

Сибирское отделение Российской Академии наук
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ им.Г.И. Будкера

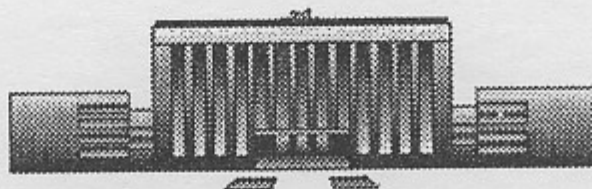
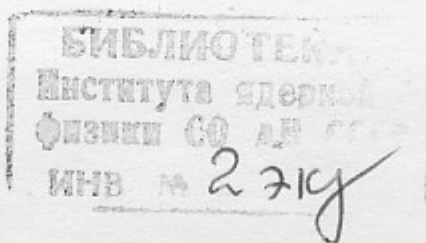
В. 39

В.В. Вечеславов

ДИНАМИКА
ПИЛООБРАЗНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ:
1. НОВЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

ИЯФ 2000-27

<http://www.inp.nsk.su/publications>



НОВОСИБИРСК
2000

Динамика пилообразного отображения:

1. Новые численные результаты

В.В. Вечеславов

Институт ядерной физики им.Г.И. Будкера

Аннотация

Приведены результаты численного исследования канонического отображения с пилообразной силой и описаны обнаруженные при этом новые и неожиданные динамические эффекты. Показано, в частности, что если значения параметра K системы принадлежат определенному в теореме Овсянникова счетному множеству, то сепаратрисы целых резонансов не расщепляются и хаотические слои не образуются. Найдено еще одно множество значений этого параметра, связанное с другим семейством неразрушенных сепаратрис целых резонансов. Обследованы первые дробные резонансы и для них также обнаружены свои значения K , при которых их сепаратрисы сохраняются. Важность этих фактов связана с тем, что наличие неразрушенной сепаратрисы резонанса любого порядка исключает возможность глобальной диффузии по импульсу в фазовом пространстве. Обнаружен и описан механизм, объясняющий устойчивость сепаратрисы целого резонанса в критическом режиме. Отмечены возникшие в этой связи новые проблемы и открытые вопросы, решение которых может способствовать дальнейшему развитию теории нелинейных гамильтоновых систем.

Email: vecheslavov@inp.nsk.su

© Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера СО РАН, Россия

1 Введение

Двумерные канонические отображения вида

$$\bar{p} = p + K \cdot f(x), \quad \bar{x} = x + \bar{p} \pmod{1} \quad (1)$$

с единственным параметром K уже давно и широко используются в нелинейной физике как весьма удобные и чрезвычайно информативные модели [1,2,3]. Функции $f(x) = \sin(2\pi x)$, например, отвечает так называемое стандартное отображение, которому посвящено и с помощью которого выполнено очень большое число исследований. Создатели теории КАМ с самого начала отмечали различное динамическое поведение систем (1) для аналитических и гладких зависимостей $f(x)$. Основной темой здесь является вопрос о степени гладкости (число l непрерывных производных силы $f(x)$), при которой глобальный хаос имеет место не для сколь угодно малого значения параметра системы, а лишь выше некоторой пороговой величины $K > K_g$. Исследования Мозера и Рюссмана показали, что такой порог существует всегда при $l > 3$ [4]. Однако, отсутствуют доказательства обратного утверждения о том, что при $l \leq 3$ порога нет и диффузия по импульсу в фазовом пространстве ничем не ограничена.

Ниже рассматривается система с пилообразной силой

$$f(x) = \begin{cases} 4x, & \text{если } x \leq 0.25, \\ 4(0.5 - x), & \text{если } |0.5 - x| \leq 0.25, \\ 4(x - 1.0), & \text{если } |x - 1.0| \leq 0.25. \end{cases} \quad (2)$$

Эта функция антисимметрична $f(-x) = -f(x)$, ее период равен единице и степень гладкости $l = 0$.

Поводом для нашей работы явилась теорема Л.В.Овсянникова о существовании у отображения с пилообразной силой сепаратрис целых резонансов при точно определенном счетном множестве значений параметра

системы K [5]. К сожалению, этот важный результат до сих пор не опубликован (в посвященной той же теме более поздней работе [6] он даже не упоминается) и поэтому для удобства читателя мы приводим в Приложении почти дословный текст сообщения [5].

Напомним на примере маятника, что сепаратрисой одиночного нелинейного резонанса называется особая траектория, отделяющая колебания фазы (внутри резонанса) от ее вращения (вне резонанса). На самом деле это две пространственно совпадающие ветви, отвечающие ходу времени вперед и назад, соответственно. Каждая ветвь представляет собой непрерывную траекторию с бесконечным периодом движения, которая выходит из положения неустойчивого равновесия (седло) и затем асимптотически к нему же приближается.

При наличии в системе других (хотя бы одного) нелинейных резонансов она расщепляется на две пересекающиеся ветви, которые по-прежнему выходят из седла навстречу друг другу, но более к нему не возвращаются. Свободные концы ветвей расщепленной сепаратрисы образуют бесконечное число петель неограниченно возрастающей длины, которые заполняют при этом узкую область вдоль невозмущенной сепаратрисы, образуя так называемый хаотический слой [1,2,3]. Перекрывание хаотических слоев всех резонансов системы как раз и означает возникновение глобального хаоса.

Центральным пунктом современных представлений можно считать утверждение о том, что расщепление сепаратрисы резонанса и образование на ее месте хаотического слоя в типичной (то есть неинтегрируемой) гамильтоновой системе происходят при почти любом возмущении. Считается также, что именно сепаратрисы разрушаются в первую очередь, поскольку имеют нулевую частоту и взаимодействие нелинейных резонансов в их окрестности всегда существенно [1,2,3]. Последними, по мере роста возмущения, исчезают инвариантные кривые с иррациональными числами вращения (для стандартного отображения это "золотое" число $(\sqrt{5}-1)/2$, максимально удаленное от всех рациональных чисел [7]).

У системы (1),(2) все выглядит иначе, и ниже мы изложим полученные недавно новые результаты.

2 Критические числа целых резонансов

Основным объектом дальнейшего рассмотрения станут резонансы системы (1),(2) и их сепаратрисы. Принято периодическую орбиту и отвечающий ей резонанс обозначать отношением целых чисел $P : Q$, где Q

– число итераций отображения на P периодов орбиты [2]. Резонансы с $Q = 1$ называются целыми, остальные – дробными.

Одной из самых удивительных и необычных черт исследуемой динамики, как это будет показано ниже, является наличие "критических" значений параметра K , при которых сепаратрисы резонансов не расщепляются и соответствующие им хаотические слои не образуются. Поиск таких режимов – задача достаточно тонкая и ее аккуратное решение требует привлечения специальных вычислительных методик. В настоящей работе для этой цели используется разработанная нами ранее техника измерения угла α_1 пересечения ветвей сепаратрис целых резонансов в центральной гомоклинической точке, которая для системы (1),(2) всегда лежит на линии $x = 0.5$ (см. [8], где описаны детали и результаты таких измерений для стандартного отображения). Обоснованность этого выбора обсуждается ниже.

На рис.1 показана полученная численно для системы (1),(2) зависимость $\alpha_1(K)$, которая оказалась знакопеременной и колебательной. Важно подчеркнуть, что она качественно отличается от хорошо изученной к настоящему времени аналогичной зависимости для стандартного отображения (последняя является знакопостоянной и строго монотонной, подробности в [8]). Это отличие, как будет показано ниже, связано с существенно различным динамическим поведением этих двух систем.

Точки $\alpha_1(K) = 0$ на рисунке свидетельствуют об отсутствии расщепления сепаратрис и отвечающие им значения параметра K мы будем называть критическими числами. Видно, что эти числа могут быть двух типов: для одних угол проходит через нуль в процессе плавного изменения, для других – скачком. Поскольку при монотонном уменьшении величины параметра элементы этих множеств чередуются (см. также рис.3 ниже), то для них можно ввести сквозную нумерацию $K_{1,m}$, $m = 1, 2, 3, \dots$ (первый индекс указывает на отношение к целому резонансу) и тогда все нечетные числа будут связаны с плавным изменением угла, а четные со скачком.

