

Государственный научный центр
Институт ядерной физики
им. Г.И. Будкера СО РАН

Лотов К. В.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ
УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКОГО ПУЧКА
В КИЛЬВАТЕРНОМ УСКОРИТЕЛЕ

ИЯФ 97-5

Новосибирск
1997

**Численное моделирование динамики
ультрарелятивистского пучка
в кильватерном ускорителе**

К. В. Лотов

Институт ядерной физики им.Г.И. Будкера 630090, Новосибирск, Россия

Аннотация

Для изучения долговременной динамики ультрарелятивистского пучка (драйвера) в кильватерном ускорителе была разработана программа LCODE, в которой плазма описывается как электронная жидкость, а пучок — как совокупность отдельных частиц. С помощью LCODE исследована эволюция последовательности коротких сгустков в плазме. Показано, что при правильной расстановке сгустков быстро устанавливается радиальное равновесие, при котором все частицы драйвера находятся в фокусирующей фазе кильватерной волны, причём действие фокусирующей силы уравновешено поперечным давлением пучка. После установления равновесия драйвер тормозится, почти не меняя формы. Потерявшие энергию частицы смещаются в область слабой фокусировки и теряются. За счёт такого “самоочищения” процесс передачи энергии последнему сгустку продолжается даже после потери драйвером более половины своих частиц.

**Simulation of ultrarelativistic beam dynamics
in plasma wake-field accelerator**

K. V. Lotov

Budker Institute of Nuclear Physics, 630090 Novosibirsk, Russia

Abstract

To study the long-term dynamics of ultrarelativistic particle beams (drivers) in plasma, a two-dimensional hybrid code, LCODE, has been developed, in which the plasma is treated as an electron fluid, while the beam is treated as an ensemble of particles. Using LCODE, the evolution of the driver composed of several short particle bunches is studied. When properly positioned, the bunches are shown to achieve a radial equilibrium in which all driver particles are focused by the plasma, and the focusing force is balanced by the driver transverse pressure. After the establishment of the radial equilibrium, the driver loses much of its energy with little distortion in shape. Then the driver particles which lose a major part of their energy eventually shift to the regions of a weak focusing and get lost. Due to this “self-cleaning”, the driver generates a good-quality wakefield even after the particle loss of more than the half.

1. Введение

Увеличение размеров и стоимости современных ускорителей стимулирует поиск новых идей, которые бы обеспечили дальнейшее продвижение в область сверхвысоких энергий с разумными финансовыми затратами. Одна из таких идей — ускорение частиц в плазме, или кильватерное ускорение (см. обзоры [1,2]). Создать в плазме регулярное ускоряющее поле можно различными способами; в данной работе рассматривается только кильватерное ускорение с ультрарелятивистскими сгустками заряженных частиц в качестве драйвера (т. е. создателя поля).

Вопрос о принципиальной возможности раскачать частицами требуемую плазменную волну исследован достаточно полно, и ответ на него положительный [2]. Однако для практического применения кильватерного ускорения одного только большого электрического поля недостаточно — это поле должно сохранять регулярную структуру на макроскопических расстояниях. Иначе говоря, драйвер должен достаточно долго двигаться в плазме без разрушения.

Динамика ультрарелятивистских сгустков в плазме представляется весьма сложным вопросом для аналитического исследования. Даже при малой плотности драйвера задача оказывается нелинейной, и потому решается только для простейших моделей [3–6]. Более детальный анализ с неизбежностью требует численного моделирования. Численное же моделирование затрудняется существенной неоднородностью процесса и наличием нескольких временных масштабов [5]: периода плазменных колебаний $2\pi\omega_p^{-1}$, характерного времени поперечного движения частиц драйвера $\tau_f \sim \sqrt{\gamma_b}\omega_p^{-1}$ и времени замедления $\tau_d \sim \gamma_b\omega_p^{-1}$ (γ_b — релятивистский фактор драйвера, ω_p — плазменная электронная частота).

При единообразном описании плазменных электронов и частиц драйвера (например, методом частиц в ячейке [3,7]) временной шаг определяется наименьшим из масштабов (ω_p^{-1}), и потому изучение долговременной динамики драйвера (времена $\sim \tau_d$) требует больших вычислительных мощностей. Возможно, этим объясняется тот факт, что в большинстве ранее опубликованных работ по двумерному моделированию кильватерного ускорения [3,4,8,9] релятивистский фактор драйвера выбирался относительно небольшим ($\gamma_b \sim 10 \div 50$), в то время как практический интерес представляет случай $\gamma_b \gtrsim 1000$.

Значительно повысить эффективность счёта можно, описывая плазму как релятивистскую электронную жидкость, а пучок — как совокупность частиц [10]. При такой постановке задачи временной шаг может быть выбран в $\sqrt{\gamma_b}$ раз бóльшим, поскольку он определяется поперечной динамикой пучка (времена $\sim \tau_f$). Кроме того, вычисление реакции плазмы на каждом временном шаге ведётся разностным методом и потому требует меньшего времени. Также немаловажно, что найденный отклик плазмы на пучок не содержит численных шумов, что облегчает интерпретацию и представление результатов. Заметим, что моделирование драйвера с большим γ_b нужно не только для соответствия численного и реального экспериментов, но и для чёткой идентификации эффектов, связанных с поперечным (фокусировка) и продольным (торможение) движением драйвера (при

$\gamma_b \lesssim 50$ установление радиального равновесия сгустков и их торможение происходят на одних и тех же временах).

Недостаток указанного метода состоит в невозможности исследовать динамику сгустков большой плотности, так как последние приводят к быстрому опрокидыванию плазменной волны и нарушению применимости гидродинамического приближения.

