

Сибирское отделение Российской Академии наук  
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ им. Г.И. Будкера

В.А. Таюрский, С.И. Эйдельман

МОНТЕ-КАРЛОВСКИЕ ГЕНЕРАТОРЫ  
МНОГОЧАСТИЧНЫХ СОБЫТИЙ

ИЯФ 2000-78

НОВОСИБИРСК  
2000

# Монте-карловские генераторы многочастичных событий <sup>1</sup>

*В.А. Тюрский, С.И. Эйдельман*  
Институт ядерной физики им.Г.И. Будкера  
630090 Новосибирск, Россия

## Аннотация

Описаны алгоритмы моделирования и программные компоненты монте-карловских генераторов событий  $e^+e^- \rightarrow hadrons$  и  $e^+e^- \rightarrow e^+e^- + hadrons$ . Моделирование адронной системы производится в модели изотропного фазового объёма. Множественность рождённых частиц от 2 до 20. Приведены примеры расчётов с помощью этих генераторов.

## Monte Carlo generators of multiparticle events

*V.A. Tayursky, S.I. Eidelman*  
Budker Institute of Nuclear Physics  
630090 Novosibirsk, Russia

## Abstract

The Monte Carlo generators for the processes  $e^+e^- \rightarrow hadrons$  and  $e^+e^- \rightarrow e^+e^- + hadrons$  are described. Simulation of the hadronic system with the multiplicity up to 20 uses the Lorentz invariant phase space model. Examples of the generators performance are presented.

© *Институт ядерной физики  
им. Г.И. Будкера СО РАН, Россия*

---

<sup>1</sup>Работа частично поддержана грантом РФФИ 97-02-18516

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Вычисление интеграла по фазовому объёму частиц</b>	<b>8</b>
<b>3</b>	<b>EEHADRNS – генератор процесса <math>e^+e^- \rightarrow hadrons</math></b>	<b>10</b>
<b>4</b>	<b>Программные компоненты генератора <math>e^+e^- \rightarrow hadrons</math></b>	<b>14</b>
4.1	Подпрограммы . . . . .	14
4.2	COMMON-блоки . . . . .	16
<b>5</b>	<b>Расчёты процесса <math>e^+e^- \rightarrow n\pi</math> при энергии <math>\sqrt{s} = 1.5-3.5</math> ГэВ</b>	<b>17</b>
<b>6</b>	<b>GGHADRNS – генератор процесса <math>e^+e^- \rightarrow e^+e^- + hadrons</math></b>	<b>23</b>
6.1	Двухфотонное сечение в инвариантных переменных . . . . .	26
6.2	Плотность $\gamma\gamma$ -светимости . . . . .	29
6.3	Моделирование процесса $e^+e^- \rightarrow e^+e^- + hadrons$ . . .	31
<b>7</b>	<b>Программные компоненты генератора <math>e^+e^- \rightarrow e^+e^- + hadrons</math></b>	<b>33</b>
7.1	Подпрограммы . . . . .	34
7.2	COMMON-блоки . . . . .	36
<b>8</b>	<b>Расчеты процесса <math>e^+e^- \rightarrow e^+e^- + n\pi</math> при энергии <math>\sqrt{s} = 3</math> и 10 ГэВ</b>	<b>38</b>
<b>9</b>	<b>Приложение 1</b>	<b>41</b>
<b>10</b>	<b>Приложение 2</b>	<b>49</b>
	Список литературы	52



---

# 1 Введение

Моделирование эксперимента в физике высоких энергий состоит из моделирования событий и моделирования отклика детектора. Моделирование событий, или первичное моделирование, осуществляется при помощи программ-генераторов, основанных на моделях, описывающих изучаемые в эксперименте события. Разработка таких генераторов является важной самостоятельной задачей в физике частиц. В качестве примера можно привести давно и широко используемые в экспериментах на  $e^+e^-$  пучках основанные на модели струн КХД генераторы событий JETSET 6.3, JETSET 7.4 и др., разработанные группой теоретиков из университета г. Лунд [1], и генераторы КЭД событий, разработанные Ф.Берендсом с сотрудниками (см., например, [2]).

В данной работе описаны алгоритмы моделирования и программные компоненты давно используемых в ИЯФ генераторов событий  $e^+e^-$  аннигиляции в адроны  $e^+e^- \rightarrow hadrons$  и событий рождения адронов в двухфотонных реакциях  $e^+e^- \rightarrow e^+e^- + hadrons$ . Эти генераторы предназначены для моделирования реакций при невысоких энергиях, порядка нескольких ГэВ. При энергиях  $e^+e^-$  аннигиляции в области ипсилон-мезонов и выше модели множественного рождения должны учитывать рождение струй адронов, и для моделирования и обработки экспериментов используются основанные на КХД модели, такие как LUND [1].

При невысоких энергиях для описания рождения адронов можно использовать модель изотропного фазового объема. Об этом свидетельствуют, в частности, данные эксперимента с детектором MARK I на SPEAR [3, 4], которые при инвариантной массе адрон-

ной системы  $\sim 3 \text{ ГэВ}/c^2$  не противоречат модели фазового объёма [4]. На рис. 1 показано наблюдаемое в этом эксперименте распре-

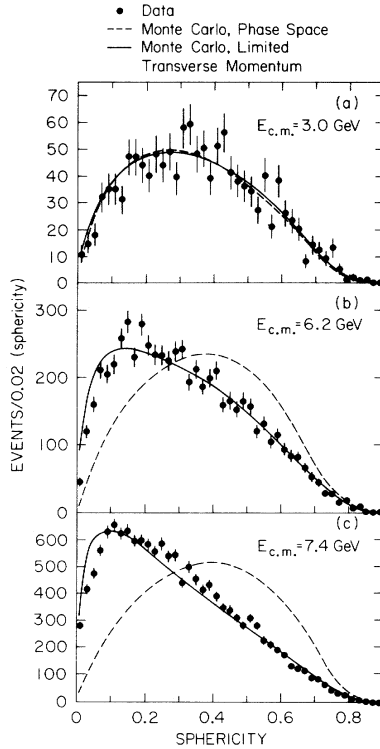


Рис. 1: Детектор Mark I. Распределения по сферичности. Расчет по струйной модели (сплошные кривые) и по модели фазового объёма (пунктирная кривая) для (а)  $\sqrt{s}=3.0 \text{ ГэВ}$ , (б)  $\sqrt{s}=6.2 \text{ ГэВ}$ , (в)  $\sqrt{s}=7.4 \text{ ГэВ}$ . Работа [4].

деление по сферичности  $S$  многоадронных событий, которая определяется по минимуму суммы квадратов поперечных импульсов заряженных частиц (относительно оси струи) и нормирована на сумму квадратов их полных импульсов:

$$S = \frac{3[\sum_i p_{\perp i}^2]_{min}}{2 \sum_i p_i^2}.$$

Параметр  $S$  служит для выделения направления струи. Сферичность изменяется от 0 для струйных событий до 1 для событий с большой множественностью и изотропным распределением частиц.

В генераторах, которые описаны далее, предусмотрено 2 режима моделирования процессов  $e^+e^- \rightarrow hadrons$  и  $e^+e^- \rightarrow e^+e^- + hadrons$  по модели изотропного фазового объёма.

