

Е.Б.Левичев, П.А.Пиминов

ВЛИЯНИЕ КРАЕВОГО ПОЛЯ  
КВАДРУПОЛЬНОЙ ЛИНЗЫ НА  
НЕЛИНЕЙНЫЙ СДВИГ БЕТАТРОННОЙ  
ЧАСТОТЫ  
ИЯФ 2000-14

НОВОСИБИРСК  
1999

**Влияние краевого поля квадрупольной линзы  
на нелинейный сдвиг бетатронной частоты**

*Е.Б.Левичев, П.А.Пимин*

Институт ядерной физики им. Г.И.Будкера  
630090, Новосибирск, Россия

**Аннотация**

Получены аналитические выражения зависимости частоты бетатронных колебаний от амплитуды для краевого поля квадрупольной линзы. Величина эффекта сравнивается с другими источниками нелинейности: секступольными линзами, компенсирующими хроматизм, октупольными ошибками магнитного поля и кинематическими слагаемыми для  $e^+e^-$  коллайдера *ВЭПП-4М*.

**Analytic estimation of the nonlinear tune shift  
due to the quadrupole magnet fringe field**

*E.B.Levichev, P.A.Piminov*

Budker Institute of Nuclear Physics  
630090, Novosibirsk, Russia

**Abstract**

Analytic expressions for the amplitude-dependent tune shift driven by the quadrupole magnet fringe field have been obtained. The magnitude of the effect is compared with other sources of non-linearity such as chromatic sextupoles, octupole errors of the main quadrupole magnetic field and kinematic terms. For the numerical example, the lattice of the  $e^+e^-$  collider *VEPP-4M* was applied.

## 1. Введение

Для циклического ускорителя основными источниками зависимости частоты бетатронных колебаний от амплитуды являются главные нелинейные компоненты ведущего магнитного поля (секступольная и октупольная). Их влияние на пучок исследовалось многими авторами как с помощью численного моделирования, так и аналитически. Выражения, описывающие нелинейный сдвиг бетатронной частоты для такого рода возмущений хорошо известны.

Однако, существуют и другие источники зависимости частоты колебаний от амплитуды, которые могут существенно влиять на нелинейную динамику пучка. Так, например, в [1] нелинейность краевого поля исследовалась для кольца низкой энергии (*LER*) комплекса *PEP-II*, и было показано, что преобладающий вклад (большой, чем из-за регулярных хроматических секступольных линз) вызван краевым полем квадрупольных магнитов. Кинематические эффекты и краевое поле поворотных магнитов существенного влияния не оказывают. Для *B*-фабрики *KEK* [2] указывается, что основное ограничение динамической апертуры вызывается кинематическими эффектами места встречи и краевым полем квадрупольных линз, расположенных вблизи места встречи.

Подобные исследования ведутся, в основном, методами численного моделирования, когда нелинейное преобразование координат частицы, движущейся через краевое поле линзы задается, например, операторами Ли [3] или с помощью матричного формализма второго порядка [4].

Ниже делается попытка получить простые аналитические выражения для вклада краевого поля квадрупольных линз в нелинейный сдвиг частоты бетатронных колебаний. Для сравнения приводятся, также, формулы для кинематического возмущения и октупольной нелинейной компоненты магнитного поля, которая для оценок рассматривается как погрешность (малая) идеального поля внутри квадрупольной линзы. Вклад

различного рода возмущений сравнивается на примере электрон-позитронного накопителя ВЭПП-4М.

## 2. Гамильтониан

Мы будем рассматривать квадрупольную линзу, у которой идеальное квадрупольное поле с учетом краевого спада (см., например, [5]) возмущено октупольной компонентой. Такое возмущение всегда имеется в поле реальной линзы и было бы интересно сравнить его вклад с влиянием краев.

