = \quad (4)$$

$$= e \sum_{k_z > 0} (2 \cos(kq) Re[A(k)] - 2 \sin(kq) Im[A(k)]) (\dot{q} - k \frac{(qk)}{k^2}) .$$

Выбор калибровки (2) ($\vec{A}(k)\vec{k} = 0$) позволяет нам прибавить пропорциональный вектору \vec{k} член в (4), после чего можно считать, что мы имеем также и продольную поляризацию поля $\vec{A}(k) \propto \vec{k}$, которая, однако, не взаимодействует с электроном.

Пусть первоначально электрон находился в чистом состоянии с некоторой волновой функцией $\psi(q)$, а электромагнитное поле находилось в тепловом равновесии с температурой T и описывалось соответствующей матрицей плотности $\rho(A, A')$.

Матрица плотности электрона в момент времени t дается сверткой пропагатора матрицы плотности и начальной волновой функции частицы

$$\rho(q_f, q'_f, t) = \int dq_i dq'_i J(q_f, q'_f, t; q_i, q'_i, 0) \psi(q_i) \psi^*(q'_i) . \quad (5)$$

Пропагатор матрицы плотности можно выразить через функциональные интегралы по траекториям электрона

$$J(q_f, q'_f, t; q_i, q'_i, 0) = \int \int Dq Dq' \exp(iS_0[q] - iS_0[q']) F[q, q'] , \quad (6)$$

где функционал влияния $F[q, q']$ выражается через интегралы по полям $A(k)$ [4, 5]

$$F[q, q'] = \int \prod_{k_z > 0} dA_f(k) dA_i(k) dA'_i(k) \rho_A(A_i, A'_i) \times \\ \int \int \prod_{k_z > 0} DA(k) DA'(k) \exp(i(S_I[q, A] - S_I[q', A'] + S_A[A] - S_A[A'])). \quad (7)$$

Все функциональные интегралы в (5) и (7) берутся по траекториям $q(\tau)$, $q'(\tau)$, $A(\tau)$, и $A'(\tau)$ с граничными точками $q(t) = q_f$, $q'(t) = q'_f$, $q(0) = q_i$, $q'(0) = q'_i$, $A(t) = A'(t) = A_f$, $A(0) = A_i$ и $A'(0) = A'_i$.

Если положить функционал влияния равным единице $F[q, q'] = 1$, то функциональный интеграл (6) будет соответствовать "положительно частотной" части уравнения Клейна-Гордона на волновую функцию частицы

$$[(i\partial_t - eU^{(ex)}) - \sqrt{(-i\vec{\nabla} - e\vec{A}^{(ex)})^2 + M^2}] \psi(q, t) = 0 . \quad (8)$$

Таким образом, функциональный интеграл (6) дает только приближенное описание эволюции электрона и описывает масштабы времени много большие чем обратная масса электрона, выраженная в единицах времени. Данное приближение будет корректно в случае, если все характерные частоты излучаемых при движении электрона фотонов в сопутствующей системе отсчета окажутся много меньше чем Mc^2/\hbar . В случае циклического ускорителя это условие дает следующее ограничение на энергию электрона: $E \ll E_{\frac{1}{2}} \equiv Mc^2(RMc/\hbar)^{\frac{1}{2}}$, где R – радиус ускорителя.

Как было сказано выше, электрон не взаимодействует с продольной поляризацией электромагнитного поля (4), и в (7) мы можем интегрировать по всем трем поляризациям поля $A(k)$.

Лагранжиан электромагнитного поля (3) представляет собой набор лагранжианов невзаимодействующих гармонических осцилляторов. Задача о вычислении функционала влияния для гармонического осциллятора, линейно связанного с некоторой другой системой (см. (4)), была решена точно в [4, 5]. Таким образом, можно получить следующее выражение для функционала влияния (7)

$$F[q, q'] = \exp(iI) \exp(-R) , \quad (9)$$

где

$$I = I_{qq} - I_{q'q'} + I_{qq'} - I_{q'q} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int_0^t d\tau \int_0^\tau ds \frac{e^2}{2|k|} \sin(|k|(\tau - s)) \\ \times \{ \cos(k(q_\tau - q_s)) (\dot{q}_\tau \dot{q}_s - (\dot{q}_\tau n)(\dot{q}_s n)) - \cos(k(q'_\tau - q'_s)) (\dot{q}'_\tau \dot{q}'_s - (\dot{q}'_\tau n)(\dot{q}'_s n)) \\ + \cos(k(q_\tau - q'_s)) (\dot{q}_\tau \dot{q}'_s - (\dot{q}_\tau n)(\dot{q}'_s n)) - \cos(k(q'_\tau - q_s)) (\dot{q}'_\tau \dot{q}_s - (\dot{q}'_\tau n)(\dot{q}_s n)) \} \quad (10)$$

