Государственный научный центр Российской Федерации

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ им.Г.И. Будкера СО РАН

В.Н. Худик

ГЕНЕРАЦИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В ЗАЗОРЕ МЕЖДУ ДВИЖУЖЕЙСЯ И НЕПОДВИЖНОЙ СРЕДАМИ

ИЯФ 96-70

НОВОСИБИРСК

1996

Генерация электростатических поверхностных волн в зазоре между движущейся и неподвижной средами

В.Н. Худик

Институт ядерной физики им. Г.И.Будкера СО РАН
630090 Новосибирск, Россия

Аннотация

Рассмотрены разделенные вакуумным зазором две среды, каждая из которых находится в термодинамически равновесном состоянии. Показано, что при определенных условиях движение одной среды параллельно поверхности другой может вызвать генерацию электростатических поверхностных волн на границе раздела этих сред. Обсуждены два различных механизма самовозбуждения электрического поля. Вычислены инкременты роста электроакустических поверхностных волн, когда в качестве сред взяты пьезоэлектрические кристаллы класса $\mathbf{C}_{6v}$.

Generation of electrostatic surface waves in the gap between moving and immobile media

V.N. Khudik

Budker Institute of Nuclear Physics SB RAS
630090 Novosibirsk, Russia

Abstract

Two media in thermodynamic equilibrium separated by vacuum gap are considered. It is found that movement of the second medium parallel to surface of the first one can under certain conditions generate electrostatic surface waves in the gap between these media. Two different mechanisms of self-excitation of electric field are discussed. As an example the growth rate of electroacoustic oscillations is determined for piezoelectric crystals belonging to class $\mathbf{C}_{6v}$.

1 Введение

Известно, что плазма является сплошной средой, в которой возможно развитие самых разнообразных неустойчивостей [1]. Однако большинство этих неустойчивостей характерны только для самой плазмы, и лишь немногие из них имеют место и в других более равновесных средах. Один из примеров такой универсальной неустойчивости приведен в настоящей работе.

Рассмотрим две среды, разделенные вакуумным зазором шириной L. Предположим, что вторая среда движется параллельно поверхности первой с постоянной скоростью V много меньше скорости света c, а диэлектрические проницаемости сред равны $\varepsilon_1(\omega)$ и $\varepsilon_2(\omega)$ соответственно. Выберем систему координат таким образом, чтобы вещество первой среды находилось в области $y < 0$, а вещество второй среды - в области $y > L$. Ось x направим вдоль скорости $\vec{V}$.

В электромагнитном поле волны в зазоре можно выделить зависимость от времени t и координат x, z:

$$\vec{E} \propto e^{-i\omega t + ik_x x + ik_z z}, \quad \vec{B} \propto e^{-i\omega t + ik_x x + ik_z z}. \tag{1}$$

Относительно частоты ω и волнового вектора $\vec{k} = (k_x, 0, k_z)$ предполагается, что $|\omega/k| \ll c$. В этом случае магнитное поле мало, и электромагнитная волна может быть описана в рамках потенциального приближения:

$$\mathrm{div}\vec{D} = 0, \quad \vec{D} = \hat{\varepsilon}\vec{E}, \quad \vec{E} = -\nabla\varphi, \tag{2}$$

где $\vec{D}$ - вектор электрической индукции, $\hat{\varepsilon}$ - оператор диэлектрической проницаемости, φ - потенциал электрического поля. В первой среде оператор $\hat{\varepsilon} = \varepsilon_1(\omega)$, а в зазоре $\hat{\varepsilon} = 1$. Потенциал φ находится из уравнения Лапласа и имеет вид:

$$\varphi = \varphi_1 e^{ky}, \quad \textit{при} \quad y < 0, \tag{3}$$

$$\varphi = \varphi_+ e^{k(y-L)} + \varphi_- e^{-ky}, \quad \textit{при} \quad 0 < y < L, \tag{4}$$

где величины φ_1, φ_+, φ_- уже не зависят от y. Непрерывность φ и D_y на границе между первой средой и зазором приводит к соотношению:

$$\varepsilon_1(\omega) = \frac{\varphi_+ e^{-kL} - \varphi_-}{\varphi_+ e^{-kL} + \varphi_-}. \tag{5}$$