Описанный выше подход был реализован в коде LCODE, разработанном специально для изучения долговременной динамики ультрарелятивистских сгустков в кильватерном ускорителе. Идея и структура кода описаны в разделе 2 настоящей статьи. В разделе 3 с помощью LCODE моделируется эволюция драйвера, состоящего из последовательности коротких сгустков. Параметры драйвера выбраны с ориентацией на готовящийся эксперимент [11,12]. Основные результаты работы сформулированы в заключительном разделе 4.

2. Описание кода

При моделировании динамики ультрарелятивистских сгустков в плазме удобно пользоваться “сопутствующей” системой координат (r, φ, ξ) , получающейся из обычной цилиндрической системы (r, φ, z) заменой $\xi = z - ct$, где c — скорость света (Рис. 1). В “сопутствующей” системе частицы драйвера медленно смещаются в направлении убывания ξ .

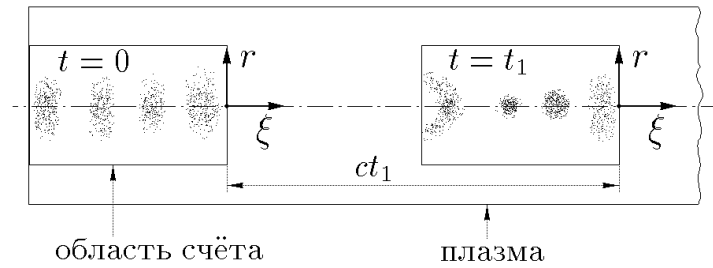


Рис. 1: Геометрия задачи.

В рамках гидродинамического приближения поведение плазмы определяется системой уравнений

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} (\vec{j}_b - en\vec{v}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\text{div } \vec{E} = 4\pi(en_i - en + qn_b), \quad (3)$$

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{p} = -e\vec{E} - \frac{e}{c} [\vec{v} \times \vec{H}]. \quad (4)$$

Здесь n , \vec{v} и $\vec{p} \equiv \gamma m \vec{v}$ — плотность, скорость и импульс плазменных электронов, соответственно; n_i — плотность ионов (мы их считаем неподвижными, из-за массивности они не успевают существенно сместиться за время прохождения драйвера мимо них); e — элементарный заряд ($e > 0$), q — заряд частиц драйвера. В силу ультрарелятивизма драйвера и предполагаемой малости его углового разброса при вычислении реакции плазмы можно считать, что ток драйвера \vec{j}_b и его плотность n_b связаны соотношением $\vec{j}_b = (0, \gg 0, \gg qn_b c)$. Из-за симметрии задачи компоненты поля H_r , H_z и E_φ , а также φ -компонента скорости электронов тождественно равны нулю.

Если время эволюции драйвера много больше времени его прохождения через заданное сечение плазмы, то решение системы (1)–(4) имеет вид бегущей волны, в которой все характеризующие плазму величины зависят от z и t только в комбинации $z - ct$, а плотность драйвера есть заданная функция от r и ξ (на каждом временном шаге — своя).

Для волны, бегущей со скоростью света, уравнения движения плазмы можно упростить, используя сохранение обобщённого импульса в системе:

$$\text{rot } \vec{p} - \frac{e\vec{H}}{c} = 0, \quad \frac{\partial p_r}{\partial \xi} - \frac{\partial p_z}{\partial r} = \frac{eH_\varphi}{c} \quad (5)$$

(это уравнение следует из (2) и (4), [13]). С учётом (5), z -компонента (4) принимает вид

$$(c - v_z) \frac{\partial p_z}{\partial \xi} = v_r \frac{\partial p_r}{\partial \xi} + eE_z,$$

откуда

$$\frac{eE_z}{c} = -\frac{\partial(\gamma mc - p_z)}{\partial \xi}. \quad (6)$$

Сила $\vec{F} = (q(E_r - H_\varphi), \gg 0, \gg qE_z)$, действующая на ультрарелятивистский драйвер, потенциальна. Это следует из (1) и (2):

$$\frac{\partial(E_r - H_\varphi)}{\partial \xi} = \frac{\partial E_z}{\partial r} = -\frac{4\pi e}{c} n v_r. \quad (7)$$

Из сравнения (6) и (7) видно, что в плазме роль силового потенциала играет величина

$$\Phi = \gamma mc - p_z, \quad (8)$$

так что

$$\vec{F} = -\frac{qc}{e} \nabla(\gamma mc - p_z). \quad (9)$$

Заметим, что полученное выражение для силы верно и в случае неосесимметричного драйвера.

Дальнейшие преобразования уравнений удобно делать в безразмерных переменных

$$\tilde{r} = \frac{r\omega_p}{c}, \quad \tilde{\xi} = \frac{\xi\omega_p}{c}, \quad \tilde{t} = \omega_p t, \quad \omega_p = \sqrt{\frac{4\pi n_i e^2}{m}}, \quad (10)$$

$$N = \frac{n}{n_i} \left(1 - \frac{v_z}{c}\right), \quad \tilde{j}_b = \frac{j_b z}{en_i c}, \quad \tilde{p}_r = \frac{p_r}{mc}, \quad \tilde{p}_z = \frac{p_z}{mc}, \quad (11)$$

$$\tilde{\Phi} = \gamma - \tilde{p}_z, \quad \tilde{E}_z = \frac{E_z}{E_0}, \quad \tilde{H}_\varphi = \frac{H_\varphi}{E_0}, \quad E_0 = \sqrt{4\pi n_i mc^2}. \quad (12)$$

В новых переменных уравнения (1)–(4) приводятся к виду

$$N = 1 + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \tilde{r} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{r}}, \quad (13)$$

$$\tilde{p}_z = \frac{1 + \tilde{p}_r^2 - \tilde{\Phi}^2}{2\tilde{\Phi}}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial \tilde{r}} = \frac{N \tilde{p}_r}{\tilde{\Phi}}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \tilde{r} \tilde{H}_\varphi - \frac{N}{\tilde{\Phi}} \tilde{H}_\varphi = \frac{\partial \tilde{j}_b}{\partial \tilde{r}} - \tilde{p}_z \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \frac{N}{\tilde{\Phi}} + \frac{\tilde{p}_r}{\tilde{\Phi}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \frac{\tilde{r} N \tilde{p}_r}{\tilde{\Phi}} + \frac{N \tilde{p}_r \tilde{E}_z}{\tilde{\Phi}^2}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial \tilde{p}_r}{\partial \tilde{\xi}} = \frac{\partial \tilde{p}_z}{\partial \tilde{r}} + \tilde{H}_\varphi, \quad (17)$$