**В первом** режиме считается, что образовавшаяся адронная система состоит из пионов. Множественность пионов переменна. Распределение по полной множественности подчиняется распределению Пуассона. Вид зависимости заряженной множественности от энергии столкновения взят из экспериментальных данных по  $e^+e^-$  аннигиляции в адроны. Эта простая модель основана на экспериментальных данных, согласно которым более чем 80% адронов, образуемых в рассматриваемых реакциях, – это пионы (см. рис.3).

**Второй** режим обращения к генераторам предполагает произвольный состав частиц в рожденной системе. Допускаются частицы с типами GEANT от 1 до 16 (не только адроны), массы частиц такие же, как в программе GEANT (см. таблицу 1). Множественность частиц (не превышающая 20) фиксирована. Требуется лишь, чтобы данное событие было доступно по энергии.

Прежде чем перейти к описанию генераторов, сделаем ряд замечаний:

- 1) в генераторах мы всюду пренебрегаем спинами начальных и конечных частиц;
- 2) в формулах, как правило, не указывается явно, с помощью специальных обозначений, применяемая система отсчёта, – какая система используется, это бывает ясно из текста;
- 3) считается, что импульсы сталкивающихся пучков  $e^-$ ,  $e^+$  равны и противоположны и направлены по оси  $z$ ;
- 4) в формулах используется система единиц  $c = \hbar = 1$ .

Первые версии генераторов были разработаны ещё для экспериментов с детектором ОЛЯ на накопителе ВЭПП-2М

( $e^+e^- \rightarrow hadrons$ ) и для экспериментов с детектором МД-1 на накопителе ВЭПП-4( $e^+e^- \rightarrow e^+e^- + hadrons$ ). В основе генераторов лежит алгоритм розыгрыша "случайных звёзд"(К-процедура)[5]. Появление данной работы связано с подготовкой программного обеспечения для экспериментов с детектором КЕДР на ВЭПП-4М. В своей основе программы не изменились, но в них был внесён ряд дополнений и исправлений. Эти генераторы включены в общую программу моделирования детектора КЕДР, написанную на основе монте-карловского кода GEANT [6]. В данном препринте приведено подробное описание генераторов, которого до сих пор не было, что будет полезно для физиков, занимающихся моделированием и обработкой данных с детектора КЕДР, а также с других детекторов.

## 2 Вычисление интеграла по фазовому объёму частиц

При вычислении величины сечения или вероятности рождения или распада частиц возникают интегралы состояния вида:

$$S_n = \int dR_n | M |^2 . \quad (1)$$

Здесь  $| M |^2$  – квадрат модуля матричного элемента рассматриваемого процесса, а  $dR_n$  – элемент фазового объёма  $n$  частиц с массами  $m_i$ , которые заданы 4-х импульсами  $\vec{p}_i = (\vec{p}_i, E_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Элемент фазового объёма в пространстве импульсов  $dR_n$ , где каждая частица находится на массовой поверхности, с учётом сохранения суммарного 4-х импульса имеет вид [5]:

$$dR_n = \prod_{i=1}^n d^4\vec{p}_i \delta(\vec{p}_i^2 - m_i^2) \delta^4\left(\sum_{i=1}^n \vec{p}_i - \vec{P}_n\right), \quad (2)$$

где  $\vec{P}_n$  – суммарный 4-х импульс  $n$  частиц.  $dR_n$  не зависит от выбора системы отсчёта, инвариантен относительно преобразований Лоренца. После интегрирования по энергиям частиц  $dR_n$  примет



вид:

$$dR_n = \frac{d^3 \vec{p}_n}{2E_n} \frac{d^3 \vec{p}_{n-1}}{2E_{n-1}} \dots \frac{d^3 \vec{p}_2}{2E_2} \frac{d^3 \vec{p}_1}{2E_1} \delta^4 \left( \sum_{i=1}^n \vec{p}_i - \vec{P}_n \right), \quad (3)$$

где энергии частиц  $E_i = \sqrt{\vec{p}_i^2 + m_i^2}$ .

В результате получаем

$$S_n = \int dR_n |M|^2 = \int \frac{d^3 \vec{p}_n}{2E_n} \frac{d^3 \vec{p}_{n-1}}{2E_{n-1}} \dots \frac{d^3 \vec{p}_2}{2E_2} \frac{d^3 \vec{p}_1}{2E_1} \delta^4 \left( \sum_{i=1}^n \vec{p}_i - \vec{P}_n \right) |M(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n)|^2. \quad (4)$$

Вычисление интеграла  $S_n$  методом Монте-Карло эквивалентно моделированию процесса взаимодействия с заданной полной энергией, где в конечном состоянии находится  $n$  частиц. При  $|M| \equiv 1$  интеграл (4) равен величине фазового объема  $n$  частиц.

В случае, когда в конечном состоянии находится только 2 частицы,  $\delta$ -функция легко исключается, и в системе их центра инерции имеем (см. Приложение 1):

$$S_2 = \int dR_2 |M|^2 = \int \frac{d^3 \vec{p}_2}{2E_2} \frac{d^3 \vec{p}_1}{2E_1} \delta^4 \left( \sum_{i=1,2} \vec{p}_i - \vec{P}_2 \right) |M(\vec{p}_1, \vec{p}_2)|^2 \sim \int d\Omega |M|^2, \quad (5)$$

где  $d\Omega = d\cos(\theta)d\phi$ ,  $\theta$ ,  $\phi$  - углы одной из вторичных частиц. В простейшем варианте алгоритм моделирования следующий. Сначала генерируются углы  $\theta$  и  $\phi$ , считая вылет первой частицы изотропным, затем определяются углы второй частицы  $\pi - \theta$  и  $\pi + \phi$ , после чего используется метод Неймана для получения событий с весом 1.

В случае трех и более частиц в конечном состоянии вычисление интеграла (4) становится нетривиальной задачей. Был использован метод преобразования интеграла (4) к виду, удобному для монте-карловского интегрирования, который описан в книге Г.И.Копылова "Основы кинематики резонансов"[5], вышедшей 30

лет назад, и в настоящее время труднодоступной. Этот метод воспроизведён в Приложении 1. Основанный на нём алгоритм моделирования многочастичных событий [5] приведён в Приложении 2. Подобные методы вычисления многочастичного фазового объёма используются в таких известных программах, как FOWL [7] и SAGE [8].

### 3 ЕЕНАДРНС – генератор процесса

$$e^+e^- \rightarrow hadrons$$

Как указывалось выше, генераторы можно использовать в двух режимах. В первом режиме работы генератора ЕЕНАДРНС (параметр программы IREG=1), при котором генерируются события с переменной множественностью, реализуется простая пионная модель рождения адронов.

