

В.И. Волосов, И.А. Котельников,  
С.Г. Кузьмин

О РАЗДЕЛЕНИИ ИЗОТОПОВ ГАДОЛИНИЯ  
МЕТОДОМ ИЗОТОПИЧЕСКИ  
СЕЛЕКТИВНОГО ИЦР НАГРЕВА

ИЯФ 96-91

НОВОСИБИРСК

1996

**О разделении изотопов гадолиния  
методом изотопически селективного  
ИЦР нагрева**

*В.И. Волосов, И.А. Котельников, С.Г. Кузьмин*

Институт ядерной физики им. Г.И.Будкера СО РАН  
630090 Новосибирск, Россия

Излагается теория разделения изотопов Gd методом изотопически селективного нагрева плазмы, состоящей из ионов разделяемого элемента. Представлены результаты расчетов индуктивного нагрева плазмы в поле витковой антенны, возбуждающей ВЧ поле с азимутальным числом  $m = 0$ .

**On separation of gadolinium's isotopes  
by means of isotopically selective ICRH**

*V.I. Volosov, I.A. Kotelnikov, S.G. Kuzmin*

Budker Institute of Nuclear Physics  
630090 Novosibirsk, Russia

**Abstract**

Theory of Gd's isotopes separation by means of isotopically selective plasma heating is presented. Distribution function of ions in heated plasma stream is calculated. Special attention is given to the case of full-turn-loop antenna which excites rf field with azimuthal number  $m = 0$ .

## 1. Введение

Метод разделения изотопов посредством селективного ионно-циклотронного нагрева известен со времен Манхэттенского проекта (см. [1]). Позднее он был признан неконкурентоспособным в сравнении с методом газодиффузионного разделения. Однако некоторые химические элементы, такие как гадолиний  ${}_{64}\text{Gd}$ , не удается эффективно перевести в газовую фазу. Между тем потребность в изотопе  ${}_{64}\text{Gd}^{157}$  потенциально очень велика, так как он высокоэффективен в качестве выгорающей добавки в перспективных конструкциях реакторов деления.

Суть рассматриваемого метода состоит в пространственном разделении нагретых и холодных ионов в струе, вышедшей из мощного разрядного источника плазмы и прошедшей через область высокочастотного нагрева. Для достижения необходимой селективности нагрев струи осуществляется на достаточно длинном участке строго однородного магнитного поля. Если через  $k$  обозначить характерное значение продольного волнового числа  $k_{\parallel}$  в спектре ВЧ поля, то для того чтобы селективно нагреть только изотоп с атомным числом  $A$ , отделив его от изотопов  $A \pm 1$ , необходимо обеспечить разность циклотронных частот  $\Delta\Omega \approx \Omega_a/A$ , большую, чем доплеровское уширение линии поглощения  $kv_a$ , где  $v_a$  есть тепловая скорость выделяемого изотопа, а  $\Omega_a$  — его циклотронная частота:

$$kv_a < \Delta\Omega. \quad (1)$$

Отсюда ясно, что для разделения изотопов следует использовать длинноволновые колебания, у которых на полной длине зоны нагрева  $\ell$  укладывается не более одной длины волны, т.е.

$$k = 2\pi/\ell.$$

В этом случае величина доплеровского уширения линии поглощения совпадает с пролетным уширением линии поглощения  $\Delta\omega_{\tau} = 2\pi/\tau$ , где  $\tau = \ell/v_a$  — время пролета ионного пучка через зону пролета (мы предполагаем, что скорость пучка порядка тепловой скорости  $v_a$ ). Уменьшение длины волны по сравнению с  $\ell$  ухудшает селективность нагрева, в том числе из-за проявления нелинейных эффектов [2]. Однако использование длинноволновых колебаний также встречает серьезные трудности, так как при нагреве на первой гармонике циклотронной частоты циркулярная поляризация ВЧ поля, вращающаяся в ионную сторону, экранируется током нагреваемых ионов уже при умеренной плотности  $n \sim 10^{12} \text{ см}^{-3}$ . Нагрев на второй гармонике в длинноволновом поле чрезвычайно мал. По указанным причинам применительно к термоядерным приложениям индукционный нагрев плазмы при помощи длинных витковых антенн принято считать бесперспективным [3,4]. Укоренившиеся представления были перенесены и на эксперименты по разделению изотопов, для которых наиболее подходящей считалась винтовая антенна [1]. Однако винтовая антенна не обеспечивает необходимой селективности нагрева. Мы покажем, что, несмотря на экранировку поля витковой антенны в

плазме, индукционный нагрев тем не менее недостаточен для разделения изотопов с массовым числом порядка 150.

Проникновение длинноволновых колебаний в неоднородную плазму исследовалось в недавней работе [5], где большое внимание было уделено вопросу трансформации магнитозвуковых колебаний в мелкомасштабные электронные вблизи альфвеновского резонанса. Применительно к рассматриваемому нами методу селективного ИЦР нагрева плазмы, состоящей из ионов гадолиния, анализ эффектов трансформации является избыточным, так как альфвеновский резонанс как таковой отсутствует. Мы увидим, что на циклотронной частоте диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon$  гадолиниевой плазмы является почти чисто мнимой при выполнении условия (1), обеспечивающего селективность нагрева. По этой причине говорить о наличии альфвеновского резонанса, выделяемого равенством  $k_{\parallel}^2 c^2 / \omega^2 = \varepsilon$ , очевидно, не приходится. Отсутствие сложностей, традиционных для описания альфвеновского резонанса, позволяет найти простое решение задачи об отыскании функции распределения нагретых ионов по энергиям.

В данной работе мы ограничимся анализом нагрева струи гадолиниевой плазмы при помощи витковой антенны, создающей ВЧ поле с азимутальным числом  $m = 0$ , хотя основные наши результаты без труда обобщаются на поле с произвольным  $m$ . Мы рассмотрим прямой нагрев на первой гармонике циклотронной частоты выделяемого изотопа  $\text{Gd}^{157}$ . Недостатком одновитковой антенны является отсутствие нагрева во внутренней части струи. Однако этот недостаток легко устраняется вставкой специального экрана между плазмой и антенной, конструкцию которого, как и конструкцию источника плазмы с высокой плотностью тока, разработанного в Институте ядерной физики им. Г.И. Будкера, мы не имеем возможности здесь обсуждать.

Мы будем придерживаться следующего плана изложения.

В разделе 2 мы приведем сведения, необходимые для вычисления тензора диэлектрической проницаемости гадолиниевой плазмы. В разд. 3 вычислено ВЧ поле, создаваемое витковой антенной. В разд. 4 найдена функция распределения ионов на выходе из зоны нагрева. В разд. 5 мы обсудим приближения, использованные в наших расчетах. Вывод гамильтониана, описывающего взаимодействие ионов с ВЧ полем, вынесен в приложение А.

## 2. Диэлектрическая проницаемость плазмы

Природный состав изотопов гадолиния приведен в Табл. 1 по данным, взятым из «Таблиц физических величин» [6].

Таблица 1. Стабильные изотопы  ${}_{64}\text{Gd}$

ат. вес, $A_s$	152 <sup>a</sup>	154	155	156	157	158	160
концентр., $C_s$	0.2	0.0215	0.147	0.2047	0.1568	0.249	0.219

<sup>a</sup> $\alpha$ -радиоактивен с периодом полураспада  $1,1 \cdot 10^{14}$  лет.

Если пренебречь эффектами конечного ларморовского радиуса, то тензор диэлектрической проницаемости замагниченной плазмы в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$  с осью  $z$ , направленной вдоль магнитного поля, имеет вид

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \varepsilon & ig & 0 \\ -ig & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix}, \quad (2)$$

причем индексы  $\alpha$  и  $\beta$  пробегают значения  $r, \varphi, z$ . Компоненты тензора вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}\varepsilon &= 1 + \sum_s (\varepsilon_-^s + \varepsilon_+^s) && \equiv 1 + \varepsilon_- + \varepsilon_+, \\ g &= \sum_s (\varepsilon_-^s - \varepsilon_+^s) && \equiv \varepsilon_- - \varepsilon_+, \\ \eta &= 1 + \sum_s \eta_s,\end{aligned}\tag{3}$$

где суммирование выполняется по сортам частиц (включая электроны). Парциальный вклад частиц сорта  $s$  выражается через их функцию распределения  $f_s$ , которую мы нормируем на единицу:

$$\varepsilon_{\pm}^s = \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \int d^3v \left[ \frac{1}{v_{\perp}} \frac{\partial f_s}{\partial v_{\perp}} (\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}) + k_{\parallel} \frac{\partial f_s}{\partial v_{\parallel}} \right] \frac{v_{\perp}^2/4}{(\omega \pm \Omega_s - k_{\parallel} v_{\parallel})},\tag{4a}$$

$$\eta^s = \frac{\omega_{ps}^2}{\omega} \int d^3v \frac{v_{\parallel}}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}} \frac{\partial f_s}{\partial v_{\parallel}}.\tag{4б}$$

Здесь

$$\omega_{ps} = \sqrt{\frac{4\pi n_s Z_s^2 e^2}{m_s}}, \quad \Omega_s = \frac{e Z_s B}{m_s c}$$

есть плазменная и циклотронная частоты частиц сорта  $s$  соответственно;  $m_s$ ,  $Z_s$  и  $n_s$  — их масса, заряд и концентрация, причем для ионов имеем  $m_s = A_s m_p$  и  $n_s = C_s n_i$ , где  $m_p$  — масса одного нуклона,  $n_i$  — плотность плазмы (полное число ионов в единице объема), а коэффициенты  $A_s$  и  $C_s$  приведены в Табл. 1. При низкой температуре плазмы в разрядном источнике ионы, по-видимому, ионизованы однократно, а за время пролета через зону нагрева они просто не успевают дополнительно ионизоваться. Поэтому в дальнейшем мы будем считать, что средний заряд ионов  $Z$  равен 1, однако сохраним  $Z$  в приводимых оценках, чтобы иметь возможность выяснить последствия многократной ионизации.