В рассматриваемом случае поперечные компоненты магнитного поля записываются как

$$\begin{aligned} B_z &= B_1(s)x + \frac{1}{6}B_3(s)(x^3 - 3xz^2) - \frac{1}{12}B_1''(s)(x^3 + 3xz^2) + O(5), \\ B_x &= B_1(s)z + \frac{1}{6}B_3(s)(3x^2z - z^3) - \frac{1}{12}B_1''(s)(z^3 + 3x^2z) + O(5), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $B_1 = (\frac{\partial B}{\partial x})|_{x=z=0}$  - градиент поля,  $B_3 = (\frac{\partial^3 B}{\partial x^3})|_{x=z=0}$  - октупольное возмущение, а  $B_1'' = (\frac{\partial^2 B}{\partial x^2})|_{x=z=0}$  характеризует вклад краевого поля. Из-за того, что поле октупольного возмущения и краевая нелинейность описываются одним полиномом (но различаются знаками), последнюю иногда называют "псевдооктупольной".

Гамильтониан поперечного движения релятивистского электрона в магнитном поле (2.1) для  $\frac{\Delta p}{p_0} = 0$  имеет вид [6]:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \left( (p_x^2 + p_z^2) + \frac{1}{2}k_1(s)(x^2 - z^2) \right) - \text{невозмущенная линейная часть,} \\ &+ \frac{1}{8}(p_x^2 + p_z^2)^2 - \text{кинематическая часть,} \\ &- \frac{1}{48}k_1''(s)(x^4 + 6x^2z^2 - z^4) \\ &- \frac{1}{2}k_1'(s)x^2zp_z - \text{влияние краевого поля,} \\ &+ \frac{1}{24}k_3(s)(x^4 - 6x^2z^2 + z^4) \right) - \text{октупольная составляющая,} \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $k_1(s) = \frac{B_1(s)}{B\rho}$  и  $k_3(s) = \frac{B_3(s)}{B\rho}$ . Здесь считается, что  $k_1 > 0$  для квадрупольной линзы, фокусирующей в горизонтальном направлении.

Хотя основная цель данной работы — исследование нелинейности краевого поля, для сравнения и оценок будут, также, приведены выражения для кинематического слагаемого и для регулярной октупольной составляющей магнитного поля.

Для нахождения зависимости частоты бетатронных колебаний от амплитуды в первом порядке малости перейдем в (2.2) стандартным образом к переменным "действие-угол" [7] при помощи производящей функции

$$F(x, z, \phi_x, \phi_z, s) = -\frac{z^2}{2\beta_z(s)} \left[ \tan \phi_z - \frac{\beta'_z(s)}{2} \right] - \frac{x^2}{2\beta_x(s)} \left[ \tan \phi_x - \frac{\beta'_x(s)}{2} \right], \quad (2.3)$$

которая задает следующую зависимость старых переменных от новых:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2J_x \beta_x(s)} \cos \phi_x, & p_x &= \sqrt{\frac{2J_x}{\beta_x(s)}} \left( \cos \phi_x + \alpha_x(s) \sin \phi_x \right), \\ z &= \sqrt{2J_z \beta_z(s)} \cos \phi_z, & p_z &= \sqrt{\frac{2J_z}{\beta_z(s)}} \left( \cos \phi_z + \alpha_z(s) \sin \phi_z \right), \end{aligned} \quad (2.4)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  – параметры Твисса.

Производя усреднение получившегося гамильтониана по циклическим переменным,  $\langle H(s) \rangle_{\phi_x, \phi_z}$ , и вычисляя частоту колебаний системы согласно

$$\nu_{x,z} = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial}{\partial J_{x,z}} \langle H(s) \rangle_{\phi_x, \phi_z} ds, \quad (2.5)$$

получаем следующие выражения для зависимости частоты колебаний от амплитуды в первом порядке по возмущению:

$$\nu_x = C_{xx} J_x + C_{xz} J_z, \quad \nu_z = C_{xz} J_x + C_{zz} J_z, \quad (2.6)$$

где коэффициенты включают в себя вклад кинематической составляющей, краевого поля и регулярного октупольного возмущения:  $C = C^k + C^e + C^o$ . Коэффициенты каждого типа имеют следующий вид.