и

$$R = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int_0^t d\tau \int_0^\tau ds \frac{e^2}{4|k|} \cos(|k|(\tau - s)) \operatorname{cth} \frac{|k|}{2k_B T} \times \\ \{ \cos(k(q_\tau - q_s)) (\dot{q}_\tau \dot{q}_s - (\dot{q}_\tau n)(\dot{q}_s n)) + \cos(k(q'_\tau - q'_s)) (\dot{q}'_\tau \dot{q}'_s - (\dot{q}'_\tau n)(\dot{q}'_s n)) \\ - 2 \cos(k(q_\tau - q'_s)) (\dot{q}_\tau \dot{q}'_s - (\dot{q}_\tau n)(\dot{q}'_s n)) \} . \quad (11)$$

Здесь $\vec{n} \equiv \frac{\vec{k}}{|k|}$, k_B – константа Больцмана и, для краткости, $q_\tau \equiv q(\tau)$.

Сначала рассмотрим вклад $I_{qq'}$ члена. Интегрируя по частям выражение $\sin(|k|(\tau - s)) \cos(k(q_\tau - q'_s)) (\dot{q}_\tau n)(\dot{q}'_s n) = \sin(|k|(\tau - s)) \frac{d^2}{d\tau ds} \cos(k(q_\tau - q'_s))/k^2$ в (10), можно заменить

слагаемое $(\dot{q}_\tau n)(\dot{q}'_s n)$ в подинтегральном выражении (10) на единицу. При этом зависимость от вектора \vec{n} в (10) становится тривиальной, и интеграл по d^3k легко берется

$$I_{qq'} - I_{q'q} = \frac{\alpha}{2} \int_0^t d\tau \int_0^t ds \frac{1}{|q_\tau - q'_s|} \{ \delta(\tau - s - |q_\tau - q'_s|) - \delta(\tau - s + |q_\tau - q'_s|) \} (\dot{q}_\tau \dot{q}_s - 1). \quad (12)$$

Здесь $\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \simeq \frac{1}{137}$ – константа связи электромагнитных взаимодействий. Вклад члена $I_{q'q}$ учитывается в (12) тем, что область интегрирования по s распространена на весь временной интервал t .

Дисперсия траекторий частицы $\delta q_\tau \equiv q_\tau - q'_\tau$, которая по порядку величины совпадает с размерами волнового пакета, много меньше чем характерный масштаб изменения внешних потенциалов L . Поэтому достаточно удерживать только линейные по δq члены в (12). После некоторых вычислений можно получить

$$I_{qq'} - I_{q'q} = \frac{2\alpha}{3} \int_0^t d\tau \delta q_\tau \left(\frac{\ddot{v}}{1-v^2} + 3 \frac{\dot{v}(v\dot{v})}{(1-v^2)^2} + \frac{v(v\ddot{v})}{(1-v^2)^2} + 3 \frac{v(v\dot{v})^2}{(1-v^2)^3} \right) (1 + O(\frac{(\delta q)^2}{L^2})), \quad (13)$$

где $v = \dot{\bar{q}}$ – скорость ”средней” траектории частицы $\bar{q}_\tau \equiv (q_\tau + q'_\tau)/2$. Как видно, вклад (13) в функционал влияния приводит к возникновению хорошо известных сил радиационного трения [7] в уравнении на классическую траекторию.

Запишем член I_{qq} в (10) в релятивистски инвариантной форме

$$I_{qq} = \alpha \int_0^t d\tau \int_0^\tau ds \delta((\tau - s)^2 - (q_\tau - q_s)^2) (\dot{q}_\tau \dot{q}_s - 1). \quad (14)$$

Интеграл по времени s расходится в точке $s = \tau$, но физическая природа этой расходимости вполне ясна. Расходящаяся часть в (14)

$$I_{qq}^{div} \propto \int_0^t d\tau (-\alpha \delta(0)) \sqrt{1 - \dot{q}^2} \quad (15)$$

приводит к перенормировке массы электрона $M + \delta M \rightarrow M$, которая, как известно, возникает уже в классической электродинамике. В (15) мы получили классическую, линейную расходимость массы электрона $\delta M \sim e^2/r_e$, где r_e условно обозначает ”радиус” электрона. Этот результат противоречит квадратичной расходимости массы частицы в скалярной квантовой электродинамике $(\delta M)^2 \sim \alpha \Lambda^2$, где Λ – обрезание в интегралах по импульсам в КЭД. Причина такого несоответствия заключается в том, что, как было сказано выше, функциональный интеграл (6) не описывает очень короткие промежутки времени $|\tau - s| \leq 1/M$, которые дают вклад в расходимость (15).