Вообще говоря, любая модель рождения адронов в процессе  $e^+e^- \rightarrow hadrons$  должна включать наиболее общие характеристики адронизации, такие как а) средняя заряженная множественность  $\langle n_c \rangle$  и вид распределения по  $n_c$ ; б) состав частиц в процессе адронизации. Для моделей, учитывающих рождение струй, важным параметром является средний поперечный импульс  $\langle p_\perp \rangle$  частиц относительно оси струи и вид распределения по  $p_\perp$ . Сама ось струи также имеет некоторое угловое распределение относительно оси  $e^+ - e^-$  столкновения. Далее рассматривается модель изотропного фазового объёма ( $|M|^2 \equiv 1$ ), где характеристики струйности не используются. При необходимости их можно учесть, задав соответствующий  $|M|^2 \neq 1$  в подпрограмме ЕЕНМАТR.

Остановимся подробнее на пунктах а) и б).

Наблюдаемая в различных экспериментах средняя заряженная множественность может быть описана логарифмической зависимостью от энергии, идущей на образование частиц, при энергии  $\leq 8$  ГэВ, и более быстрой – при большей энергии [9]. Данные ряда экспериментов на  $e^+e^-$ -пучках при невысокой энергии показаны на рис.2, взятом из работы [3]. Здесь же приведена кривая (6), описывающая данные детектора Mark I и ряда других в зависимости

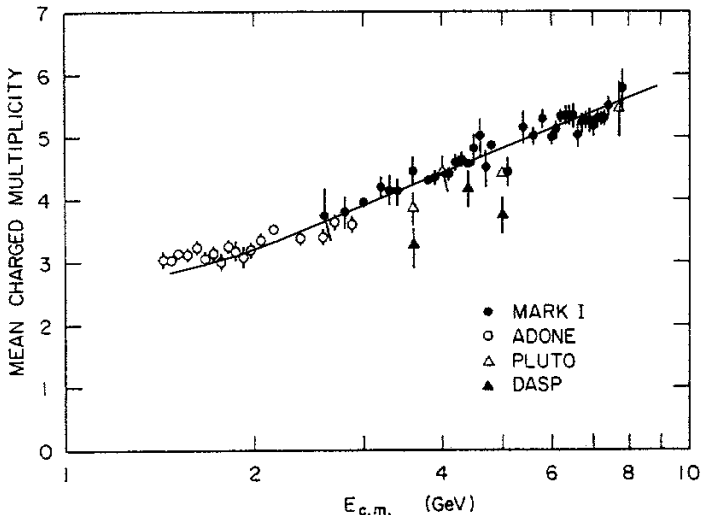


Рис. 2: Средняя заряженная множественность в процессе  $e^+e^- \rightarrow hadrons$  в зависимости от энергии столкновения. Рисунок из работы [3].

от энергии столкновения  $\sqrt{s} = 2E$ ,  $E$  – энергия пучка (в ГэВ).

$$\langle n_c \rangle = 2.1 + 0.84 \cdot \ln(s). \quad (6)$$

Распределение по множественности в реакциях различного типа измерялось в целом ряде работ. В эксперименте с детектором Mark I при энергии  $e^+e^-$ -аннигиляции  $\sqrt{s} = 3 - 7.4$  ГэВ получено, что распределение по множественности описывается распределением Пуассона [3]. Измеренное в эксперименте TASSO при более высокой энергии  $\sqrt{s} = 14 - 34$  ГэВ [10] распределение заряженных частиц по множественности также близко к пуассоновскому. Поэтому в генераторе EENADRNS использовано пуассоновское распределение по множественности частиц.

Данные по составу заряженных частиц, образуемых в  $e^+e^-$ -аннигиляции, показаны на рис.3. Из рисунка видно, что при энергии  $\sqrt{s} \approx 3 - 40$  ГэВ рождённые частицы более чем на 80% состоят из пионов. Так, при  $\sqrt{s} \approx 3.5$  ГэВ

$$\langle n_\pi \rangle : \langle n_K \rangle : \langle n_p \rangle \approx 3 : 0.3 : 0.1. \quad (7)$$

Таким образом, в режиме работы генератора IREG=1 события состоят из одних пионов с переменной полной множественностью  $n$ , изменяющейся от 3 до 20. Алгоритм моделирования множественности и состава частиц в событии в этом режиме следующий.

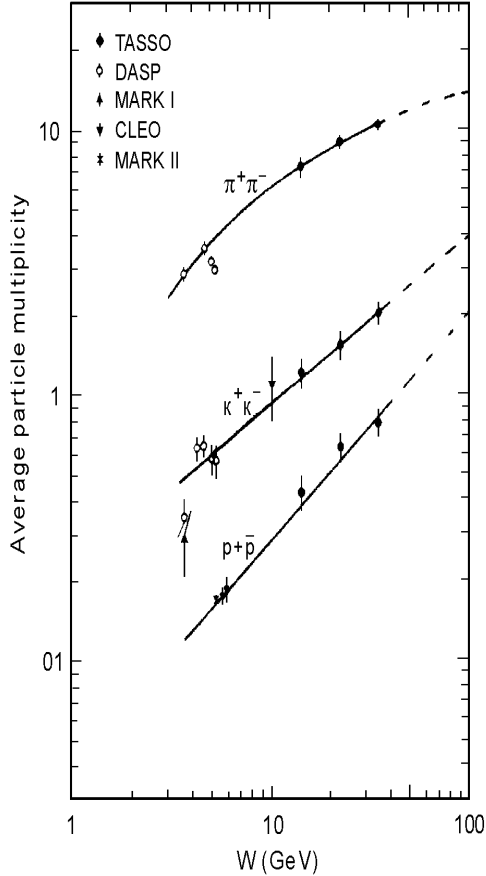


Рис. 3: Состав частиц в процессе  $e^+e^- \rightarrow hadrons$  в зависимости от энергии столкновения. Рисунок из работы [11].

1. Вычисляется средняя множественность заряженных пионов как функция квадрата полной энергии  $s = (2E)^2$  (ГэВ<sup>2</sup>), в соответствии с зависимостью (8). АМС – параметр программы.

$$\langle n_c \rangle = 2.1 + \text{АМС} \cdot \ln(s). \quad (8)$$

При  $s < 1$  считается  $\langle n_c \rangle = 2$ .

2. Вычисляется средняя полная множественность пионов в зависимости от параметра программы АМН – доли нейтральных  $\pi^0$ -мезонов.

$$\langle n \rangle = \frac{\langle n_c \rangle}{(1 - \text{АМН})}.$$

3. Определяется максимально возможное число пионов, равное  $n_{max} = \sqrt{s}/m_\pi$ , где  $m_\pi$  – масса заряженного пиона. Если  $n_{max} > 20$ , то  $n_{max}$  заменяется на 20.

4. Разыгрывается по Пуассону полная множественность пионов в событии  $n$  со средним  $\langle n \rangle$ . При  $n < 3$  или  $n > n_{max}$  этот розыгрыш повторяется.

5. Разыгрывается по биномиальному распределению доля нейтралов  $n_n/n$  со средним АМН и определяется  $n_n$ .

6. Вычисляется число заряженных частиц  $n_c = n - n_n$ . Если оно чётное, то переход на пункт 7, если нечётное, то добавляется +1 или -1 с равной вероятностью и подправляется  $n_n$ , чтобы сохранить  $n$ .

7. Если  $n_n \neq n$ , процедура заканчивается. В противном случае розыгрыш повторяется (переход на п.4). (Событие, состоящее из одних  $\pi^0$  мезонов, запрещено по С-чётности).