а) Кинематическое возмущение.

$$\begin{aligned} C_{xx}^k &= \frac{3}{16\pi} \oint \gamma_x^2(s) ds, & C_{zz}^k &= \frac{3}{16\pi} \oint \gamma_z^2(s) ds, \\ C_{xz}^k &= \frac{1}{8\pi} \oint \gamma_x(s) \gamma_z(s) ds, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где  $\gamma = \frac{1+\alpha^2}{\beta}$ .

б) Краевое поле.

$$C_{xx}^e = -\frac{1}{32\pi} \oint k_1''(s) \beta_x^2(s) ds, \quad C_{zz}^e = +\frac{1}{32\pi} \oint k_1''(s) \beta_z^2(s) ds,$$

$$C_{xz}^e = -\frac{1}{16\pi} \oint \beta_x(s) \left( k_1''(s) \beta_z(s) - 4k_1'(s) \alpha_z(s) \right) ds. \quad (2.8)$$

с) Регулярная октупольная компонента.

$$C_{xx}^o = \frac{1}{16\pi} \oint k_3(s) \beta_x^2(s) ds, \quad C_{zz}^o = \frac{1}{16\pi} \oint k_3(s) \beta_z^2(s) ds,$$

$$C_{xz}^o = \frac{1}{8\pi} \oint k_3(s) \beta_x(s) \beta_z(s) ds. \quad (2.9)$$

Для большей наглядности и возможности сравнения упростим получившиеся общие выражения (2.7)–(2.9) исходя из оценки величины возмущения каждого типа в циклическом ускорителе.

### 3. Кинематические эффекты

Основной вклад в интегральные выражения (2.7) дают участки ускорителя с предельно малым значением бетатронной функции, в качестве которых, прежде всего, уместно рассмотреть место встречи (см., например, [2]). Для прямолинейного промежутка длиной  $L$ , где поведение бета-функций зеркально симметрично относительно центра,  $\gamma = \frac{1}{\beta_0}$ , а  $\beta_0$  – значение в центре промежутка, выражения (2.7) принимают простой вид, удобный для оценок:

$$C_{xx}^k = \frac{3}{16\pi} \frac{L}{\beta_{0x}^2}, \quad C_{xz}^k = \frac{1}{8\pi} \frac{L}{\beta_{0x} \beta_{0z}}, \quad C_{zz}^k = \frac{3}{16\pi} \frac{L}{\beta_{0z}^2}. \quad (3.1)$$

### 4. Октупольное возмущение

Если имеется магнитная структура ускорителя и, следовательно, задано поведение бетатронных функций вдоль траектории пучка, несложно вычислить коэффициенты (2.9) численно. Однако, для того, чтобы далее иметь возможность сравнить влияние октупольной ошибки поля линзы длиной  $L$  с влиянием краевых полей этой линзы, получим следующую простую оценку.

Предположим для коэффициента  $C_{xx}^o$ , что  $\beta_x$  слабо меняется внутри линзы ( $k_1 \ll 1$ ), а само возмущение постоянно по длине  $k_3(s) = k_3 = const$ , тогда

$$C_{xx}^o \approx \frac{1}{16\pi} k_3 \beta_{0x}^2 L. \quad (4.1)$$

Понятие "качества" магнитного поля  $q$  обычно определяется как относительное отличие реального и идеального (для данного магнитного элемента) значения поля на некотором радиусе  $a$  (мы будем считать этот радиус вписанным радиусом апертуры квадрупольной линзы). Тогда из (2.1) для поля  $B_z$  в медианной плоскости ( $z = 0$ ) следует:

$$q = \frac{k_3}{6k_1} \cdot a^2. \quad (4.2)$$

Подставляя (4.2) в (4.1) можно получить оценку, которая понадобится нам дальше:

$$C_{xx}^o \approx \frac{3}{8\pi a^2} k_1 q \beta_{0x}^2 L. \quad (4.3)$$

## 5. Краевые эффекты

Нелинейный сдвиг частоты из-за краевого поля линз является основным предметом данной работы. Чтобы упростить выражения (2.8) нам необходимо ввести модель, описывающую поведение краевого поля квадрупольной линзы.