Для описания поля в области $y > L$ удобно использовать систему отсчета, движущуюся с нерелятивистской скоростью $\vec{V}$. При малом магнитном поле электрические поля в новой системе отсчета те же самые, что и в старой системе, и изменяется вследствие Доплеровского сдвига лишь частота волны: $\omega' = \omega - \vec{k} \cdot \vec{V}$. Результативно движение второй среды сводится к тому, что в области $y > L$ оператор диэлектрической проницаемости оказывается равным $\hat{\varepsilon} = \varepsilon_2(\omega')$. Решая уравнение Лапласа в этой области, получим:

$$\varphi = \varphi_2 e^{-k(y-L)}, \tag{6}$$

где φ_2 не зависит от y. Непрерывность φ и D_y на границе между зазором и второй средой приводит к соотношению, аналогичному (5):

$$-\varepsilon_2(\omega') = \frac{\varphi_+ - \varphi_- e^{-kL}}{\varphi_+ + \varphi_- e^{-kL}}. \tag{7}$$

Из (5), (7) следует дисперсионное уравнение:

$$\frac{[\varepsilon_1(\omega) + 1][\varepsilon_2(\omega') + 1)]}{[\varepsilon_1(\omega) - 1][\varepsilon_2(\omega') - 1]} = e^{-2kL}. \tag{8}$$

Если существует хотя бы один корень этого уравнения с положительной мнимой частью, происходит экспоненциальный рост амплитуды электростатической волны. Наличие или отсутствие растущих волн в общем случае зависит от вида функций $\varepsilon_1(\omega)$ и $\varepsilon_2(\omega)$. Ниже предполагается, что сами по себе среды находятся в термодинамическом равновесии, так что генерация волн может быть вызвана только движением одной среды относительно другой. Остановимся на двух случаях, иллюстрирующих качественно различные механизмы усиления электрического поля в зазоре.

1. *Резонансная генерация волн.* Предположим, что на границе раздела каждой из сред с вакуумом возможно распространение электростатических поверхностных волн с положительными частотами ω_{1*}, ω_{2*}, определяемыми из уравнений

$$\varepsilon_1(\omega_{1*}) + 1 = 0, \quad \varepsilon_2(\omega_{2*}) + 1 = 0. \tag{9}$$

Будем считать, что диссипация электрического поля в первой среде на частотах ω, близких к ω_{1*}, пренебрежимо мала, так что $\varepsilon_1(\omega)$ на этих частотах является вещественной и четной функцией. И аналогично предполагаем, что на частотах ω, близких к ω_{2*}, диэлектрическая проницаемость $\varepsilon_2(\omega)$ есть вещественная и четная функция частоты. Рассмотрим волну с волновым вектором $\vec{k}$, удовлетворяющим условию

$$|\delta\tilde{\omega}| \ll \min(\omega_{1*}, \omega_{2*}), \quad \delta\tilde{\omega} \equiv \omega_{1*} + \omega_{2*} - \vec{k} \cdot \vec{V}. \tag{10}$$

Предполагая, что

$$\exp[-(\omega_{1*}+\omega_{2*})L/V] \ll 1 \tag{11}$$

и принимая во внимание четность функции $\varepsilon_2(\omega)$, из дисперсионного уравнения можно найти частоту этой волны:

$$\omega = \omega_{1*} - \frac{\delta\tilde{\omega}}{2} + i\sqrt{\Gamma^2 - \frac{\delta\tilde{\omega}^2}{4}}, \tag{12}$$

где

$$\Gamma = \frac{2e^{-kL}}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}, \quad \alpha_n \equiv \left.\frac{d\varepsilon_n(\omega)}{\omega}\right|_{\omega=\omega_{n*}}. \tag{13}$$

Заметим, что в области прозрачности производная ε по ω положительна при положительных частотах, так что $\alpha_1 > 0$ и $\alpha_2 > 0$. Неравенство (11) по существу означает, что волна в зазоре состоит из двух слабо взаимодействующих поверхностных волн, отношение амплитуд которых равно:

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} \approx \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\left(-\frac{\delta\tilde{\omega}}{2\Gamma} + i\sqrt{1 - \frac{\delta\tilde{\omega}^2}{4\Gamma^2}}\right). \tag{14}$$