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{\xi}} = -\tilde{E}_z \quad (18)$$

(см. Приложение А). Поскольку никакие возмущения не могут двигаться вверх по ξ , решение системы (13)–(18) для заданного тока $\tilde{j}_b(\tilde{r}, \gg \tilde{\xi})$ строится последовательно по слоям, начиная от головы драйвера ($\tilde{\xi} = 0$) и двигаясь в сторону убывания $\tilde{\xi}$. До прилёта драйвера возмущений в плазме не было, потому в качестве начальных условий (при $\tilde{\xi} = 0$) выбираем $\tilde{p}_r \equiv 0$ и $\tilde{\Phi} \equiv 1$.

Поля, найденные из (13)–(18), используются для вычисления координат и импульсов частиц драйвера на следующем временном шаге. Каждая частица драйвера характеризуется пятью величинами: r - и ξ -координатами, r - и z -компонентами импульса (p_{br} и p_{bz}) и моментом импульса $M = r p_{b\varphi}$. При вычислении плотности драйвера $n_b(r, \xi)$ каждая частица “размазывается” по кольцу, толщина которого $\Delta\tilde{\xi}$ равна шагу сетки по $\tilde{\xi}$, а ширина $\Delta\tilde{r}$ является регулируемым параметром ($\Delta\tilde{r} \ll 1$). Начальные значения координат и импульсов частиц задаются в момент времени, когда весь драйвер вошёл в плазму (Рис. 1).

3. Динамика последовательности сгустков

Исследуем поведение ультрарелятивистской последовательности электронных сгустков в плотной плазме. Такая конфигурация драйвера позволяет достичь большего, нежели в случае одного сгустка, ускоряющего поля при заданном пиковом токе. Начальную плотность драйвера выберем в виде

$$n_b(r, \xi) = 0.03 \gg n_i f(\xi) \exp\left(-\frac{\omega_p^2 r^2}{4c^2}\right), \quad (19)$$

где функция $f(\xi)$ принимает значения 0 или 1 так, что каждый сгусток, за исключением последнего, изначально находится в тормозящем и фокусирующем поле, последний же сгусток частично попадает в ускоряющее поле (Рис. 2а). Более подробно процедура оптимизации драйвера [то есть, нахождения функции $f(\xi)$] описана в [5]. Начальная энергия всех частиц равна $1000 mc^2$. Начальный угловой разброс пучка $\Delta\alpha$ мал, но отличен от нуля:

$$\Delta\alpha = \frac{\sqrt{\langle p_{br}^2 + p_{b\varphi}^2 \rangle}}{p_{bz}} = \sqrt{2} \cdot 10^{-4}, \quad (20)$$

причём вероятность частице, находящейся в точке (r, φ, ξ) , иметь импульс $(p_{br}, \gg p_{b\varphi}, \gg p_{bz})$, пропорциональна

$$f(\xi) \gg \exp\left(-\frac{p_{br}^2 + p_{b\varphi}^2}{\Delta\alpha^2 p_{bz}^2} - \frac{\omega_p^2 r^2}{4c^2}\right). \quad (21)$$

Общее число участвующих в численном эксперименте частиц равно 65000. “Размер” каждой частицы $\Delta\tilde{r} \sim 0.2$.

Если плотность плазмы равна $10^{15} \gg \text{см}^{-3}$, то выбранные выше параметры соответствуют пучку с максимальным током 0.5 кА, имеющему эмиттанс $\sim 5 \cdot 10^{-6} \text{ см} \cdot \text{рад}$, энергию 500 МэВ и радиус $\sim 0.2 \text{ мм}$.

Эволюцию драйвера в плазме можно условно разбить на три этапа. На первом этапе происходит установление равновесного поперечного размера сгустков. В зависимости от знака радиальной силы $q(E_r - H_\varphi)$ сгустки либо сжимаются кильватерной волной, либо дефокусируются и теряются на стенках. Поскольку величина фокусирующей силы зависит от ξ , сгустки сжимаются не синхронно, приводя к образованию перетяжек и пиков плотности то в одном, то в другом сечении драйвера. Так на Рис. 2b показан момент, когда частицы на заднем фронте первого сгустка впервые достигли оси, образовав пик плотности. Длительность первого этапа соответствует нескольким радиальным колебаниям частиц первого сгустка (находящегося в самом слабом фокусирующем поле). В рассматриваемом случае это время порядка $1000 \omega_p^{-1}$.

Сжатие сгустков приводит к существенному увеличению амплитуды кильватерной волны (Рис. 4) и небольшому сдвигу её фазы. Сдвиг фазы, по-видимому, объясняется нейтрализацией тока пучка дрейфом плазменных электронов [5]: при уменьшении радиуса сгустков размер области, в которой течёт обратный плазменный ток, уменьшается, а средняя направленная скорость электронов увеличивается. Из-за сдвига фазы максимум ускоряющего поля смещается назад, а небольшая доля драйвера (передние части сгустков) оказывается в дефокусирующей фазе и теряется

