



Сибирское отделение Российской Академии наук
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ им. Г.И. Будкера

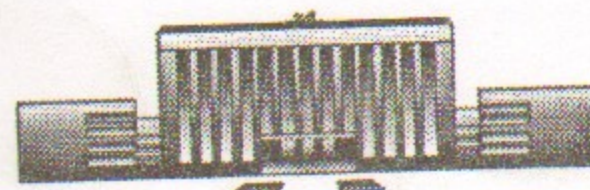
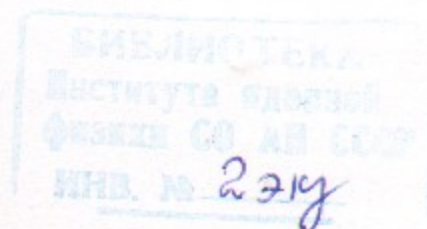
Т. 12
1998

В.М. Павлов

ПОПЕРЕЧНАЯ ДИНАМИКА ОДИНОЧНОГО
СГУСТКА В ПРИБЛИЖЕНИИ
ДВУХЧАСТИЧНОЙ МОДЕЛИ

ИЯФ 98-64

<http://www.inp.nsk.su/publications>



НОВОСИБИРСК

1998

Поперечная динамика одиночного сгустка в приближении двухчастичной модели

В.М. Павлов

Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера СО РАН
630090 Новосибирск, Россия.

Аннотация

В препринте рассматриваются поперечные колебания одиночного релятивистского сгустка в ускоряющей структуре с внешней квадрупольной фокусировкой в приближении двухчастичной модели. Получены аналитические выражения поведения сгустка в фокусирующем канале с постоянным градиентом магнитных линз, расположенных вдоль ускорителя, и в стандартном фокусирующем канале, когда градиент магнитных линз возрастает пропорционально набираемой энергии ускоряемого сгустка. В качестве примера рассмотрены поперечные колебания сгустка, в ускорителе на энергию от 510 MeV до 1.5 GeV.

Single-bunch transverse dynamic, two-particle approach
V.V. Pavlov

Budker Institute of Nuclear Physics, 630090 Novosibirsk, Russia

Abstract

Single-bunch transverse dynamic in accelerating structure with external quadrupole focusing in approach of two-particle model are considered. Analytical expressions of behaviour of a bunch in the focusing channel with a constant gradient of magnetic lenses, located along the accelerator, and in the standard focusing channel, when the gradient of magnetic lenses grows proportionally to energy of an accelerating bunch are received. As an example transverse fluctuations of a bunch in the accelerator on energy from 510 MeV up to 1.5 GeV are considered.

mail: pavlov@inp.nsk.su

Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера СО РАН, Россия

1. Уравнения поперечного движения

В протяженном сгустке каждая частица взаимодействует с поперечным полем, возбужденным всеми остальными частицами сгустка, которые пролетели до нее. При расчете поперечной динамики релятивистского сгустка силы пространственного заряда между частицами можно считать пренебрежимо малыми. Линейная плотность заряда в сгустке

$$q(z) = Q \cdot \frac{dn_e}{dz} = Q \cdot G(z) = (e \cdot N_e) \cdot G(z) \quad [\text{C/m}], \quad (1)$$

где Q - полный заряд сгустка, N_e - число частиц в сгустке. Полагается, что сгусток имеет нулевой поперечный размер так как он много меньше диаметра апертуры ускоряющей структуры. Поперечное отклонение в сгустке от оси $x(s, z)$ есть функция z -продольного положения относительно центра сгустка и s - расстояния от начала ускорителя. Для аксиально симметричной ускоряющей структуры поперечное поле излучения характеризуется в первом приближении дипольным потенциалом поля излучения (dipole transverse wake function) $w_d(z)$ или $w_d(\tau)$, имеющим обычно размерность $[\text{V/pC}\cdot\text{m}^2]$. $w_d(z)$ есть поперечный потенциал на единицу длины структуры, чувствуемый опытной частицей, следующей на расстоянии $z = c\tau$ после единичного заряда, находящегося на единичном расстоянии от оси структуры. Полный дипольный потенциал поля излучения для сгустка с продольной плотностью заряда $q(z)$, полным зарядом Q , находящегося на расстоянии $x(s, z)$ от оси, действующий на частицу есть

$$W_d(s, z) = \frac{1}{Q} \int_{-\infty}^z q(z') \cdot w_d(z - z') \cdot x(s, z') dz' = \int_0^{\infty} G(z - z') w_d(z') \cdot x(s, z - z') dz' \quad [\text{V/pC/m}] \quad (2)$$

Поперечные поля, наводимые сгустком в ускоряющей структуре, по определению полного поперечного потенциала излучения W_{\perp} , равны

$$\left(\vec{E}_b + [\vec{c} \times \vec{B}_b] \right)_{\perp} = Q \cdot W_{\perp}(s, z) \quad [\text{V/m}], \quad (3)$$

Тогда в дипольном приближении поперечная сила, действующая на заряженную частицу есть

$$F_{\perp}(s, z) = e \cdot [Q \cdot W_d(s, z)] = e \cdot Q \int_0^{\infty} G(z - z') w_d(z') \cdot x(s, z - z') dz', \quad (4)$$

а уравнение поперечного движения частиц по оси x в линейном ускорителе с периодической фокусировкой запишется в виде

$$\frac{d}{ds} \left\{ \gamma \frac{d}{ds} x(s, z) \right\} + k_{\beta}^2 \cdot \gamma \cdot x(s, z) = Q \int_0^{\infty} G(z - z') \cdot \frac{e \cdot w_d(z')}{mc^2} \cdot x(s, z - z') dz', \quad (5)$$

где $\gamma = \gamma(s)$ - энергия сгустка в точке s в единицах mc^2 ,
 $k_{\beta} = k_{\beta}(s) = 2\pi / \lambda(s)$, $\lambda(s)$ - зависимость длины бетатронных колебаний от s .

Расчет поперечного движения для случая произвольного распределения заряда в сгустке, с учетом внешнего фокусирующего поля, довольно трудная задача. Наиболее простая модель, которая включает все существенные физические ситуации есть так называемая двухчастичная модель [1]. В соответствии с этой моделью гауссовский пучок размера σ_z (или $\sigma_r = \sigma_z / c$) с полным зарядом Q разбивается на два:

$$G(z) = \frac{1}{2} \cdot \delta(z + \sigma_z) + \frac{1}{2} \cdot \delta(z - \sigma_z). \text{ Т.е. 'головной' заряд } Q/2, \text{ находящийся}$$

в точке $z = +\sigma_z$ и имеющий поперечную координату $x_1(s)$, и 'хвостовой' заряд $Q/2$, находящийся в точке $z = -\sigma_z$, с поперечной координатой $x_2(s)$.