Конечная часть интеграла (14) сводится к поверхностному члену, который не представляет интереса:

$$I_{qq}^{finite} \propto \alpha \int_0^t d\tau \int_0^\tau ds (\dot{q}_\tau \ddot{q}_\tau) (s - \tau) \delta((1 - \dot{q}_\tau^2)(s - \tau)^2) \propto \alpha \ln(1 - \dot{q}_\tau^2) \Big|_{\tau=0}^t. \quad (16)$$

Выражение для R (11) в лидирующем, квадратичном по δq порядке, имеет следующий вид

$$R = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int_0^t d\tau \int_0^t ds \frac{e^2 \cos(|k|(\tau - s))}{4|k|} \text{cth} \left(\frac{|k|}{2k_B T} \right) \cos(k(\bar{q}_\tau - \bar{q}_s)) \times \{ (\delta \dot{q}_\tau \delta \dot{q}_s - (\delta \dot{q}_s n)(\delta \dot{q}_\tau n)) + (k \delta q_\tau)(k \delta q_s)(\dot{\bar{q}}_\tau \dot{\bar{q}}_s - (\dot{\bar{q}}_s n)(\dot{\bar{q}}_\tau n)) \} (1 + O(\frac{(\delta q)^2}{L^2})). \quad (17)$$

Для того, чтобы в эффективном действии остались только линейные по δq члены, запишем экспоненту e^{-R} через некоторые новые функциональные интегралы по так называемым флуктуационным силам $F_\parallel(\tau)$ и $F_\perp(\tau)$ с весовыми функционалами $P_\parallel[F_\parallel]$ и $P_\perp[F_\perp]$, которые определяются из тождества

$$e^{-R} \equiv \int \int DF_\parallel DF_\perp P_\parallel[F_\parallel] P_\perp[F_\perp] \exp \{ i \int_0^t d\tau F_\parallel(\tau) \delta q(\tau) - i \int_0^t d\tau F_\perp(\tau) \delta \dot{q}(\tau) \}. \quad (18)$$

Корреляторы сил $F_{\parallel}(F_{\perp})$ в различные моменты времени легко могут быть найдены с помощью второй функциональной производной экспоненты (18) по $\delta q(\delta \dot{q})$:

$$\langle F_{\parallel i}(\tau) F_{\parallel j}(s) \rangle = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{e^2 \cos(|k|(\tau - s))}{2|k|} \operatorname{cth} \left(\frac{|k|}{2k_B T} \right) \cos(k(\bar{q}_{\tau} - \bar{q}_s)) k_i k_j (\dot{\bar{q}}_{\tau} \dot{\bar{q}}_s - (\dot{\bar{q}}_{\tau} n)(\dot{\bar{q}}_s n)) , \quad (19)$$

$$\langle F_{\perp i}(\tau) F_{\perp j}(s) \rangle = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{e^2 \cos(|k|(\tau - s))}{2|k|} \operatorname{cth} \left(\frac{|k|}{2k_B T} \right) \cos(k(\bar{q}_{\tau} - \bar{q}_s)) (\delta_{ij} - n_i n_j) . \quad (20)$$

Как видно из корреляторов (19) и (20), в ультрарелятивистском случае, когда излучение направлено, в основном, вдоль скорости частицы, сила F_{\parallel} действует в направлении параллельном скорости, а F_{\perp} – в направлении, перпендикулярном ей.

В нерелятивистском пределе вкладом силы F_{\parallel} можно пренебречь, так как он содержит две лишние степени скорости по сравнению с вкладом силы F_{\perp} . В ультрарелятивистском же случае, наоборот, вклад силы F_{\parallel} является основным, так как содержит множителем частоту излучаемых фотонов $|k|$, которая много больше характерных частот движения частицы во внешних потенциалах.

В рассматриваемом нами квазиклассическом пределе, когда ширина волнового пакета считается малой по сравнению с масштабами изменения внешних потенциалов, можно считать траекторию \bar{q} в (19) и (20) классической траекторией, полученной из решения классических уравнений движения без учета поправок, связанных с флуктуационными силами.

Физический смысл флуктуационных сил достаточно ясен. Они учитывают квантовый, флуктуационный характер излучения. В задаче о движении электрона в циклическом ускорителе подобные силы были введены в работах [1, 2] из статистических соображений на основании того факта, что различные фотоны излучаются независимо друг от друга. В данной работе флуктуационные силы возникли сами собой из точного квантового расчета.

3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ

В функциональных интегралах (6) введем новые переменные \bar{q} и δq вместо $q(\tau)$ и $q'(\tau)$

$$\bar{q}(\tau) = (q(\tau) + q'(\tau))/2 , \quad \delta q(\tau) = (q(\tau) - q'(\tau)) . \quad (21)$$

В терминах новых переменных выражение для распределения плотности частицы (6) принимает вид

$$\rho(\bar{q}_f, t) = \int d\bar{q}_i d(\delta q_i) \psi(\bar{q}_i + \frac{\delta q_i}{2}) \psi^*(\bar{q}_i - \frac{\delta q_i}{2}) \int D F_{\parallel} D F_{\perp} P_{\parallel}[F_{\parallel}] P_{\perp}[F_{\perp}] \int D \bar{q} D(\delta q) \exp(i S_{eff}[\bar{q}, \delta q]) . \quad (22)$$