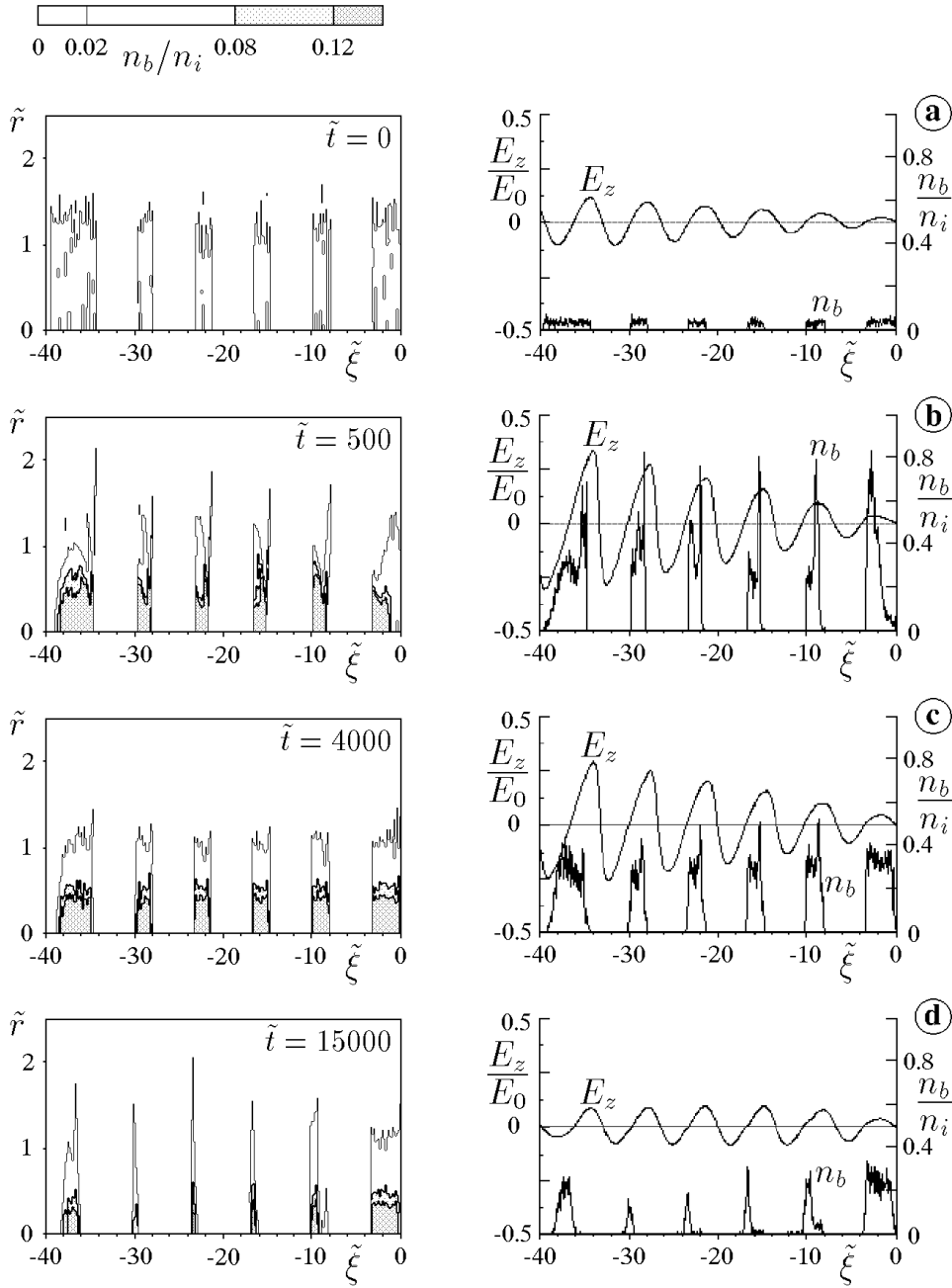


Рис. 2: Пространственное распределение плотности драйвера (слева; показаны линии постоянной плотности), электрическое поле и плотность драйвера на оси (справа) в различные моменты времени.

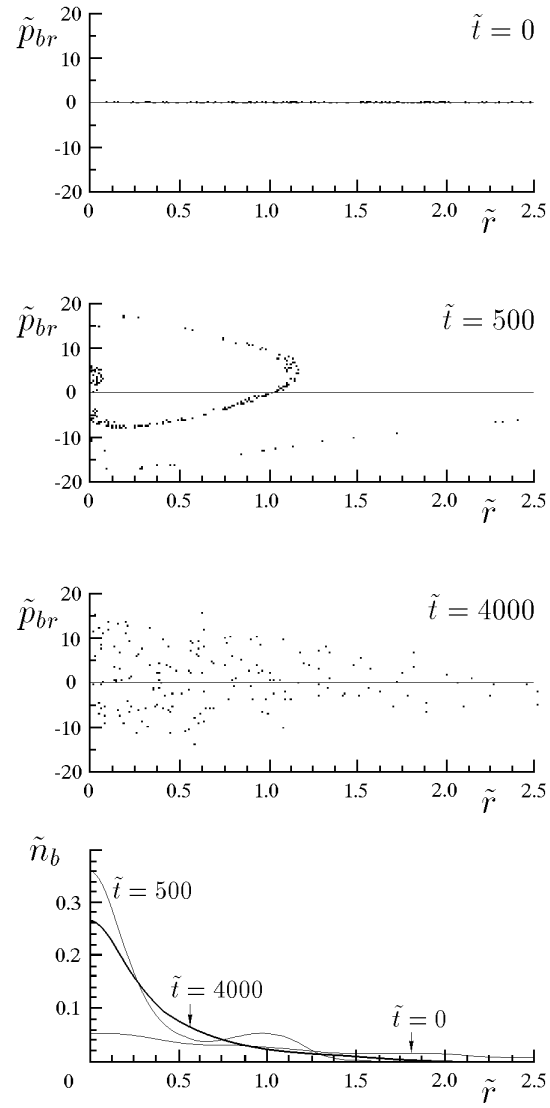


Рис. 3: Фазовые портреты драйвера в сечении $\tilde{\xi} = -22.5$ в различные моменты времени; соответствующие радиальные распределения плотности драйвера в том же сечении.