Тщательный анализ показал, что четные критические числа точно совпадают с элементами указанного в теореме Овсянникова счетного множества и определяются решениями трансцендентного уравнения (1.4) при целых значениях коэффициента k (см. Приложение). Оказалось, что найденные выше и не входящие в теорему Овсянникова нечетные критические числа также определяются решениями того же самого уравнения (1.4), но при полуцелых значениях коэффициента и потому для любого

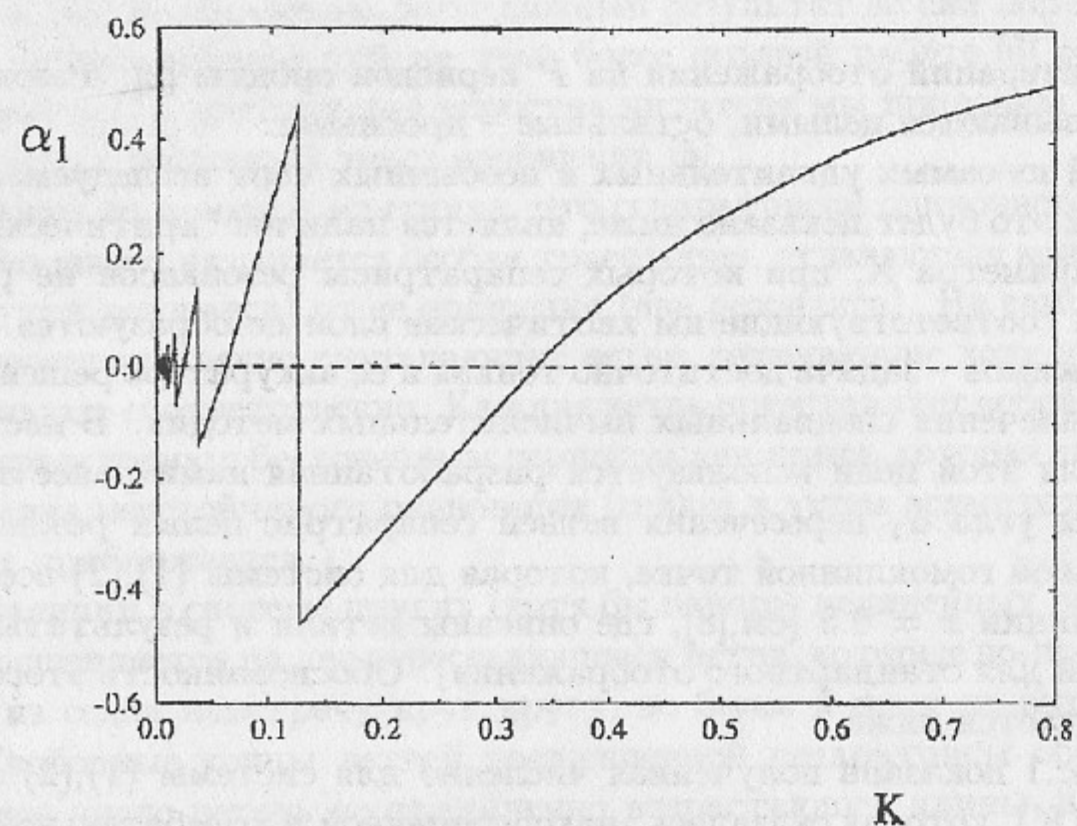


Рис. 1: Зависимость угла α_1 расщепления ветвей сепаратрисы целых резонансов системы (1), (2) от параметра K .

критического числа имеем

$$K_{1,m} = \sin^2(\beta_m/2), \quad m = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

где β_m есть наименьший положительный корень уравнения

$$\sqrt{2} \sin(m\beta/2) = \cos(\beta/2). \quad (4)$$

Последние соотношения позволяют найти, в частности, точные значения двух первых критических чисел $K_{1,1} = 1/3$ и $K_{1,2} = 1/8$. Подчеркнем еще раз, что оба эти множества относятся только к целым $Q = 1$ резонансам отображения (1),(2).

Природу скачкообразных изменений угла на четных критических числах можно понять следующим образом. Важной частью теоремы Овсянникова является наличие точных формул (см. (1.5) в Приложении), по которым сепаратриса может быть фактически построена для любого числа $K_{1,m}$, $m = 2, 4, 6, \dots$. Все такие сепаратрисы оказываются ломаными, причем одна из точек излома всегда совпадает с центральной гомоклинической точкой целых резонансов, лежащей на линии $x = 0.5$. На рис.2

построена картинка пересекающихся ветвей сепаратрисы целого резонанса в малой окрестности этой точки при значении параметра системы немного меньшего величины $K_{1,2} = 1/8$. Видно, что переход на горизонтальный участок при прямом ходе времени смещается по фазе вправо, при обратном – влево. Если построить такую же картинку для K чуть большем $K_{1,2}$, то ветви меняются ролями и угол, сохраняя величину, изменяет знак на противоположный.

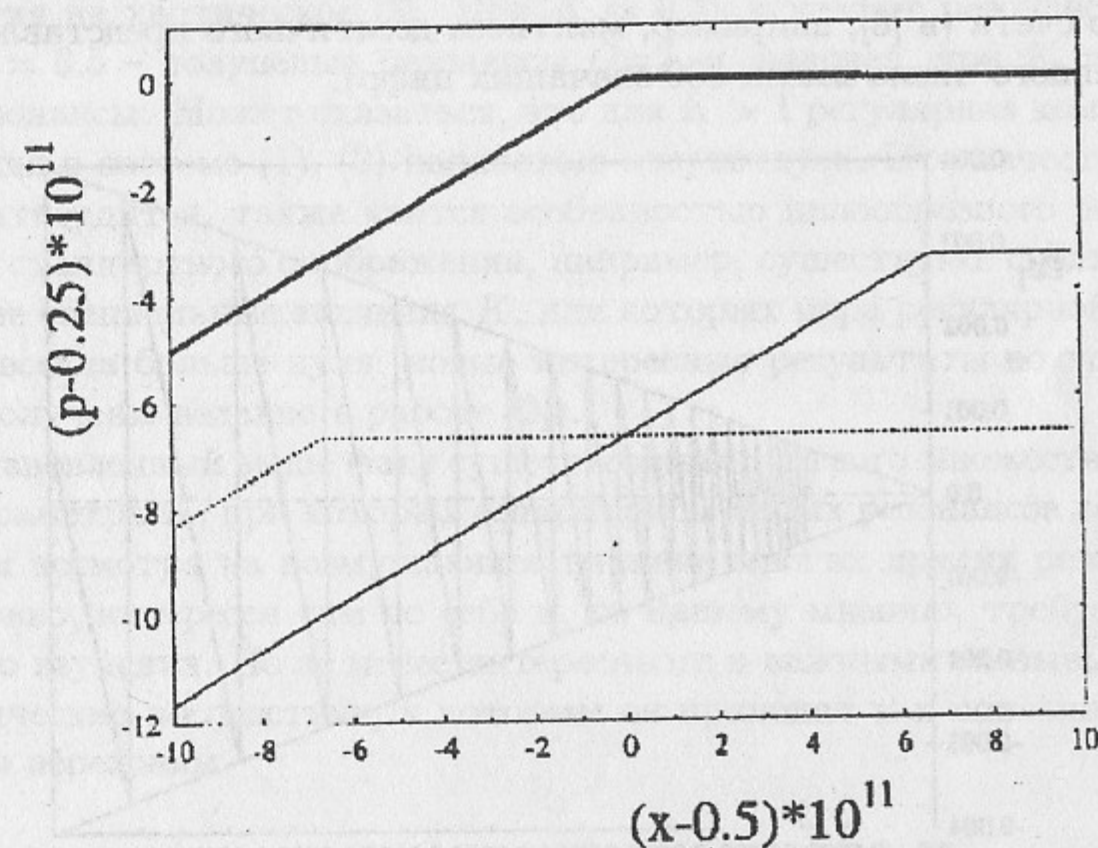


Рис. 2: Верхняя ломаная линия – участок неразрушенной сепаратрисы целого резонанса при $K = K_{1,2} = 0.125$. Внизу – ветви расщепившейся сепаратрисы при $K = 0.125 - 5 \times 10^{-11}$. Сплошная линия отвечает ходу времени вперед, пунктирная – назад. Угол пересечения ветвей $\alpha_1 = 0.464$.