Из (12) следует, что исследуемая неустойчивость носит пороговый характер и исчезает при $|\delta\tilde{\omega}| > 2\Gamma$. Инкремент роста волны максимален (и равен Γ) при строгом выполнении резонансного условия:

$$\omega_{1*} + \omega_{2*} - \vec{k}\cdot\vec{V} = 0. \tag{15}$$

При заданной ширине зазора и скорости второй среды величина Γ максимальна, когда вектор $\vec{k}$ параллелен $\vec{V}$ и имеет место равенство

$$\frac{\omega_{1*}}{k} + \frac{\omega_{2*}}{k} = V.$$

Как хорошо известно из электродинамики сплошных сред, диссипация или генерация электромагнитной волны в среде определяется антиэрмитовой частью оператора диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}$ [2]. Интересно поэтому посмотреть, каким образом возможен рост амплитуды электрического поля, когда $\hat{\varepsilon}^{(A)}$ всюду равно нулю (как это имеет место в нашем случае). Используя выражение для плотности энергии электростатической волны

$$U = \frac{1}{8\pi}\frac{d\omega\varepsilon(\omega)}{d\omega}|\vec{E}|^2 \tag{16}$$

($\vec{E}$ - амплитуда электрического поля), можно найти энергию первой поверхностной волны на единицу площади поверхности

$$W_1 \approx \int_{-\infty}^{L/2} U dy \approx \omega_{1*}\alpha_1 k\frac{|\varphi_1|^2}{8\pi}. \tag{17}$$

Точно так же вычисляется энергия второй поверхностной волны

$$W_2 \approx \int_{L/2}^{\infty} U dy \approx -\omega_{1*}\alpha_2 k\frac{|\varphi_2|^2}{8\pi}. \tag{18}$$

Как видно из (14), при $|\delta\tilde{\omega}| < 2\Gamma$ амплитуды этих слабо взаимодействующих волн связаны соотношением:

$$\alpha_1|\varphi_1|^2 = \alpha_2|\varphi_2|^2. \tag{19}$$

С учетом (19) из (17) и (18) следует, что при развитии резонансной неустойчивости полная энергия волны (на единицу площади) в точности равна нулю: $W = W_1 + W_2 = 0$! Таким образом, энергия волны в зазоре не изменяется с течением времени, как это и должно быть при $\hat{\varepsilon}^{(A)} = 0$.

Нетрудно видеть, что диссипативные процессы в средах подавляют указанную неустойчивость. Однако в рассматриваемой системе возможны случаи, когда именно наличие диссипации приводит к росту электрического поля.

2. *Генерация волн при развитии диссипативной неустойчивости.*
Пусть ширина зазора мала и не оказывает существенного влияния на закон дисперсии электростатических волн. При $kL \ll 1$ дисперсионное уравнение (8) может быть записано в виде

$$\varepsilon_1(\omega) + \varepsilon_2(\omega - \vec{k}\cdot\vec{V}) = 0. \tag{20}$$

Предположим, что при $\vec{V} = 0$ на границе раздела рассматриваемых сред возможно распространение электростатической поверхностной волны с частотой ω_* и малым декрементом затухания γ_*:

$$\mathrm{Re}\,\varepsilon_1(\omega_*) + \mathrm{Re}\,\varepsilon_2(\omega_*) = 0, \tag{21}$$

$$\gamma_* = \frac{\mathrm{Im}\,\varepsilon_1(\omega_*) + \mathrm{Im}\,\varepsilon_2(\omega_*)}{\alpha_1 + \alpha_2}, \quad \alpha_s \equiv \left.\frac{d\varepsilon_s(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_*}. \tag{22}$$

Для простоты будем считать, что поглощение во второй среде отсутствует: $\mathrm{Im}\,\varepsilon_2(\omega_*) = 0$.

Рассмотрим волну, распространяющуюся на границе между движущейся и неподвижной средой. Когда ее волновой вектор $\vec{k}$ удовлетворяет условию (10) (с $\omega_{1*} = \omega_{2*} = \omega_*$), решение дисперсионного уравнения (20) имеет вид:

$$\omega = \omega_* + \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}\delta\tilde{\omega} + i\frac{\mathrm{Im}\,\varepsilon_1(\omega_*)}{\alpha_2 - \alpha_1}. \tag{23}$$

Если выбранные среды таковы, что $\alpha_2 > \alpha_1$, то $\mathrm{Im}\,\omega > 0$, и на границе между средами происходит экспоненциальный рост амплитуды электростатической поверхностной волны.