После того, как определён состав частиц в событии, моделирование для режимов IREG=1 и IREG=2 выполняется одинаковым образом: для полной энергии  $\sqrt{s}$  производится моделирование импульсов и энергий частиц по модели изотропного фазового объема (см. Приложения 1,2). Никакие законы сохранения, кроме закона сохранения энергии-импульса, не учитываются. Число частиц не должно быть больше 20. Для режима IREG=2 GEANT-типы частиц не должны превышать 16.

## 4 Программные компоненты генератора

$e^+e^- \rightarrow hadrons$

Программа написана на языке Фортран 77 и содержит все необходимые для моделирования подпрограммы, за исключением генератора случайных чисел. Для моделирования событий в детекторе КЕДР в генераторе EENADRNS в качестве датчика случайных чисел (от 0 до 1) используется подпрограмма GRNDM из пакета GEANT3. Для моделирования события множественного рождения нужно вызвать подпрограмму EENADRNS с параметрами, определяющими энергию столкновения и состав частиц. Результат моделирования – 4-х импульсы рождённых частиц – будет находиться в COMMON-блоке /EENPRT/. В общем блоке /EENPHSI/ будет содержаться оценка интеграла по фазовому объёму.

Ниже описаны входные параметры генератора, перечислены используемые подпрограммы и COMMON-блоки. Считается, что сталкивающиеся пучки направлены по оси z.

### 4.1 Подпрограммы

SUBROUTINE **EENADRNS**(EB,IREG,AMC,AMN,NT,FM0)

*Назначение:* моделирование многочастичного события.

*Входные параметры:*

- EB: энергия пучка в ГэВ.
- IREG: режим.
- IREG=1: моделирование пионной системы с переменной множественностью, зависящей от параметров AMC, AMN.
- IREG=2: моделирование системы частиц с фиксированной множественностью, состав задаётся в массиве NT(20).
- AMC: параметр, входящий в зависимость  $\langle n_c \rangle$  от энергии для режима IREG=1 (8).
- AMN: средняя доля нейтральных пионов в событии для режима IREG=1.
- NT(20): типы частиц в событии для режима моделирования

с фиксированной множественностью  $IREG=2$ . (Для частиц допускаются типы GEANT не больше 16). Используются первые ненулевые элементы массива NT.

FM0: мажоранта для получения событий с весом 1 в режиме  $IREG=2$ ; при  $FM0 \leq 0$  используется оценка программы.

Для получения событий с единичным весом в генераторе используется метод Неймана (см. Приложение 2, **K17**). Мажоранта в этой процедуре в режиме генератора  $IREG=1$ , а также в режиме  $IREG=2$  при  $FM0 \leq 0$  определяется внутри программы для каждого события. Моделирование событий с фиксированной множественностью ( $IREG=2$ ) можно существенно ускорить, используя мажоранту, рассчитанную один раз. Для этого, задав  $FM0 \leq 0$ , нужно определить максимальный вес событий WM (COMMON-блок /EENPHSI/), и в последующих расчётах с теми же параметрами EB и NT(20) использовать мажоранту ( $FM0 > 0$ ), которая обычно берётся несколько больше WM. Правильность выбора мажоранты контролируется по величине NGT и гистограмме по весам ID(20) из того же COMMON-блока. В случае больших флуктуаций веса мажоранту можно брать меньше WM, но так, чтобы число разыгранных неправильно событий было невелико [5]. При моделировании событий с переменной множественностью ( $IREG=1$ ) параметр FM0 не используется.

Другие подпрограммы генератора:

<i>Название</i>	<i>Назначение</i>
EENBIND:	моделирование биномиального распределения.
EENFUN:	подпрограмма к EENTABL.
EENGAUS:	подпрограмма интегрирования по методу Гаусса.
EENMATR:	вычисление $ M ^2 \cdot WSPC$ (WSPC – вес из EENSPC).
EENMULT:	моделирование множественности.
EENPOIS:	моделирование распределения Пуассона.
EENSPC:	моделирование 4-х импульсов рождённых частиц (не более 20) в лабораторной системе и вычисление WSPC – веса точки в интеграле по фазовому объёму.
EENTABL:	подготовка таблицы для подпрограммы EENSPC.

## 4.2 COMMON-блоки

COMMON /**ЕЕHCONS**/ PI,AMASS(16)

*Назначение:* содержит константы

PI: число  $\pi$ .

AMASS(16): массы (ГэВ/ $c^2$ ) частиц с GEANT-типами 1 – 16  
(таблица 1).

COMMON /**ЕЕHPHSI**/ NEST,PHSI,ERPHSI,SN,WM,NGT,ID(20)

*Назначение:* содержит оценку интеграла по фазовому объёму (1) и другие величины.

NEST: число точек, использованных для оценки.

PHSI: оценка интеграла.

ERPHSI: ошибка оценки интеграла.

SN:  $S_n$  – величина интеграла в ультрарелятивистском пределе ( $m_i \rightarrow 0$ ).

WM: максимальный вес точки при оценке интеграла.

NGT: число превышений мажоранты (см. Приложение 2, **K17**).

ID(20): гистограмма по  $\log_{10}(W)$  с шагом 1.  $W$  – вес точки.

Величина  $n$ -частичного фазового объёма  $S_n$  при  $m_i = 0$  равна [5]:

$$S_n(M_n) = \frac{(\pi/2)^{n-1}}{(n-1)!(n-2)!} M_n^{2(n-2)}.$$

$M_n = 2 \cdot \text{ЕВ}$  – полная энергия столкновения. Сравнение PHSI±ERPHSI с  $S_n$  позволяет контролировать точность вычислений в этом случае.

COMMON /**ЕЕHPRТ**/ NP,P(4,20),IS(20)

*Назначение:* содержит параметры частиц события.

NP: число частиц в событии.

P(1-3,I): компоненты импульса I-ой частицы (ГэВ/ $c$ ) в л.с.

P(4,I): энергия I-й частицы (ГэВ) в л.с.

IS(I): GEANT-тип I-й частицы.



Другие COMMON-блоки:

/ЕЕНААА/, /ЕЕНАRI/, /ЕЕНМХ/ – предназначены для внутреннего использования.

Таблица 1: Используемые в генераторах ЕЕНАDRNS и GGHADRNS типы частиц и их массы, соответствующие программе GEANT3 [6].

Тип	Частица	Масса (ГэВ/c <sup>2</sup> )	Тип	Частица	Масса (ГэВ/c <sup>2</sup> )
1	фотон	0	9	$\pi^-$	0.1395700
2	позитрон	0.00051099906	10	$K_L^0$	0.497672
3	электрон	0.00051099906	11	$K^+$	0.493677
4	нейтрино	0	12	$K^-$	0.493677
5	$\mu^+$	0.105658389	13	n	0.93956563
6	$\mu^-$	0.105658389	14	p	0.93827231
7	$\pi^0$	0.1349764	15	$\bar{p}$	0.93827231
8	$\pi^+$	0.1395700	16	$K_S^0$	0.497672

## 5 Расчёты процесса $e^+e^- \rightarrow n\pi$ при энергии $\sqrt{s} = 1.5 - 3.5$ ГэВ

В качестве примера работы генератора ЕЕНАDRNS в этом разделе приведён ряд данных расчётов в области энергий  $2E=1.5 - 3.5$  ГэВ, в которой предполагается начать эксперименты с детектором КЕДР на ВЭПП-4М. Расчёты проведены в первом режиме работы генератора IREG=1, т.е. конечное состояние состоит только из пионов, их множественность переменная.