Из этого рисунка следует также, что угол пересечения ветвей весьма близок к величине угла излома неразрушенной сепаратрисы (верхняя линия) в центральной гомоклинической точке, который может быть точно вычислен. Из формул (1.5) Приложения следует асимптотическая зависимость величины этого угла от значения параметра отображения в четных критических точках:

$$\alpha_{1,m} = 4K_{1,m}, \quad m \gg 1. \quad (5)$$

На рис.3 показан ход функции $\alpha_1(K)$ при $K \leq 0.001$, огибающая которой очень хорошо следует теоретическому закону (5). Этот факт является, по нашему мнению, свидетельством высоких вычислительных качеств используемой нами техники. В литературе уже отмечалось, что из всех атрибутов хаоса только угол пересечения ветвей сепаратрис может быть во многих случаях найден сколь угодно точно, помогая выявлению самых тонких деталей взаимодействия нелинейных резонансов и формирования хаотического слоя [8]. Метод может быть чрезвычайно усилен применением вычислений с задаваемой пользователем произвольной точностью счета (в [8], например, мантисса десятичного представления вещественного числа имела 300 значащих цифр).

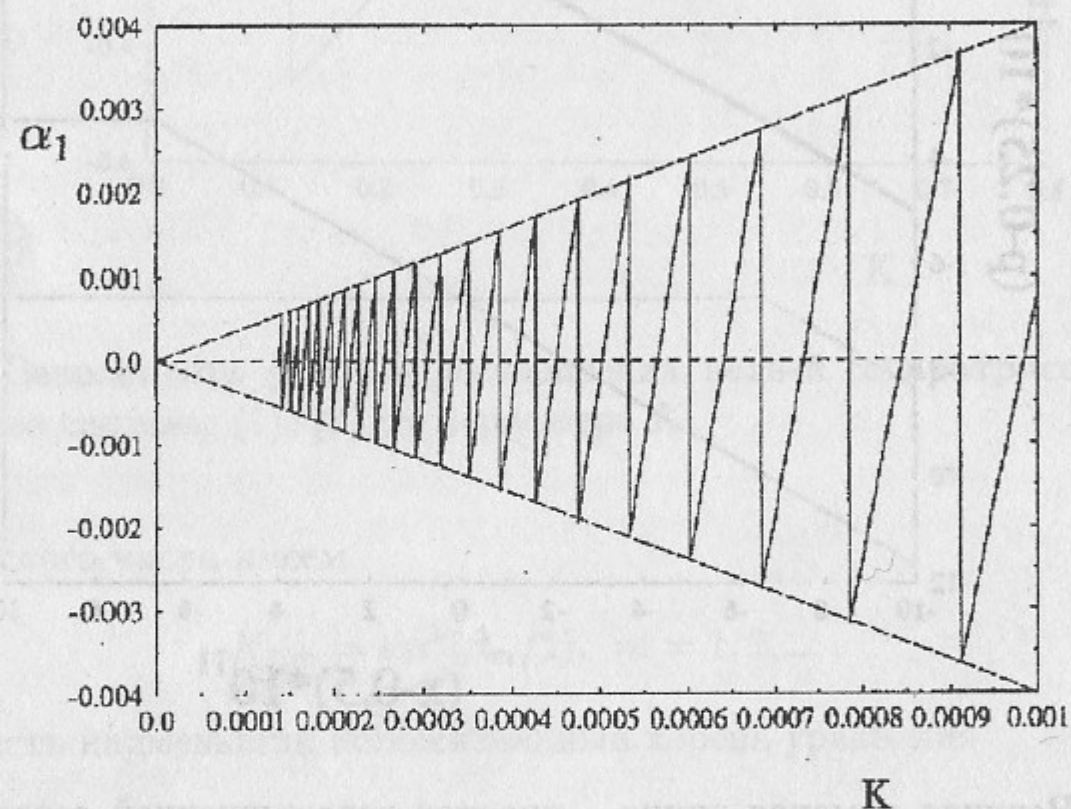


Рис. 3: Иллюстрация асимптотической теоретической зависимости (5) величины угла излома сепаратрисы целого резонанса в центральной гомоклинической точке от значения критического числа (см. текст). Наклонные пунктирные прямые построены по уравнениям $\alpha_1 = 4K$.

Найденное выше число $K_{1,1} = 1/3$ выделено не только тем, что является самым большим из всех критических чисел. Оказалось, что оно находится на границе двух областей с резко и качественно различным динамическим поведением системы (1), (2). При $K \leq K_{1,1}$ имеет место весьма нетривиальная динамика, обсуждению которой посвящена вся остальная часть нашей работы. Напротив, при $K > K_{1,1}$ система ведет себя очень

просто: по мере роста величины параметра K один за другим теряют устойчивость дробные резонансы и связанные с ними островки устойчивости "тонут" в хаотическом море. Этот процесс четко прослеживается по переходу собственных чисел матрицы линеаризованного движения от комплексно-сопряженных значений (устойчивая точка эллиптического типа) к вещественным через равенство $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ (гиперболическая точка с отражением), что является свидетельством смены регулярного движения на хаотическое [2]. При $K \approx 0.39$ исчезают резонансы $Q=3$, при $K = 0.5$ — полупелые резонансы $Q=2$, и, наконец, при $K = 1.0$ целые резонансы. Может оказаться, что для $K > 1$ регулярная компонента движения в системе (1), (2) полностью отсутствует. Это качество, если оно подтвердится, также явится особенностью пилообразного возмущения. У стандартного отображения, например, существуют сколь угодно большие специальные значения K , для которых мера регулярной компоненты всегда больше нуля (новые интересные результаты по этой теме были получены недавно в работе [9]).

Установленный выше факт существования счетного множества значений параметра K , при которых сепаратрисы целых резонансов не разрушаются несмотря на возмущающее влияние многих других резонансов, безусловно, интересен сам по себе и, по нашему мнению, требует дальнейшего изучения. Но не менее интересными и важными оказываются те динамические последствия, к которым он приводит и к описанию которых мы переходим.

3 Динамика критических режимов

На рис.4 показана область, которую заняла одна хаотическая траектория при значении параметра системы равного первому четному критическому числу $K = K_{1,2} = 1/8$. Нижняя и верхняя границы этой области весьма близки (это определение будет далее уточнено) к вычисленным по точным формулам Овсянникова сепаратрисам целых резонансов. Здесь все противоречит представлениям "обычной" динамики.