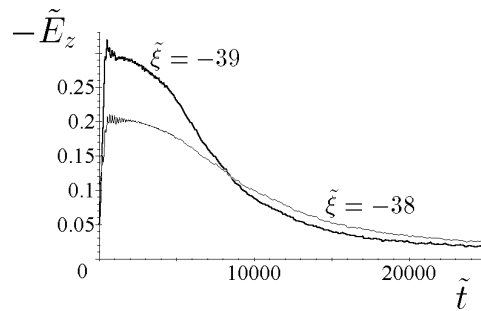


Рис. 4: Временная зависимость электрического поля на оси в точках $\tilde{\xi} = -38$ (максимум поля в начальный момент времени) и $\tilde{\xi} = -39$ (максимум поля при $\tilde{t} \sim 2000$).

(Рис. 2b). Установление равновесного радиуса сгустков сопровождается потерей эмиттанса пучка (Рис. 3).

При сжатии сгустков потенциал $\tilde{\Phi}$ на оси увеличивается, то есть, потенциальная яма, в которой происходят радиальные колебания частиц, углубляется (это можно видеть из Рис. 2, поскольку $\tilde{\Phi}$ есть интеграл от \tilde{E}_z). Изменение глубины ямы не является адиабатическим (медленным) по сравнению с периодом радиальных колебаний частиц в ней. Как следствие, некоторые частицы приобретают поперечный импульс, достаточный для вылета из ямы (хотя количество таких частиц невелико).

Интересно отметить, что в установившемся состоянии радиус сгустков примерно постоянен (Рис. 2с), в то время как угловой разброс растёт с увеличением фокусирующей силы (Рис. 5). Радиальное распределение плотности сгустков оказывается существенно негауссовским и сильно пикировано вблизи оси (Рис. 3).

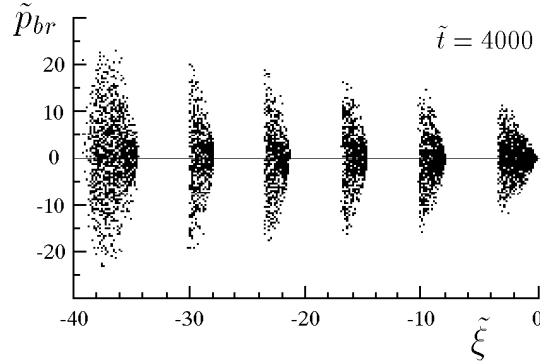


Рис. 5: Радиальный импульс частиц драйвера как функция продольной координаты в момент времени $t = 4000 c/\omega_p$ (показана каждая десятая частица).

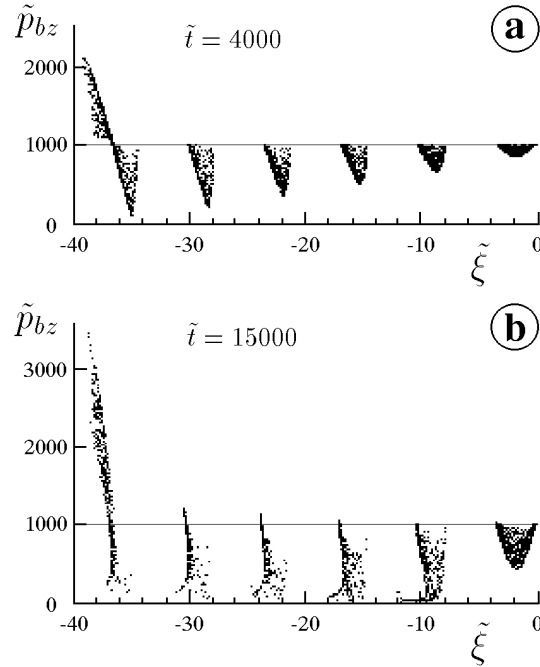


Рис. 6: Продольный импульс частиц драйвера как функция продольной координаты в моменты времени $t = 4000 c/\omega_p$ (a) и $t = 15000 c/\omega_p$ (b) (показана каждая двадцатая частица).

На втором этапе ($t < \tau_d$) форма сгустков и угловое распределение частиц не претерпевают рез-

ких изменений, меняется только энергия сгустков (Рис. 6а). Медленное уменьшение электрического поля (Рис. 4) объясняется радиальным уходом частиц. Когда частицы, получившие большой поперечный импульс при сжатии драйвера, далеко отклоняются от оси, амплитуда кильватерного поля несколько уменьшается, и потенциальная яма становится мельче. Теперь другие частицы могут покинуть яму, их уход влечёт дальнейшее уменьшение кильватерной волны, и так далее. В нашем случае второму этапу соответствуют времена $1000 \lesssim \tilde{t} \lesssim 5000$.

На третьем этапе происходит постепенное разрушение драйвера. Главная причина тому — дефокусировка потерявших энергию частиц. Когда энергия электронов драйвера становится сравнимой с массой покоя, эти электроны перестают быть ультрарелятивистскими и потому быстро отстают от “сопутствующей” системы координат и от более энергичных частиц. При этом основной причиной отставания является не уменьшение модуля скорости, а поперечные колебания частицы, уменьшающие её среднюю продольную скорость на величину порядка $c\delta\alpha^2$, где $\delta\alpha = |p_{b\perp}|/p_{bz} = \sqrt{p_{br}^2 + p_{b\varphi}^2}/p_{bz}$ — угол между направлением скорости и осью \tilde{z} . По мере отставания медленные частицы попадают в область слабой фокусировки и теряются (Рис. 6b). Благодаря такому “самоочищению” сгустков замедленные частицы не попадают в область ускоряющего поля, и потому драйвер продолжает возбуждать кильватерную волну, даже потеряв более половины своих частиц (Рис. 2d). Замечательным образом оказывается, что истощение драйвера не приводит к большому сдвигу фазы волны (Рис. 4), так что ведомый сгусток продолжает ускоряться, хотя и меньшими темпами (Рис. 7). Кроме того, поскольку уменьшение продольного поля сопровождается уменьшением фокусирующей силы, в ускоряемом сгустке “выживают” только частицы с малыми поперечными импульсами.