В таблице 2 и на рис.4 приведены результаты расчёта с помощью генератора ЕЕНАDRNS средней множественности заряженных частиц  $\langle n_c \rangle$  и распределений по  $n_c$ . Как указывалось, зависимость заряженной множественности от энергии столкновения принята в программе в виде (8).

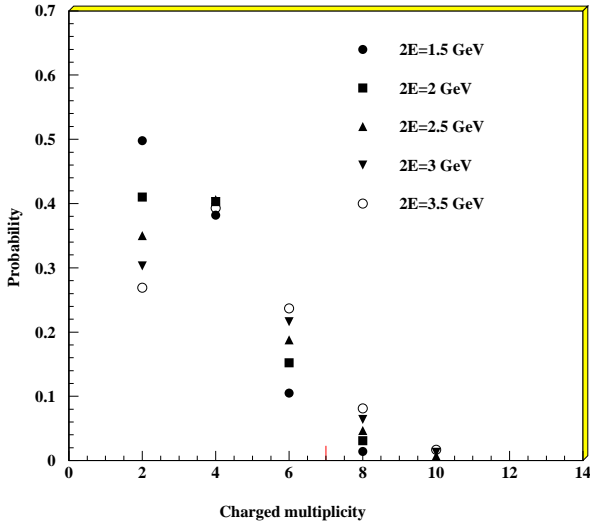


Рис. 4: Генератор EENADRNS. Процесс  $e^+e^- \rightarrow n\pi$ . Распределение по  $n_c$  при энергии столкновения  $2E=1.5, 2, 2.5, 3, 3.5$  ГэВ.

Таблица 2: Множественность заряженных пионов, доля нейтральных пионов и средний импульс  $\pi^\pm$  и  $\pi^0$  в зависимости от энергии столкновения  $\sqrt{s}=2E$ . Ошибки – статистические.

Энергия $\sqrt{s}$ ГэВ	$\langle n_c \rangle$ расчёт	$\langle n_c \rangle$ формула (6)	$\frac{\langle n_n \rangle}{\langle n_c + n_n \rangle}$	$\langle P_c \rangle$ МэВ/c	$\langle P_n \rangle$ МэВ/c
1.5	$3.27 \pm 0.02$	2.78	$0.33 \pm 0.01$	$266 \pm 1$	$262 \pm 1$
2.0	$3.64 \pm 0.02$	3.26	$0.33 \pm 0.01$	$334 \pm 1$	$329 \pm 1$
2.5	$3.92 \pm 0.02$	3.64	$0.33 \pm 0.01$	$397 \pm 1$	$390 \pm 1$
3.0	$4.17 \pm 0.03$	3.95	$0.33 \pm 0.01$	$454 \pm 1$	$447 \pm 1$
3.5	$4.39 \pm 0.03$	4.20	$0.33 \pm 0.01$	$507 \pm 1$	$501 \pm 1$

Параметры, определяющие  $\langle n_c \rangle$ , были заданы теми же, что получены в эксперименте [3], т.е. использовано значение АМС=0.84. Средняя доля нейтралов АМN=0.333. Статистика моделирования составляет  $10^5$  событий при каждой энергии.

В таблице 2:  $\langle P_c \rangle$ ,  $\langle P_n \rangle$  – средний импульс заряженных и нейтральных пионов. Как следует из таблицы 2, полученное с помощью генератора значение  $\langle n_c \rangle$  немного завышено при низкой энергии по сравнению с тем, что дает формула (8), что связано с обрезаниями распределений при генерации событий (пп. 4-7). Вместе с тем, результат расчёта  $\langle n_c \rangle$  оказался близок к данным эксперимента (см. рис.2), а расчётная доля нейтральных пионов совпадает с АМN.

В таблице 3 рассчитанное по нашей модели распределение событий по множественности заряженных частиц сравнивается с экспериментальными данными детектора MARK-1 ([3], рис.15) при энергии  $2E=3$  ГэВ (IREG=1, АМС=0.84, АМN=0.333). Наблюдается удовлетворительное согласие ( $P(\chi^2)=10\%$ ).

Таблица 3: Распределение событий по множественности при энергии столкновения  $2E=3$  ГэВ.  
(KVDM=1)

$n_c$	Данные детектора Mark I	Результат расчёта по EENADRNS
2	$0.35 \pm 0.04$	0.303
4	$0.44 \pm 0.04$	0.403
6	$0.16 \pm 0.03$	0.216
8	$0.05 \pm 0.02$	0.064

Ширина распределения по  $n_c$  характеризуется среднеквадратичной величиной

$$D = (\langle n_c^2 \rangle - \langle n_c \rangle^2)^{1/2}.$$

Мы провели вычисления D при энергии  $\sqrt{s} = 3, 5$  и  $10$  ГэВ. Были получены значения, равные 1.9, 2.2 и 2.5, соответственно. Этот

результат хорошо согласуется с экспериментальными данными, которые показаны на рис. 5, взятом из работы [10].

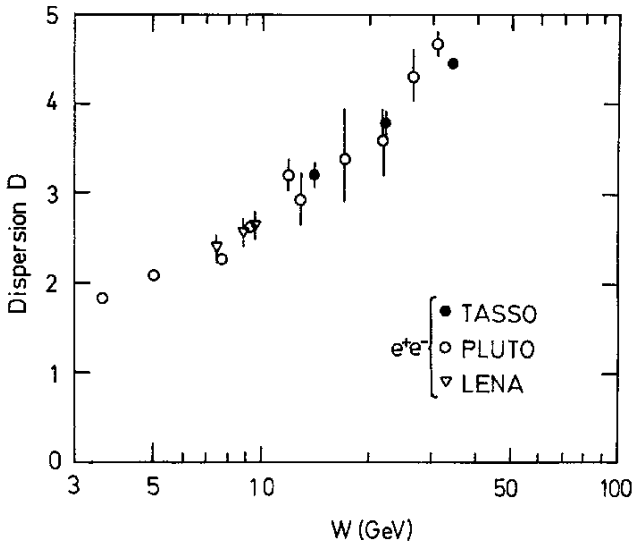


Рис. 5: Зависимость  $D = (\langle n_c^2 \rangle - \langle n_c \rangle^2)^{1/2}$  для распределения заряженных частиц по множественности от энергии в с.ц.м.. Рисунок из работы [10].

При энергии  $\sqrt{s}=3$  ГэВ был выполнен ряд сравнений с расчётами процесса  $e^+e^- \rightarrow q\bar{q} \rightarrow hadrons$  по программе JETSET 6.3 [1], которая предназначена, в основном, для моделирования множественного рождения при более высоких энергиях. Использовался задаваемый по умолчанию режим работы программы, при котором все резонансы, за исключением  $K_L^0$ , распадаются в стабильные частицы. Статистика расчёта в обоих случаях – 10000 событий.