Уравнения для поперечного движения этих зарядов запишутся как

$$\frac{d^2 x_{1,2}}{ds^2} + \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{d\gamma}{ds} \cdot \frac{dx_{1,2}}{ds} + k_{\beta}^2 \cdot x_{1,2} = \begin{cases} 0 & \text{для } x_1(s), \\ \frac{Q}{2} \cdot \frac{e \cdot w_d(2 \cdot \sigma_z)}{\gamma \cdot mc^2} \cdot x_1(s) & \text{для } x_2(s). \end{cases} \quad (6)$$

Зависимость $x_1(s)$ характеризует поведение заряженной частицы в канале с квадрупольной фокусировкой без учета сил пространственного заряда и поперечных СВЧ- сил, которыми мы пренебрегли в случае релятивистского сгустка. Зависимость $x_2(s)$ можно рассматривать как поведение всего сгустка в канале с квадрупольной фокусировкой с учетом поперечного поля, возбужденного самим же сгустком, пролетающим через ускоряющую структуру.

Параметр фокусирующей системы $[k_{\beta}(s)]^2 = k_0^2 \cdot \frac{1 + G_m \cdot s}{1 + G \cdot s}$, где k_0 - характеризует градиент магнитного поля квадрупольных линз, установленных на ускоряющем канале при $s = 0$, $(1 + G_m \cdot s)$ - характеризует изменение градиента магнитного поля квадрупольных линз вдоль канала, $(1 + G \cdot s)$ - зависимость $\chi(s)$.

Будем предполагать, что ускорение сгустка происходит в ускоряющем поле с постоянным градиентом E_0 [MeV/m], начальная энергия сгустка $V_0 = \gamma_0 \cdot mc^2$ [MeV]. То есть

$$\gamma(s) = \gamma_0 \cdot (1 + G \cdot s), \quad \text{где } G = \frac{E_0}{\gamma_0 \cdot mc^2} = \frac{E_0}{V_0} \quad [1/m]. \quad (7)$$

Считаем, что обе части сгустка при влете в канал имеют одинаковую энергию и начальные условия: $x_1(0) = x_2(0) = x_0$, $x_1'(0) = x_2'(0) = 0$, где штрих означает производную по s .

1. Ускорение без фокусировки

При $k_{\beta}(s) = 0$ решения для $x_1(s)$ и $x_2(s)$:

$$x_1(s) = x_0, \quad x_2(s) = x_0 + x_0 \cdot \frac{A \cdot s}{G} \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{G \cdot s} \cdot \ln(1 + G \cdot s) \right\}, \quad (8)$$

$$x_1'(s) = 0, \quad x_2'(s) = x_0 \cdot \frac{A \cdot s}{1 + G \cdot s},$$

$$\text{где } A = \frac{Q}{2} \cdot \frac{e \cdot w_d(2 \cdot \sigma_z)}{\gamma_0 \cdot mc^2} = \frac{Q}{2} \cdot \frac{e \cdot w_d(2 \cdot \sigma_z)}{V_0} \quad [1/m^2]. \quad (9)$$

Иногда бывает необходимо использовать канал ускорителя как пропускной канал для частиц с постоянной энергией. В этом случае, когда движение сгустка происходит без фокусировки в ускоряющей структуре, не заполненной СВЧ ($G=0$), имеем:

$$x_2(s) = x_0 + x_0 \cdot \frac{A \cdot s^2}{2}, \quad (10)$$

$$x_2'(s) = x_0 \cdot A \cdot s.$$

При этом поперечный эмиттанс сгустка возрастает как

$$\Delta \varepsilon_2 = \pi \cdot |\Delta x_2| \cdot |\Delta x_2'| \approx \pi \cdot x_0^2 \cdot \left(\frac{A^2}{2}\right) \cdot s^3. \quad (11)$$

Видно, что при работе с сильноточным сгустком из-за сильных поперечных полей, наводимых самим сгустком в ускоряющей структуре, в любом случае необходима дополнительная внешняя фокусировка пучка.

2. Ускорение в канале с квадрупольными линзами одинаковой силы ($G_m = 0$)

Делая замену переменных $u = 1 + G \cdot s$ в уравнениях движения (6) перепишем их как

$$\frac{d^2 x_{1,2}}{du^2} + \frac{1}{u} \cdot \frac{dx_{1,2}}{du} + \frac{\beta_0^2}{u} \cdot x_{1,2} = \begin{cases} 0 & \text{для } x_1, \\ \frac{A}{G^2} \cdot \frac{x_1}{u} & \text{для } x_2, \end{cases} \quad (12)$$

$$\text{где } \beta_0 = \frac{k_0}{G}.$$

Начальные условия при $s = 0$ соответствуют $u = u_0 = 1$.

Уравнения движения являются модифицированными уравнениями Бесселя нулевого порядка с нулевой и отличной от нуля правой частью. Заменой переменной $v = 2\beta_0 \sqrt{u}$ они приводятся к виду [2]:

$$x_{1,2}'' + \frac{1}{v} \cdot x_{1,2}' + x_{1,2} = \begin{cases} 0 & \text{для } x_1, \\ \frac{A}{G^2 \cdot \beta_0^2} \cdot x_1 & \text{для } x_2, \end{cases} \quad (13)$$

где штрих - производная по v , $s = 0$ соответствует $v = v_0 = 2\beta_0$. Уравнения имеют точное решение:

$$\text{для } x_1: \quad x_1 = x_0 \cdot Z_0(v),$$

$$\frac{dx_1}{ds} = x_0 \cdot G \cdot \frac{\beta_0}{\sqrt{u}} \cdot Z_0'(v) = -k_0 \cdot x_0 \cdot Z_1(v) \cdot \frac{1}{\sqrt{u}}, \quad (14)$$

$$\text{для } x_2: \quad x_2 = x_0 \cdot \frac{A}{G^2 \cdot \beta_0^2} \cdot \left[\frac{v}{2} \cdot Z_1(v)\right] + x_0 \cdot \tilde{Z}_0(v), \quad (15)$$

$$\frac{dx_2}{ds} = G \cdot \frac{\beta_0}{\sqrt{u}} \cdot \left\{ x_0 \cdot \frac{A}{k_0^2} \cdot \left[\frac{v}{2} \cdot Z_0(v)\right] - x_0 \cdot \tilde{Z}_1(v) \right\},$$

где

$$Z_{0(1)}(v) = \frac{\pi \cdot v_0}{2} \cdot [N_{0(1)}(v) \cdot J_1(v_0) - N_1(v_0) \cdot J_{0(1)}(v)],$$

$$\tilde{Z}_{0(1)}(v) = \frac{\pi \cdot v_0}{2} \cdot \left\{ \frac{A}{G \cdot k_0} \cdot [N_0(v_0) \cdot J_{0(1)}(v) - N_{0(1)}(v) \cdot J_0(v_0)] + [N_{0(1)}(v) \cdot J_1(v_0) - N_1(v_0) \cdot J_{0(1)}(v)] \right\},$$

$J_{0(1)}$ и $N_{0(1)}$ - функции Бесселя и Неймана нулевого (первого) порядка. В пределе сильной фокусировки ($\beta_0 \gg 1$), используя асимптотику функций Бесселя получим

$$\text{Для } x_1: \quad x_1 \approx x_0 \cdot \frac{\cos[2\beta_0(\sqrt{u}-1)]}{\sqrt[4]{u}}, \quad (16)$$

$$\frac{dx_1}{ds} \approx -k_0 \cdot x_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{\sin[2\beta_0(\sqrt{u}-1)]}{\sqrt[4]{u}},$$