Рассматривались несколько вариантов модельного распределения краевого поля квадрупольной линзы: на основании формул *M.Bassetti* [8,9], модель "четырёх линий" *G.Lee-Whiting* [10] и описание спада магнитного поля двумя сопряженными парабололами [11]. Первые две модели достаточно точно описывают краевое поле и его производные по продольной координате.

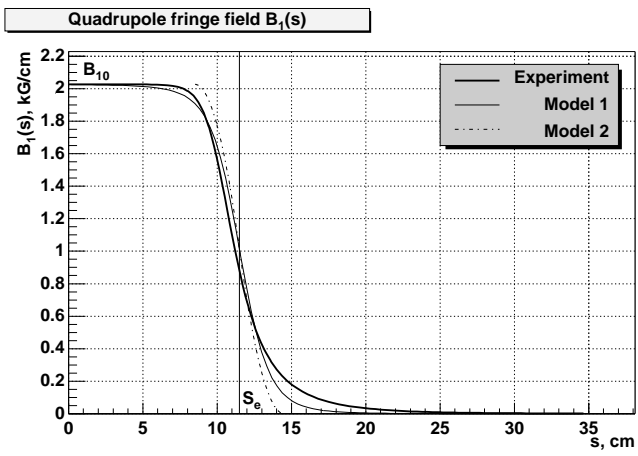
Например, для модели "четырёх линий" распределение градиента и его первых двух производных (необходимые для вычисления (2.8)) на краю линзы имеют вид:

$$B_1(s) = \frac{1}{2} B_{10} \left( 1 - \frac{3s}{2d} + \frac{1s^3}{2d^3} \right),$$

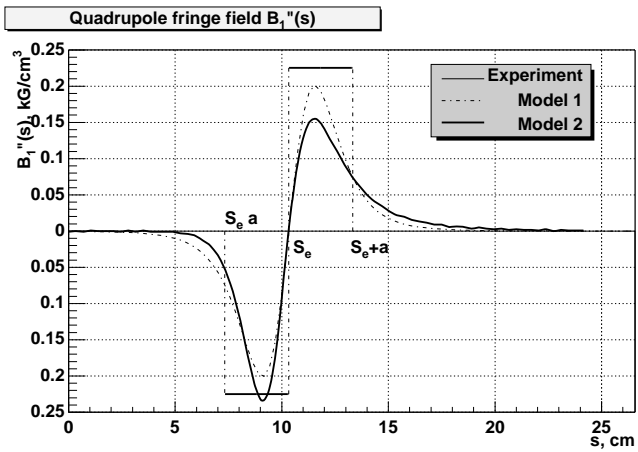
$$B_1'(s) = -\frac{3}{4} B_{10} \frac{1}{d} \left( 1 - \frac{s^2}{d^2} \right)^2, \quad B_1''(s) = \frac{15}{4} B_{10} \frac{s}{d^3} \left( 1 - \frac{s^2}{d^2} \right)^2, \quad (5.1)$$

$$d = \sqrt{a^2 + s^2},$$

здесь  $a$  – вписанный радиус апертуры линзы, а  $B_{10}$  – градиент на оси линзы в центральном сечении. Приближение краевого поля с помощью (5.1) показано на рис. 5.1. К сожалению, использование (5.1) достаточно



А) - краевой спад градиента линзы.



Б) - вторая производная градиента по продольной координате.

Рис. 5.1. Краевое поле квадрупольной линзы: измеренное и рассчитанное согласно (5.1) (модель 1) и (5.2) (модель 2).