На рис. 6 показан импульсный спектр пионов, рассчитанный по EENADRNS (верхняя гистограмма) и спектр заряженных частиц, вычисленный в рамках JETSET 6.3 (средняя и нижняя гистограммы) Спектры одинаково нормированы. Они неплохо согласуются

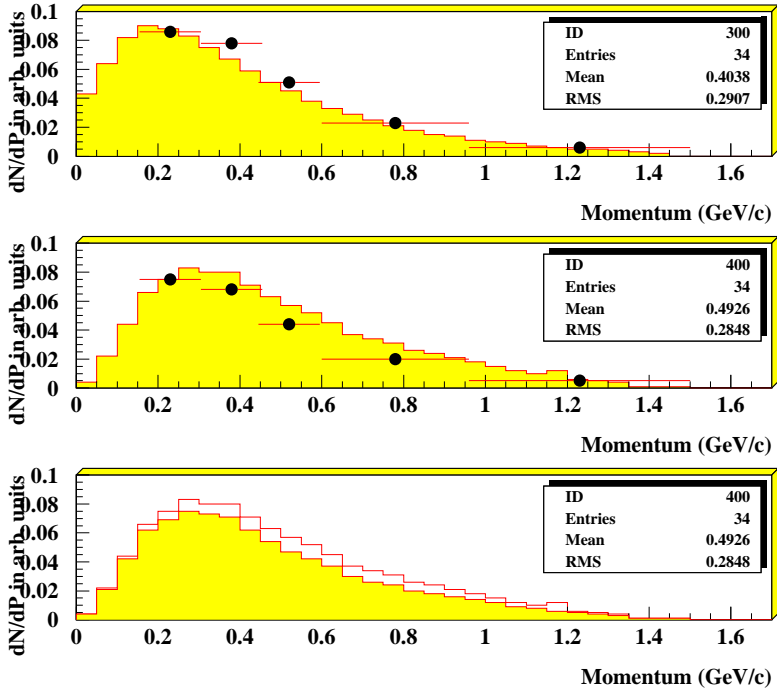


Рис. 6: Расчётные спектры заряженных частиц для процесса  $e^+e^- \rightarrow \text{адроны}$ . Энергия столкновения  $\sqrt{s}=3$  ГэВ. Верхняя гистограмма – расчёт по программе EENADRNS процесса  $e^+e^- \rightarrow n\pi$ . Средняя и нижняя – расчёт  $e^+e^-$  аннигиляции в континууме по программе JETSET 6.3. Внизу отдельно выделен спектр  $\pi^\pm$ . Точки - данные детектора Mark I [3].

между собой, за исключением области малых импульсов, что частично объясняется присутствием в событиях JETSET 6.3 более тяжёлых частиц, чем пионы (это видно из нижней гистограммы, где из спектра адронов выделен спектр  $\pi^\pm$ ). На верхней и средней гистограммах точками показан спектр заряженных частиц, измеренный при данной энергии детектором Mark I [3]. Расчётные и экспериментальный спектры приравнены в максимуме. Видно, что ни одна из моделей экспериментальные данные хорошо не описывает.

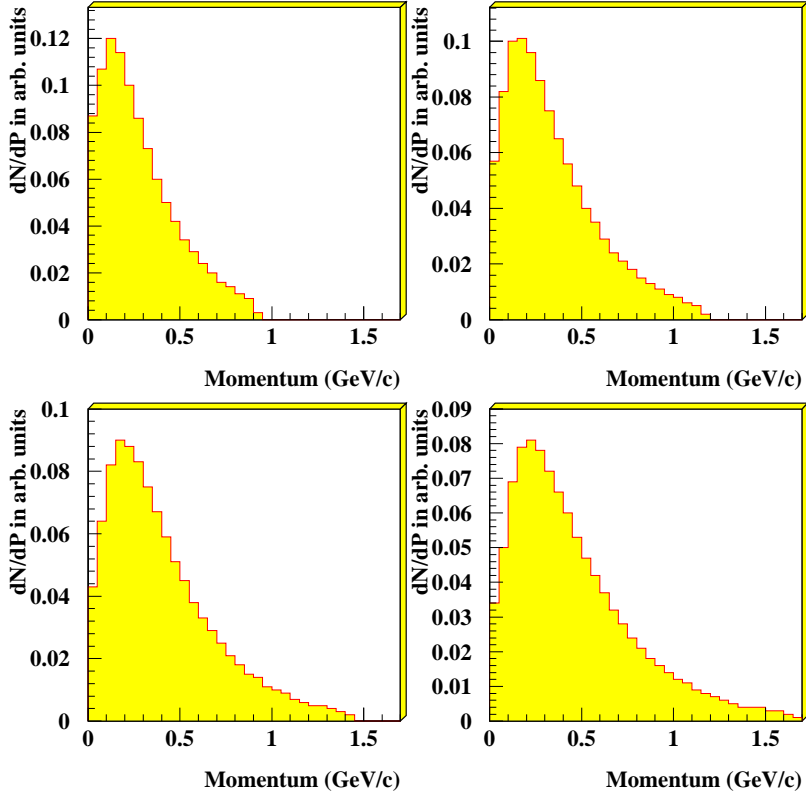


Рис. 7: Расчётные спектры  $\pi^\pm$  для  $e^+e^- \rightarrow n\pi$  при энергии столкновения  $\sqrt{s} = 2, 2.5, 3, 3.5$  ГэВ (слева-направо, сверху-вниз).

Вместе с тем следует отметить, что состав частиц и среднее значение заряженной множественности  $\langle n_c \rangle$ , которые предсказывает программа JETSET 6.3 для  $e^+e^-$  аннигиляции в континууме при энергии  $\sqrt{s}=3$  ГэВ, неплохо согласуются с экспериментальными данными. Расчёт даёт следующие данные по составу частиц в событии:

$$\langle n_\pi \rangle : \langle n_K \rangle : \langle n_p \rangle = 2.95 : 0.40 : 0.10,$$

что близко к экспериментальным данным (рис. 3). Средняя полная

заряженная множественность ( $\langle n_\pi \rangle + \langle n_K \rangle + \langle n_p \rangle$ ) составляет 3.45, что также согласуется с данными эксперимента (рис. 2).

На рис. 7 показаны импульсные спектры заряженных частиц, рассчитанные с помощью генератора EENADRNS при энергии  $\sqrt{s} = 2, 2.5, 3, 3.5$  ГэВ. По этим данным можно, например, оценить долю частиц, лежащих в области  $\pi - K$  разделения для черенковских счётчиков детектора КЕДР (0.6-1.5 ГэВ/с). Она составляет около 30% при  $\sqrt{s}=3$  ГэВ.