Известно, что имеется бесконечно много "нетипичных" гамильтоновых систем, у которых сепаратрисы всех резонансов нерасщеплены. Это так называемые полностью интегрируемые системы, в динамическом поведении которых нет никакого хаоса [2,3]. Поразительной особенностью ситуации на рис.4 является сосуществование сохранившихся сепаратрис двух соседних целых резонансов с областью мощного хаоса, где все инвариантные кривые с самыми устойчивыми иррациональными числами

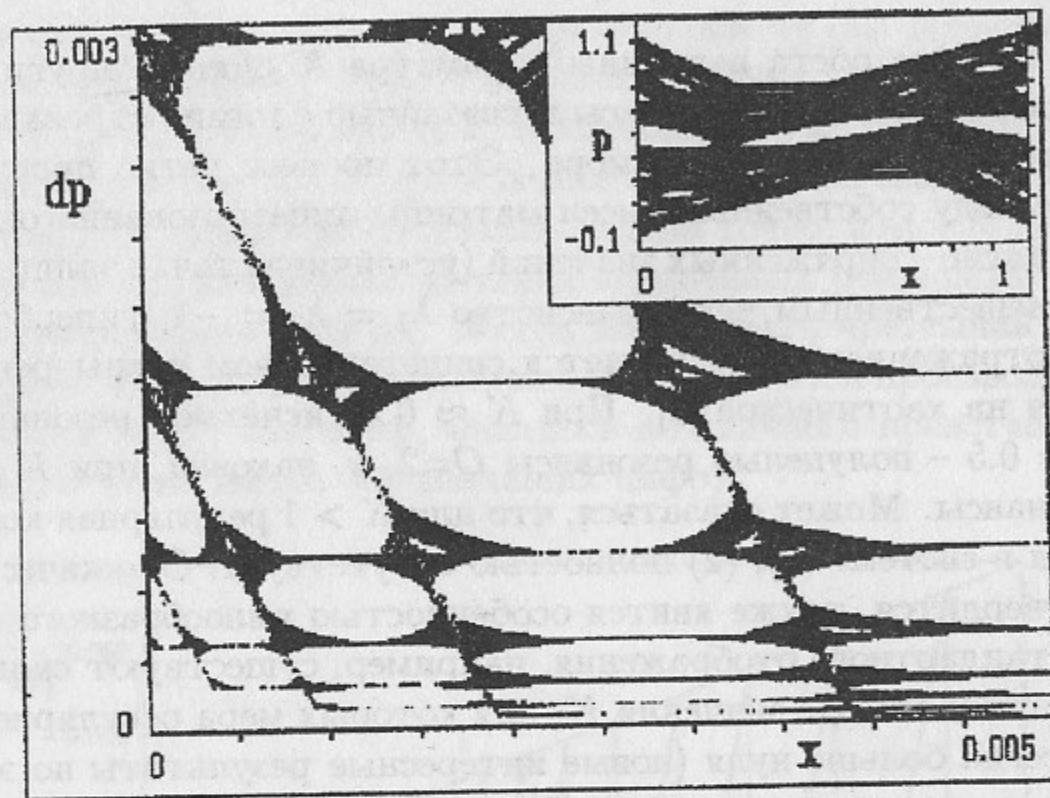


Рис. 4: Параметр системы равен второму критическому числу $K = K_{1,2} = 1/8$. Малое окно: область, занятая одной хаотической траекторией с начальными координатами $x = 0$, $p = 0.37$. Число итераций отображения равно 10^9 . Большое окно: сильно увеличенная малая область "щели" (по импульсу) между этой траекторией и нижней сепаратрисой целого резонанса (см. текст). Здесь $dp = p - p_s$, где $p(x)$ – минимальный импульс траектории и $p_s(x)$ – импульс на сепаратрисе.

вращения разрушены и хаотические слои всех дробных резонансов открыты. В полном согласии с этим рисунком и с определением сепаратрисы находится тот проверенный нами факт, что стартующая внутри целого резонанса хаотическая траектория остается внутри него все время счета.

В этом и заключается, по-видимому, главный динамический эффект: сепаратрисы целых резонансов не только не разрушаются и не формируют хаотический слой, но и образуют устойчивое инвариантное многообразие, не позволяющее другим траекториям себя пересекать. Имея полную протяженность по фазе они, как плотины, разгораживают фазовое пространство на изолированные друг от друга части. Для приложений это обстоятельство представляется особенно существенным, поскольку оно запрещает глобальную диффузию по импульсу и исключает, например, неограниченный рост энергии частиц. Насколько нам извест-

но, ничего подобного еще никогда не наблюдалось!

Уместно заметить, что вдали от критических чисел никаких непроходимых барьеров, по-видимому, нет и система ведет себя "как обычно". Например, при $K = 0.3$ стартовавшая при начальных условиях $x = 0$, $p = 0.123$ хаотическая траектория за 10^6 итераций "побывала" в областях семи соседних целых резонансов.

На основании сказанного выше надо признать, что необычная динамика связана не с тем обстоятельством, расщеплена сепаратриса или не расщеплена, а с тем "проницаема" она для других траекторий или нет. В недавней работе [6] приведена теорема (назовем ее второй теоремой Овсянникова), где дано новое и отличающееся от обычного определение сепаратрисы, которая не расщепляется ни при каком значении параметра системы $K < 1$. Но, как показали наши исследования, она проницаема для других траекторий при почти всех значениях K , кроме критических (3), (4). Для критических же значений сепаратрисы и в обычном смысле и по второй теореме Овсянникова точно совпадают с объектами приведенной в Приложении первой теоремы Овсянникова и являются непроходимыми преградами для других траекторий.

Выше отмечалось, что хаотическая траектория на рис.4 весьма близко подходит к сепаратрисам. Для получения количественной оценки этой близости фиксировалось минимальное (по импульсу) расстояние между этой траекторией и вычисленными по точным формулам (1.5) сепаратрисами целых резонансов. Оказалось, что между траекторией и нижней сепаратрисой имеется "щель", минимальная ширина которой $dp_{min} \approx 3 \cdot 10^{-6}$. На большом окошке рис.4 показана сильно увеличенная малая ее часть из которой видно, что эта щель заполнена дробными резонансами относительно высоких порядков. Динамику этой области мы обсудим позже (см. раздел 5) после того, как будут рассмотрены свойства сепаратрис и критические числа дробных резонансов.

При отклонении параметра системы K от критической величины $K_{1,2}$ в сторону увеличения сепаратриса начинает пропускать другие траектории, но среднее время (число итераций) $\langle T_c \rangle$ прохождения резонанса зависит от величины расстройки $\Delta K = K - K_{1,2} > 0$. Для выяснения этой зависимости были выполнены следующие измерения. При фиксированном значении параметра $K = K_{1,2} + \Delta K$ в области между двумя соседними целыми резонансами (см. рис.4) запускались случайные хаотические траектории и фиксировалось время T_c первого их появления в областях либо ниже нижнего, либо выше верхнего резонансов. Здесь необходимо сделать следующее общее замечание, которое относится ко всей нашей работе в целом. Принципиально важно выбирать начальные

условия так, чтобы траектории гарантированно были хаотическими, ибо только они могут покидать "свои" резонансы и переходить к другим. Это обстоятельство во всех случаях специально проверялось по величине и поведению ляпуновского показателя [2].

Результаты описанных измерений приведены на рис.5 и их обработка по методу наименьших квадратов позволяет написать эмпирическую формулу для среднего времени прохождения целого резонанса:

$$\langle T_c \rangle = 135 \left(\frac{K_{1,2}}{K - K_{1,2}} \right)^{1.193} (1 \pm 0.09), \quad K > K_{1,2}. \quad (6)$$

Видно, что по мере приближения к критическому режиму время прохождения неограниченно растет. Это обстоятельство позволяет, в принципе, привлечь построение зависимостей вида (6) к отысканию критических режимов, но такой метод гораздо менее точен и гораздо более трудоемок, чем измерение угла расщепления сепаратрис.