Функция распределения меняется в процессе нагрева, но результат вычисления интегралов в (4) в первом приближении не зависит от распределения частиц по поперечным скоростям<sup>1</sup>  $v_{\perp}$ , а продольную скорость частиц  $v_{\parallel}$  можно считать постоянной, когда величина  $k_{\parallel}$  достаточно мала (см. разд. 5). Таким образом, тензор диэлектрической проницаемости однозначно определяется функцией распределения частиц по продольной скорости на входе в зону нагрева. Она детально не известна, поэтому мы её смоделируем максвелловской со средней скоростью  $u$  и температурой  $T$ , одинаковыми для всех сортов частиц, а именно примем, что

$$f_s(v_{\parallel}) = \frac{1}{\sqrt{\pi} v_s} \exp \left[ -\frac{(v_{\parallel} - u)^2}{v_s^2} \right],\tag{5}$$

где  $v_s = (2T/m_s)^{1/2}$ . В этом случае результат можно выразить через табулированную функцию

$$Z(\xi) = 2\xi \exp(-\xi^2) \left[ \int_0^{\xi} dt \exp(t^2) - i \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right]\tag{6}$$

так, что

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\pm}^s &= -\frac{\omega_{ps}^2}{2\omega(\omega \pm \Omega_s - k_{\parallel} u)} Z \left( \frac{\omega \pm \Omega_s - k_{\parallel} u}{|k_{\parallel} v_s|} \right), \\ \eta^s &= \frac{2\omega_{ps}^2}{k_{\parallel}^2 v_s^2} \left[ 1 - Z \left( \frac{\omega - k_{\parallel} u}{|k_{\parallel} v_s|} \right) \right].\end{aligned}\tag{7}$$

Зависимости  $\varepsilon$  и  $g$  от частоты приведены на Рис. 1. Вблизи циклотронной частоты обе зависимости

<sup>1</sup>В уравнении (4а) можно пренебречь членами в квадратном скобках, содержащими  $k_{\parallel}$  в качестве множителя.

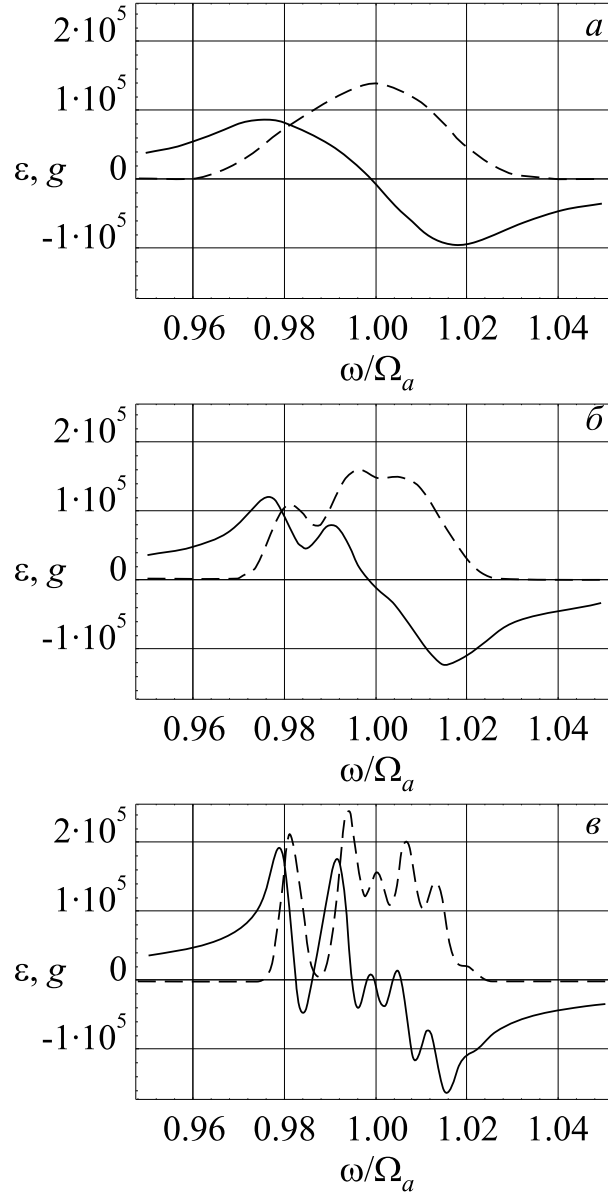


Рис. 1. График зависимости  $\varepsilon(\omega)$  и  $g(\omega)$  вблизи циклотронной частоты  $\Omega_a$  изотопа  $Gd^{157}$ . Сплошная линия — вещественная часть, пунктирная линия — мнимая часть. В масштабе рисунка различие между  $\varepsilon$  и  $g$  не заметно. Параметры плазмы:  $T = 10$  эВ,  $n = 10^{12}$  см $^{-3}$ ,  $B = 3,0$  Тл,  $u = 0$ ,  $k_{\parallel} = 2\pi/\ell$ ; а)  $\ell = 1$  м, условие (1) не выполнено, а именно  $kv_a = 2\Delta\Omega$ ; б)  $\ell = 2$  м,  $kv_a = \Delta\Omega$ ; в)  $\ell = 4$  м,  $kv_a = \Delta\Omega/2$

практически совпадают. Если условие (1) выполнено с некоторым запасом, для вычисления  $\varepsilon$  и  $g$  вблизи циклотронной частоты  $\Omega_a$  выделяемого изотопа можно использовать следующие формулы:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \sum'_{s \neq a} \frac{\omega_{ps}^2}{\Omega_s^2 - \omega^2} + i \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\omega_{pa}^2}{\omega |k_{\parallel} v_a|} \exp\left(-\frac{(\omega - \Omega_a - k_{\parallel} u)^2}{k_{\parallel}^2 v_a^2}\right), \\ g &= \sum'_{s \neq a} \frac{\omega}{\Omega_s} \frac{\omega_{ps}^2}{\Omega_s^2 - \omega^2} + i \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\omega_{pa}^2}{\omega |k_{\parallel} v_a|} \exp\left(-\frac{(\omega - \Omega_a - k_{\parallel} u)^2}{k_{\parallel}^2 v_a^2}\right), \\ \eta &= 1 + \frac{2\omega_{pe}^2}{k_{\parallel}^2 v_e^2},\end{aligned}\tag{8}$$

где индексом  $a$  помечены величины, относящиеся к выделяемому изотопу, а штрих у знака суммы указывает, что суммирование идет только по ионам (вклад электронов выражается через параметры ионов при учете квазинейтральности плазмы).

По порядку величины  $\text{Re}(\varepsilon) \approx \text{Re}(g) \sim (\omega_{pi}/\Omega)^2 (\Omega/\Delta\Omega)$ ,  $\text{Im}(\varepsilon) \approx \text{Im}(g) \sim (\omega_{pi}/\Omega)^2 (n_a/n_i) (\Omega/kv_a)$ , где  $\omega_{pi}$  — суммарная плазменная частота ионов. Добавка ионов легких атомов (например, водорода) с концентрацией несколько десятков процентов не влияет на величину диэлектрической проницаемости. При выполнении условия селективности нагрева (1) мнимая часть диэлектрической проницаемости автоматически оказывается больше вещественной несмотря на относительно малую концентрацию  $n_a/n_i$  выделяемого изотопа, так как вещественная часть диэлектрической проницаемости также несколько меньше, чем это следует из приведенной выше грубой оценки, из-за взаимной компенсации вкладов более тяжелых и более легких изотопов, упоминавшейся в работе [5]. Вследствие компенсации вещественная часть  $\varepsilon$  обращается в нуль вблизи циклотронной частоты изотопа  $\text{Gd}^{157}$ , тогда как результаты расчетов ВЧ поля, приведенные в работе [5], относятся в основном к случаю, когда малой является мнимая часть  $\varepsilon$ .

Так как отношение  $\omega_{pe}^2/v_e^2$  не зависит от массы, для величины  $\eta$  справедлива оценка  $\eta \sim \omega_{pi}^2/k^2 v_i^2$ , где  $v_i \approx v_a$  — тепловая скорость ионов. В результате оказывается, что при выполнении условия селективности нагрева (1) отношение  $\varepsilon/\eta \sim (n_a/n_i)kv_i/\Omega_i$  не превышает величину  $n_a/n_i A \approx 10^{-3}$ . Это гарантирует экранировку продольной компоненты высокочастотного электрического поля в плазме (см. обсуждение в конце разд. 4). Заметим также, что доплеровский сдвиг частоты  $kv_e$  для электронной компоненты плазмы при выполнении условия селективности  $kv_a = \Omega_a/A$  в  $\sqrt{m_p/m_e} A \approx 3,4$  раза больше частоты ВЧ поля  $\omega \approx \Omega_a$ . Иными словами, электроны несколько раз успевают пролететь зону нагрева за период циклотронного вращения ионов. В обратном предельном случае  $\omega \gg kv_e$  было бы  $\eta \approx 1 - \omega_{pe}^2/\omega^2$ .

### 3. Поле антенны

Будем считать, что магнитное поле с необходимой точностью  $\Delta B/B < 1/A$  однородно и направлено вдоль оси симметрии  $z$  цилиндрического плазменного шнура. В цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$  решение волнового уравнения для ВЧ поля удобно искать как суперпозицию колебаний вида

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(r) \exp[i(k_{\parallel} z + m\varphi - \omega t)].\tag{9}$$

Наличие в спектре колебаний с теми или иными значениями волновых чисел  $k_{\parallel}$  и  $m$  определяется геометрией антенны. Для генерации колебаний с  $m = 0$  используют витковую антенну. На практике это должен быть обычный длинный соленоид. Чтобы исключить  $z$ -компоненту электрического поля, возникающую вследствие конечного напряжения обхода на соленоиде, с внутренней стороны антенны следует разместить экран из проводящих полос, идущих вдоль оси антенны. Этот экран также компенсирует модуляцию поля антенны вдоль оси  $z$  вследствие конечного шага намотки антенного соленоида. В плазме  $z$ -компонента электрического поля оказывается малой из-за большой электронной проводимости плазмы вдоль направления магнитного поля (см. ниже).