Функциональные интегралы в (22) берутся по траекториям $\bar{q}(\tau)$ и $\delta q(\tau)$ с граничными точками $\bar{q}(0) = \bar{q}_i$, $\bar{q}(t) = \bar{q}_f$, $\delta q(0) = \delta q_i$ и $\delta q(t) = 0$. Эффективное действие S_{eff} в линейном по δq приближении получено в предыдущем разделе (см. (9), (13) и (18))

$$S_{eff}[\bar{q}, \delta q] = \int_0^t d\tau \left\{ \delta \dot{q} \frac{M v}{\sqrt{1-v^2}} + \delta q (e E(\bar{q}) + e[v, H(\bar{q})] + F_{fr} + F_{\parallel}) - \delta \dot{q} F_{\perp} + e \frac{d}{d\tau} (\delta q A^{(ex)}(\bar{q})) \right\} , \quad (23)$$

где $v(\tau) \equiv \dot{\bar{q}}(\tau)$, $E(\bar{q})$ и $H(\bar{q})$ – внешние электрические и магнитные поля, F_{fr} – сила радиационного трения

$$F_{fr} = \frac{2\alpha}{3} \left(\frac{\ddot{v}}{1-v^2} + 3 \frac{\dot{v}(v\dot{v})}{(1-v^2)^2} + \frac{v(v\ddot{v})}{(1-v^2)^2} + 3 \frac{v(v\dot{v})^2}{(1-v^2)^3} \right) . \quad (24)$$

Функциональные интегралы по траекториям электрона в (22) мы будем брать методом перевала в квазиклассическом приближении. Перевальная точка эффективного действия S_{eff} определяется из уравнений

$$\frac{\delta}{\delta(\delta q)} S_{eff}[\bar{q}_{cl}, \delta q_{cl}] = 0 , \quad \frac{\delta}{\delta \bar{q}} S_{eff}[\bar{q}_{cl}, \delta q_{cl}] = 0 , \quad (25)$$

с соответствующими граничными условиями. Первое из уравнений (25) не зависит от δq_{cl} и имеет вид классического уравнения движения во внешних полях с силой радиационного трения и флуктуационными силами в правой части

$$\frac{d}{dt} \frac{M\dot{\bar{q}}}{\sqrt{1-\dot{\bar{q}}^2}} = eE + e[\dot{\bar{q}}, H] + F_{fr} + F_{\parallel} + \dot{F}_{\perp} . \quad (26)$$

Перевальное значение эффективного действия (23), вычисленное вдоль классической траектории \bar{q}_{cl} , не зависит от δq_{cl} и представляет собой чисто поверхностный член

$$S_{eff}[\bar{q}_{cl}] = -\delta q_i(p_i + eA^{(ex)}(\bar{q}_i) - F_{\perp}(0)) , \quad (27)$$

где $p_i = p_i(\bar{q}_i, \bar{q}_f; t; F_{\parallel}, F_{\perp})$ – это начальный импульс классической траектории, которая удовлетворяет уровню (26) с граничными условиями $\bar{q}(0) = \bar{q}_i$ и $\bar{q}(t) = \bar{q}_f$.

Можно убедиться, что функциональные интегралы по траекториям частицы (22), записанные в терминах сдвинутых на классические величины переменных $(\bar{q} - \bar{q}_{cl})$ и $(\delta q - \delta q_{cl})$, в квазиклассическом приближении не зависят от флуктуационных сил и граничных точек $\bar{q}_f, \bar{q}_i, \delta q_i$ и сводятся к некоторой функции, которая зависит только от времени. Таким образом, в выражении для распределения плотности электрона остаются функциональные интегралы только по флуктуационным силам

$$\rho(\bar{q}_f, t) = \tilde{N}(t) \int DF_{\parallel} DF_{\perp} P_{\parallel}[F_{\parallel}] P_{\perp}[F_{\perp}] \int d\bar{q}_i f(\bar{q}_i, p_i(\bar{q}_i, \bar{q}_f; t; F_{\parallel}, F_{\perp})) , \quad (28)$$

где функция $f(q, p)$ имеет смысл начальной функции распределения в фазовом пространстве:

$$f(q, p) = \int d(\delta q) \psi^*(q - \frac{\delta q}{2}) \psi(q + \frac{\delta q}{2}) \exp\{-i\delta q(p + eA^{(ex)}(q) - F_{\perp}(0))\} . \quad (29)$$

Как видно, полученное из квантового расчета выражение (28) для распределения плотности волнового пакета одной частицы совпадает с выражением для плотности пучка классических частиц, если при расчете последнего ввести флуктуационные силы с корреляторами (19) и (20), а в качестве начальной функции распределения пучка в фазовом пространстве взять функцию (29).

4. ШИРИНА ВОЛНОВОГО ПАКЕТА ЭЛЕКТРОНА В ЦИКЛИЧЕСКОМ УСКОРИТЕЛЕ

В этом разделе мы попытаемся использовать полученные выше общие формулы для расчета ширины волнового пакета ультрарелятивистского электрона, движущегося в циклическом ускорителе – синхротроне со слабой фокусировкой.