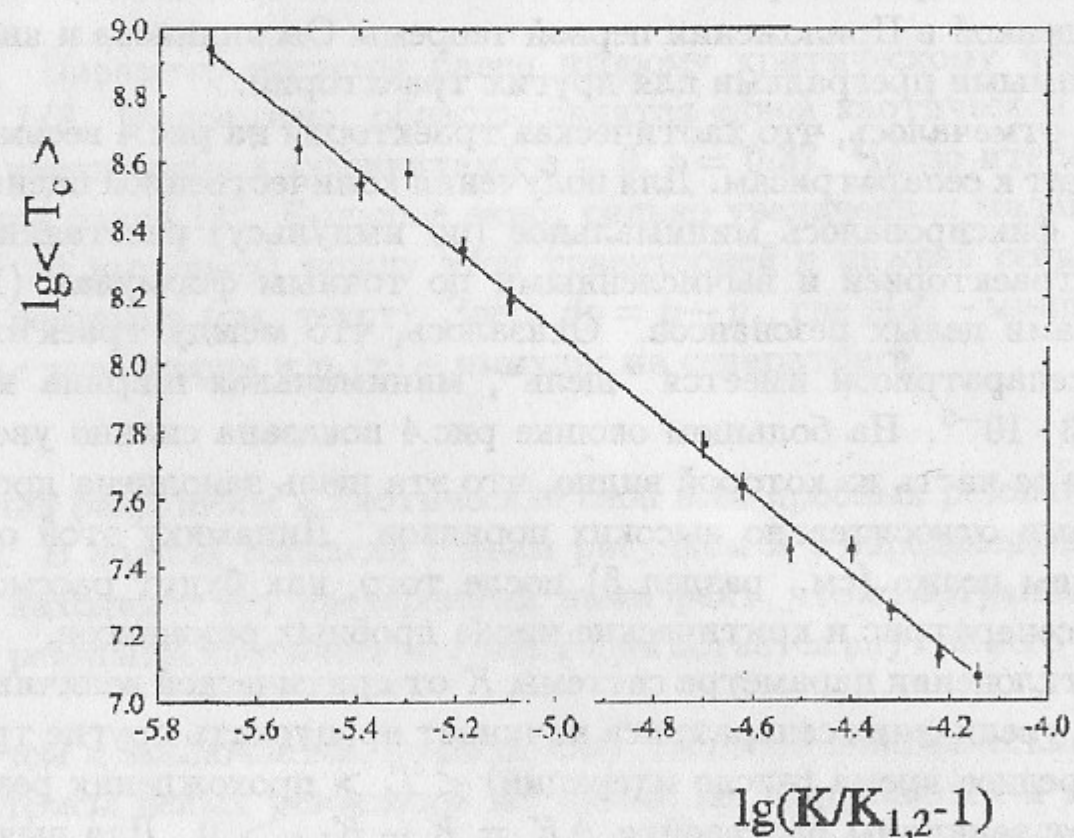


Рис. 5: Время $\langle T_c \rangle$ прохождения целого резонанса (среднее по 100 случайным хаотическим траекториям) как функция относительного отклонения параметра системы K от критического значения $K_{1,2} = 1/8$ при $K > K_{1,2}$. Логарифмы десятичные.

Естественно было бы теперь посмотреть, что происходит при отклонении параметра системы K от критической величины $K_{1,2}$ в сторону уменьшения. Выяснилось, однако, что возникающая при этом динамическая ситуация оказывается качественно другой. Для ее понимания необходимо знакомство с характеристиками дробных резонансов и потому обсуждение этой динамики мы также перенесем в раздел 5.

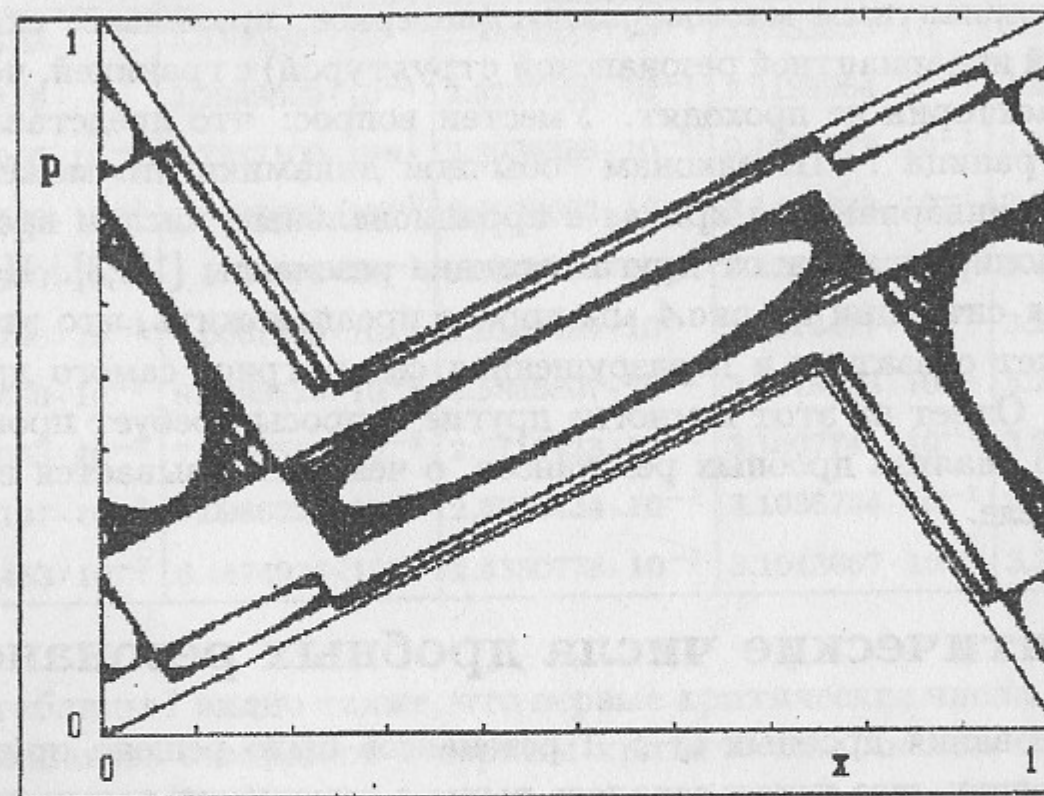


Рис. 6: Параметр системы равен первому критическому числу $K = K_{1,1} = 1/3$. Нижняя и верхняя ломаные – сепаратрисы соседних целых резонансов. Между ними три траектории с начальными координатами, обеспечивающими их попадание в хаотические компоненты движения внутри резонансов (снизу вверх) 1:4, 1:2 и 3:4, соответственно. Число итераций отображения равно 5×10^{10} для каждой траектории.

Положение дел с первым нечетным критическим числом выглядит еще более удивительным. На рис.6, который построен для значения параметра $K = K_{1,1} = 1/3$, показаны сепаратрисы соседних целых резонансов и три хаотические траектории, стартующие внутри дробных резонансов 1:4, 1:2 и 3:4, соответственно. Аналогичные вычисления проводились для резонансов других порядков, но динамическая картина всегда оказывалась качественно одной и той же: хаотическая траектория на протяжении всего времени счета не покидает область того дробного резонанса, внутри которого она стартовала. Мы показали на этом рисунке

всего три траектории, чтобы сделать его понятным. Картинка со многими резонансами очень хорошо смотрится на экране цветного дисплея, где каждый резонанс представлен своим цветом и эти цвета не смешиваются.

Здесь также, как и на рис.4, вся показанная область "заперта" между сепаратрисами соседних целых резонансов. Однако, возникает впечатление, что и каждый отдельно взятый дробный резонанс является устойчивым инвариантным многообразием (наверное, правильнее сказать – устойчивой инвариантной резонансной структурой) с границей, через которую траектории не проходят. Уместен вопрос: что представляет из себя эта граница? По законам "обычной" динамики это может быть устойчивая инвариантная кривая с иррациональным числом вращения, которая изолирует друг от друга соседние резонансы [1,2,3]. Но после обсуждения ситуации на рис.4 мы вправе предположить, что этой границей может оказаться и неразрушенная сепаратриса самого дробного резонанса. Ответ на этот и многие другие вопросы требует проведения детального анализа дробных резонансов, о чем рассказывается в следующем разделе.

4 Критические числа дробных резонансов

Для исследования дробных $Q > 1$ резонансов было решено применить ту же методику, что использовалась выше в отношении целых резонансов – измерение зависимости угла расщепления ветвей сепаратрисы α_Q от параметра системы K . Заметим, что с ростом Q возрастают чисто технические трудности, поэтому к настоящему моменту наиболее полные данные получены только для первых четырех $Q = 2, 3, 4, 5$ дробных резонансов.