эмиттанс

$$\varepsilon_1 \approx \pi \cdot x_0^2 \cdot k_0 \cdot \frac{1}{u}.$$

Для x_2 :

$$x_2 \approx x_0 \cdot \frac{\cos[2\beta_0 \cdot (\sqrt{u}-1)]}{\sqrt[4]{u}} + x_0 \cdot \frac{A}{G \cdot k_0} \cdot (\sqrt{u}-1) \cdot \frac{\sin[2\beta_0 \cdot (\sqrt{u}-1)]}{\sqrt[4]{u}},$$

$$\frac{dx_2}{ds} \approx k_0 \cdot x_0 \cdot \left\{ \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{\sin[\beta_0(\sqrt{u}-1)]}{\sqrt[4]{u}} + \frac{A}{G \cdot k_0} \cdot \frac{\sqrt{u}-1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{\cos[\beta_0(\sqrt{u}-1)]}{\sqrt[4]{u}} \right\},$$

эммитанс сгустка возрастает как

$$\Delta \varepsilon_2 \approx \pi \cdot x_0^2 \cdot k_0 \cdot \left(\frac{A}{G \cdot k_0} \right)^2 \cdot \frac{(\sqrt{u}-1)^2}{u}.$$

При движении сгустка в ускоряющей структуре, не заполненной СВЧ имеем ($G=0$):

$$x_1 \approx x_0 \cdot \cos(k_0 \cdot s), \quad (17)$$

$$\frac{dx_1}{ds} \approx -k_0 \cdot x_0 \cdot \sin(k_0 \cdot s),$$

$$\varepsilon_1 \approx \pi \cdot x_0^2 \cdot k_0.$$

$$x_2 \approx x_0 \cdot \cos(k_0 \cdot s) + x_0 \cdot \frac{A \cdot s}{2k_0} \cdot \sin(k_0 \cdot s),$$

$$\frac{dx_2}{ds} \approx k_0 \cdot x_0 \cdot \left\{ -\sin(k_0 \cdot s) + \frac{A \cdot s}{2 \cdot k_0} \cdot \cos(k_0 \cdot s) \right\},$$

$$\Delta \varepsilon_2 \approx \pi \cdot x_0^2 \cdot k_0 \left(\frac{A}{k_0} \right)^2 \cdot \frac{s^2}{4}.$$

3. Ускорение в стандартном фокусирующем канале

Обычно при квадрупольной фокусировке $k_\beta(s) = k_0 = const$, ($G_m = G$).

То есть градиент магнитного поля квадрупольных линз, установленных на ускоряющем канале возрастает пропорционально набранной энергии γ .

Делая ту же замену переменных $u = 1 + G \cdot s$ в уравнениях движения получим

$$\frac{d^2 x_{1,2}}{du^2} + \frac{1}{u} \cdot \frac{dx_{1,2}}{du} + \beta_0^2 \cdot x_{1,2} = \begin{cases} 0 & \text{для } x_1, \\ \frac{A}{G^2} \cdot \frac{x_1}{u} & \text{для } x_2. \end{cases} \quad (18)$$

$$\text{Решение для } x_1: \quad x_1 = x_0 \cdot Z_0(z), \quad (19)$$

$$\frac{dx_1}{ds} = G \cdot \beta_0 \cdot x_0 \cdot Z_0'(z) = -k_0 \cdot x_0 \cdot Z_1(z),$$

здесь $z = \beta_0 u$, $s = 0$ соответствует $z = z_0 = \beta_0$,

$$Z_{0(1)}(z) = \frac{\pi \cdot z_0}{2} \cdot [N_{0(1)}(z) \cdot J_1(z_0) - N_1(z_0) \cdot J_{0(1)}(z)].$$

В правой части для x_2 стоит осциллирующая сила $\sim \frac{Z_0(\beta_0 u)}{u}$. Так как

уравнение с такой правой частью не имеет точного решения, то для оценки сверху возьмем максимальную осциллирующую силу т.е. положим $u = 1$.

Уравнение с правой частью $\sim Z_0(\beta_0 u)$ имеет точное решение:

$$x_2 = x_0 \cdot \frac{A}{G^2 \cdot \beta_0^2} \cdot \left[\frac{z}{2} \cdot Z_1(z) \right] + x_0 \cdot \hat{Z}_0(z_0), \quad (20)$$

$$\frac{dx_2}{ds} = G \cdot \beta_0 \cdot \left\{ x_0 \cdot \frac{A}{G^2 \cdot \beta_0^2} \cdot \left[\frac{z}{2} \cdot Z_0(z) \right] - x_0 \cdot \hat{Z}_1(z) \right\}.$$

Здесь:

$$\hat{Z}_{0(1)}(z) = \frac{\pi \cdot z_0}{2} \cdot \left\{ \frac{A}{2 \cdot G \cdot k_0} [N_0(z_0) \cdot J_{0(1)}(z) - N_{0(1)}(z) \cdot J_0(z_0)] + [N_{0(1)}(z) \cdot J_1(z_0) - N_1(z_0) \cdot J_{0(1)}(z)] \right\}.$$

В пределе сильной фокусировки ($\beta_0 \gg 1$) получим

$$\text{Для } x_1: \quad x_1 \approx x_0 \cdot \frac{\cos[\beta_0 \cdot (u-1)]}{\sqrt{u}}, \quad (21)$$

$$\frac{dx_1}{ds} \approx -k_0 \cdot x_0 \cdot \frac{\sin[\beta_0 \cdot (u-1)]}{\sqrt{u}},$$

эммитанс

$$\varepsilon_1 \approx \pi \cdot x_0^2 \cdot k_0 \cdot \frac{1}{u}.$$

$$\text{Для } x_2: \quad x_2 \approx x_0 \cdot \frac{\cos[\beta_0 \cdot (u-1)]}{\sqrt{u}} + x_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{A}{G \cdot k_0} \cdot (u-1) \cdot \frac{\sin[\beta_0 \cdot (u-1)]}{\sqrt{u}},$$

$$\frac{dx_2}{ds} \approx k_0 \cdot x_0 \cdot \left\{ -\frac{\sin[\beta_0 \cdot (u-1)]}{\sqrt{u}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{A}{G \cdot k_0} \cdot (u-1) \cdot \frac{\cos[\beta_0 \cdot (u-1)]}{\sqrt{u}} \right\}.$$

Поперечный эммитанс сгустка возрастает как

$$\Delta \varepsilon_2 \approx \pi \cdot x_0^2 \cdot k_0 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{A}{G \cdot k_0} \right)^2 \cdot \frac{(G \cdot s)^2}{u} = \pi \cdot x_0^2 \cdot k_0 \cdot \left(\frac{A}{k_0} \right)^2 \cdot \frac{s^2}{4 \cdot u}$$

4. Ускорение в стандартном фокусирующем канале но в структуре, не заполненной СВЧ

Полагаем, что градиент магнитного поля квадрупольных линз возрастает пропорционально энергии, на которую рассчитан ускоритель, т.е. $G_m = G$, но СВЧ мощность с структуру не подается, т.е. само $G = 0$. В этом случае

$[k_\beta(s)]^2 = k_0^2 \cdot (1 + G_m \cdot s)$, а уравнения движения запишутся в виде:

$$\frac{d^2 x_{1,2}}{du^2} + \beta_0^2 \cdot u \cdot x_{1,2} = \begin{cases} 0 & \text{для } x_1, \\ \frac{A}{G_m^2} \cdot x_1 & \text{для } x_2. \end{cases} \quad (22)$$

Здесь $u = 1 + G_m \cdot s$.