В рассматриваемом случае электростатическая волна имеет отрицательную энергию:

$$W = -\omega_*(\alpha_2 - \alpha_1)k\frac{|\varphi|^2}{8\pi}, \tag{24}$$

где φ - амплитуда потенциала при $y = 0$. Диссипация электрического поля происходит только в первой среде, и количество выделяемого здесь тепла (в единицу времени на единицу площади) равно

$$Q = \int_{-\infty}^{0} \omega_*\mathrm{Im}\,\varepsilon_1(\omega_*)\frac{|\vec{E}|^2}{4\pi}dy = \omega_*\mathrm{Im}\,\varepsilon_1(\omega_*)\frac{k|\varphi|^2}{4\pi}. \tag{25}$$

Определяемый формулой (23) инкремент роста волны имеет как раз такое значение, какое необходимо для выполнения баланса энергии

$$\frac{dW}{dt} = -Q. \tag{26}$$

Как видно из (23), диссипативная неустойвость не носит резонансного характера. Ее возбуждение невозможно, когда в обеих средах отсутствует диссипация.

Для наблюдения описанных эффектов в реальных телах их относительная скорость движения V должна быть достаточно велика (она, грубо говоря, должна быть порядка скорости электронов в атоме). Однако для генерации электроакустических волн оказывается достаточно и более умеренных значений относительной скорости. В качестве примера такого рода в Приложении рассмотрено резонансное самовозбуждение поверхностных волн в пьезоэлектрических кристаллах.

Итак, нами показано, что при движении одной среды параллельно поверхности другой в зазоре между ними возможна генерация электростатических поверхностных волн. Примечательно, что эта генерация может происходить в системе, где отсутствуют внешние магнитные и электрические поля, нет никаких сторонних зарядов и токов, а сами по себе среды находятся в термодинами равновесном состоянии.

Автор выражает благодарность Ю.А. Цидулко за ценные советы и Г.Л. Коткину за обсуждение вопросов, затронутых в работе.

Приложение

Рассмотрим две одинаковые пьезоэлектрические среды. Первая среда находится в области $y < 0$, а вторая находится в области $y > L$ и движется со скоростью $\vec{V} = (V, 0, 0)$. Электроакустические волны в пьезоэлектриках описываются совместной системой уравнений теории упругости и электростатики:

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}, \tag{27}$$

$$\mathrm{div}\vec{D} = 0, \quad \vec{E} = -\nabla\varphi, \tag{28}$$

где ρ есть плотность среды, u_i -компоненты вектора смещения. Тензор напряжений σ_{ik} выражается через тензор деформации u_{lm} и вектор электрического поля:

$$\sigma_{ik} = \lambda_{iklm}u_{lm} + \beta_{l,ik}E_l, \quad u_{lm} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_l}\right), \tag{29}$$

а электрическая индукция равна

$$D_i = \varepsilon_{ik}E_k - 4\pi\beta_{i,kl}u_{kl}. \tag{30}$$

В (29, (30) λ_{iklm} есть тензор упругих постоянных, $\beta_{i,kl}$ - пьезоэлектрический тензор, а ε_{ik} - тензор диэлектрической проницаемости.

Для простоты будем считать, что пьезоэлектрический кристалл относится к классу $\mathbf{C}_{6v}$, и ось симметрии кристалла параллельна оси z. В такой системе возможно распространение поверхностных волн перпендикулярно оси симметрии в направлении оси x [2]. В этих волнах испытывают колебания смещение u_z и потенциал электрического поля φ, а смещения $u_x = u_y = 0$. Отличные от нуля компоненты тензора напряжений и вектора индукции равны:

$$\sigma_{zx} = \frac{\partial}{\partial x}(\lambda u_z - \beta\varphi), \quad \sigma_{zy} = \frac{\partial}{\partial y}(\lambda u_z - \beta\varphi), \tag{31}$$

$$D_x = -\frac{\partial}{\partial x}(4\pi\beta u_z + \varepsilon\varphi), \quad D_y = -\frac{\partial}{\partial y}(4\pi\beta u_z + \varepsilon\varphi), \tag{32}$$

где $\beta \equiv \beta_{x,xz} = \beta_{y,yz}$, $\lambda \equiv \lambda_{xz\,yz} = \lambda_{yz\,yz}$, а $\varepsilon \equiv \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy}$. С учетом (31), (32) из (27), (28) находятся уравнения, описывающие электроакустические волны:

$$\rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \bar{\lambda}\Delta u_z, \quad \Delta\psi = 0, \tag{33}$$

где $\bar{\lambda} = \lambda + 4\pi\beta^2/\varepsilon$, а вспомогательная функция $\psi = \varphi + 4\pi(\beta/\varepsilon)u_z$.