Прежде всего, были измерены углы пересечения ветвей сепаратрис при критическом значении параметра $K = K_{1,2} = 1/8$ и они оказались относительно большими: $\alpha_2 \approx -0.036$, $\alpha_3 \approx -0.36$, $\alpha_4 \approx -0.45$, $\alpha_5 \approx -1.01$. Это является свидетельством наличия у всех обследованных резонансов широких хаотических слоев, что полностью согласуется с показанной на рис.4 картиной.

Следующим шагом было вычисление критических чисел для этих резонансов, результаты которых приведены в таблице 1. Данные первой колонки (они относятся к целым резонансам) получены по формулам (3),(4), остальные численно. Оказалось, что у каждого дробного резонанса есть свое (по-видимому, счетное) множество критических чисел $K_{Q,m}$, $m = 1, 2, 3, \dots$, которое, за исключением первого элемента, не со-

впадает с другими подобными множествами. И здесь, как и для случая целых резонансов, нечетные критические числа связаны с плавными изменениями угла пересечения ветвей сепаратрис, а четные со скачком.

Таблица 1. Первые критические числа резонансов

m	Q = 1	Q = 2	Q = 3	Q = 4	Q = 5
1	1/3	$3.3333333 \cdot 10^{-1}$	$3.3333333 \cdot 10^{-1}$	$3.3333333 \cdot 10^{-1}$	$3.3333333 \cdot 10^{-1}$
2	1/8	$2.2949699 \cdot 10^{-1}$	$2.9787198 \cdot 10^{-1}$	$3.2189964 \cdot 10^{-1}$	$3.2960547 \cdot 10^{-1}$
3	$6.1916956 \cdot 10^{-2}$	$1.7387100 \cdot 10^{-1}$	$2.8038338 \cdot 10^{-1}$	$3.1678073 \cdot 10^{-1}$	$3.2801245 \cdot 10^{-1}$
4	$3.6340580 \cdot 10^{-2}$	$1.3985656 \cdot 10^{-1}$	$2.7079692 \cdot 10^{-1}$	$3.1415833 \cdot 10^{-1}$	$3.2721290 \cdot 10^{-1}$
5	$2.3743290 \cdot 10^{-2}$	$1.1700662 \cdot 10^{-1}$	$2.6505200 \cdot 10^{-1}$	$3.1265736 \cdot 10^{-1}$	$3.2676630 \cdot 10^{-1}$
6	$1.6679196 \cdot 10^{-2}$	$1.0061849 \cdot 10^{-1}$	$2.6136469 \cdot 10^{-1}$	$3.1172417 \cdot 10^{-1}$	$3.2648587 \cdot 10^{-1}$
7	$1.2340650 \cdot 10^{-2}$	$8.8293529 \cdot 10^{-2}$	$2.5886807 \cdot 10^{-1}$	$3.1110653 \cdot 10^{-1}$	$3.2630354 \cdot 10^{-1}$
8	$9.4919663 \cdot 10^{-3}$	$7.8686519 \cdot 10^{-2}$	$2.5710423 \cdot 10^{-1}$	$3.1067741 \cdot 10^{-1}$	$3.2617739 \cdot 10^{-1}$
9	$7.5237127 \cdot 10^{-3}$	$7.0986237 \cdot 10^{-2}$	$2.5581434 \cdot 10^{-1}$	$3.1036754 \cdot 10^{-1}$	$3.2608659 \cdot 10^{-1}$
10	$6.1081453 \cdot 10^{-3}$	$6.4674926 \cdot 10^{-2}$	$2.5350778 \cdot 10^{-1}$	$3.1013667 \cdot 10^{-1}$	$3.2601910 \cdot 10^{-1}$

Из таблицы 1 видно также, что первые критические числа $K_{Q,1}$ дробных резонансов совпадают с первым критическим числом целого резонанса $K_{1,1} = 1/3$. Для проверки этого поразительного факта значение $K_{Q,1}$ всех обследованных резонансов было вычислено с двадцатью пятью верными десятичными знаками и все они оказались тройками. Конечно, не подкрепленные теорией результаты численного счета всегда можно подвергнуть сомнению по поводу недостаточной продолжительности или точности. Однако, полученные результаты являются, на наш взгляд, убедительными свидетельствами того, что непроницаемыми для других траекторий границами показанных на рис.6 устойчивых структур являются их собственные сепаратрисы.

В ходе описанных измерений при $K_{1,1} = 1/3$ было замечено, что число вращения запущенной внутри любого резонанса хаотической траектории при длительном счете весьма близко к значению P/Q . Этот факт можно положить в основу еще одного способа локализации критических чисел, но он также (как и построение зависимостей вида (6)) менее точен и более трудоемок, чем измерение угла расщепления сепаратрис.

На рис.7 показано, как "работают" критические режимы дробных резонансов. Здесь параметр системы K равен второму критическому числу

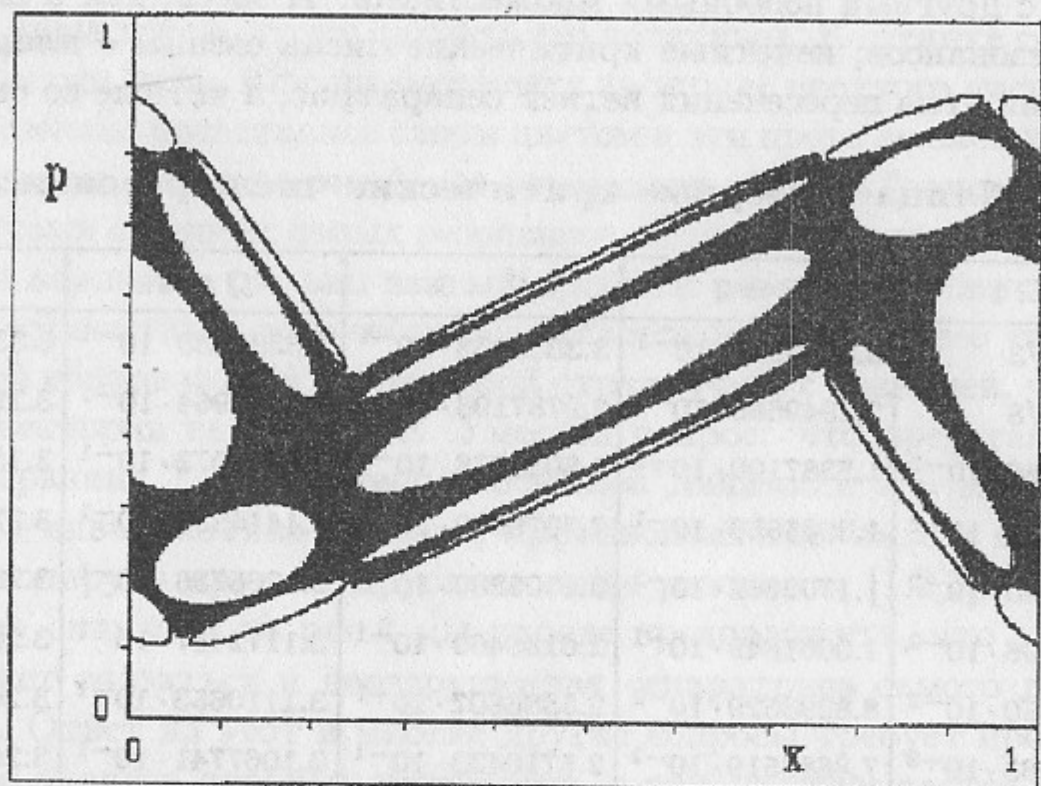


Рис. 7: Параметр системы равен второму критическому числу $K = K_{4,2} = 0.321899641461\dots$ дробных резонансов $1:4$ и $3:4$, которые представлены своими островками устойчивости. Одна хаотическая траектория, "запертая" между не показанными на рисунке сепаратрисами этих резонансов. Число итераций отображения равно 10^{11} .

резонансов $1:4$ и $3:4$, неразрушенные сепаратрисы которых и "заперли" собой стартовавшую между ними хаотическую траекторию.