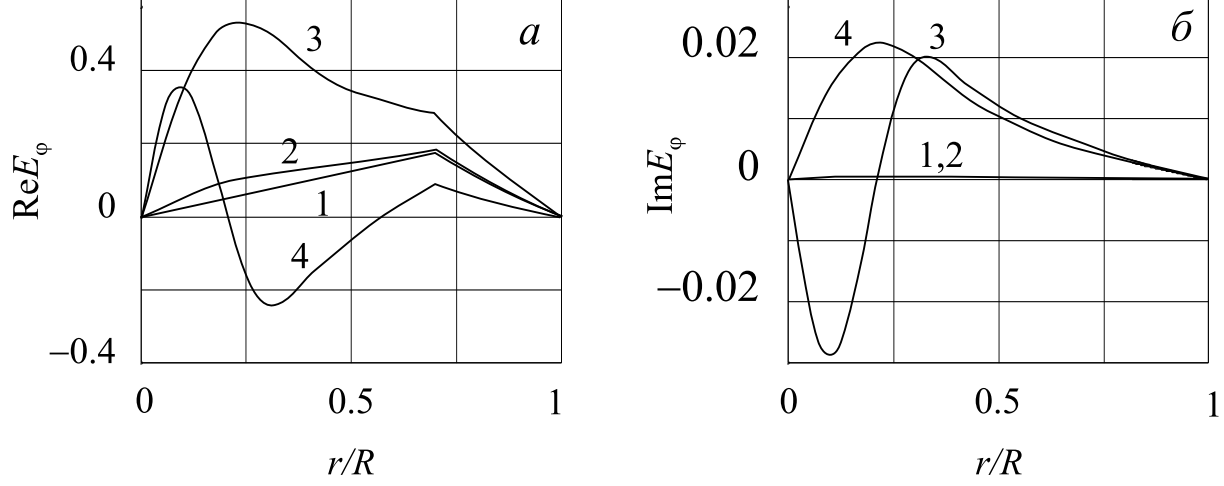


Рис. 2. График зависимости  $E_\varphi(r)$  для вынужденных колебаний на циклотронной частоте  $\Omega_a$  изотопа  $\text{Gd}^{157}$ : а) вещественная часть  $E_\varphi$ , б) мнимая часть  $E_\varphi$ . Параметры плазмы:  $T = 10$  эВ,  $B = 3$  Тл,  $u = 0$ , радиус плазмы  $a = 10$  см, радиус антенны  $b = 17,5$  см, радиус вакуумной камеры  $R = 25$  см,  $k_\parallel = 2\pi/\ell$ ,  $\ell = 2$  м; распределение плотности:  $n(r) = n_0(1 - r^2/a^2)$  при  $r \leq a$  и  $n(r) = 0$  при  $r \geq a$ ; 1— $n_0 = 0$  (вакуумное поле), 2— $n_0 = 5 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$ , 3— $n_0 = 1 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$ , 4— $n_0 = 5 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$ .

Для расчета витковую антенну можно представить как отрезок цилиндра с заданным радиусом  $b$ ; по поверхности цилиндра течет азимутальный ток

$$\mathbf{j} = \mathcal{I}(z)\delta(r - b)\exp(-i\omega t)\mathbf{e}_\varphi. \quad (10)$$

Амплитуда гармоники тока  $\mathcal{I}_k$  с заданным  $k_\parallel$  связана с  $\mathcal{I}(z)$  интегралом Фурье:

$$\mathcal{I}_k = \int dz \mathcal{I}(z)\exp(-ik_\parallel z). \quad (11)$$

При равномерной намотке

$$\mathcal{I}_k = I_0 N \text{sinc}(k_\parallel \ell/2), \quad (12)$$

где  $I_0$  — ток в катушке,  $N$  — число витков,  $\ell$  — длина антенны, а  $\text{sinc } x$  обозначает  $\sin(x)/x$ .

Полагая  $E_z = 0$  и тем самым исключая из анализа электронные колебания (см., например, [10,5]), для амплитуды  $E_\varphi(r)$  азимутальной составляющей электрического поля, получаем уравнение второго порядка (см., например, [8])

$$\frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r E_\varphi(r) - \varkappa^2 E_\varphi(r) = -\frac{4\pi i \omega}{c^2} \mathcal{I}_k \delta(r - b), \quad (13)$$

где

$$\varkappa^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left[ \frac{(N_\parallel^2 - \varepsilon)^2 - g^2}{N_\parallel^2 - \varepsilon} \right], \quad N_\parallel = k_\parallel c / \omega.$$

На оси плазмы амплитуда поля  $E_\varphi(0)$  ограничена, а на поверхности хорошо проводящей камеры радиуса  $R > b$  равна нулю,  $E_\varphi(R) = 0$ . Радиальная компонента электрического поля выражается через  $E_\varphi$ :

$$E_r = \frac{ig}{N_\parallel^2 - \varepsilon} E_\varphi. \quad (14)$$

Решение уравнения (13) представлено на Рис. 2. Параметры антенны и плазмы, принятые при расчете, указаны в подписи к рисунку.



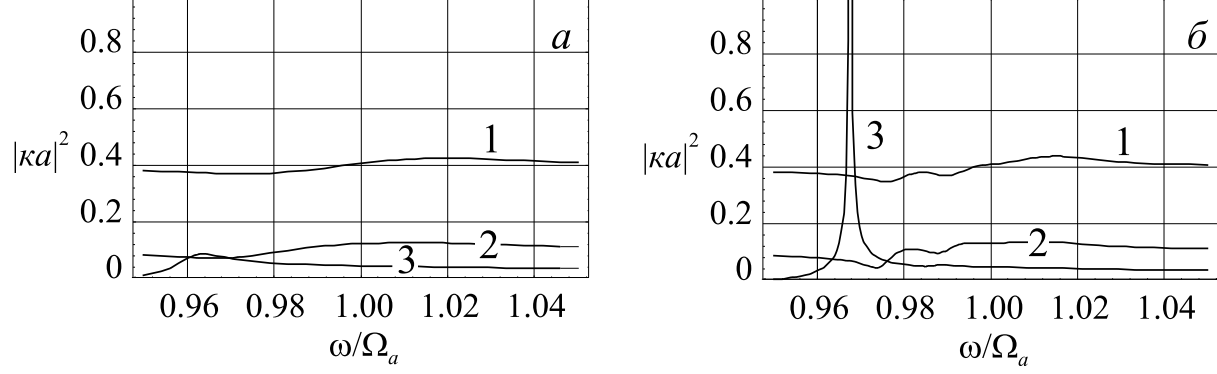


Рис. 3. График  $|\kappa a|^2$  в зависимости от частоты при  $n = 10^{12} \text{ см}^{-3}$ : а)  $B = 1 \text{ Тл}$ , б)  $B = 3 \text{ Тл}$ . Другие параметры такие же, как на Рис. 1. 1— $\ell = 1 \text{ м}$ , 2— $\ell = 2 \text{ м}$ , 3— $\ell = 4 \text{ м}$ . Резкий пик на Рис. б соответствует альфвеновскому резонансу на частоте, достаточно удаленной от циклотронной, чтобы мнимая часть  $\epsilon$  была мала

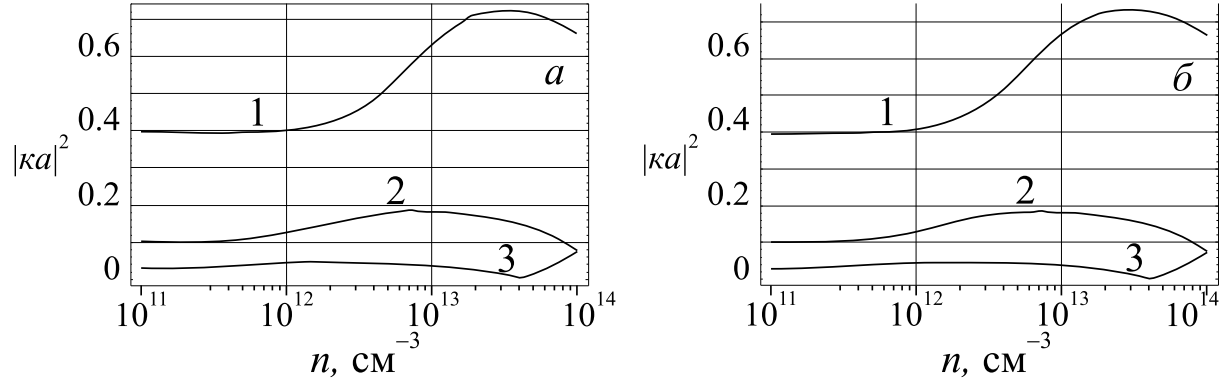


Рис. 4. График  $|\kappa a|^2$  в зависимости от плотности при  $\omega = \Omega_a$ : а)  $B = 1 \text{ Тл}$ , б)  $B = 3 \text{ Тл}$ . Другие параметры такие же, как на Рис. 1. 1— $\ell = 1 \text{ м}$ , 2— $\ell = 2 \text{ м}$ , 3— $\ell = 4 \text{ м}$ . Параметр  $\kappa$  слабо зависит от  $B$

Если плотность плазмы не очень велика, приближенное решение уравнения (13) можно получить, полагив формально  $\epsilon = 1$ ,  $g = 0$ . Обозначив через  $\kappa^2 = k_{\parallel}^2 - \omega^2/c^2$  величину  $\kappa^2$  в вакууме, имеем

$$E_{\varphi} = \frac{4\pi i \omega \mathcal{I}_k b}{c^2} \begin{cases} [K_1(\kappa b) - I_1(\kappa b)K_1(\kappa R)/I_1(\kappa R)] I_1(\kappa r), & r \leq b, \\ I_1(\kappa b)K_1(\kappa r) - [I_1(\kappa b)K_1(\kappa R)/I_1(\kappa R)] I_1(\kappa r), & r \geq b. \end{cases} \quad (15)$$

«Вакуумное» решение также приведено на Рис. 2. Для параметров, принятых в наших расчетах, приближенное решение (15) практически совпадает с точным вплоть до значений плотности плазмы порядка  $10^{15} \text{ см}^{-3}$ . Дело в том, что точность приближения зависит от параметра  $|\kappa^2 - k_{\parallel}^2| a^2$ , который должен быть мал по сравнению с единицей и который тем меньше, чем меньше радиус плазмы (см. [8]). Графики  $|\kappa a|^2$  в зависимости от частоты и от плотности плазмы приведены на Рис. 3 и 4 для трех значений  $k_{\parallel}$ .