сложно, т.к. распределение поля предполагается бесконечным в обе стороны оси (край соответствует  $s = 0$ ), и корректное интегрирование (2.8) с учетом реального поведения бетатронной функции становится затруднительным.

Вместе с тем, простая модель двух сопряженных парабол [11]

$$B_1(s) = \begin{cases} \frac{B_{10}}{2a^2}(a+s)^2, & a \leq s \leq 0 \\ B_{10} - \frac{B_{10}}{2a^2}(a-s)^2, & a \geq s \geq 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

дает достаточно точный результат без громоздких численных коэффициентов, присущих модели (5.1). Поправка между в конечных выражениях для (5.1) и (5.2) будет приведена ниже.

На рис. 5.1 показано измеренное значение спада градиента квадрупольной линзы [12] и модельное представление согласно (5.1) и (5.2). Здесь же даны основные обозначения, используемые в дальнейшем. Вписанный радиус апертуры линзы  $a = 2.8$  см, максимальный градиент в центре линзы  $B_{10} \cong 20$  Т/м. Хотелось бы отметить, что из-за квадрупольной симметрии торцевая фаска, которую применяют для регулировки эффективной длины линзы, практически не влияет на псевдооктупольную компоненту краевого поля, определяемую  $B_1''(s)$ .

Краевые эффекты сосредоточены на малой длине вблизи продольного края линзы с характерным размером области порядка вписанного радиуса линзы:  $\sim \pm a$ . Мы будем считать, что на этой длине параметры Твисса, которые входят в (2.8), меняются мало, так, что они могут быть представлены в виде разложения до первого порядка малости. Например, для горизонтальной бета-функции:

$$\beta_x(s) \approx \beta_{x_e} + \beta'_{x_e}(s - s_e), \quad (5.3)$$

где  $\beta_{x_e}$  и  $\beta'_{x_e}$  – значения бета-функции и ее производной на краю, а  $e = 1, 2$  для первого и второго краев.

Подставляя (5.3) и соответствующие производные краевого поля (5.2) в (2.8) и производя интегрирование можно получить следующие выражения, описывающие вклад краевого поля квадрупольной линзы в нелинейный сдвиг бетатронной частоты:

$$C_{xx}^e = \frac{1}{16\pi} k_{10} (\beta_{x_1} \beta'_{x_1} - \beta_{x_2} \beta'_{x_2}), \quad C_{zz}^e = \frac{1}{16\pi} k_{10} (\beta_{z_1} \beta'_{z_1} - \beta_{z_2} \beta'_{z_2}),$$

$$C_{xz}^e = \frac{1}{16\pi} k_{10} (\beta_{z_1} \beta'_{x_1} - \beta_{x_1} \beta'_{z_1} - \beta_{z_2} \beta'_{x_2} + \beta_{x_2} \beta'_{z_2}), \quad (5.4)$$

где  $k_{10}$  – величина фокусирующего коэффициента линзы в центре, который берется для фокусирующей и дефокусирующей линз со своим знаком. Отметим, что в полученные выражения входят только параметры линейной оптики ускорителя и не входит величина апертуры линзы  $a$ . Полное значение нелинейной зависимости частоты от амплитуды получается суммированием (5.4) по всем квадрупольным линзам ускорителя.

Использование более точного распределения краевого поля (5.1) и интегрирование (2.8) вблизи края линзы в интервале  $\pm na$  дает следующую поправку в (5.4): вместо  $k_{10}$  должно быть подставлено

$$\frac{k_{10}}{2} \frac{n^3}{(n^2 + 1)^{3/2}} \left( 5 - 3 \frac{n^2}{n^2 + 1} \right)$$

т.е., при  $n = 2$  отличие составляет 7%, а при  $n = 3$  отличие всего 2%.