## 6 GGADRNS – генератор процесса

$$e^+e^- \rightarrow e^+e^- + hadrons$$

В процессе двухфотонного рождения

$$e^+e^- \rightarrow e^+e^- + f \quad (9)$$

виртуальные фотоны, испускаемые сталкивающимися  $e^-$  и  $e^+$ , переходят в С-чётную систему  $f$ , состоящую из  $n$  частиц с суммарным 4-импульсом  $\vec{k} = \vec{q}_1 + \vec{q}_2$  и инвариантной массой  $W = \sqrt{k^2} = \sqrt{(\vec{q}_1 + \vec{q}_2)^2}$  (рис. 8).

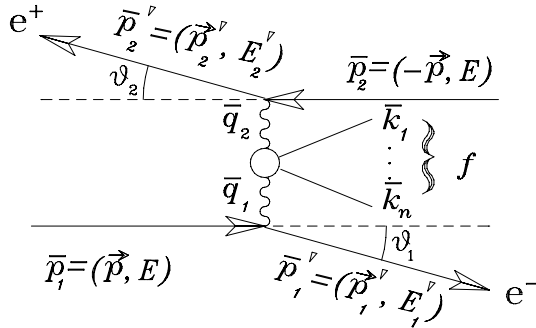


Рис. 8: Двухфотонный процесс  $e^+e^- \rightarrow e^+e^- + hadrons$ .

Сечение этого процесса, выраженное через  $M_{ab}$  – амплитуды перехода двух виртуальных фотонов со спиральностями  $a, b$  в си-

стему частиц  $f$ , приведено в [12, 13]. Его можно записать в следующем виде:

$$d\sigma_{ee \rightarrow eef} = \frac{\alpha^2}{4\pi^4 (\bar{q}_1^2 \bar{q}_2^2)^2} \frac{\sqrt{(\bar{q}_1 \bar{q}_2)^2 - \bar{q}_1^2 \bar{q}_2^2}}{\sqrt{(\bar{p}_1 \bar{p}_2)^2 - m_e^4}} d\Sigma \frac{d^3 \vec{p}'_1 d^3 \vec{p}'_2}{2E'_1 2E'_2}, \quad (10)$$

где

$$d\Sigma = d\sigma_{\gamma\gamma \rightarrow f} = \sum_{a,b,c,d=0,\pm 1} M_{cd}^* M_{ab} J_1^{ac} J_2^{bd} \frac{dR_n}{4(2\pi)^{3n-4} \sqrt{(\bar{p}_1 \bar{p}_2)^2 - m_e^4}}. \quad (11)$$

Здесь  $J_1$  и  $J_2$  – токовые тензоры [12, 13], спиральности  $a, b$  равны  $\pm 1$  для поперечных ( $T$ ) и  $0$  – для скалярных ( $S$ ) фотонов,  $m_e$  – масса электрона,  $dR_n$  – элемент фазового объёма частиц (с импульсами  $\vec{k}_i$ , энергиями  $E_i$ ), на которые распадается система  $f$ :

$$dR_n = \prod_i \frac{d^3 \vec{k}_i}{2E_i} \delta^4(\vec{k} - \sum_{j=1}^n \vec{k}_j). \quad (12)$$

Для неполяризованных начальных частиц дифференциальное по импульсам рассеянных электронов сечение реакции (9), после интегрирования по фазовому объёму образовавшихся частиц и суммирования по конечным состояниям электронов, в общем случае содержит 6 парциальных сечений, соответствующих различным спиральностям виртуальных фотонов [12, 13]:

$$d\sigma = \frac{\alpha^2}{4\pi^4 \bar{q}_1^2 \bar{q}_2^2} \left[ \frac{(\bar{q}_1 \bar{q}_2)^2 - \bar{q}_1^2 \bar{q}_2^2}{(\bar{p}_1 \bar{p}_2)^2 - m_e^4} \right]^{1/2} \{ K_{TT} \sigma_{TT} + K_{TS} \sigma_{TS} \quad (13)$$

$$+ K_{ST} \sigma_{ST} + K_{SS} \sigma_{SS} + K_{TT}^{ex} \tau_{TT} \cos(2\tilde{\varphi}) + K_{TS}^{ex} \tau_{TS} \cos(\tilde{\varphi}) \} \frac{d^3 \vec{p}'_1}{2E'_1} \frac{d^3 \vec{p}'_2}{2E'_2}.$$

Здесь  $\sigma_{TT}$ ,  $\sigma_{TS}$ ,  $\sigma_{ST}$ ,  $\sigma_{SS}$  – сечения перехода  $\gamma\gamma \rightarrow hadrons$  вне массовой поверхности для поперечных ( $T$ , спиральность  $\pm 1$ ) и скалярных ( $S$ , спиральность  $0$ ) фотонов.  $\tilde{\varphi}$  – азимутальный угол между плоскостями рассеяния  $e^-$  и  $e^+$  в с.ц.м. виртуальных фотонов.  $\tau_{TT}$ ,  $\tau_{TS}$  – сечения, отвечающие рассеянию фотонов с изменением



их спиральностей, но сохранением полной спиральности двух фотонов. Сечения в формуле (13) зависят только от инвариантов  $W^2$ ,  $\bar{q}_1^2$  и  $\bar{q}_2^2$ , кинематические коэффициенты  $K_{TT}, \dots, K_{TS}^{ex}$  выражаются через токовые тензоры  $J_1$  и  $J_2$  [12, 13].

Вблизи массовой поверхности ( $\bar{q}_i^2 \rightarrow 0$ ) сечения процессов с участием скалярных фотонов исчезают, а  $\sigma_{TT}$  и  $\tau_{TT}$  переходят в соответствующие величины для реального фотопроцесса. При азимутальном усреднении последнее слагаемое исчезает.

Таким образом, в этом приближении дифференциальное сечение двухфотонного рождения частиц можно представить в виде:

$$d\sigma = \frac{\alpha^2}{2\pi^4 t_1 t_2} \cdot \frac{X^{1/2}}{\sqrt{s(s-4m_e^2)}} K_{TT} d\sigma_{TT} \frac{d^3\vec{p}'_1}{2E'_1} \frac{d^3\vec{p}'_2}{2E'_2}, \quad (14)$$

где:

$$d\sigma_{TT} = \frac{1}{8(2\pi)^{3n-4}\sqrt{X}} \cdot (|M_{11}|^2 + |M_{1-1}|^2) dR_n. \quad (15)$$

В формуле (14):

$$\begin{aligned} s &= (\bar{p}_1 + \bar{p}_2)^2, \\ X &= (\bar{q}_1 \bar{q}_2)^2 - \bar{q}_1^2 \bar{q}_2^2 = 0.25[W^2 - t_1 - t_2]^2 - t_1 t_2, \\ K_{TT} &= \left[ \frac{(\bar{r}_1 \bar{q}_2)^2}{X} + 1 + \frac{4m_e^2}{t_1} \right] \cdot \left[ \frac{(\bar{r}_2 \bar{q}_1)^2}{X} + 1 + \frac{4m_e^2}{t_2} \right], \\ \bar{r}_i &= \bar{p}_i + \bar{p}'_i, \\ (\bar{r}_1 \bar{q}_2) &= 0.5[2s_1 + t_1 - t_2 - W^2 - 2m_e^2], \\ (\bar{r}_2 \bar{q}_1) &= 0.5[2s_2 + t_2 - t_1 - W^2 - 2m_e^2]. \end{aligned} \quad (16)$$

Инвариантные переменные  $s_1, s_2, t_1, t_2$  равны:

$$\begin{aligned} s_1 &= (\bar{p}'_1 + \bar{k})^2, \\ s_2 &= (\bar{p}'_2 + \bar{k})^2, \\ t_1 &= \bar{q}_1^2 = (\bar{p}_1 - \bar{p}'_1)^2, \\ t_2 &= \bar{q}_2^2 = (\bar{p}_2 - \bar{p}'_2)^2. \end{aligned}$$

Обозначения импульсов частиц показаны на рис.8.