Заменой переменных $w = \beta_0^{4/3} x$ и $z = \beta_0^{2/3} u$ ($s = 0$ соответствует

$z = z_0 = \beta_0^{2/3}$) уравнения приводятся к виду

$$w'' + z \cdot w = \begin{cases} 0 & \text{для } x_1, \\ \frac{A}{G_m^2} \cdot x_1 & \text{для } x_2. \end{cases} \quad (23)$$

Решение

для x_1 : $x_1 = x_0 \cdot Wi(-z)$,

$$\frac{dx_1}{ds} = x_0 \cdot G_m \cdot \beta_0^{2/3} \cdot Wi'(-z) = -k_0 \cdot x_0 \cdot \frac{1}{\beta_0^{1/3}} \cdot Wi'(-z),$$

для x_2 : $x_2 = x_0 \cdot \frac{A}{G_m \cdot k_0} \cdot \frac{1}{\beta_0^{1/3}} \cdot Wi'(-z) + x_0 \cdot \tilde{Wi}(-z)$,

$$\frac{dx_2}{ds} = G_m \cdot \beta_0^{2/3} \left\{ x_0 \cdot \frac{A}{G_m \cdot k_0} \cdot \frac{1}{\beta_0^{1/3}} \cdot z \cdot Wi(-z) - x_0 \cdot \tilde{Wi}'(-z) \right\},$$

где $Wi(-z)$, $\tilde{Wi}(-z)$ линейные комбинации функций Эйри $Ai(-z)$ и $Bi(-z)$ [3], штрих здесь означает производную по аргументу:

$$Wi(-z) = \pi \cdot [Ai(-z) \cdot Bi'(-z_0) - Bi(-z) \cdot Ai'(-z_0)],$$

$$\tilde{Wi}(-z) = \pi \cdot \left\{ \frac{A \cdot \beta_0^{1/3}}{G \cdot k_0} [Ai(-z_0) \cdot Bi(-z) - Bi(-z_0) \cdot Ai(-z)] + [Ai(-z) \cdot Bi'(-z_0) - Bi(-z) \cdot Ai'(-z_0)] \right\}.$$

В пределе сильной фокусировки ($\beta_0 \gg 1$), используя асимптотику функций Эйри получим

$$x_1 \approx x_0 \cdot \frac{\cos \left[\frac{2}{3} \cdot \beta_0 \cdot (u^{3/2} - 1) \right]}{\sqrt[4]{u}}, \quad (25)$$

$$\frac{dx_1}{ds} \approx -x_0 \cdot k_0 \cdot \sqrt[4]{u} \cdot \sin \left[\frac{2}{3} \cdot \beta_0 \cdot (u^{3/2} - 1) \right],$$

эммиттанс

$$\varepsilon_1 \approx \pi \cdot x_0^2 \cdot k_0.$$

$$x_2 \approx x_0 \cdot \frac{\cos \left[\frac{2}{3} \cdot \beta_0 \cdot (u^{3/2} - 1) \right]}{\sqrt[4]{u}} + x_0 \cdot \frac{A}{G_m \cdot k_0} \cdot (\sqrt{u} - 1) \cdot \frac{\sin \left[\frac{2}{3} \cdot \beta_0 \cdot (u^{3/2} - 1) \right]}{\sqrt[4]{u}}$$

$$\frac{dx_2}{ds} \approx x_0 \cdot k_0 \cdot \left\{ -\sqrt[4]{u} \cdot \sin \left[\frac{2}{3} \cdot \beta_0 \cdot (u^{3/2} - 1) \right] + \frac{A}{G_m \cdot k_0} \cdot (\sqrt{u} - 1) \cdot \sqrt[4]{u} \cdot \cos \left[\frac{2}{3} \cdot \beta_0 \cdot (u^{3/2} - 1) \right] \right\}$$

эммиттанс возрастает как

$$\Delta \varepsilon_2 \approx \pi \cdot x_0^2 \cdot k_0 \cdot \left(\frac{A}{G_m \cdot k_0} \right)^2 \cdot (\sqrt{u} - 1)^2$$

Полученные результаты для рассмотренных случаев при сильной фокусировке ($\beta_0 \gg 1$) сведены в таблицы 1 и 2.

Таблица 1: Режим ускорения $\gamma = \gamma_0 \cdot (1 + G \cdot s) = \gamma_0 \cdot u$

	Канал с одинаковыми линзами: $G_m = 0$	Стандартный канал $G_m \neq 0, G_m = G$
$\frac{ x_1 }{x_0}$	$\frac{1}{\sqrt[4]{u}}$	$\frac{1}{\sqrt{u}}$
$\frac{ x_1' }{k_0 \cdot x_0}$	$\frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{u}}$	$\frac{1}{\sqrt{u}}$
$\frac{\varepsilon_1}{\pi \cdot x_0^2 \cdot k_0}$	$\frac{1}{u}$	$\frac{1}{u}$
$\frac{ x_2 }{x_0}$	$\frac{1}{\sqrt[4]{u}} \cdot \sqrt{1 + \left[\frac{A}{G \cdot k_0} (\sqrt{u} - 1) \right]^2}$ при $G \cdot s \gg 1$: $\frac{A}{G \cdot k_0} \cdot \sqrt[4]{G \cdot s}$	$\frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \sqrt{1 + \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{A}{G \cdot k_0} (u - 1) \right]^2}$ при $G \cdot s \gg 1$: $\frac{A}{G \cdot k_0} \cdot \frac{\sqrt{G \cdot s}}{2}$
$\frac{ x_2' }{k_0 \cdot x_0}$	$\frac{1}{\sqrt[4]{u^3}} \cdot \sqrt{1 + \left[\frac{A}{G \cdot k_0} (\sqrt{u} - 1) \right]^2}$ при $G \cdot s \gg 1$: $\frac{A}{G \cdot k_0} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{G \cdot s}}$	$\frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \sqrt{1 + \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{A}{G \cdot k_0} (u - 1) \right]^2}$ при $G \cdot s \gg 1$: $\frac{A}{G \cdot k_0} \cdot \frac{\sqrt{G \cdot s}}{2}$
$\frac{\Delta \varepsilon_2}{\pi \cdot x_0^2 \cdot k_0}$	$\left(\frac{A}{G \cdot k_0} \right)^2 \cdot \frac{(\sqrt{u} - 1)^2}{u}$, при $G \cdot s \gg 1$: $\left(\frac{A}{G \cdot k_0} \right)^2$	$\left(\frac{A}{G \cdot k_0} \right)^2 \cdot \frac{(G \cdot s)^2}{4 \cdot u}$, при $G \cdot s \gg 1$: $\left(\frac{A}{G \cdot k_0} \right)^2 \cdot \frac{G \cdot s}{4}$

Таблица 2: Режим транспортировки $G = 0$ ($\gamma = \gamma_0 = const$), $u = 1 + G_m \cdot s$