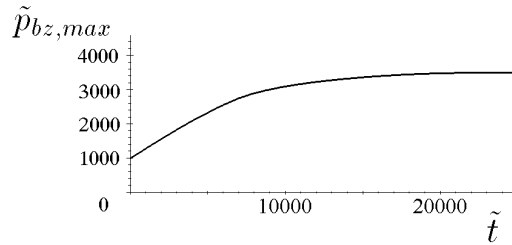


Рис. 7: Энергия наиболее быстрых частиц как функция времени.

Разумеется, отставанию из-за углового разброса подвержены все частицы, а не только самые медленные. Для волны с характерным радиальным масштабом c/ω_p и амплитудой поля $\sim E_0$ простейшие оценки показывают, что ультрарелятивистский электрон смещается по ξ на расстояние $\sim c/\omega_p$ за время $\sim \tau_d$. Действительно, глубина потенциальной ямы, в которой происходят радиальные колебания электрона, порядка $eE_0c/\omega_p \sim mc^2$. Если электрон с релятивистским фактором γ_b совершает в такой яме колебания с амплитудой $\sim c/\omega_p$, то его поперечный импульс $\sim \sqrt{\gamma_b} mc$ (поскольку $p_{b\perp}^2/(2\gamma_b m) \sim mc^2$) и

$$\delta\alpha \sim \frac{1}{\sqrt{\gamma_b}}. \quad (22)$$

Отсюда характерное время отставания (даже без учёта потери энергии)

$$\tau_{ang} \sim \frac{c/\omega_p}{c - v_{bz}} \sim \frac{\omega_p^{-1}}{\delta\alpha^2} \sim \gamma_b \omega_p^{-1} \sim \tau_d.$$

В рассматриваемом случае, однако, этот эффект не успевает проявить себя негативным образом, хотя, сравнивая рисунки 2а–2d, можно увидеть отставание задних фронтов сгустков (где угловой разброс максимален).

В процессе разрушения драйвера фаза кильватерной волны движется вперёд, а не назад (Рис. 2, 4). Это объясняется двумя эффектами. Во-первых, уменьшается средний ток драйвера, что влечёт уменьшение обратного плазменного тока и укорочение периода кильватерной волны в неподвижной системе отсчёта. Во-вторых, уменьшается вклад последних сгустков в волну. Поскольку все сгустки (кроме первого) расположены позади максимумов \tilde{E}_z , каждый сгусток немного сдвигает фазу волны назад по сравнению с полем одинокого (первого) сгустка [5]. По мере истощения последних сгустков кильватерное поле приближается к полю первого сгустка, то есть фаза движется вперёд даже без учёта нелинейного сноса плазменной волны обратным плазменным током.

Концом третьего этапа ускорения естественно назвать момент, когда амплитуда кильватерной волны падает настолько, что ускоряемый сгусток своим полем начинает существенно искажать фазу волны, и поле E_z на его заднем фронте меняет знак ($\tilde{t} \sim 30000$ в рассматриваемом случае). Рост максимальной энергии частиц, однако, прекращается несколько раньше, поскольку наиболее энергичные частицы из-за сдвига фазы оказываются в дефокусирующей фазе и теряются.

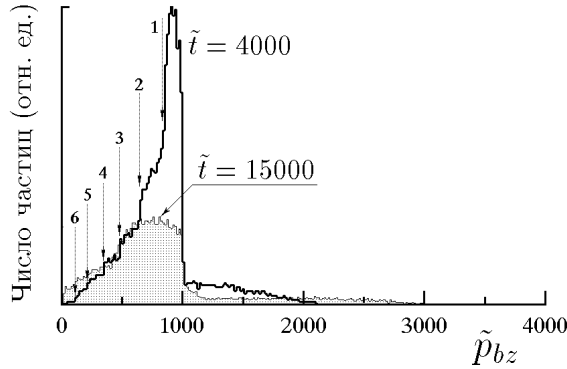


Рис. 8: Энергетические спектры пучка в моменты времени $\tilde{t} = 4000$ и $\tilde{t} = 15000$.

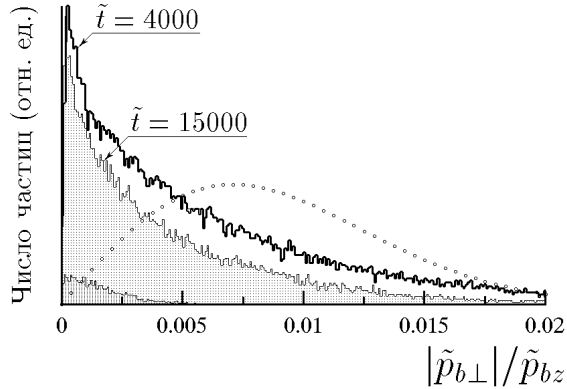


Рис. 9: Распределение частиц пучка по углу $\delta\alpha$ в различные моменты времени. Более темной штриховкой выделены ускоренные частицы в момент времени $\tilde{t} = 15000$. Точками показан аналогичный график для пучка с гауссовским распределением частиц по поперечным импульсам (21) и угловым разбросом $\Delta\alpha = 0.01$.

В реальном эксперименте сложно измерить энергию и импульс частиц драйвера как функцию $\tilde{\xi}$. О происходящих в плазме процессах приходится судить по интегральным характеристикам пучка — энергетическому спектру и угловому распределению. Для рассматриваемого численного эксперимента эти зависимости приведены на Рисунках 8 и 9. На Рис. 8 обращает на себя ступенчатость спектра, по которой можно судить о максимальном тормозящем поле, действующем на отдельные сгустки (для $\tilde{t} = 4000$ “ступеньки” отмечены стрелками). Эффективность передачи энергии мала, чего и следовало ожидать, поскольку отношение числа ускоряемых частиц к числу ускоряющих было выбрано малым.