Малое отличие азимутальной компоненты электрического поля от вакуумного значения ещё не означает, что плазма вообще не влияет на проникновение в неё ВЧ поля. Как мы уже отмечали, в плазме возникает радиальная компонента электрического поля. В результате происходит перераспределение долей энергии ВЧ поля, содержащихся в вынужденных колебаниях с правой (электронной) и левой (ионной) поляризациях. В вакууме, где  $E_r = 0$ , эти доли одинаковы и равны  $\frac{1}{2}$ . В плазме они вычисляются по формулам

$$S_{L,R} = \frac{|E^{\pm}|^2}{|E^{+}|^2 + |E^{-}|^2}, \quad (16)$$

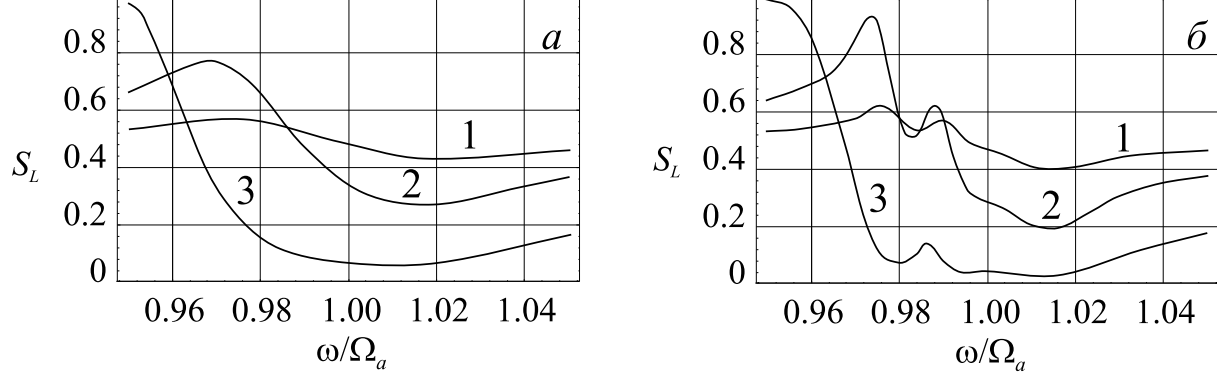


Рис. 5. Доля энергии высокочастотного поля в левой поляризации в зависимости от частоты при  $n = 10^{12} \text{ см}^{-3}$ : а)  $B = 1 \text{ Тл}$ , б)  $B = 3 \text{ Тл}$ . Другие параметры такие же, как на Рис. 1. 1— $\ell = 1 \text{ м}$ , 2— $\ell = 2 \text{ м}$ , 3— $\ell = 4 \text{ м}$

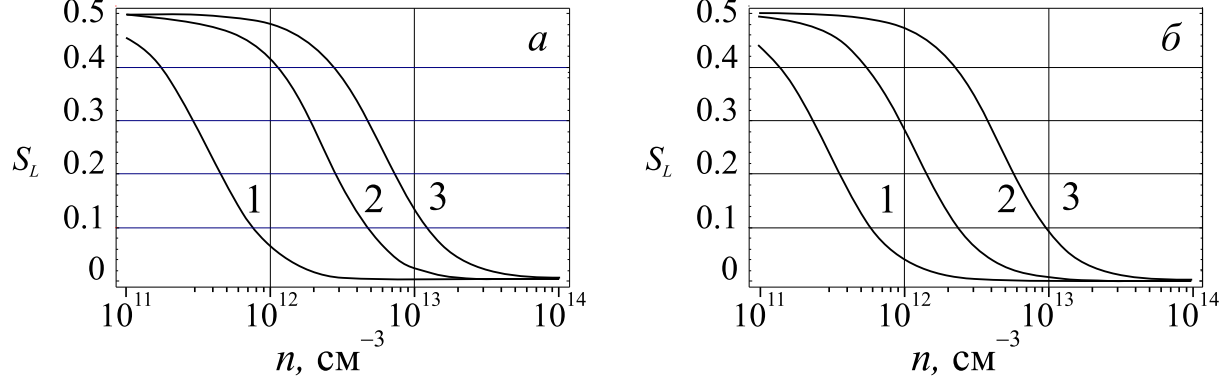


Рис. 6. Доля энергии высокочастотного поля в левой поляризации в зависимости от плотности при  $\omega = \Omega_a$ : а)  $B = 1 \text{ Тл}$ , б)  $B = 3 \text{ Тл}$ . Другие параметры такие же, как на Рис. 1. 1— $\ell = 1 \text{ м}$ , 2— $\ell = 2 \text{ м}$ , 3— $\ell = 4 \text{ м}$

где

$$E^{\pm} = \frac{E_r \pm iE_{\varphi}}{\sqrt{2}} e^{\pm i\varphi} = \pm \frac{N_{\parallel}^2 - \varepsilon \pm g}{N_{\parallel}^2 - \varepsilon} \frac{iE_{\varphi}}{\sqrt{2}} e^{\pm i\varphi} \quad (17)$$

суть амплитуды левой ( $E^+$ ) и правой ( $E^-$ ) поляризаций. Графики доли левой поляризации  $S_L$ , отвечающей за нагрев ионов, приведены на Рис. 5 в зависимости от частоты и на Рис. 6 в зависимости от плотности.

Анализируя уравнение (17) нетрудно видеть, что экранировка левой поляризации наступает при  $N_{\parallel}^2 \lesssim \text{Im} \varepsilon$ . Полагая  $\text{Im} \varepsilon = \sqrt{\pi} \omega_{pa}^2 / 2k_{\parallel} v_a \Omega_a$  и  $k_{\parallel} = 2\pi/\ell$ , находим, что критическая плотность (ионов)  $n_*$ , при которой возникает экранировка, зависит от *начальной* температуры плазменной струи  $T$ , среднего заряда ионов  $Z$ , длины зоны нагрева  $\ell$  и напряженности магнитного поля  $B$  следующим образом:

$$n_* \propto \frac{\sqrt{T}}{Z^3 B \ell^3}. \quad (18)$$

Заметим, что в обзоре [1] совпадение волнового числа  $k_{\parallel}$ , найденного из условия  $N_{\parallel}^2 \sim \text{Im} \varepsilon$ , с волновым числом антенны трактуется как условие резонансного возбуждения циклотронных волн в плазме (см. обсуждение после уравнения (13) в [1]). В рассматриваемой нами задаче малое отличие  $E_{\varphi}$  от вакуумного решения указывает на вынужденный характер колебаний.

Производительность метода разделения изотопов при помощи селективного ИЦР нагрева определяется предельной величиной тока в плазменной струе  $\pi a^2 n_* u$  (в расчете на число ионов). Поскольку критическая плотность не зависит от радиуса струи (покуда он мал по сравнению с длиной волны),

радиус можно сделать больше. Так, в работе [5] предлагается  $a = 20$  см. При наличии источника с высокой плотностью тока более простые конструктивные решения обеспечивает выбор меньшего значения радиуса струи. В наших расчетах мы принимаем  $a = 10$  см. При выбранном значении  $a$  предельный поток зависит только от предельной плотности тока  $n_* u \propto T/Z^3 B \ell^3$ . Согласно приведенной зависимости, уменьшение  $B$  или  $\ell$  формально ведет к увеличению производительности системы разделения, однако следует помнить, что и снижение  $B$ , и уменьшение  $\ell$  ведут к нарушению условия селективности нагрева (1). На границе области параметров, где это условие выполняется, имеем равенство  $\sqrt{T}/ZB\ell = \text{const}$ . Исключая с его помощью длину  $\ell$ , находим, что предельная плотность тока пропорциональна  $B^2/\sqrt{T}$ . Таким образом, для повышения производительности необходимо переходить к системам с бóльшим магнитным полем. Что касается начальной температуры плазмы в струе, то её трудно варьировать в широких пределах. От  $Z$  предельный ток не зависит.

Из Рис. 6 видно, что при  $B = 1 \div 3$  Тл,  $\ell = 1 \div 4$  м,  $T = 10$  эВ критическая плотность  $n_*$  составляет величину порядка  $10^{12}$  см $^{-3}$ . При превышении критической плотности доля левой поляризации и, следовательно, энергия, полученная ионом при пролете через зону нагрева, уменьшается пропорционально  $(n_*/n)^2$ . При наличии запаса по мощности нагрева такое превышение, на первый взгляд, вполне допустимо и обеспечивает повышение производительности. Однако в надкритическом режиме теряется селективность нагрева, так как в спектре колебаний вымирают прежде всего длинные волны (при этом радиальная структура ВЧ поля мало меняется до тех пор, пока мал параметр  $|\chi^2 - \kappa^2|a^2$ ).