	Канал с одинаковыми линзами: $G_m = 0$	Стандартный канал $G_m \neq 0$
$\frac{ x_1 }{x_0}$	1	$\frac{1}{\sqrt[4]{u}}$
$\frac{ x_1' }{k_0 \cdot x_0}$	1	$\sqrt[4]{u}$
$\frac{\varepsilon_1}{\pi \cdot x_0^2 \cdot k_0}$	1	1
$\frac{ x_2 }{x_0}$	$\sqrt{1 + \left(\frac{A \cdot s}{2 \cdot k_0} \right)^2}$	$\frac{1}{\sqrt[4]{u}} \cdot \sqrt{1 + \left[\frac{A}{G_m \cdot k_0} \cdot (\sqrt{u} - 1) \right]^2}$ при $G_m \cdot s \gg 1$: $\frac{A}{G_m \cdot k_0} \cdot \sqrt[4]{G_m \cdot s}$
$\frac{ x_2' }{k_0 \cdot x_0}$	$\sqrt{1 + \left(\frac{A \cdot s}{2 \cdot k_0} \right)^2}$	$\sqrt[4]{u} \cdot \sqrt{1 + \left[\frac{A}{G_m \cdot k_0} \cdot (\sqrt{u} - 1) \right]^2}$ при $G_m \cdot s \gg 1$: $\frac{A}{G_m \cdot k_0} \cdot \sqrt[4]{(G_m \cdot s)^3}$
$\frac{\Delta \varepsilon_2}{\pi \cdot x_0^2 \cdot k_0}$	$\left(\frac{A}{k_0} \right)^2 \cdot \frac{s^2}{4}$	$\left(\frac{A}{G_m \cdot k_0} \right)^2 \cdot (\sqrt{u} - 1)^2$ при $G_m \cdot s \gg 1$: $\left(\frac{A}{G_m \cdot k_0} \right)^2 \cdot (G_m \cdot s)$

В рассмотренных случаях фокусировки отклонение 'головы' сгустка периодически изменяется с соответствующей частотой поперечных колебаний. Поведение амплитуды этих колебаний $|x_1(s)|$ носит адиабатически затухающий характер (кроме случая использования ускорителя в режиме транспортировки в канале с одинаковыми линзами, см. Табл. 2). Причем в режиме ускорения в стандартном фокусирующем канале (при $G_m = G$) затухание происходит быстрее, чем в канале с квадрупольными линзами одинаковой силы (при $G_m = 0$). Поперечная сила, действующая на 'хвост' сгустка, в любом случае является периодической с той же частотой, что и частота колебаний 'головы'. Поэтому развитие поперечной неустойчивости носит резонансный характер. Метод подавления этой поперечной неустойчивости известен - сдвиг частот поперечных колебаний частиц вдоль сгустка, который можно получить введением разброса по энергии вдоль сгустка [4,5] (в рассматриваемом приближении - 'голова' и 'хвост' должны иметь немного разные энергии [1]).

5. Поперечная динамика в доускорителе на +1 GeV

Для примера рассмотрим поперечные колебания сгустка, выходящего из форинжектора ВЭПП-5 [6] и проходящих доускоритель на +1 GeV :

Начальная энергия	V_0	510 MeV
	γ_0	1000
Число частиц в сгустке (заряд)	$N_e (Q)$	$5 \cdot 10^{10} (8 \cdot 10^3 \text{ pC})$
Размер сгустка	$\sigma_z (\sigma_\tau)$	1.2 mm ($\cong 4.2 \text{ ps}$)
Темп ускорения	E_0	17 MeV/m
Параметр	$G = E_0 / V_0$	0.033 1/m
Длина волны бетатронных колебаний	λ_0	13.6 m
	$k_0 = 2\pi / \lambda_0$	0.462 1/m
Параметр	$\beta_0 = k_0 / G$	13.6 $\gg 1$

При темпе ускорения $E_0 = 17 \text{ MeV/m}$ длина доускорителя составит $\approx 60 \text{ m}$ (начальная энергия сгустка 510 MeV, конечная - 1.5 GeV).

Наведенный дипольный потенциал поля излучения $w_d(\tau)$ рассчитывается для каждой конкретной конфигурации ускоряющей структуры. Для оценки поперечной динамики в доускорителе в принятом

приближении используем дипольный потенциал для SLAC- структуры с размерами: период $d = \lambda/3 = 34.99 \text{ mm}$, толщина диафрагмы $(d-g)=5.8 \text{ mm}$, внешний радиус $b=41.34 \text{ mm}$ и радиус апертуры $a=11.63 \text{ mm}$ [1] (размеры SLAC- структуры примерно совпадают с размерами ускоряющей структуры, которая была использована при испытаниях прототипа форинжектора ВЭПП-5 [7]). На рис.1 приведен график этой зависимости.

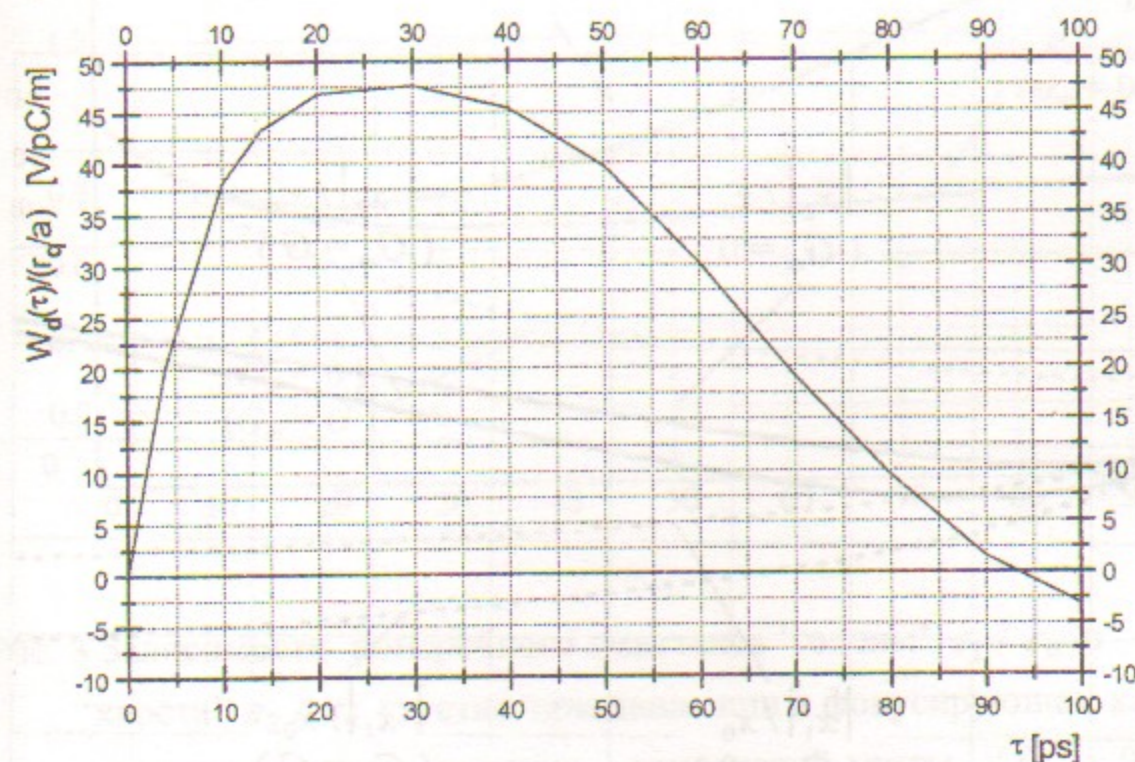


Рис. 1 Дипольное поле излучения для SLAC- структуры, r_q - поперечная координата излучающей частицы, $a=11.63 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ - радиус апертуры