Пусть электрон движется в однородном магнитном поле $\vec{H} = (0, 0, H)$, направленном по оси z . Радиус R равновесной траектории определяет скорость электрона $v_0 = R\omega$ и ларморовскую частоту вращения $\omega = \frac{eH}{M} \sqrt{1-v_0^2}$. Пусть в малом интервале углов $\Delta\varphi$ около некоторого угла β , отсчитанного в плоскости вращения xy от полусоси x по часовой стрелке ($\varphi \in [\beta - \Delta\varphi/2, \beta + \Delta\varphi/2]$), отлично от нуля ускоряющее электрическое поле гармонически, с ларморовской частотой ω , зависящее от времени. В данном интервале углов электрическое поле описывается потенциалом $U(q_x, q_y, \tau) = E_0(R+r)(\varphi - \beta) \cos(\omega\tau)$, где $(R+r) \equiv (q_x^2 + q_y^2)^{1/2}$ – радиус и φ – угол в цилиндрических координатах. Амплитуда электрического поля E_0 выбирается так, что, при движении по равновесной траектории из точки $\vec{R} = (R, 0, 0)$, электрон приобретает на ускоряющем участке энергию, которая в точности компенсирует средние потери на радиационное трение

$$|e|E_0 \cos(\beta) R \Delta\varphi = \frac{2\pi}{\omega} W_0 . \quad (30)$$

Здесь $W_0 = \frac{2}{3}\alpha\omega^2 v_0^2 \gamma^4$ – средняя мощность радиационных потерь [7], а $\gamma = (1 - v_0^2)^{-\frac{1}{2}}$ – (большой) релятивистский фактор.

Движение вдоль оси z регулируется потенциалом общего вида $U_z(q_z)$, который имеет абсолютный минимум в точке $q_z = 0$. Таким образом, действие электрона $S_0[q]$ имеет вид

$$S_0[q] = \int_0^t d\tau \left\{ -M\sqrt{1 - \dot{q}^2} + \frac{1}{2}e\vec{q}[\vec{H}, \vec{q}] - eU(q_x, q_y, \tau) - eU_z(q_z) \right\}, \quad (31)$$

где квадратные скобки обозначают векторное произведение.

Как было сказано в конце второго раздела, в интересующем нас ультрарелятивистском случае $\gamma \gg 1$, силу F_{\perp} можно не принимать во внимание. Вклад этой силы меньше вклада силы F_{\parallel} , по крайней мере, в $k_{ch}^2/\omega^2 \sim \gamma^6$ раз, где $k_{ch} \sim \omega\gamma^3$ – характерная частота излучаемых в ускорителе фотонов.

Пусть первоначально электрон находился в чистом состоянии, описываемом гауссовым волновым пакетом с центром в точке \vec{R} , шириной σ_0 и импульсом $\vec{p}_0 = (0, Mv_0\gamma, 0)$:

$$\psi(q) = (2\pi\sigma_0^2)^{-3/2} \exp\left\{i\vec{q}(\vec{p}_0 + \frac{1}{2}e[\vec{H}, \vec{R}]) - \frac{(\vec{q} - \vec{R})^2}{4\sigma_0^2}\right\}. \quad (32)$$

Второе слагаемое в показателе степени экспоненты учитывает тот факт, что в присутствии магнитного поля оператор импульса нужно "удлинить" $\hat{p} = -i\frac{\partial}{\partial q} - eA^{(ex)}(q)$. Волновая функция (32) задает функцию распределения в фазовом пространстве (29)

$$f(q, p_i) \propto \exp\left\{-\frac{(\vec{q} - \vec{R})^2}{2\sigma_0^2} - 2\sigma_0^2(p_i - p_0 + \frac{1}{2}e[\vec{H}, \vec{q} - \vec{R}])^2\right\}. \quad (33)$$

Теперь нам нужно выразить начальный импульс классической траектории p_i через граничные точки, то есть решить уравнение движения (26). Для этого перейдем к новым переменным – отклонению от равновесного радиуса r и отклонению от равновесной фазы ϕ :

$$\bar{q}_x = (R + r) \cos(\omega\tau + \phi), \quad \bar{q}_y = (R + r) \sin(\omega\tau + \phi). \quad (34)$$

Так как отклонения от равновесной траектории малы, то движения электрона вдоль оси z и в плоскости xy можно считать независимыми друг от друга. Следовательно, распределение плотности факторизуется. В дальнейшем нас будет интересовать распределение плотности электрона $\rho(r_f, \phi_f, t)$ только в xy -плоскости.