Появление  $E_r$  означает, что плазма поляризуется. Поляризационный заряд натекает с торцов плазмы за счет высокой продольной электронной проводимости плазмы. Резервуаром электронов являются также участки струи, находящиеся вне зоны нагрева. Продольное поле  $E_z$  оценивается из уравнения

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{igN_{\parallel}^2}{N_{\parallel}^2 - \varepsilon} E_{\varphi} + ik_{\parallel} \eta E_z = 0, \quad (19)$$

откуда имеем  $E_z/E^+ \sim (n_a/n_i)\rho_{\parallel}/a$ , где  $\rho_{\parallel} = v_a/\Omega_i$  — продольный ларморовский радиус ионов. При превышении критического значения плотности продольные токи начинают замыкаться внутри зоны нагрева. Мы вернемся к обсуждению продольных токов в разд. 5.

## 4. Нагрев

Запишем гамильтониан положительно заряженной частицы сорта  $s$ , взаимодействующей с ВЧ полем на частоте  $\omega$ , близкой к циклотронной частоте  $\Omega_s$ , в переменных действие-угол:

$$\mathcal{H} = \Omega_s J + \frac{P_{\parallel}^2}{2m_s} + \left\{ \frac{ie}{2\omega} \sqrt{\frac{\Omega_s J}{m_s}} E_{\omega}^+ e^{i\alpha - i\omega t} + \text{К.С.} \right\} \quad (20)$$

(см. приложение А). Здесь  $J = m_s v_{\perp}^2 / 2\Omega_s$  — момент импульса частицы относительно ларморовского центра (он пропорционален магнитному моменту  $\mu = m_s v_{\perp}^2 / 2B$ ),  $\alpha$  — канонически сопряженная ему фаза,  $p_{\parallel} = m_s v_z$  — проекция импульса на направление ведущего магнитного поля вдоль оси  $z$ . Ещё одна пара канонических переменных  $\Psi = m_s \Omega_s r_c^2 / 2$ ,  $\psi$  характеризует положение ларморовского центра частицы (Рис. 7). Переменные  $\Psi$ ,  $\psi$ ,  $z$  входят в гамильтониан через зависимость от них амплитуды левополяризованной компоненты электрического поля  $E_{\omega}^+ = [E_r(r_c) + iE_{\varphi}(r_c)] e^{i\psi} / \sqrt{2}$ . В соответствии с (14) и (15)

$$E_{\omega}^+ = -\frac{4\pi\omega b}{\sqrt{2}c^2} \int \frac{dk_{\parallel}}{2\pi} \frac{N_{\parallel}^2 - \varepsilon + g}{N_{\parallel}^2 - \varepsilon} \times [\text{K}_1(\kappa b) - \text{I}_1(\kappa b)\text{K}_1(\kappa R)/\text{I}_1(\kappa R)] \text{I}_1(\kappa r) \mathcal{I}_k e^{ik_{\parallel}z - i\omega t + i\alpha + i\psi}. \quad (21)$$

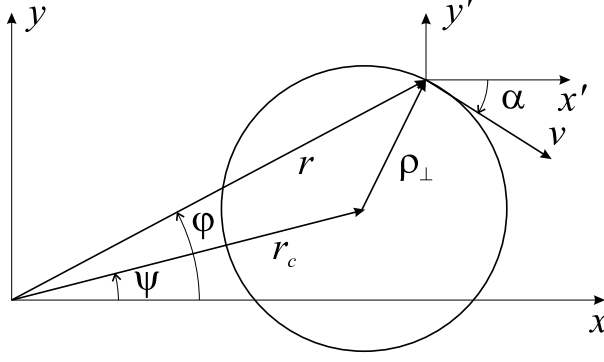


Рис. 7. Система координат

Для простоты будем считать, что аргументы функций Бесселя  $K_1$  и  $I_1$  в (21) малы, так что эти функции можно аппроксимировать степенными. Это предположение не существенно, от него легко отказаться, но оно позволяет укоротить последующие формулы и к тому же обеспечивает удовлетворительную точность. В результате имеем

$$\mathcal{H} = \Omega_s J + \frac{P_{\parallel}^2}{2m_s} - \frac{\pi e}{c^2} \sqrt{\frac{\Omega_s J}{2m_s}} \left[ 1 - \frac{b^2}{R^2} \right] r_c \times \left\{ i \int \frac{dk_{\parallel}}{2\pi} \frac{N_{\parallel}^2 - \varepsilon + g}{N_{\parallel}^2 - \varepsilon} \mathcal{I}_k e^{ik_{\parallel}z - i\omega t + i\alpha + i\psi} + \text{К.С.} \right\}. \quad (22)$$

Поскольку гамильтониан зависит от угловых переменных  $\alpha$  и  $\psi$  только в комбинации  $\alpha + \psi$ , разность канонических моментов  $J - \Psi$  есть сохраняющаяся величина. Отсюда сразу следует, что изменением  $r_c$  за время пролета через зону нагрева можно пренебречь. Действительно, допустим, что конечное значение  $J = m_s \Omega_s \rho_{\perp}^2 / 2$  велико по сравнению с начальным, которое порядка  $m_s \Omega_s \rho_{\parallel}^2 / 2$  (в этом и состоит задача нагрева). Тогда за время пролета  $\Psi = m_s \Omega r_c^2 / 2$  изменится на величину  $J$ . Следовательно, смещение  $\Delta r_c$  ларморовского центра по радиусу составит величину  $\rho_{\perp}^2 / 2r_c$ , малую по сравнению  $r_c$  всюду, за исключением малой приосевой области, где  $\Delta r_c \sim r_c \sim \rho_{\perp}$ . Изменение положения ларморовского центра по азимуту  $\psi$  также мало по параметру  $\rho_{\perp} / r_c$ . Ниже мы увидим, что продольная скорость  $v_{\parallel}$  также незначительно меняется за время пролета через зону нагрева. При постоянных  $r_c$ ,  $\psi$  и  $v_{\parallel}$  гамильтоновы уравнения для  $J$  и  $\alpha$  фактически становятся линейными (при переходе к декартовым координатам  $x'y'$  на Рис. 7) и легко интегрируются. Энергия иона  $W_s = \Omega_s J$  сорта  $s$  на выходе из зоны нагрева равна

$$W_s = \left| \sqrt{W_{s0}} e^{-i\alpha_0} - \frac{\pi e \Omega_s}{\sqrt{2m_s c^2 v_{\parallel}}} \left[ 1 - \frac{b^2}{R^2} \right] r_c \times \int_{-L/2v_{\parallel}}^{+L/2v_{\parallel}} dt \int \frac{dk_{\parallel}}{2\pi} \frac{N_{\parallel}^2 - \varepsilon + g}{N_{\parallel}^2 - \varepsilon} \mathcal{I}_k e^{i(k_{\parallel}v_{\parallel} - \omega + \Omega_s)t} \right|^2, \quad (23)$$

если он влетел туда, имея (поперечную) энергию  $W_{s0}$  и фазу ларморовского вращения  $\alpha_0$ . При выводе (23) мы учли, что длина зоны нагрева  $L$ , вообще говоря, может быть больше длины антенны  $\ell$ ; обращаем внимание, что комплексно сопряженные слагаемые в (23) отсутствуют. Если конечная энергия  $W_s$  значительно больше начальной, то она почти не зависит от начальной фазы ларморовского вращения. Используя для спектра антенны формулу (12), получаем:

$$W_s = \frac{\pi^2 e^2 \Omega_s^2 (N I_0)^2}{2m_s c^4 v_{\parallel}^2} \left[ 1 - \frac{b^2}{R^2} \right]^2 r_c^2 \mathcal{F}_s(v_{\parallel}), \quad (24)$$

$$\mathcal{F}_s(v_{\parallel}) = \left| \int \frac{dk_{\parallel} L}{2\pi} \frac{N_{\parallel}^2 - \varepsilon + g}{N_{\parallel}^2 - \varepsilon} \text{sinc} \frac{k_{\parallel} \ell}{2} \text{sinc} \frac{(k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega + \Omega_s) L}{2v_{\parallel}} \right|^2, \quad (25)$$

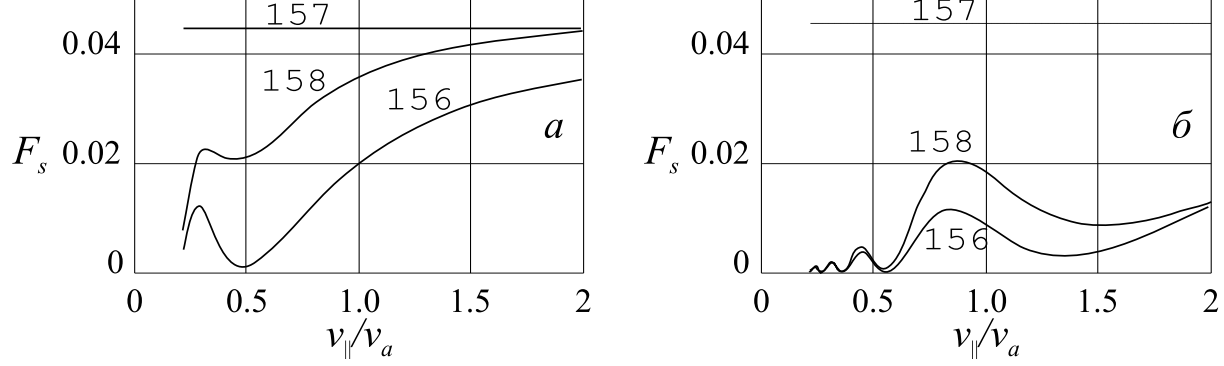


Рис. 8. График функции  $\mathcal{F}_s(v_{\parallel})$  для случая  $\omega = \Omega_a$ ,  $u = v_a$ ,  $\ell = 2$  м: а)  $B = 1$  Тл, б)  $B = 3$  Тл. Другие параметры такие же, как на Рис. 1. Цифры означают номер изотопа