Необходимо обсудить еще одну важную особенность системы (1),(2), которую можно условно назвать так: перестройка дробных резонансов. Как уже отмечалось, угол пересечения сепаратрис должен всегда вычисляться в гомоклининой (обычно центральной) точке, с точного отыскания которой все обычно и начинается. Положение этой точки определяется положением устойчивых периодических орбит резонансов (центров), которые необходимо предварительно находить. Отображение (1),(2), как и стандартное отображение, обладает определенной симметрией и может быть представлено в виде произведения двух инволюций [2,8]. Это, как известно, кардинально облегчает поиск неподвижных точек, поскольку обследовать надо только четыре линии симметрии, которые для дальнейшего удобно пронумеровать в следующем порядке: 1) $x = 0$; 2) $x = 0.5$; 3) $x = p/2$ и 4) $x = (1+p)/2$ [10].

Для стандартного отображения и центральные и седловые точки лю-

бого резонанса, попавшие на линии симметрии не сходят с них при изменении параметра. У исследуемой системы (1),(2) и в этом отношении все оказалось иначе. Для резонанса $1:3$, например, при $K = K_{1,1} = 1/3$ одна из центральных устойчивых точек располагается на второй линии симметрии $x = 0.5$, в то время как на первой линии $x = 0$ находится седло. При $K = K_{1,2} = 1/8$ все оказывается наоборот. Динамика этого перехода весьма своеобразна и выглядит так. По мере уменьшения параметра K от значения $1/3$ доля связанной с резонансом $1:3$ устойчивой области монотонно уменьшается и при $K = 0.250$ исчезает полностью (величина вычисленного по Грину вычета в этой точке равна нулю [7]). При дальнейшем уменьшении параметра она вновь появляется и монотонно растет, но центр оказывается уже на первой линии, а на второй располагается седло.

Положения резонансов $Q = 3, 4, 5, 6$ были прослежены для первых шести критических чисел от $K_{1,1}$ до $K_{1,6}$ (см. таблицу 1), но обнаружить здесь какого-либо общего закона пока не удалось. При $K = K_{1,1}$ одна из центральных точек всех этих резонансов находится на второй линии симметрии. При $K = K_{1,2}$ центр резонанса $1:3$ переходит на первую линию и более ее не покидает. Резонанс $1:4$ при $K = K_{1,2}$ переходит на третью линию и остается на ней. Для резонанса $1:5$ картина оказалась немного сложнее: при $K = K_{1,2}$ его центр перемещается на первую линию, при $K = K_{1,3}$ вновь возвращается на вторую и остается на ней. Резонанс $1:6$ свою начальную (вторую) линию симметрии не покидает.

Одним из важных этапов в изучении исследуемой системы должно быть обнаружение и объяснение механизма, ответственного за колебательный и знакопеременный характер главной зависимости $\alpha_1(K)$ (рис.1). Может оказаться, что описанная выше "подвижность" дробных резонансов имеет к этому механизму прямое отношение.

5 Окрестность сепаратрисы целого резонанса при $K = K_{1,2}$

После ознакомления с критическими числами и свойствами сепаратрис дробных резонансов мы можем вернуться к темам, сформулированным но не рассмотренным в разделе 3. Начнем с обсуждения динамической обстановки в "щели" между хаотической траекторией и сепаратрисой нижнего целого резонанса (будем для краткости называть ее главной сепаратрисой). Из рис.4 видно, что эта область заселена дробными резонансами относительно высоких порядков $1:Q$ (самый нижний еще различимый

на этом рисунке резонанс есть 1:23).

В качестве первого шага были найдены критические числа некоторых из них. Центральные гомоклинные точки при нечетных значениях $Q = 15, 17, 19, \dots$ находятся на первой линии симметрии $x = 0$, что позволяет применить к ним нашу технику измерения угла пересечения сепаратрис. Основным интерес представляют числа, ближайšie к величине $K_{1,2} = 1/8$, для которой построен рис.4. Результаты приведены в Таблице 2, где указана разность между $K_{1,2} = 1/8$ и критическим числом K_Q резонанса $1 : Q$. Из этих данных четко видно, что с ростом порядка резонанса Q его число вращения $1/Q$ и его критическое число K_Q стремятся к числу вращения (нулю) и критическому числу $K_{1,2} = 1/8$ главной сепаратрисы. Все эти резонансы имеют полную протяженность по фазе и любая стремящаяся подойти к главной сепаратрисе хаотическая траектория должна их пересечь, затрачивая на прохождение каждого из них определенное время.

Формула (6) из раздела 3 дает оценку среднего времени прохождения целого резонанса, которое неограниченно растет по мере приближения параметра K к критическому числу $K_{1,2}$ сверху. Таблица 2 помогает понять причину этого: все дробные резонансы "щели" приближаются (причем тоже сверху) к своим критическим числам. Если предположить, что в отношении этих резонансов имеет место что-то похожее на зависимость (6), то необходимое для их прохождения время также должно неограниченно расти при $Q \rightarrow \infty$ и $(K_{1,2} - K_Q) \rightarrow 0$.

Таблица 2. Критические числа дробных резонансов "щели"

Q	13	15	17	19	21	23
$K_{1,2} - K_Q$	$6.71 \cdot 10^{-8}$	$4.19 \cdot 10^{-9}$	$2.62 \cdot 10^{-10}$	$1.63 \cdot 10^{-11}$	$1.02 \cdot 10^{-12}$	$6.39 \cdot 10^{-14}$

Прямое измерение времени проникновения траектории из "хаотического моря" внутрь дробного резонанса высокого порядка технически невозможно. По этой причине мы находили другую величину - время T_e выхода из области резонанса траектории, стартовавшей внутри него. Для каждого из значений $Q = 13, 15, 17, 19, 21$ было вычислено по 500 хаотических траекторий и обработка результатов методом наименьших квадратов привела к зависимости

$$\langle T_e \rangle = 80 e^{0.705Q} (1 \pm 0.07), \quad (7)$$

которая подтверждает сделанное выше предположение.

Эти данные позволяют понять механизм, обеспечивающий устойчивость главной сепаратрисы в критическом режиме $K = K_{1,2} = 1/8$. Непосредственно к этой сепаратрисе примыкает область, заполненная резонансами $1 : Q$ высоких порядков, которые располагаются слоями тем ближе к ней, чем больше величина Q (см. рис.4). Поскольку каждый такой резонанс имеет полную протяженность по фазе, то чтобы попасть в нижний слой, надо пересечь верхний. Критические числа резонансов по мере приближения к главной сепаратрисе и росте величины Q приближаются к значению $K_{1,2} = 1/8$ (см. таблицу 2). Как следствие, собственные сепаратрисы этих резонансов становятся все менее и менее "прозрачными" и время выхода из них хаотической траектории, согласно (7), неограниченно растет.

Обратимся теперь ко второму поставленному в разделе 3 вопросу и посмотрим, что происходит при отклонении параметра системы K от критической величины $K_{1,2}$ в сторону уменьшения. Из таблицы 2 ясно, что резонансы щели будут при этом один за другим последовательно попадать в свои критические режимы и не позволят траектории подходить к главной сепаратрисе на расстояние ближе некоторого dp_{min} . Так, при $K = 0.12499999581..$ (критическое значение для $Q = 15$) минимальное расстояние траектории от сепаратрисы оказалось равно $dp_{min} \approx 4.6 \cdot 10^{-5}$, а при $K = 0.12499993294..$ (критическое значение для $Q = 13$) $dp_{min} \approx 1.8 \cdot 10^{-4}$ при числе итераций 10^{11} в каждом случае.

Итог этого рассмотрения можно подвести в следующей несколько образной форме. Резонансы высоких порядков формируют перед главной сепаратрисой своего рода "заслон", который "сопротивляется" приближению к ней хаотической траектории. В надкритическом режиме $K > K_{1,2}$ траектории удается пересечь целый резонанс, затрачивая на это тем больше времени, чем ближе K к $K_{1,2}$. При $K = K_{1,2}$ в процессе очень длительной эволюции траектория может подойти к главной сепаратрисе сколь угодно близко, но она никогда ее не достигнет. В подкритическом режиме $K < K_{1,2}$ траектория не может пересечь находящийся в своем критическом режиме дробный резонанс и подойти к главной сепаратрисе на расстояние, меньше некоторого.