В линейном по малым отклонениям r и ϕ приближении классическое уравнение движения (26) выглядит довольно громоздко

$$\begin{aligned} \ddot{r}\gamma &= \omega R\dot{\phi}\gamma^3 + v_0^2\omega^2 r\gamma^3 + \frac{2\alpha}{3M}\left\{\gamma^2\frac{d^3}{d\tau^3}r - \gamma^4(3r\dot{\omega}^2 + 3R\ddot{\phi} + v_0^2\dot{r}\omega^2)\right\} + f_1, \\ R\ddot{\phi}\gamma^3 &= -\omega\dot{r}\gamma^3 + \frac{2\alpha}{3M}\left\{\gamma^4(3\omega\ddot{r} - 3R\dot{\phi}\omega^2 - r\omega^3 + R\frac{d^3}{d\tau^3}\phi) - 4v_0^2\omega^2\gamma^6(R\dot{\phi} + r\omega) \right. \\ &\quad \left. + v_0\omega^2\gamma^4\left(-1 + \frac{\cos(\phi - \beta)}{\cos(\beta)}\right)\right\} + f_2, \end{aligned} \quad (35)$$

где

$$f_1 = (F_{\parallel x} \cos(\omega\tau) + F_{\parallel y} \sin(\omega\tau))/M, \quad f_2 = (-F_{\parallel x} \sin(\omega\tau) + F_{\parallel y} \cos(\omega\tau))/M. \quad (36)$$

В уравнении (35) оставлена только первая гармоника из разложения Фурье по углу φ ускоряющего электрического поля. Вклады остальных гармоник (например $\sim \cos(2\varphi)\cos(\omega\tau)$) зануляются при усреднении по периоду обращения.

Запишем уравнение (35) в матричной форме

$$\hat{M}_{ij}(\tau)\varphi_j(\tau) = f_i(\tau). \quad (37)$$

Здесь индексы i, j пробегает значения 1, 2, и $\varphi_i \equiv (r(\tau), R\phi(\tau))$. Однородное уравнение ($f_i = 0$) имеет четыре решения:

$$\begin{aligned}\varphi_i^{(1)}(\tau) &= (\cos(\omega\tau), -\sin(\omega\tau))e^{-\gamma_r\tau}, & \varphi_i^{(3)}(\tau) &= (\cos(\Omega\tau), -\frac{v_0^2\omega}{\Omega}\sin(\Omega\tau))e^{-\gamma_\phi\tau}, \\ \varphi_i^{(2)}(\tau) &= (\sin(\omega\tau), \cos(\omega\tau))e^{-\gamma_r\tau}, & \varphi_i^{(4)}(\tau) &= (\sin(\Omega\tau), \frac{v_0^2\omega}{\Omega}\cos(\Omega\tau))e^{-\gamma_\phi\tau}.\end{aligned}\quad (38)$$

Первые два решения представляют собой так называемые радиальные бетатронные колебания с ларморовской частотой ω и константой затухания γ_r . Эти решения соответствуют сдвигу центра орбиты в однородном магнитном поле и являются затухающими вследствие правильно выбранной зависимости амплитуды ускоряющего напряжения от радиального отклонения r : $U \sim (R + ar)$ с $a = 1$. Как легко понять, в случае $a = 0$ (приобретенная на ускоряющем промежутке энергия не зависит от радиального отклонения) радиальные колебания были бы незатухающими ($\gamma_r = 0$), а при $a < 0$ эти колебания становятся экспоненциально растущими ($\gamma_r < 0$). Третье и четвертое решения (38) соответствуют радиально-фазовым синхротронным колебаниям с частотой $\Omega \ll \omega$ и константой затухания γ_ϕ . Для радиальной константы затухания γ_r , фазовой константы затухания γ_ϕ и частоты синхротронных колебаний можно получить следующие выражения

$$\gamma_r = \frac{\alpha}{3M}\omega^2\gamma^3, \quad \gamma_\phi = \frac{2\alpha}{3M}\omega^2\gamma^3, \quad \Omega^2 = \frac{2\alpha}{3M}\omega^3\gamma^3tg\beta. \quad (39)$$

Решение неоднородного уравнения (37) с заданными начальными условиями в приближении $\gamma_r, \gamma_\phi \ll \Omega \ll \omega$ имеет вид

$$\varphi_i(t) = (r(0) - \frac{\delta p_y}{\omega M \gamma})\varphi_i^{(1)} + (R\phi(0) + \frac{\delta p_x}{\omega M \gamma})\varphi_i^{(2)} + \frac{\delta p_y}{\omega M \gamma}\varphi_i^{(3)} - \frac{\Omega\delta p_x}{v_0^2\omega^2 M \gamma}\varphi_i^{(4)} + \varphi_{pi}, \quad (40)$$

где $\delta p = p_i - p_0$ - отклонение начального импульса классической траектории p_i от равновесного импульса p_0 : $\delta p_x = \gamma M(\dot{r}(0) - \omega R\phi(0))$ и $\delta p_y = \gamma^3 M(R\dot{\phi}(0) + r(0)\omega)$. Последнее слагаемое в правой части (40) $\varphi_{pi}(t) = (r_p(t), R\phi_p(t))$ представляет собой частное решение уравнения (37) с нулевыми начальными условиями $\varphi_{pi}(0) = \dot{\varphi}_{pi}(0) = 0$. Это решение можно найти с помощью техники функций Грина

$$\varphi_{pi}(\tau) = \int_0^\tau d\tau' G_{ij}(\tau, \tau') f_j(\tau'). \quad (41)$$