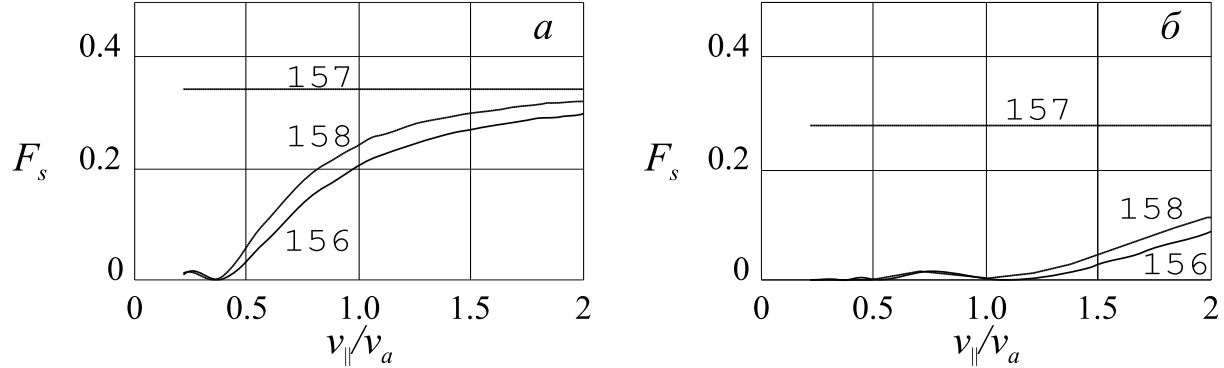


Рис. 9. То же, что и на Рис. 8, но при  $n = 10^{11} \text{ см}^{-3}$

Точность отбрасывания в (23) слагаемых, зависящих от фазы, невысока. Например, при 30-кратном превышении конечной энергии над начальной поправки к (24), зависящие от фазы вращения, составляют  $\pm 37\%$ ; при 100-кратном —  $\pm 20\%$ .

При плотности плазмы в струе значительно меньше критической,  $n \ll n_*$ , интеграл в (25) удастся вычислить аналитически, так как величиной  $\varepsilon$  и  $g$  можно пренебречь по сравнению с  $N_{\parallel}^2$ . При  $L \geq \ell$  находим, что

$$\mathcal{F}_s = \text{sinc}^2 \frac{(\Omega_s - \omega)\ell}{2v_{\parallel}}.$$

Для плотности, близкой к критической, график функции  $\mathcal{F}_s(v_{\parallel})$  приведен на Рис. 8 для изотопа  $\text{Gd}^{157}$  и двух его ближайших соседей  $\text{Gd}^{156}$  и  $\text{Gd}^{158}$ . Как видно из сравнения графиков, приведенных на Рис. 8,а и 8,б, селективность нагрева (которую характеризует отношение значений функции  $\mathcal{F}_s$  для разных изотопов) резко улучшается при увеличении магнитного поля. Для принятого в расчетах набора параметров ( $T = 10$  эВ,  $n = 10^{12} \text{ см}^{-3}$ ,  $\ell = 2$  м) удовлетворительная селективность достигается при  $B \approx 3$  Тл. При этом параметр  $kv_a/\Delta\Omega$ , характеризующий выполнение критерия селективности, равен 1,07, а энергия выделяемых изотопов  $\text{Gd}^{157}$  в 2–3 раза превышает энергию ионов  $\text{Gd}^{156}$  и  $\text{Gd}^{158}$ .

К улучшению селективности приводит удлинение зоны нагрева. Однако при плотности струи  $n = 10^{12} \text{ см}^{-3}$  длина  $\ell = 2$  м практически является предельной. На это указывает малость абсолютных значений функции  $\mathcal{F}_a$ . При  $B = 3$  Тл,  $n = 10^{12} \text{ см}^{-3}$  и  $\omega = \Omega_a$  расчет дает  $\mathcal{F}_a = 0,047$ , тогда как при отсутствии экранировки ВЧ поля в плазме было бы  $\mathcal{F}_a = 1$ . Для сравнения на Рис. 9 приведены аналогичные графики для случая, когда плотность струи снижена до  $n = 10^{11} \text{ см}^{-3}$ . При этой плотности  $\mathcal{F}_a = 0,281$ ; при  $n = 3 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-3}$  имеем  $\mathcal{F}_a = 0,147$ . Таким образом, десятикратное повышение производительности установки по разделению изотопов за счет увеличения плотности

струи с  $n = 10^{11} \text{ см}^{-3}$  до  $n = 10^{12} \text{ см}^{-3}$  требуют шестикиловатной мощности (подводимой к антенне (мы учитываем, что в плазме поглощается только малая часть этой мощности)).

## 5. Ограниченность теории

Проверим теперь, насколько верно сделанное нами предположение о постоянстве продольной скорости. При этом надо различать суммарное изменение продольной скорости иона за время пролета и модуляцию продольной скорости за период циклотронного вращения. Первый эффект связан с наличием левополяризованной компоненты ВЧ поля  $E^+$  и описывается гамильтонианом (20). Из гамильтоновых уравнений следует, что  $m\dot{v}_{\parallel} \sim (k_{\parallel}\rho_{\perp})eE^+$ , тогда как  $m\dot{v}_{\perp} \sim eE^+$ . Поэтому приращение продольной скорости  $\Delta v_{\parallel}$  в  $k_{\parallel}\rho_{\perp}$  меньше, чем приращение поперечной скорости  $\Delta v_{\perp}$ . Так как  $\Delta v_{\perp}/v_{\perp} \sim \rho_{\perp}/\rho_{\parallel}$  (где через  $\rho_{\parallel}$  и  $\rho_{\perp}$  мы вновь обозначили начальное и конечное значения ларморовского радиуса соответственно) относительное изменение продольной скорости можно представить в виде  $\Delta v_{\parallel}/v_{\parallel} \sim (k_{\parallel}\rho_{\perp})\rho_{\perp}/\rho_{\parallel} \sim (k_{\parallel}\rho_{\parallel})W_a/T$ . При выполнении условия селективности  $k_{\parallel}\rho_{\parallel} < 1/A$  это оценка означает, что  $\Delta v_{\parallel}/v_{\parallel} < W_a/TA$ . При начальной энергии иона порядка  $T = 10 \text{ эВ}$  и конечной энергии  $W_a = 200 \text{ эВ}$  получаем  $\Delta v_{\parallel}/v_{\parallel} \approx \frac{1}{7}$ .

Амплитуду осцилляций  $\Delta v_{\parallel} \sim eE_z/m\omega$  продольной скорости, вызванных продольной компонентой электрического поля  $E_z$ , также можно выразить через параметры  $\rho_{\parallel}$  и  $\rho_{\perp}$ . Учитывая, что  $E_z/E^+ \sim (n_a/n_i)\rho_{\parallel}/a$ , а циклотронный период в  $1/k_{\parallel}$  раз меньше, чем время пролета через зону нагрева, получаем:  $\Delta v_{\parallel}/v_{\parallel} \sim (n_a/n_i)(\rho_{\perp}/a)k_{\parallel} < (n_a/n_i)\rho_{\perp}/aA$ . Это маленькая величина.

Как мы уже отмечали, электроны за период колебаний ВЧ поля несколько раз успевают пролететь через зону нагрева. Длина пробега электрона за период колебаний  $l_e = 2\pi v_e/\Omega_a$  в  $3 \div 4$  раза превышает длину зоны нагрева  $\ell$  на пределе выполнения условия селективности  $k_{\parallel} = 1/A$ . Следовательно, энергия электрона в поле антенны варьируется на величину порядка  $e\phi$ , где  $\phi \sim E_z\ell$  — перепад электрического потенциала в зоне нагрева. Используя соотношение  $E_z/E^+ \sim (n_a/n_i)\rho_{\parallel}/a$ , заключаем, что потенциальная энергия  $e\phi$  мала по сравнению с тепловой, так как

$$\frac{e\phi}{T} \sim \frac{n_a}{n_i} \frac{\rho_{\perp}}{a}. \quad (26)$$

К той же оценке приходим, рассматривая баланс токов в плазме, находящейся в ВЧ поле. Поскольку нагретые ионы вращаются синфазно, они создают радиальный ток порядка  $j_r \sim n_a\rho_{\perp}\Omega_a$ . В неоднородной плазме дивергенция этого тока  $\frac{1}{r}\frac{d}{dr}rj_r \sim j_r/a$  отлична от нуля, что приводит к поляризации плазмы. Излишний заряд снимается продольным электронным током  $j_z \sim n_e v_e (e\phi/T)(\ell/l_e)$ , причем множитель  $\ell/l_e$  отражает тот факт, что электроны компенсируют ионный заряд за время одного пролета через зону нагрева. Приравняв  $j_z$  к  $\ell j_r/a$ , вновь получаем (26).

Сделаем еще одно важное замечание. В проведенных расчетах мы использовали стандартный тензор диэлектрической проницаемости. В рамках такого подхода мы сделали вывод, что тензор диэлектрической проницаемости в первом приближении не меняется по направлению движения струи. Однако стандартный тензор диэлектрической проницаемости описывает *установившийся* отклик плазмы на воздействие ВЧ поля и вводится при предположении, что плазма не ограничена. В задаче о нагреве струи длина волны порядка длины струи, и поэтому использовавшийся нами традиционный подход имеет ограниченную применимость и, более того, приводит к очевидным парадоксам. Действительно, из (8) формально следует, что  $\text{Im}\varepsilon \rightarrow \infty$  при  $k_{\parallel} \rightarrow 0$ . Как следствие, подынтегральное выражение в (25) обращается в нуль в окрестности точки  $k_{\parallel} = 0$ , что приводит к уменьшению функции  $\mathcal{F}_a$  для выделяемого изотопа, но не его соседей  $s \neq a$ . Рис. 10 поясняет сказанное. На нем изображены вещественная и мнимая части множителя  $(N_{\parallel}^2 - \varepsilon + g)/(N_{\parallel}^2 - \varepsilon)$  в подынтегральном выражении и произведение двух других множителей  $\text{sinc}(k_{\parallel}\ell/2) \text{sinc}(k_{\parallel}v_{\parallel} - \omega + \Omega_s)L/2v_{\parallel}$  для случая, когда  $\omega$  совпадает с циклотронной частотой  $\Omega_a$  изотопа  $\text{Gd}^{157}$ .