Формулы (5.4) легко могут быть использованы численно, если имеется распределение бетатронных функций вдоль кольца, однако, чтобы выявить основные закономерности влияния краевого поля линзы на нелинейный сдвиг бетатронной частоты полезно еще больше упростить (5.4), предположив, что для рассматриваемой квадрупольной линзы  $\sqrt{k_{10}}L < 1$ . Тогда с точностью до членов второго порядка включительно (5.4) можно разложить в ряд

$$C_{xx}^e \approx \frac{1}{8\pi} k_{10}^2 \beta_{0x}^2 L \left( 1 - \frac{1}{4} k_{10} L^2 \right), \quad C_{zz}^e \approx \frac{1}{8\pi} k_{10}^2 \beta_{0z}^2 L \left( 1 + \frac{1}{4} k_{10} L^2 \right),$$

$$C_{xz}^e \approx \frac{1}{4\pi} k_{10}^2 \beta_{0x} \beta_{0z} L, \quad (5.5)$$

где  $\beta_0$  – экстремальное значение соответствующей бетатронной функции достигаемое в центре линзы. Последнее не является существенным и принимается только потому, что в этом случае формулы (5.5) имеют особенно простой вид. В случае произвольного поведения бетатронной функции (однако, по прежнему имеющей экстремум внутри линзы)  $L^2/4$  в скобках должно быть заменено на  $(l_1^2 - l_1 l_2 + l_2^2)$ , где  $l_{1,2}$  – расстояние от краев линзы до положения экстремума бетатронной функции.

Из (5.5) видно, что для краевого поля линзы зависимость частоты от амплитуды всегда положительна (по крайней мере, для основного члена разложения) независимо от того, фокусирующая или дефокусирующая это линза. Последнее хорошо иллюстрируется полученной численно Таблицей 6.1 для *LER* [1].

Сравним влияние октупольной ошибки поля внутри линзы с влиянием краевой псевдооктупольной компоненты. Из (4.3) и (5.5) можно

получить

$$\frac{C_{xx}^e}{C_{xx}^o} \approx \frac{k_{10} a^2}{3q}. \quad (5.6)$$

Подставляя в (5.5) разумные параметры квадрупольной линзы видно, что влияние краевого поля сравнимо и даже может превосходить ошибки поля во внутренней области.

## 6. Сравнение различного рода возмущений

Для магнитной структуры электрон-позитронного накопителя ВЭПП-4М [13], которая использовалась в качестве модели, сравнивались

- Величины нелинейного сдвига бетатронной частоты для различных типов возмущения, включая краевое поле, октупольную погрешность поля линз, кинематические эффекты и секступольные магниты, компенсирующие натуральный хроматизм.
- Зависимость частоты от амплитуды для краевого поля квадрупольных линз, полученная численным моделированием и аналитически с использованием формул (5.4) и (5.5).

Октупольная компонента поля квадрупольных линз была взята из результатов магнитных измерений [12]. Наиболее существенная ее величина оказалась в дефокусирующей линзе финального фокуса (*EL2* на рис. 6.1).

Для этой линзы с вписанным диаметром апертуры 170 мм на энергии 1.85 ГэВ, на которой производились расчеты,  $B_z \cong 0.2 \text{ Гс/см}^3$ . Для остальных линз кольца эта величина от 7 до 10 раз меньше.

В таблице 6.1 приведены сравнительные данные для различных источников нелинейности для ВЭПП-4М.

|                        | $C_{zz} (\text{м}^{-1})$ | $C_{xz} (\text{м}^{-1})$ | $C_{zx} (\text{м}^{-1})$ |
|------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| Кинематические эффекты | 50                       | 7                        | 96                       |
| Краевое поле           | 170                      | 300                      | 390                      |
| Секступольные линзы    | 88                       | -1680                    | -1660                    |
| Октупольные ошибки     | -510                     | -340                     | -280                     |

Таблица 6.1. Значения коэффициентов (2.6) для ВЭПП-4М.