Функция Грина $G_{ij}(\tau, \tau')$ должна удовлетворять уравнению

$$\hat{M}_{ij}(\tau)G_{jk}(\tau, \tau') = \delta_{ik}\delta(\tau - \tau') \quad (42)$$

с начальными условиями $G_{ij}(0, \tau') = 0$ и $\frac{d}{d\tau}G_{ij}(\tau, \tau')|_{\tau=0} = 0$. Записывая функцию Грина в виде разложения по решениям однородного уравнения (38), при $\Delta\tau \equiv (\tau - \tau') > 0$, получим

$$G_{ij}(\tau, \tau') = \begin{pmatrix} \sin \omega \Delta\tau & -\cos \omega \Delta\tau \\ \cos \omega \Delta\tau & \sin \omega \Delta\tau \end{pmatrix} \frac{e^{-\gamma_r \Delta\tau}}{\omega\gamma} - \begin{pmatrix} 0 & -\cos \Omega \Delta\tau \\ \cos \Omega \Delta\tau & \frac{v_0^2\omega}{\Omega} \sin \Omega \Delta\tau \end{pmatrix} \frac{e^{-\gamma_\phi \Delta\tau}}{\omega\gamma}. \quad (43)$$

Чтобы не получать громоздких формул в ответе, предположим, что начальная ширина пакета достаточно мала $\sigma_0^2\omega M \ll 1$. Тогда на временах порядка времени одного оборота ширина волнового пакета станет много больше чем начальная ширина σ_0 , и мы можем пренебречь слагаемыми пропорциональными начальным отклонениям $r(0)$ и $\phi(0)$ в выражении (40), а также членом $\propto e[\vec{H}, \vec{q} - \vec{R}]$ в (33). При этом интеграл по \vec{q}_i в (28) становится тривиальным, и окончательный ответ для распределения плотности волнового пакета электрона в плоскости xy принимает вид

$$\begin{aligned}\rho(r_f, \phi_f, t) &= N(t) \int DF_{\parallel}(\tau) P_{\parallel}[F_{\parallel}] \\ &\times \exp \left\{ -2 \frac{(M\sigma_0\gamma\omega)^2}{(A^2 + BC)^2} ([A(r_f - r_p) + BR(\phi_f - \phi_p)]^2 + [C(r_f - r_p) - AR(\phi_f - \phi_p)]^2) \right\},\end{aligned}\quad (44)$$

где

$$A = -\cos \omega t e^{-\gamma r t} + \cos \Omega t e^{-\gamma \phi t}, \quad B = \sin \omega t e^{-\gamma r t} \quad \text{и} \quad C = \sin \omega t e^{-\gamma r t} - \frac{\omega v_0^2}{\Omega} \sin \Omega t e^{-\gamma \phi t}. \quad (45)$$

Как видно из (44), при любой фиксированной конфигурации $F_{\parallel}(\tau)$ волновой пакет имеет некоторое "собственное" относительное распределение плотности, которое не зависит от F_{\parallel} и соответствует распределению плотности в пучке классических частиц, который первоначально описывался функцией распределения (33). С другой стороны, координата центра этого распределения как целого (r_p, ϕ_p) сильно зависит от флуктуационной силы, и, при усреднении по силам F_{\parallel} , мы получим "броуновский", лидирующий при больших временах, вклад в ширину пакета. Очевидно, что такое поведение распределения плотности имеет общий характер и не зависит от конкретного вида внешних потенциалов.

Для радиальной и угловой дисперсий координаты электрона получим

$$\sigma_r^2(t) \equiv \frac{\int dr_f d(R\phi_f) \rho(r_f, \phi_f, t) r_f^2}{\int dr_f d(R\phi_f) \rho(r_f, \phi_f, t)} = (\sigma_r^{(own)})^2 + \langle r_p^2(t) \rangle \quad (46)$$

$$\sigma_\phi^2(t) \equiv \frac{\int dr_f d(R\phi_f) \rho(r_f, \phi_f, t) (R\phi_f)^2}{\int dr_f d(R\phi_f) \rho(r_f, \phi_f, t)} = (\sigma_\phi^{(own)})^2 + \langle (R\phi_p(t))^2 \rangle. \quad (47)$$

"Собственные" ширины $\sigma_r^{(own)}$ и $\sigma_\phi^{(own)}$ определяются начальным разбросом скоростей и экспоненциально затухают со временем вследствие классического радиационного трения

$$\begin{aligned} (\sigma_r^{(own)})^2 &= (2\sigma_0 M \gamma \omega)^{-2} \{ (\cos \omega t e^{-\gamma r t} - \cos \Omega t e^{-\gamma \phi t})^2 + (\sin \omega t e^{-\gamma r t})^2 \} \\ (\sigma_\phi^{(own)})^2 &= (2\sigma_0 M \gamma \omega)^{-2} \{ (\cos \omega t e^{-\gamma r t} - \cos \Omega t e^{-\gamma \phi t})^2 + (\sin \omega t e^{-\gamma r t} - \frac{\omega v_0^2}{\Omega} \sin \Omega t e^{-\gamma \phi t})^2 \}. \end{aligned} \quad (48)$$