В безграничной плазме упомянутая бесконечность диэлектрической проницаемости снимается учетом столкновений. В нашем случае более важен учет конечного времени пролета. Суть дела

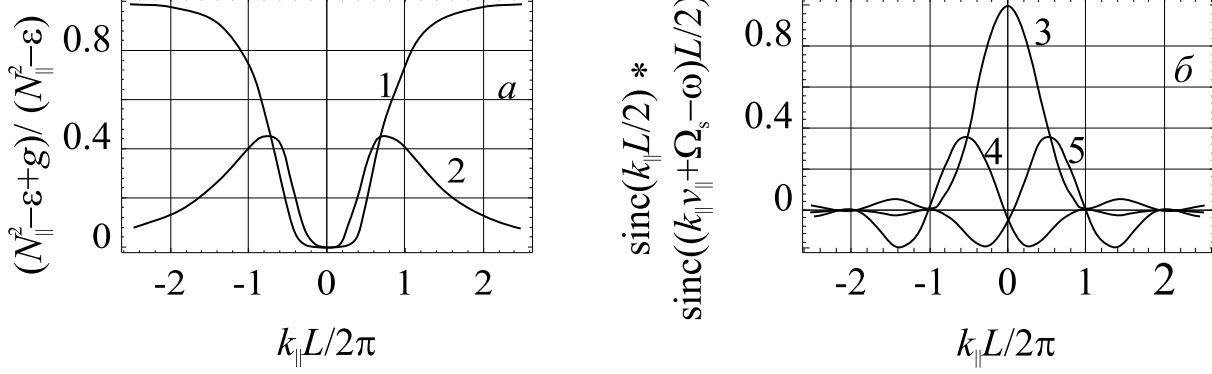


Рис. 10. а) Зависимость вещественной (кривая 1) и мнимой (2) частей  $(N_{\parallel}^2 - \varepsilon + g)/(N_{\parallel}^2 - \varepsilon)$  от  $k_{\parallel}$  для плазмы с параметрами  $T = 10$  эВ,  $n = 10^{12}$  см $^{-3}$ ,  $B = 3,0$  Тл,  $u = 0$ , частота  $\omega$  равна частоте  $\Omega_a$  изотопа  $\text{Gd}^{157}$ . Левополяризованная компонента поля антенны экранируется в длинноволновой части спектра. б) Зависимость множителя  $\text{sinc}(k_{\parallel}\ell/2)\text{sinc}(kv_{\parallel} - \omega + \Omega_s)L/2v_{\parallel}$  (при  $\ell = L = 2$  м) в подынтегральном выражении (25) от  $k_{\parallel}$  для изотопов  $\text{Gd}^{157}$ ,  $\text{Gd}^{158}$ ,  $\text{Gd}^{156}$  (кривые 3, 4 и 5 соответственно). Максимум этого множителя для выделяемого изотопа  $\text{Gd}^{157}$  приходится на длинноволновую часть спектра

легко понять, рассмотрев движение отдельной частицы. В высокочастотном поле она совершает осцилляторное движение со скоростью  $v \sim eE^+/m(\omega - \Omega)$ . При  $\omega \rightarrow \Omega$  нужно учесть доплеровский сдвиг частоты, что приводит к оценке  $v \sim eE^+/mk_{\parallel}v_{\parallel}$ . Если теперь формально устремить  $k_{\parallel}$  к нулю, то осцилляторная скорость формально стремится к бесконечности (таково происхождение расходимости в формуле (8) для  $\text{Im}\varepsilon$ ). В действительности же скорость частицы  $v \sim eE^+t/m$  линейно растет со временем, пока  $t < 2\pi/k_{\parallel}v_{\parallel}$ . При нагреве струи  $t$  есть время пролета  $\ell/v_{\parallel}$ , а  $k_{\parallel} \sim 2\pi/\ell$ , т.е.  $t \sim 2\pi/k_{\parallel}v_{\parallel}$ . Следовательно, использование “стационарного” тензора диэлектрической проницаемости, строго говоря, дает неверный результат при расчете длинноволновой части спектра ВЧ поля в плазме. Однако уточнение расчета должно только улучшить предсказания теории относительно селективности нагрева. Это следует из предшествующего обсуждения Рис. 10. Попытка такого уточнения предпринята в работе [5].

## 6. Заключение

Проведенные расчеты позволили установить основные параметры системы разделения изотопов гадолиния посредством селективного ионно-циклотронного нагрева. Так, при длине зоны нагрева  $\ell = 2$  м, начальной температуре плазменной струи  $T = 10$  эВ, радиусе  $a = 10$  см, плотности плазмы в струе  $n = 10^{12}$  см $^{-3}$  можно обеспечить достаточную селективность нагрева изотопа  $\text{Gd}^{157}$  при величине внешнего магнитного поля  $B = 3$  Тл. При этом необходимая для разделения энергия ионов  $W = 200 \div 300$  эВ достигается, если амплитуда тока в витке антенны равна  $I_0 = 60$  А при полном числе витков  $N = 150$ . Расчетное напряжение обхода на антенне при этом составляет 7 кВ, что соответствует индуктивной мощности на уровне 200 кВт.

При указанных параметрах системы полный эквивалентный ток в плазменной струе примерно равен  $15 \div 20$  А, обеспечивая производство 100 кг изотопа  $\text{Gd}^{157}$  в год. Производительность системы можно повысить, если увеличить напряженность ведущего магнитного поля, несколько уменьшив длину зоны нагрева и увеличив плотность струи.

При наличии резерва мощности можно перейти на нагрев на второй гармонике. Хотя из-за малого поглощения нагрев струи на второй гармонике, по-видимому, не будет иметь практического применения, мы рассмотрим его в нашей второй работе, так как он представляет определенный теоретический казус. В частности, в критерий селективности входит амплитуда ВЧ поля, а не только величина доплеровского сдвига частоты.

Авторы благодарят А.А. Бехтенева, А.В. Тимофеева и И.Н. Чуркина за интерес к работе.

Вывод гамильтониана, описывающего взаимодействие заряженной частицы и ВЧ поля, можно найти во многих публикациях; укажем в частности [9,11,12,2]. Тем не менее мы повторим этот вывод, чтобы приспособить его к особенностям рассматриваемой нами задачи. Мы не будем делать предварительных предположений относительно поляризации ВЧ поля. Чтобы иметь впоследствии возможность сравнить резонансный нагрев на первой и второй гармониках циклотронной частоты, мы учтем одновременно оба резонанса.

Игнорируя нелинейные эффекты, порождаемые релятивистской зависимостью циклотронной частоты от энергии, мы исходим из известного выражения для гамильтониана нерелятивистской частицы

$$\mathcal{H} = (\mathcal{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A}_0)^2 / 2m - \frac{e}{c} \mathbf{v} \mathbf{A}_1 \equiv \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1, \quad (\text{A1})$$

где  $\mathcal{P} = m\mathbf{v} + \frac{e}{c} \mathbf{A}_0$  — канонический импульс частицы,  $\mathbf{A}_0 = -\frac{1}{2}[\mathbf{r}, \mathbf{B}]$  — векторный потенциал стационарного (ведущего) магнитного поля. В используемой нами калибровке электрический потенциал равен нулю ( $\varphi \equiv 0$ ); при этом переменную часть векторного потенциала  $\mathbf{A}_1$  легко выразить через электрическое поле ВЧ колебаний. Представив последнее в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \{ \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} + \mathbf{E}_\omega^*(\mathbf{r}) e^{+i\omega t} \},$$

имеем

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{r}, t) = \frac{ic}{2\omega} \{ -\mathbf{E}_\omega e^{-i\omega t} + \mathbf{E}_\omega^* e^{+i\omega t} \}.$$

Взаимодействие частицы с ВЧ полем описывает последнее слагаемое  $\mathcal{H}_1$  в (A1). Чтобы получить уравнения движения частицы, усредненные по периоду циклотронного вращения, в  $\mathcal{H}_1$  следует выделить резонансную часть  $\mathcal{H}_1^{res}$ , отбросив быстро осциллирующие члены. Для этого выполним каноническое преобразование импульсов и координат, используя производящую функцию

$$\Phi(\alpha, \psi; \mathcal{P}_x, \mathcal{P}_y) = -\frac{2}{m\Omega} \frac{(\mathcal{P}_x \cos \psi + \mathcal{P}_y \sin \psi)(\mathcal{P}_x \sin \alpha + \mathcal{P}_y \cos \alpha)}{\cos(\psi + \alpha)}.$$

Переход от  $\mathcal{P}_x, x, \mathcal{P}_y, y$  к новым каноническим переменным действие-угол  $J, \alpha, \Psi, \psi$  осуществляется по формулам

$$\begin{aligned} J &= -\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}, & x &= -\frac{\partial \Phi}{\partial \mathcal{P}_x}, \\ \Psi &= -\frac{\partial \Phi}{\partial \psi}, & y &= -\frac{\partial \Phi}{\partial \mathcal{P}_y}. \end{aligned}$$

Новые импульсы  $J = m\Omega\rho_\perp^2/2$  и  $\Psi = m\Omega\rho_\perp^2/2$  пропорциональны магнитному потоку соответственно через площадь ларморовского кружка (радиуса  $\rho_\perp$ ) и площадь внутри окружности, проходящей через ларморовский центр частицы (на расстоянии  $r_c$  от оси системы  $x = y = 0$ ). Декартовы координаты  $x, y$  связаны с новыми каноническими переменными соотношениями (Рис. 7)

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{2\Psi}{m\Omega}} \cos \psi + \sqrt{\frac{2J}{m\Omega}} \sin \alpha, \\ y &= \sqrt{\frac{2\Psi}{m\Omega}} \sin \psi + \sqrt{\frac{2J}{m\Omega}} \cos \alpha. \end{aligned}$$

Поскольку невозмущенная часть гамильтониана

$$\mathcal{H}_0 = \Omega J + \frac{p_\parallel^2}{2m}$$

зависит только от  $J$  и  $\mathcal{P}_\parallel = mv_\parallel$ , в первом приближении  $J, \mathcal{P}_\parallel, \Psi$  и  $\psi$  не изменяются, а  $\dot{\alpha} = \Omega, \dot{z} = p_\parallel/m$ . Напомним, что мы рассматриваем взаимодействие с ВЧ колебаниями положительно



заряженных ионов, полагая  $\Omega > 0$ . Следующая часть в  $\mathcal{H}_1$ , нужно выразить  $v\mathbf{A}_1$  через новые переменные и после этого оставить только члены, содержащие медленно меняющиеся фазовые множители  $e^{\pm i(\alpha - \omega t)}$  (при нагреве на первой гармонике) и  $e^{\pm i(2\alpha - \omega t)}$  (при нагреве на второй гармонике).