На гистограммах углового разброса (Рис. 9) бросается в глаза anomalно большое количество частиц с малым поперечным импульсом и малый [по сравнению с оценкой (22)] угловой разброс пучка в целом. Поскольку истощение драйвера сопровождается уменьшением фокусирующей силы, угловой разброс пучка с течением времени уменьшается (частицы с большими поперечными импульсами теряются в первую очередь).

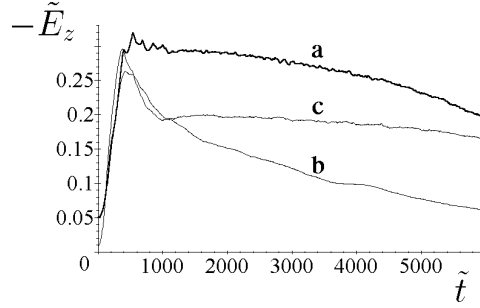


Рис. 10: Электрическое поле в месте оптимального расположения ускоряемых частиц для различных драйверов: (a) оптимизированный драйвер (19) с малым угловым разбросом, (b) драйвер (19) с угловым разбросом $\Delta\alpha = \sqrt{2} \cdot 10^{-3}$, (c) строго периодический драйвер (24) с малым угловым разбросом.

Передний фронт первого сгустка движется в невозмущённой плазме и потому плазмой не фокусируется. Имеющие ненулевую поперечную скорость частицы в отсутствие фокусировки отклоняются от оси, что может привести к постепенному разрушению (эрозии) “головы” драйвера. Этот эффект ранее подробно исследовался применительно к транспортировке в плазме немодулированных пучков [14,15]. В рассмотренном выше случае, однако, эрозия первого сгустка не успевает заметно проявиться из-за малости начального углового разброса. Действительно, в отсутствие фокусировки частицы смещаются по радиусу на расстояние $\sim c/\omega_p$ за время $\sim \omega_p^{-1}\Delta\alpha$, что в нашем случае соответствует временам $\tilde{t} \sim 10^4$. При бóльших значениях $\Delta\alpha$,

$$\Delta\alpha \gtrsim (\omega_p \tau_d)^{-1} \sim \gamma_b^{-1}, \quad (23)$$

эрозия имеет место и приводит к быстрому разрушению драйвера и к уменьшению амплитуды кильватерной волны (Рис 10). Заметим, что эрозии подвержены все сгустки, попадающие в область слабой фокусировки, а не только первый.

Интересно также проанализировать, насколько важно расставлять сгустки с учётом описанных в [5] нелинейных эффектов. Для этого сравним ускоряющее поле позади драйвера с индивидуальной расстановкой сгустков (19) и поле позади строго периодического драйвера с таким же угловым разбросом:

$$n_b(\tilde{r}, \tilde{\xi}) = 0.03 n_i \gg g(\tilde{\xi}) \exp\left(-\frac{\tilde{r}^2}{4}\right), \quad (24)$$

$$g(\tilde{\xi}) = \begin{cases} 1, & 2l < \tilde{\xi}/\pi < 2l + 1, \\ 0, & 2l + 1 < \tilde{\xi}/\pi < 2(l + 1), \end{cases} \quad l = 0 \dots 4.$$

Ясно, что драйвер (24) будет создавать меньшее поле, нежели (19), поскольку некоторая доля его частиц окажется в дефокусируемой фазе (они быстро потеряются) или в фазе ускорения (они будут забирать энергию у волны). Количественно это утверждение характеризует Рис. 10 (кривая “с”). В процессе установления радиального равновесия строго периодический драйвер теряет часть своих частиц, и его поле после короткого пика (обусловленного сжатием бóльшей части сгустков) резко падает из-за ухода дефокусируемых частиц (до уровня $\sim 60\%$ от максимума). Фаза кильватерной волны при этом меняется незначительно, так что ускоряемые частицы, исходно помещённые в фокусирующее поле позади драйвера (24), фокусируются и после установления радиального равновесия.

4. Заключение

Сформулируем основные результаты работы.

Для изучения долговременной динамики ультрарелятивистского драйвера в кильватерном ускорителе была разработана программа LCODE, в которой плазма описывается как электронная жидкость, а пучок — как совокупность отдельных частиц. Гидродинамическое описание плазмы значительно повысило скорость счёта по сравнению с методом частиц в ячейке.

С помощью LCODE исследована динамика последовательности коротких сгустков в плазме. Показано, что эволюцию такого драйвера можно условно разбить на три этапа. На первом этапе происходит установление равновесного поперечного размера сгустков. При этом функция распределения частиц драйвера по поперечным импульсам приходит в соответствие с фокусирующим полем, дефокусируемые частицы теряются, а амплитуда кильватерного поля возрастает в несколько раз за счёт уменьшения радиуса сгустков. Если исходно сгустки были расставлены не оптимальным образом, то драйвер всё же приходит к равновесному (самофокусируемому) состоянию, хотя и ценой потери значительной доли частиц.

На втором этапе (после установления радиального равновесия) драйвер тормозится, почти не меняя формы. В частности, в системе не развивается осесимметричная мода поперечной двухпоточковой неустойчивости [3], что даёт основание ожидать отсутствия и других мод этой неустойчивости в случае глубоко модулированного драйвера.

Когда энергия некоторых частиц драйвера приближается к массе покоя, начинается третий этап эволюции — разрушение драйвера. На этом этапе потерявшие энергию частицы смещаются в область слабой фокусировки и теряются. Благодаря такому “самоочищению” сгустков замедленные частицы не попадают в область ускоряющего поля, и потому драйвер продолжает возбуждать кильватерную волну, даже потеряв более половины своих частиц. Истощение драйвера не приводит к большому сдвигу фазы волны, поэтому ускорение последнего сгустка продолжается и на третьем этапе. Как следствие, увеличение энергии ускоряемых частиц может быть в несколько раз больше начальной энергии драйвера.