"Броуновские" вклады в радиальную и угловую ширины электрона $\sigma_r^{(Br)}$ и $\sigma_\phi^{(Br)}$ определяются квантовыми флуктуациями излучения

$$\begin{aligned} (\sigma_r^{(Br)})^2 &\equiv \langle r_p^2(t) \rangle = \frac{1}{2(M\gamma\omega)^2} \left(\frac{1 - e^{-2\gamma r t}}{2\gamma r} + \frac{1 - e^{-2\gamma \phi t}}{2\gamma \phi} \right) \int d^3 k \operatorname{cth} \left(\frac{|k|}{2k_B T} \right) \frac{dI}{d^3 k} |k| \\ (\sigma_\phi^{(Br)})^2 &\equiv \langle (R\phi_p(t))^2 \rangle = \frac{1}{2(M\gamma\Omega)^2} \frac{1 - e^{-2\gamma \phi t}}{2\gamma \phi} \int d^3 k \operatorname{cth} \left(\frac{|k|}{2k_B T} \right) \frac{dI}{d^3 k} |k|. \end{aligned} \quad (49)$$

Для усреднение по силам F_{\parallel} квадратов частных решений (41) здесь были использованы выражение (43) для функции Грина и формула (19) для коррелятора флуктуационных сил.

Выражение для функции $\frac{dI}{d^3 k}$ в (49) совпадает с хорошо известной формулой для классической интенсивности излучения [8]

$$\frac{dI}{d^3 k} = \frac{\alpha}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \{ \dot{q}(\tau) \dot{q}(0) - (\dot{q}(\tau)n)(\dot{q}(0)n) \} \exp \{ i|k|\tau - i\vec{k}(\vec{q}(\tau) - \vec{q}(0)) \}, \quad (50)$$

где $q(\tau)$ – равновесная траектория электрона. В пределе малых температур $k_{ch} \sim \omega \gamma^3 \gg k_B T$ выражение для интеграла в (49) известно [1]

$$\int d^3 k \frac{dI}{d^3 k} |k| = \frac{55}{24\sqrt{3}} \alpha \omega^3 \gamma^7. \quad (51)$$

В рассматриваемой задаче структурой коррелятора (19) на временах порядка времени испускания фотона $|\tau - s| \sim (\omega \gamma)^{-1}$ можно пренебречь

$$\langle (F_{\parallel}(\tau) F_{\parallel}(s)) \rangle = \delta(\tau - s) \int d^3 k \frac{dI}{d^3 k} |k|. \quad (52)$$

Как видно, коррелятор (52) совпадает с коррелятором флуктуационных сил, введенных в работах [1, 2] на основании статистических соображений. Таким образом, выражения для "броуновского" вклада в ширину пакета (49), полученные из строгого квантового расчета, совпадают с соответствующими выражениями, полученными полуклассическим методом.

Автор выражает глубокую благодарность И. В. Колоколову за предложение темы и полезные обсуждения. Также я благодарен И. Б. Хриповичу за внимание к работе и ценные замечания. Работа выполнена при частичной поддержке гранта INTAS 93-2492-ext.

Литература

- [1] M. Sands, *Rhys. Rev.* **97**, 470 (1955).
- [2] А. А. Коломенский, А. Н. Лебедев, *ЖЭТФ* **30**, 205 (1956).
- [3] А. А. Соколов, И. М. Тернов, *ЖЭТФ* **25**, 698 (1953).
- [4] R. P. Feynman and F. L. Vernon, *Annals of Physics* **24**, 118 (1963).
- [5] Р. П. Фейнман, А. Р. Хибс, *Квантовая механика и интегралы по траекториям*, Мир, Москва (1968).
- [6] A. O. Caldeira and A. J. Leggett, *Physica* **121A**, 587 (1983).
- [7] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, Москва (1988).
- [8] В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1989) с.432.

С.В. Фалеев

**Эволюция ширины волнового пакета
высокотемпературной плазмы заряженной
частицы, взаимодействующей с квантовым
электромагнитным полем**

S. V. Falcev

**Local measurement of the magnetic fields
in hot plasma by Doppler-free
spectroscopic methods**

ИЯФ 96-63

Ответственный за выпуск А.М. Кудрявцев

Работа поступила 13.09.1996 г.

Сдано в набор 26.09.1996 г.

Подписано в печать 26.09.1996 г.

Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 0.9 печ.л., 0.8 уч.-изд.л.

Тираж 160 экз. Бесплатно. Заказ № 63

Обработано на IBM PC и отпечатано на
ротапринтере ГНЦ РФ "ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН",
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.