Для получения $w_d(\tau)$ [V/pC-m²], используемое в формулах, надо значение из графика $W_d(\tau)/(r_q/a)$ [V/pC-m] поделить на радиус апертуры a [m]. Для $\sigma_\tau = 4.2 \text{ ps}$ константа A равна

$$A = \frac{Q}{2} \cdot \frac{e \cdot w_d(2 \cdot \sigma_\tau)}{V_0} = 0.023 \text{ 1/m}^2.$$

На рис. 2 представлены зависимости амплитуды колебаний 'головы' сгустка $|x_1(s)|$ и 'хвоста' сгустка $|x_2(s)|$ для различных вариантов фокусирующего канала. На рис. 3 - зависимости поперечного эмиттанса.

$$\varepsilon_{1,2} = \pi \cdot |x_{1,2}| \cdot |x'_{1,2}|$$

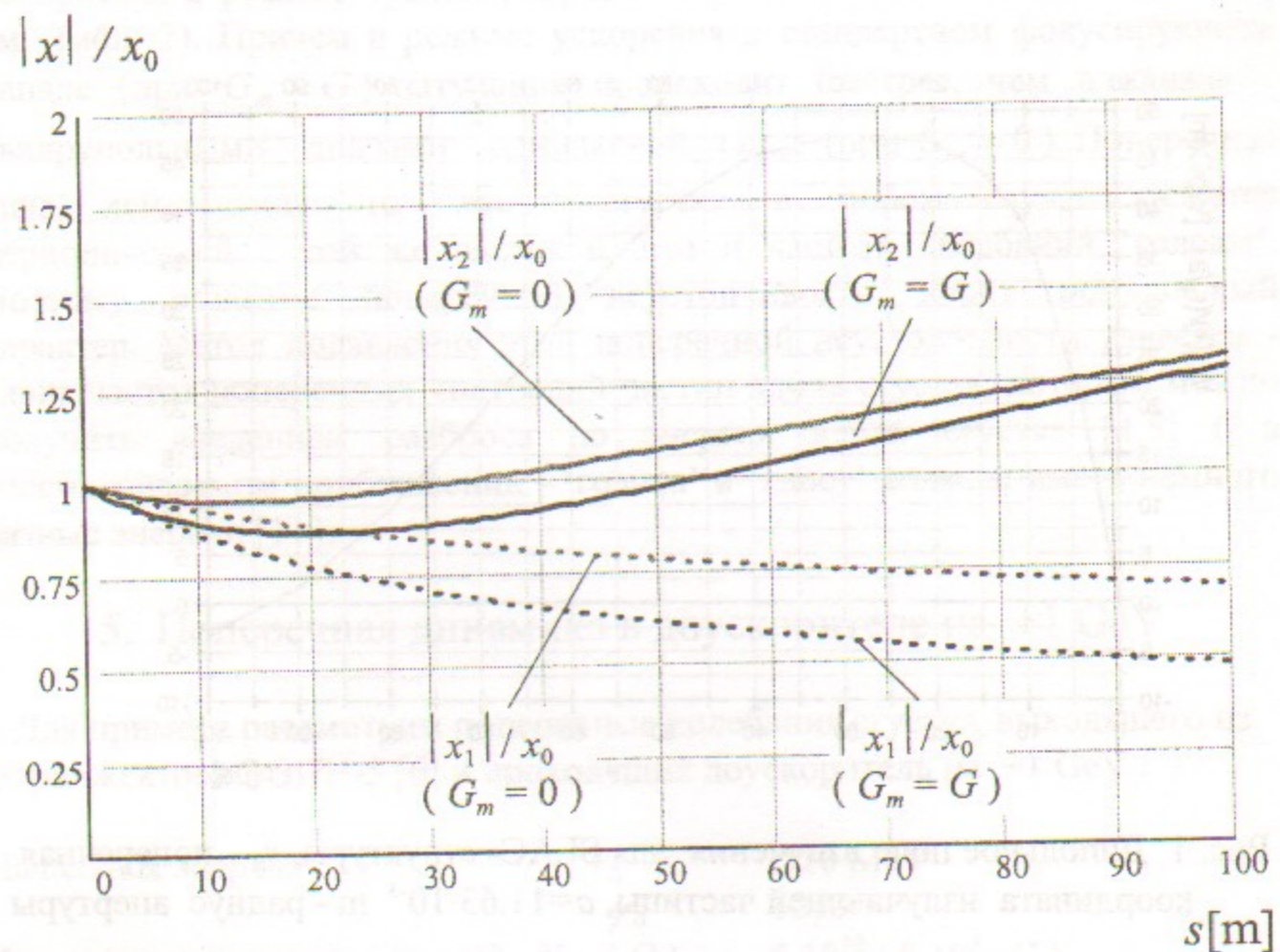


Рис. 2 Зависимости амплитуды колебаний 'головы' сгустка $|x_1|/x_0$ и 'хвоста' сгустка $|x_2|/x_0$ при движении в фокусирующем канале с квадрупольными линзами одинаковой силы ($G_m = 0$) и в стандартном фокусирующем канале с $G_m = G$, x_0 - начальное отклонение сгустка от оси.