Является ли описанный сценарий типичным и справедлив ли он в отношении сепаратрис не только целых, но и дробных резонансов - один из открытых вопросов. Пока неясно также, как начинается надкритический и чем завершается подкритический режимы и где (по параметру K) пролегают их границы.

6 Заключение

Детальное исследование отображения (1), (2) только началось и пока еще рано делать какие-либо выводы. Но если предположить, что описанные выше эффекты получают подтверждение и обобщение, то вырисовывается следующая очень непростая динамическая картина.

С каждым резонансом из счетного множества всех резонансов системы связано свое счетное множество критических значений параметра K , при которых угол α_Q пересечения ветвей сепаратрисы проходит через нуль, что свидетельствует об отсутствии расщепления и хаотического слоя. Сепаратриса такого резонанса (независимо от его порядка Q) имеет полную протяженность по фазе и является непроходимым барьером для других траекторий, что исключает возможность глобальной диффузии по импульсу.

Заметим в этой связи, что в работе [11] при численном изучении отображения (1), (2) со значением параметра $K = 0.28625$ (обращаем внимание на его близость к критическому числу $K_{3,3}$, см. таблицу 1) наблюдалось не получившее тогда объяснения ограничение диффузии. Это обстоятельство, вероятно, можно будет понять в ходе дальнейших исследований с учетом новой информации.

Система (1), (2) заслуживает, по нашему мнению, дальнейшего изучения и хотелось бы отметить несколько наиболее важных проблем.

Изложенные выше факты свидетельствуют о том, что замена в стандартном отображении синуса на пилу порождает качественно другую, новую динамику, которая не вписывается в рамки существующих сегодня представлений. Напомним, что в "обычной" динамике с ростом параметра K переход от хаотического слоя к хаотическому морю изучен достаточно хорошо и объясняется разрушением инвариантных кривых с иррациональными числами вращения и образованием так называемых кантор-торов [12]. Для системы (1), (2) эти представления очевидно не подходят, поскольку основные динамические эффекты оказались связаны с резонансами, числа вращения которых строго рациональны. При отходе от критического значения параметра сепаратриса любого резонанса расщепляется и начинает пропускать другие траектории. Выяснение тонких деталей этого процесса является, по-видимому, одной из главных и интригующих проблем.

Другая проблема связана с поиском механизма, отвечающего за колебательный и знакопеременный характер зависимости $\alpha_1(K)$ (рис.1), которая в основном и определяет необычную динамику системы.

Безусловный интерес представляет также исследование глобальной

диффузии при $K \leq 1/3$ с учетом того факта, что на любом критическом числе любого резонанса эта диффузия ограничена. Решение этой задачи зависит, по-видимому, от того, как устроено и что из себя представляет множество всех критических чисел.

Можно надеяться, что в ходе поиска ответов на поставленные и многие другие вопросы будет получена информация, которая позволит существенно уточнить некоторые представления современной теории нелинейных гамильтоновых систем.

Автор глубоко благодарен Л.В.Овсянникову за возможность познакомиться с результатами его исследований до их публикации и Б.В.Чирикову за многочисленные обсуждения и советы. Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 97-01-00865).

Приложение

Теорема Л.В.Овсянникова о сепаратрисах пилообразного отображения [5].

Рассматривается уравнение для функции $x(t)$, определенной на всей прямой $\mathcal{R}(-\infty < t < +\infty)$

$$x(t+h) + x(t-h) - 2x(t) = h^2 f(x(t)), \quad (1.1)$$

где $h > 0$ заданная постоянная, а функция $f(x)$ нечетная, 4 - периодическая и задана для $0 \leq x \leq 2$ формулой

$$f(x) = \begin{cases} -x, & (0 \leq x \leq 1), \\ x-2, & (1 \leq x \leq 2). \end{cases} \quad (1.2)$$

Решение $x(t)$ уравнения (1.1) с функцией (1.2) называется сепаратрисой, если $x(t)$ монотонна и непрерывна на всей оси \mathcal{R} , $x(0) = 0$ и $x(t) \rightarrow 2$ при $t \rightarrow +\infty$, $x(t) \rightarrow -2$ при $t \rightarrow -\infty$.

Теорема. Существует такая последовательность $\{h_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, что $h_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ и для каждого $h = h_k$ существует сепаратриса $x = x^k(t)$ как решение уравнения (1.1) с функцией (1.2). Последовательность $\{x^k(t)\}$ при $k \rightarrow \infty$ равномерно на \mathcal{R} сходится к решению - сепаратрисе для предельного уравнения $x''(t) = f(x)$

$$x(t) = \begin{cases} \sqrt{2} \sin t, & (0 \leq t \leq \pi/4), \\ 2 - e^{\pi/4-t}, & (\pi/4 \leq t \leq \infty). \end{cases} \quad (1.3)$$

Конструкция. Пусть $h_k = 2 \sin(\alpha_k/2)$, где α_k есть наименьший положительный корень уравнения

$$\sqrt{2} \sin(k\alpha) = \cos(\alpha/2). \quad (1.4)$$

Тогда для $nh_k \leq t \leq (n+1)h_k$ сепаратриса дается формулами

$$x^k(t) = X_n(n+1 - t/h_k) + X_{n+1}(t/h_k - n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.5)$$

с константами

$$X_n = \frac{\sin(n\alpha_k)}{\sin(k\alpha_k)} \quad (n \leq k), \quad X_n = 2 - \left(\frac{\sqrt{h_k^2 + 4} - h_k}{2} \right)^{2(n-k)} \quad (n \geq k)$$

Заметим, что поскольку период и положение силы (1.2) в этой теореме отличаются от принятого в основном тексте (2), то для перехода от параметра Овсянникова h в уравнении (1.1) к параметру K отображения (1) и наоборот надо использовать соотношение

$$K = h^2/4.$$

Литература

1. B.V. Chirikov, Phys.Reports **52**, 263 (1979).
2. A. Lichtenberg and M. Lieberman, *Regular and Chaotic Dynamics*, Springer (1992).
3. Г.М. Заславский, Р.З. Сагдеев, *Введение в нелинейную физику*, Наука, Москва (1988).
4. J. Moser, Nachr.Akad.Wiss.,Göttingen, Math.Phys.Kl., No 1 (1962) 1; Stable and Random Motion in Dynamical Systems, Annals of Mathematics Studies No 77 (University Press, Princeton 1973).
5. Л.В.Овсянников, Частное сообщение, май 1999.
6. Л.В.Овсянников, ДАН **369**, 743 (1999).
7. J. Green, J.Math.Phys., **20** (1979) p.1183
8. В.В.Вечеславов, Б.В.Чириков, ЖЭТФ, **114** 1516 (1998); В.В.Вечеславов, ЖЭТФ, **116** вып 1(7) (1999);
9. B.V. Chirikov, Poincaré recurrences in microtron and the global critical structure, preprint Budker INP 99-7, Novosibirsk, 1999.
10. S.J.Shenker and L.P.Kadanoff, J.Stat.Phys., **4** 631 (1982).
11. B.V.Chirikov, E.Keil, and A.M.Sessler, J.Stat.Phys., **3** No 3, 307 (1971)
12. R.S.MacKay, J.D.Meiss, I.C.Percival, Physica D, **13** 55 (1984).

В.В. Вечеславов

Динамика пилообразного отображения:

1. Новые численные результаты

V. V. Vecheslavov

Dynamics of sawtooth map:

1. New numerical results

ИЯФ 2000-27

Ответственный за выпуск А.М. Кудрявцев
Работа поступила 29.03.2000 г.

Сдано в набор 5.04.2000 г.

Подписано в печать 6.04.2000 г.

Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 2.0 печ.л., 1.6 уч.-изд.л.

Тираж 100 экз. Бесплатно. Заказ № 27

Обработано на IBM PC и отпечатано на
ротапинтере ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.