Благодарности. Автор благодарен И. А. Котельникову, А. М. Кудрявцеву и А. Н. Скринскому за обсуждение этой работы.

А. Вывод уравнений (13) – (18)

Уравнения (15), (17) и (18) следуют непосредственно из (7), (5) и (6). Уравнение (14) есть следствие определения $\tilde{\Phi}$ (12). Для вывода (13) нужно вычесть z -компоненту (1) из уравнения Пуассона (3) и учесть (9).

Уравнение (16) получается, если продифференцировать z -компоненту (1) по r и воспользоваться (7):

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r H_\varphi = \frac{4\pi\epsilon}{c} \left(\frac{\partial n v_r}{\partial \xi} - \frac{\partial n v_z}{\partial r} + \frac{1}{\epsilon c} \frac{\partial j_{bz}}{\partial r} \right).$$

Выражая далее производные по ξ из (17), (18) и уравнения непрерывности

$$\frac{\partial N}{\partial \tilde{\xi}} = \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \tilde{r} N \tilde{p}_r,$$

приходим к (16).

Литература

- [1] **J. S. Wurtele** *The role of plasma in advanced accelerators.*— Phys. Fluids B, v. 5 (1993), № 7, p. 2363–2370.
- [2] **E. Esarey, P. Sprangle, J. Krall, and A. Ting** *Overview of plasma-based accelerator concepts.* — IEEE Trans. Plasma Sci., v. 24 (1996), № 2, p. 252–288.
- [3] **J. Krall and G. Joyce** *Transverse equilibrium and stability of the primary beam in the plasma wake-field accelerator.* — Phys. Plasmas, v. 2 (1995), № 4, p. 1326–1331.
- [4] **J. J. Su, T. Katsouleas, J. M. Dawson, P. Chen, M. Jones, and R. Keinigs** *Stability of the driving bunch in the plasma wakefield accelerator.* — IEEE Trans. Plasma Sci., v. PS-15 (1987), № 2, p. 192–198.
- [5] **B. N. Breizman, P. Z. Chebotaev, A. M. Kudryavtsev, K. V. Lotov, and A. N. Skrinsky** *Nonlinear effects in plasma wake-field accelerator driven by the bunch sequence.* — Preprint Budker-INP № 96–50, Novosibirsk, 1996.
- [6] **В. А. Балакирев, Ю. П. Блюх, И. Н. Онищенко, Я. Б. Файнберг** *Динамика возбуждения плазменных колебаний последовательностью сгустков заряженных частиц.* — Физика плазмы, т. 14 (1988), № 2, с. 218–225.
- [7] **G. Joyce, J. Krall, and S. Slinker** *ELBA (electron beams in accelerators) particle simulation code.* — Laser and Particle Beams, v. 12 (1994), № 2, p. 273–282.
- [8] **R. Keinigs and M. E. Jones** *Two-dimensional dynamics of the plasma wakefield accelerator.* — Phys. Fluids, v. 30 (1987), № 1, p. 252–263.
- [9] **T. Katsouleas** *Physical mechanism in the plasma wake-field accelerator.* — Phys. Rev. A., v. 33 (1986), № 3, p. 2056–2064.
- [10] **B. N. Breizman, T. Tajima, D. L. Fisher, and P. Z. Chebotaev** *Excitation of Nonlinear Wake Field in a Plasma for Particle Acceleration.* — In: Research Trends in Physics: Coherent Radiation and Particle Acceleration, edited by A. Prokhorov, 1992, p. 263–287 (AIP Press, New York, 1992).
- [11] **A. A. Bechtenev, B. N. Breizman, P. Z. Chebotaev, I. A. Koop, A. M. Kudryavtsev, V. M. Panasyuk, Yu. M. Shatunov, A. N. Skrinsky, and I. B. Vasserman** *On the Possibility for Experiments on Plasma Wake-Field Acceleration in Novosibirsk.* — In: Advanced Accelerator Concepts, AIP Conference Proceedings, edited by J. S. Wurtele, v. 279, p. 466–476, (AIP Press, New York, 1992).
- [12] **B. L. Militsyn, A. A. Bechtenev, B. N. Breizman, P. Z. Chebotaev, I. A. Koop, A. M. Kudryavtsev, V. M. Panasyuk, Yu. M. Shatunov, and A. N. Skrinsky** *Experimental plasma wake-field acceleration project.* — Phys. Fluids B, v. 5 (1993), № 7, p. 2714–2718.
- [13] **K. V. Lotov** *Plasma response to ultrarelativistic beam propagation.*— Phys. Plasmas, 1996, v. 3, № 7, p. 2753–2759.
- [14] **J. Krall, K. Nguyen, and G. Joyce** *Numerical simulations of axisymmetric erosion processes in ion-focused regime-transported beams.*— Phys. Fluids B, 1989, v. 1, № 10, p. 2099–2105.
- [15] **H. L. Buchanan** *Electron beam propagation in the ion-focused regime.*— Phys. Fluids, 1987, v. 30, № 1, p. 221–231.

К.В. Лотов

**Численное моделирование динамики
ультрарелятивистского пучка
в кильватерном ускорителе**

K. V. Lotov

**Simulation of ultrarelativistic
beam dynamics in plasma wake-field accelerator**

ИЯФ 97-5

Ответственный за выпуск А.М. Кудрявцев

Работа поступила 31.01. 1997 г.

Сдано в набор 3.02.1997 г.

Подписано в печать 3.02.1997 г.

Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 1.4 печ.л., 1.1 уч.-изд.л.

Тираж 200 экз. Бесплатно. Заказ N° 5

Обработано на IBM PC и отпечатано на
ротапринте ГНЦ РФ "ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН",
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.