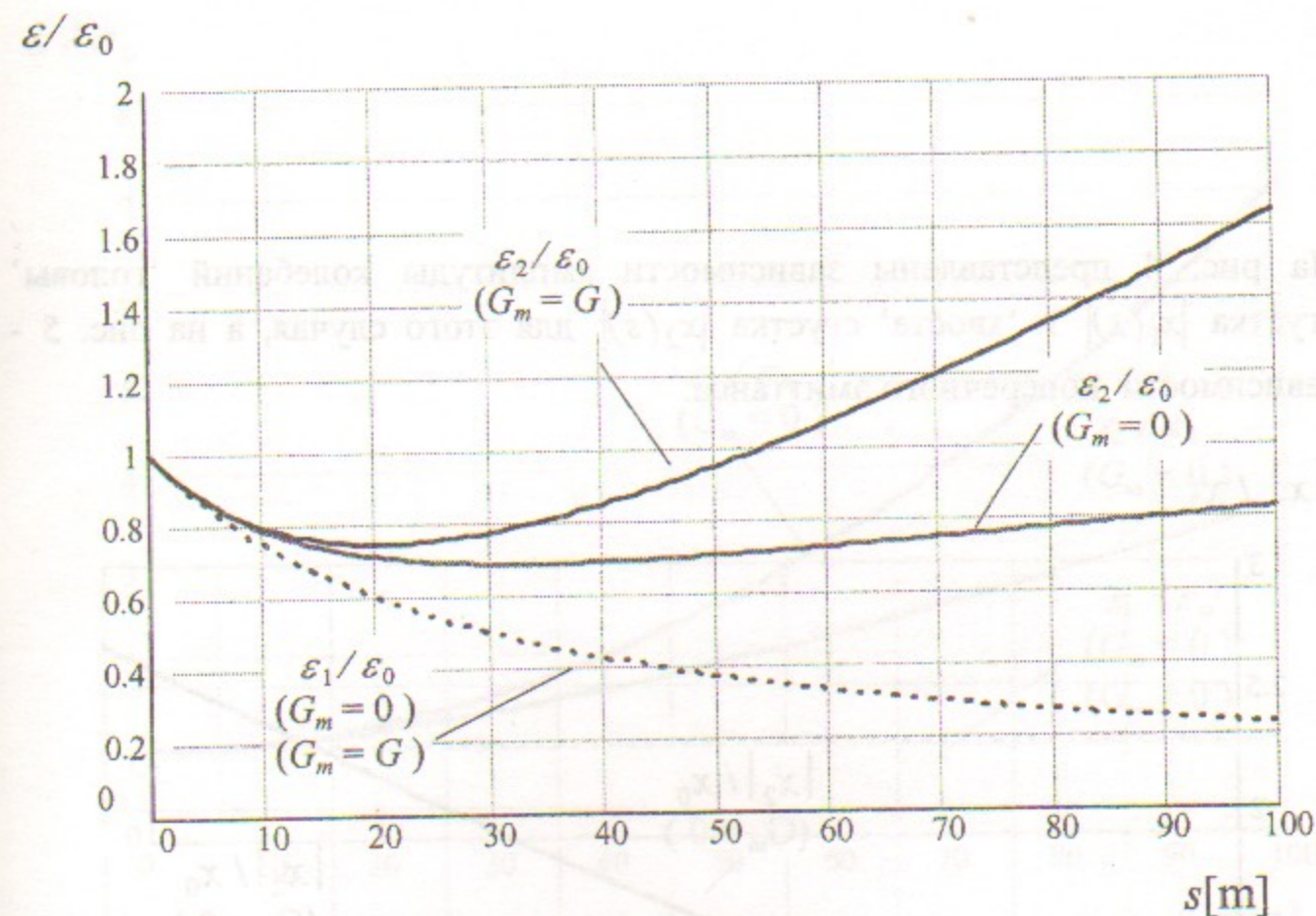


Рис. 3 Зависимости поперечного эмиттанта 'головы' ϵ_1/ϵ_0 и 'хвоста' ϵ_2/ϵ_0 сгустка при движении в фокусирующем канале с квадрупольными линзами одинаковой силы ($G_m = 0$) и в стандартном фокусирующем канале с $G_m = G$.

$\epsilon_0 = \pi \cdot |x_0| \cdot |x_0'| = \pi \cdot x_0^2 \cdot k_0$ - поперечный эмиттанс сгустка при влете в канал.

Поперечные размеры сгустка, определяемые амплитудой 'хвоста' $|x_2(s)|$, при длине доускорителя 60-70 м практически одинаковы для обоих каналов. Поперечный эмиттанс сгустка, определяемый отношением $\epsilon_2(s)/\epsilon_0$, также не сильно зависит от канала. Хотя при большой длине ускорителя ($Gs \gg 1$) для уменьшения поперечных размеров сгустка предпочтительным будет канал с одинаковыми линзами, а для уменьшения поперечного эмиттанта наоборот (см. Таблицу 1).

При использовании доускорителя как пропускного канала для e^+ и e^- с энергией 510 MeV (т.е. не подавать СВЧ мощность в ускоряющую структуру), можно считать, что энергия сгустка практически не меняется.

На рис. 4 представлены зависимости амплитуды колебаний 'головы' сгустка $|x_1(s)|$ и 'хвоста' сгустка $|x_2(s)|$ для этого случая, а на рис. 5 - зависимости поперечного эмиттанта.

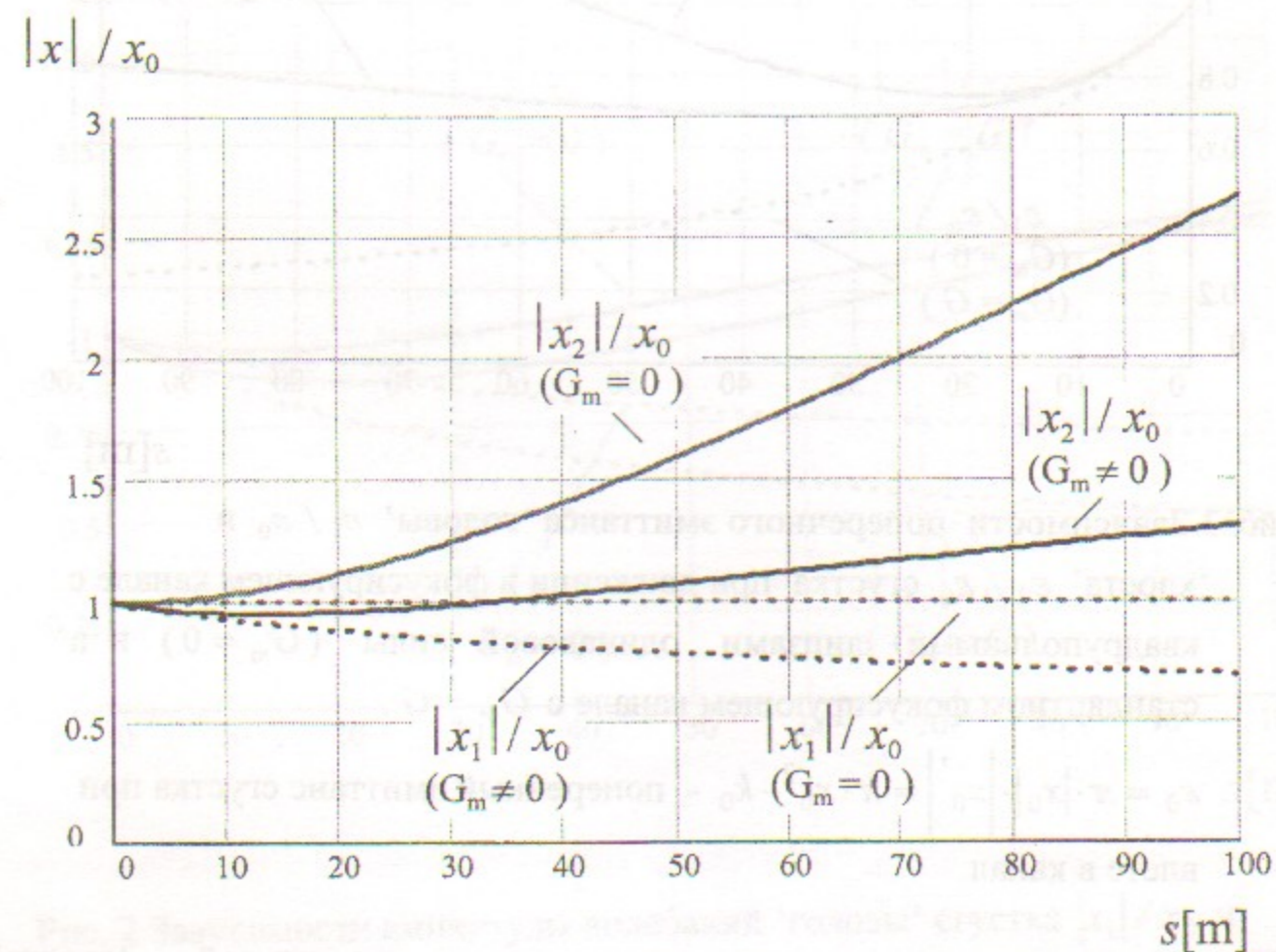


Рис. 4 Зависимости амплитуды колебаний 'головы' сгустка $|x_1|/x_0$ и 'хвоста' сгустка $|x_2|/x_0$ при использовании доускорителя как пропускного канала для e^+ и e^- .