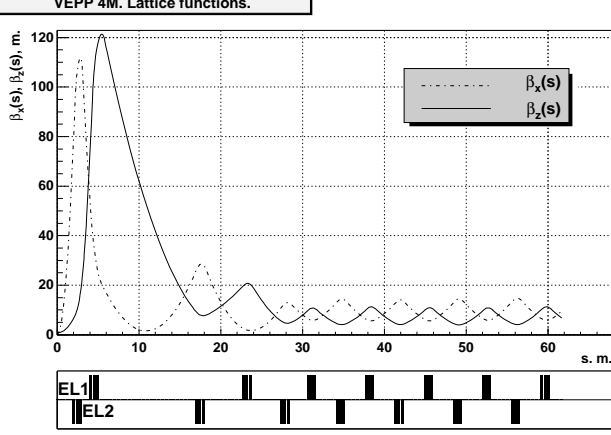


Рис. 6.1. Поведение структурных функций в районе финального фокуса ВЭПП-4М.

Видно, что для случая ВЭПП-4М влияние краевого поля сравнительно невелико, однако, например, для LER [1], соответствующие величины, полученные численным моделированием, в несколько раз превосходят значения ВЭПП-4М и дают определяющий вклад в нелинейный сдвиг частоты (например,  $C_{xx}$  от секступолей равен  $-800 \text{ м}^{-1}$ , а от краевых эффектов  $1628 \text{ м}^{-1}$ ).

Как и ожидалось, в случае кинематических эффектов основной вклад дает место встречи (рис. 6.2), а для краевой нелинейности главными оказываются квадрупольные линзы финального фокуса *EL1* и *EL2*, где бета-функции достигают величин 110-120 м (рис. 6.3).

Для того, чтобы сравнить оценку краевого поля с численным моделированием, последнее проводилось для случая "кусочно-постоянного" приближения поля квадрупольной линзы. При этом, согласно [3,14], на краю линзы скачком меняется и координата и импульс частицы:

$$\Delta x = \frac{1}{12} k_{10} (x^3 + 3xz^2), \quad \Delta p_x = \frac{1}{4} k_{10} [2xzp_z - p_x (x^2 + z^2)]. \quad (6.1)$$

Для вертикального движения производится замена  $x \leftrightarrow z$  и  $k_{10} \leftrightarrow -k_{10}$ . Результаты моделирования и аналитической оценки сравниваются в таблице 6.2.

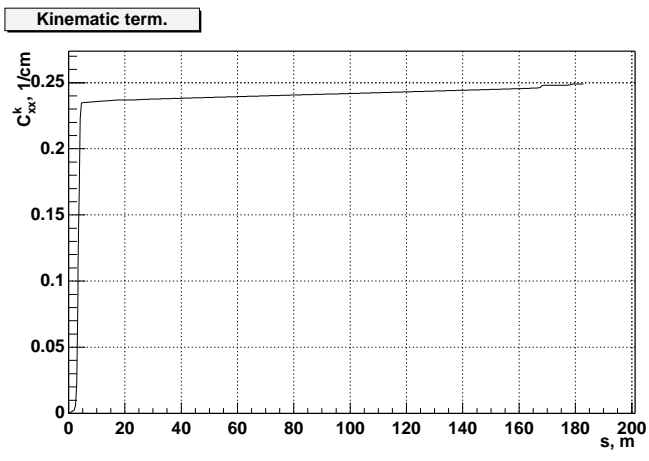


Рис. 6.2. Прирост  $C_{xx}$  из-за кинематических эффектов для  $1/2$  кольца ВЭПП-4М. Место встречи соответствует  $s = 0$ .