В соответствии с выбранным направлением распространения поверхностных волн, в области $y < 0$ решение этих уравнений имеет вид:

$$u_z = u_1 e^{\kappa y} e^{-i\omega t + ikx}, \quad \psi = \psi_1 e^{ky} e^{-i\omega t + ikx},$$

где u_1 и ψ_1 - некоторые постоянные, а $\kappa = \sqrt{k^2 - \omega^2/c_s^2}$ (величина $c_s^2 \equiv \bar{\lambda}/\rho$ совпадает с квадратом скорости звука в кристалле). В области $0 < y < L$ электростатический потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа и задается формулой (4). На границе $y = 0$ равно нулю напряжение σ_{zy}, и непрерывны φ и D_y. Выполнение этих условий приводит к соотношению, аналогичному (5):

$$\bar{\varepsilon}(\omega, k) = \frac{\varphi_+ e^{-kL} - \varphi_-}{\varphi_+ e^{-kL} + \varphi_-}, \tag{34}$$

$$\bar{\varepsilon}(\omega, k) \equiv \varepsilon\left(1 - \frac{4\pi\beta^2}{\bar{\lambda}\varepsilon\sqrt{1 - \omega^2/k^2c_s^2}}\right)^{-1}. \tag{35}$$

Такие же рассуждения для кристалла, находящегося в области $z > L$, приводят к соотношению, аналогичному (6):

$$\bar{\varepsilon}(\omega', k) = \frac{\varphi_+ - \varphi_- e^{-kL}}{\varphi_+ + \varphi_- e^{-kL}}. \tag{36}$$

Так как в рассматриваемом случае $\vec{k} \parallel \vec{V}$, то $\omega' = \omega - kV$. Из (34), (36) следует дисперсионное уравнение

$$\frac{[\bar{\varepsilon}(\omega, k) + 1][\bar{\varepsilon}(\omega', k) + 1)]}{[\bar{\varepsilon}(\omega, k) - 1][\bar{\varepsilon}(\omega', k) - 1]} = e^{-2kL}. \tag{37}$$

Считая выполненным неравенство $e^{-2kL} \ll 1$, естественно вначале определить закон дисперсии волны, распространяющейся по поверхности одного кристалла. Решая уравнение $\bar{\varepsilon}(\omega, k) + 1 = 0$, получим $\omega/k = V_s$, где скорость поверхностной волны равна:

$$V_s = c_s\sqrt{1-\Lambda^2}, \quad \Lambda \equiv \frac{4\pi\beta^2}{\bar{\lambda}\varepsilon(1+\varepsilon)}. \tag{38}$$

Пусть скорость второго кристалла $V = 2V_s + \delta V$ ($|\delta V| \ll V_s$). В этом случае дисперсионное уравнение (37) имеет решение

$$\frac{\omega}{k} = V_s + \frac{\delta V}{2} + i\sqrt{\Gamma^2 - \frac{\delta V^2}{4}}, \tag{39}$$

где

$$\Gamma = 2[\varepsilon/(1+\varepsilon)](c_s^2/V_s^2 - 1)V_s e^{-kL} \tag{40}$$

Когда $|\delta V| < 2\Gamma$, происходит генерация поверхностных волн. Инкремент роста электроакустических колебаний максимален (и равен $k\Gamma$), когда скорость относительного движения пьезоэлектрических кристаллов в точности равна удвоенному значению скорости поверхностных волн. При выполнении этого резонансного условия инкремент возбуждаемых волн $\mathrm{Im}\,\omega$ как функция волнового вектора достигает максимума при $k \sim 1/L$.

Аналогичные результаты справедливы и для пьезоэлектрических кристаллов других классов.

Литература

[1] *Михайловский А.Б.* Теория плазменных неустойчивостей, т.1,2. М.: Атомиздат, 1970.

[2] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.

В.Н. Худик

Генерация электростатических поверхностных волн в зазоре между движущейся и неподвижной средами

V.N. Khudik

Generation of electrostatic surface waves in the gap between moving and immobile media

ИЯФ 96-70

Ответственный за выпуск А.М. Кудрявцев
Работа поступила 10.10.1996 г.

Сдано в набор 16.10.1996 г.
Подписано в печать 16.10.1996 г.
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 0.7 печ.л., 0.6 уч.-изд.л.
Тираж 200 экз. Бесплатно. Заказ N° 70

Обработано на IBM PC и отпечатано на
ротапринте ГНЦ РФ "ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН",
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.