Выделение резонансных членов упрощается, если разложить ВЧ поле на колебания с правой, левой и продольной поляризациями. Для этого введем спиральную систему координат с ортами

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_- &= \frac{\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y}{\sqrt{2}} = \frac{\mathbf{e}_r + i\mathbf{e}_\varphi}{\sqrt{2}} e^{+i\varphi}, \\ \mathbf{e}_+ &= \frac{\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y}{\sqrt{2}} = \frac{\mathbf{e}_r - i\mathbf{e}_\varphi}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi}, \\ \mathbf{e}_\parallel &= \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

Проекция  $E^j = \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}^j = \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_j^*$  на соответствующие орты дадут комплексную амплитуду левой ( $j=+$ ), правой ( $j=-$ ) и продольной ( $j=\parallel$ ) поляризаций:

$$\begin{aligned} E^+ &= \frac{R_r + iE_\varphi}{\sqrt{2}} e^{+i\varphi}, \\ E^- &= \frac{R_r - iE_\varphi}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi}, \\ E^\parallel &= E_z. \end{aligned}$$

В результате находим, что

$$\mathcal{H}_1 = \frac{ie}{2\omega} \sqrt{\frac{\Omega J}{m}} \{ E_\omega^+ e^{i\alpha - i\omega t} - E_\omega^- e^{-i\alpha - i\omega t} \} + \frac{ie}{2\omega} v_\parallel E_\omega^\parallel e^{-i\omega t} + \text{К.С.},$$

где К.С. символизирует слагаемые, комплексно сопряженные выписанным явно.

Перед выделением резонансных членов следует учесть, что амплитуды  $E_\omega^j$  также являются функциями координат, и разложить их вблизи положения ларморовского центра частицы по степеням ларморовского радиуса, т.е. по степеням  $\sqrt{J}$ . Это разложение также удобно делать в спиральных координатах, введя обозначения  $r^\pm = (x \pm iy)/\sqrt{2}$ . В точке, где расположен ларморовский центр,  $r^\pm = \sqrt{\Omega\Psi/m} e^{\pm i\psi} = r_c e^{\pm i\psi} / \sqrt{2}$ . Для любой из амплитуд при этом имеем

$$\begin{aligned} E_\omega^j(\mathbf{r}) &= E_\omega^j + (-i\sqrt{J/m\Omega} e^{+i\alpha}) \frac{\partial E_\omega^j}{\partial r^-} + (+i\sqrt{J/m\Omega} e^{-i\alpha}) \frac{\partial E_\omega^j}{\partial r^+} \\ &+ \frac{1}{2} (-i\sqrt{J/m\Omega} e^{+i\alpha})^2 \frac{\partial^2 E_\omega^j}{\partial r^{-2}} + \frac{1}{2} (+\sqrt{J/m\Omega} e^{-i\alpha})^2 \frac{\partial^2 E_\omega^j}{\partial r^{+2}} \\ &+ \frac{\partial^2 E_\omega^j}{\partial r^- \partial r^+} (-i\sqrt{J/m\Omega} e^{+i\alpha}) (+i\sqrt{J/m\Omega} e^{-i\alpha})^2 + \dots, \end{aligned}$$

где в правой части равенства  $E_\omega^j$  и производные вычисляются в точке ларморовского центра.

Оставив наибольший член разложения для каждой поляризации при  $\omega \approx \Omega$  получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1^{res} &= \frac{ie}{2\omega} \sqrt{\frac{\Omega J}{m}} E_\omega^+ e^{i\alpha - i\omega t} \\ &+ \frac{e}{2\omega} v_\parallel \sqrt{\frac{\Omega J}{m}} \frac{\partial E_\omega^\parallel}{\partial r^-} e^{i\alpha - i\omega t} \\ &+ \frac{ie}{4\omega} \sqrt{\frac{J^{3/2}}{m^{3/2}\Omega}} \frac{\partial^2 E_\omega^-}{\partial r^{-2}} e^{i\alpha - i\omega t} + \text{К.С.} \end{aligned} \tag{A2}$$

Для ВЧ поля с заданным значением азимутального числа  $m$  производные вычисляются по следующим правилам:

$$\frac{\partial E_\omega^\parallel}{\partial r^-} = \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{2}} r^m \frac{\partial E_\omega^\parallel}{\partial r r^m}, \quad \frac{\partial E_\omega^\pm}{\partial r^-} = \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{2}} r^{m\pm 1} \frac{\partial E_\omega^\pm}{\partial r r^{m\pm 1}}$$

и т.д. Наличие всех трех амплитуд  $E_{\omega}^j$  в (A2) означает, что частица может обмениваться энергией с колебаниями любой поляризации. Однако при равных амплитудах поляризаций второе слагаемое меньше первого, а третье меньше второго в  $k_{\perp} \rho_{\perp}$  раз. Практически это означает, что взаимодействием иона с колебаниями правой поляризации  $E_{\omega}^{-}$  всегда можно пренебречь, даже если колебания с левой поляризацией  $E_{\omega}^{+}$  сильно экранируются. Что касается продольной поляризации  $E_{\omega}^{\parallel}$ , то в рассматриваемом нами случае она мала, поэтому можно оставить только первое слагаемое в (A2), соответствующее взаимодействию иона с колебаниями левой поляризации  $E_{\omega}^{+}$ . Заметим также, что поведение всех слагаемых в правой части в (A2) одинаково вблизи оси системы, в частности все они обращаются в нуль при  $r = 0$  кроме случая, когда  $m = -1$ .

Для резонансного взаимодействия на второй гармонике циклотронной частоты выделение резонансной части гамильтониана проводится совершенно аналогично. Приведем только главный член, описывающий взаимодействие иона с левополяризованными колебаниями:

$$\mathcal{H}_1^{res} = \frac{e}{2\omega} \frac{J}{m} \frac{\partial E_{\omega}^{+}}{\partial r^{-}} e^{i2\alpha - i\omega t} + \text{К.С.} \quad (\text{A3})$$

## Литература

- [1] *Муромкин Ю.А.* // Итоги науки и техники. Физика плазмы. М.: ВИНТИ. 1991. Т. 12. С. 83.
- [2] *Д.А. Панов, А.В. Тимофеев.* // Физика Плазмы. 1995. Т. 21. С. 1092.
- [3] *Роуз Д.Дж., Кларк М.* Физика плазмы и управляемые термоядерные реакции. М.: Госатомиздат. 1963.
- [4] *Dawson J.M., Kim H.C., Arnush D., Fried B.D., Gould R.W., Heflinger L.O., Kennel C.F., Romesser T.E., Stenzel R.L., Wong A.Y., Wuerker R.F.* // Phys. Rev Lett. 1996. V. 37. P. 1547.
- [5] *А.Л. Устинов.* // Физика Плазмы. 1996. Т. 22. С. 170.
- [6] Таблицы физических величин / Под ред. акад. И.К. Кикоина. М.: Атомиздат. 1976. С. 847.
- [7] *Ахиезер А.И., Лапшин В.И., Степанов К.Н.* // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1976. Т. 70. С. 81.
- [8] *Котельников И.А, Яковченко С.Г.* // Физика плазмы. 1991. Т. 17. С. 301.
- [9] *Нейштадт А.И., Тимофеев А.В.* // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1987. Т. 93. С. 1706.
- [10] *Тимофеев А.В., Харитонов К.Ю.* // Физика Плазмы. 1989. т. 15. с. 674.
- [11] *Kotelnikov I.A., Stupakov G.V.* // Phys. Fluids B. 1990. V. 2. P. 881.
- [12] *Cohen B.I., Cohen R.H., Nevins W.M., Rognlien T.D.* // Rev. Mod. Phys. 1991. V. 63. P. 949.

*В.И. Волосов, И.А. Котельников, С.Г. Кузьмин*

**О разделении изотопов гадолиния  
методом изотопически селективного  
ИЦР нагрева**

*V.I. Volosov, I.A. Kotelnikov, S.G. Kuzmin*

**On separation of gadolinium's isotopes  
by means of isotopically selective ICRH**

ИЯФ 96-91

Ответственный за выпуск А.М. Кудрявцев

Работа поступила 24.12. 1996 г.

---

Сдано в набор 25.12.1996 г.

Подписано в печать 25.12.1996 г.

Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 1.8 печ.л., 1.5 уч.-изд.л.

Тираж 280 экз. Бесплатно. Заказ № 91

---

Обработано на IBM PC и отпечатано на  
ротапринте ГНЦ РФ "ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН",  
*Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.*