$\varepsilon/\varepsilon_0$

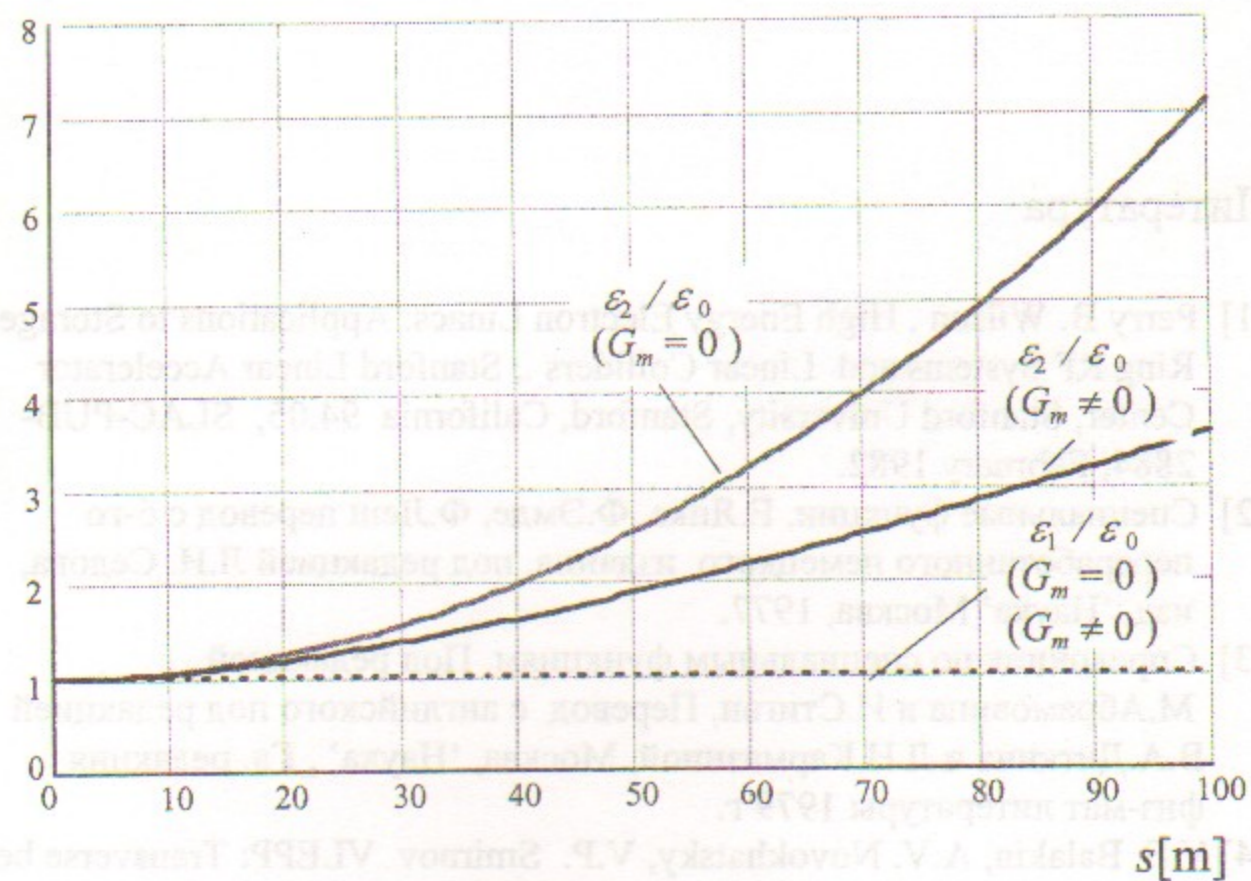


Рис. 5 Зависимости поперечного эмиттанта 'головы' $\varepsilon_1/\varepsilon_0$ и 'хвоста' $\varepsilon_2/\varepsilon_0$ сгустка при использовании доускорителя как пропускного канала для e^+ и e^- .

Из рис. 4 и 5 следует, что если предполагается дополнительно использовать доускоритель и как пропускной канал, то стандартный фокусирующий канал с $G_m = G$ является предпочтительнее и по поперечному размеру сгустка и по поперечному эмиттансу.

Литература

- [1] Perry B. Wilson , High Energy Electron Linacs: Applications to Storage Ring RF Systems and Linear Colliders ., Stanford Linear Accelerator Center, Stanford University, Stanford, California 94.05, SLAC-PUB-2884, February 1982.
- [2] Специальные функции, Е.Янке, Ф.Эмде, Ф.Леш перевод с 6-го переработанного немецкого издания, под редакцией Л.И. Седова, изд. 'Наука' Москва, 1977.
- [3] Справочник по специальным функциям. Под редакцией М.Абрамовица и И.Стиган, Перевод с английского под редакцией В.А.Диткина и Л.Н.Кармазиной, Москва, 'Наука' , Гл. редакция физ-мат литературы 1979 г.
- [4] V.E. Balakin, A.V. Novokhatsky, V.P. Smirnov VLEPP: Transverse beam dynamics. Proc. of the 12th International Conference on High-Energy Accelerators, Fermilab, August 11-16, 1983, pp 119-120.
- [5] В.Е. Балакин, А.В. Новохатский Динамика пучка в линейном ускорителе ВЛЭПП. Труды XIII международной конференции по ускорителям частиц высоких энергий. Новосибирск, 7-11 августа 1986 г., т.1, с.146-150.
- [6] Физический проект ВЭПП-5, Гос. научн. центр Российской Федерации, Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера, Новосибирск-1995., глава 3.
- [7] A.V.Alexandrov et al., "Electron-positron preinjector of VEPP-5 complex". Proc. 1996 of the Linear Acc. Geneva, Switzerland. Pp. 821-823.

В.М. Деларо

Поперечная динамика одиночного
пучка в приближении
многократной резонанса

ИЯФ 98-84

Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера
Гос. научн. центр Российской Федерации
Сибирский федеральный университет
Подготовлено в августе 1998 г.
Формат бумаги 60x90 1/16 Обложка 1/4 листа, 1/2 ун. веса
Тираж 90 экз. Раскладка: 70х100 № 84
Скоропечатано на ИЯФ СО РАН
редактура ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.

В.М. Павлов

**Поперечная динамика одиночного
сгустка в приближении
двухчастичной модели**

ИЯФ 98-64

Ответственный за выпуск А.М. Кудрявцев
Работа поступила 29.07. 1998 г.

Сдано в набор 1.09.1998 г.

Подписано в печать 1.09.1998 г.

Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 1.5 печ.л., 1.2 уч.-изд.л.

Тираж 90 экз. Бесплатно. Заказ № 64

Обработано на IBM PC и отпечатано на
ротапринте ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.