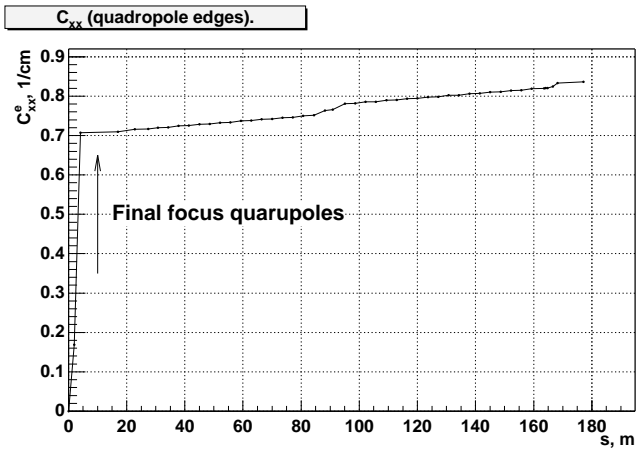


Рис. 6.3. Прирост  $C_{xx}$  из-за краевых эффектов для  $1/2$  кольца ВЭПП-4М.

|                 | $U_{zz} (\text{М}^{-2})$ | $U_{xz} (\text{М}^{-2})$ | $U_{zz} (\text{М}^{-2})$ |
|-----------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| Моделирование   | 182                      | 308                      | 403                      |
| Оценка по (5.4) | 170                      | 300                      | 390                      |
| Оценка по (5.5) | 170                      | 260                      | 350                      |

Таблица 6.2. Численное моделирование и аналитическая оценка краевых эффектов.

Видно, что отличие аналитической оценки от моделирования составляет несколько процентов, что может объясняться ограниченной точностью определения сдвига частоты при Фурье-анализе 1024 оборота трекинга (как раз на уровне  $\sim 10\%$  абсолютной величины нелинейного сдвига).

Таким образом, оценка зависимости частоты бетатронных колебаний от амплитуды для краевых полей квадрупольных линз весьма удовлетворительно совпадает с результатами численного моделирования, позволяя быстро получить результат из линейной магнитной структуры циклического ускорителя, тем более, что далеко не все программы численного трекинга позволяют учесть влияние краевых нелинейностей.

## 7. Благодарности

Авторы благодарны С.Ф.Михайлову за предоставление материалов магнитных измерений и И.Я.Протопопову за помощь в математическом моделировании краевых эффектов.

- [1] *E.Forest et al.* Sources of amplitude-dependent tune shift in the PEP-II design and their compensation with octupoles. Proc. of EPAC'94, v.2, p.1033.
- [2] *Oide and H.Koiso.* Phys.Rev.E, 47, 2010 (1993).
- [3] *E.Forest and J.Milutinovic.* Nucl. Instr. and Meth., 269, 474 (1988).
- [4] *D.C.Carey.* The optics of charged particle beams. Harwood academic publishers, 1987.
- [5] *K.G.Steffen.* High energy beam optics. Interscience Publishers, New York, 1965, pp.47-62.
- [6] *C.J.Gardner.* The vector potential in accelerator magnets. Particle Accelerators, 1991, Vol.35, pp.215-226.
- [7] *Z.Parsa et al.* Second-order perturbation theory for accelerators. Particle accelerators, 1987, Vol.22, pp.205-230.
- [8] *M.Bassetti.* Analytical formulae for multipolar potential. DAFNE Technical Note G-26, 1994.
- [9] *C.Biscari.* Low beta quadrupole fringing field on off-axis trajectory. AIP Conf. Proceedings 344, pp.88-93, 1995.
- [10] *G.E.Lee-Whiting.* Measurement of quadrupole lens parameters. NIM 82 (1970), 157-161.
- [11] *P.Krejik.* Nonlinear quadrupole end-field effects in the CERN antiproton accumulator. IEEE CH2387-9/87/0000/-1278.
- [12] *С.Ф.Михайлов, Е.И.Антохин.* Частное сообщение.
- [13] *В.В.Анашин и др.* Состояние работ на накопителе ВЭПП-4М. Труды XIII Совещания по ускорителям заряженных частиц, т.1, с.369, Дубна, 1993 г.
- [14] *G.E.Lee-Whiting.* Third-order aberrations of a magnetic quadrupole lens. NIM 83 (1970) 232-234.