Полное сечение двухфотонного рождения адронов в программе задаётся в виде:

$$\sigma_{TT} = F(t_1, t_2) \cdot \sigma_{\gamma\gamma}.$$

Функция  $F$ , в зависимости от параметра генератора KVDM, задаётся в форме модели векторной доминантности (МВД), или равна 1:

$$F = \begin{cases} 1/(1 - t_1/m_\rho^2)^2 \cdot 1/(1 - t_2/m_\rho^2)^2, & \text{при KVDM=1;} \\ 1, & \text{при KVDM=0.} \end{cases} \quad (17)$$

Здесь  $t_i = \bar{q}_i^2 (< 0)$ ,  $m_\rho$  – масса  $\rho$ -мезона. При  $F \neq 1$  происходит подавление вкладов в сечение с передачами  $-t > m_\rho^2$ .

Сечение фотопроцесса для реальных фотонов  $\sigma_{\gamma\gamma}$  в программе является константой и задаётся в начальных данных (параметр генератора SGG). Согласно измерениям детектора МД-1 [15], при инвариантной массе  $\gamma\gamma$ -системы 1.25 – 4.25 ГэВ величина полного сечения  $\sigma_{\gamma\gamma \rightarrow hadrons}$  составляет 600 – 200 нб (см. таблицу 5 данной работы).

## 6.1 Двухфотонное сечение в инвариантных переменных

Моделирование процесса (9) можно представить состоящим из двух этапов. На первом этапе после столкновения электрона и позитрона образуются рассеянные электрон и позитрон и компаунд-частица  $f$  (далее – реакция  $2 \rightarrow 3$ ). На втором этапе  $f$  распадается на  $n$  частиц.

Для монте-карловского моделирования процесса двухфотонного рождения  $n$  адронов  $e^+e^- \rightarrow e^+e^- + hadrons$ , необходимо вычислять фазовый объём  $n + 2$  частиц. Этот фазовый объём, используя "формулу расщепления"[14], можно представить в виде:

$$R_{n+2} = \int dW^2 R_3 R_n, \quad (18)$$

где  $R_3$  - фазовый объём конечного состояния реакции  $2 \rightarrow 3$ , равный

$$R_3 = \int \frac{d^3\vec{p}_1'}{2E_1'} \frac{d^3\vec{p}_2'}{2E_2'} \frac{d^3\vec{k}}{2E_k} \delta^4(\bar{q}_1 + \bar{q}_2 - \bar{k}), \quad (19)$$

$R_n$  - фазовый объём конечного состояния  $n$  частиц, был приведён выше; он входит в определение парциальных сечений.

Выражение для 3-х частичного фазового объёма в инвариантных переменных  $s, s_1, s_2, t_1, t_2, W$  имеет вид [14]:

$$R_3(s, W) = \frac{\pi}{16\sqrt{s(s-4m_e^2)}} \int \frac{dt_1 dt_2 ds_1 ds_2}{\sqrt{-\Delta_4(s, s_1, s_2, t_1, t_2, W^2, m_e^2)}}, \quad (20)$$

где  $\Delta_4$  - определитель Грама (23) и выполнено интегрирование по азимутальному углу  $\varphi$ . (При фиксированных  $\sqrt{s}$  и  $W$  кинематика реакции  $2 \rightarrow 3$  зависит от  $3 \cdot n - 4 = 5$  переменных, но одна из переменных - тривиальная - это азимутальный угол  $\varphi$  вращения всей системы вокруг оси  $e^+e^-$  столкновения, в итоге остаётся 4 существенных переменных).

Используя (19) - (20), из (14) получаем дифференциальное сечение (21) процесса  $e^+e^- \rightarrow e^+e^- + hadrons$ , выраженное через инвариантные переменные. С помощью этого сечения в генераторе GGHADRS производится моделирование реакции  $2 \rightarrow 3$  и вычисление полного сечения процесса:

$$d\sigma = \frac{\alpha^2 \sqrt{X} K_{TT}}{32\pi^3 s(s-4m_e^2) t_1 t_2 \sqrt{-\Delta_4}} \cdot F(t_1, t_2) \sigma_{\gamma\gamma} ds_1 ds_2 dt_1 dt_2 dW^2. \quad (21)$$

Выражения для входящих в эту формулу величин были приведены выше. Физическая область изменения переменных  $t_1, t_2, s_1, s_2$  при фиксированных  $s$  и  $W$  определяется условием на определитель Грама (23):

$$\Delta_4 \leq 0.$$

При моделировании точно учитывается кинематика реакции.

Ниже выписаны пределы интегрирования в том порядке, в котором производится интегрирование (21), они получены на основании формул [14]:

$$1) W_{min} \leq W \leq W_{max}.$$

$$2) s_{2,min} = (W + m_e)^2, \quad s_{2,max} = (\sqrt{s} - m_e)^2.$$

$$3) t_{1,min}, t_{1,max} = 2m_e^2 - 1/(2s) \cdot [s(s - s_2 + m_e^2) \pm A]^{1/2},$$

$$A = \left\{ s(s - 4m_e^2)[(s - s_2 - m_e^2)^2 - 4m_e^2 s_2] \right\}^{1/2}.$$

$$4) t_{2,min}, t_{2,max} = 2m_e^2 - 1/(2s_2)(s_2 + m_e^2 - t_1)(s_2 + m_e^2 - W^2) \mp B,$$

$$B = 1/(2s_2) \left\{ [(s_2 - m_e^2 - t_1)^2 - 4m_e^2 t_1] \right. \\ \left. \times [(s_2 - m_e^2 - W^2)^2 - 4m_e^2 W^2] \right\}^{1/2}.$$

$$5) s_{1,min}, s_{1,max} = s + m_e^2 - (\Delta \pm C)/\lambda,$$

$$\lambda = (s_2 - t_1 - m_e^2)^2 - 4t_1 m_e^2,$$

$$\Delta = m_e^4 (s - 2W^2 + t_2 + 2t_1)$$

$$+ m_e^2 (sW^2 - st_2 - 2ss_2 - 3st_1 + 2W^2 s_2 - t_1 t_2 - 2s_2 t_1)$$

$$- sW^2 s_2 + sW^2 t_1 + st_2 s_2 + st_2 t_1 + ss_2^2 - ss_2 t_1 - t_2 s_2^2 + t_2 s_2 t_1,$$

$$C = 2[G(s, t_1, s_2, m_e^2, m_e^2, m_e^2) \cdot G(s_2, t_2, m_e^2, t_1, m_e^2, W^2)]^{1/2}.$$

Кинематическая функция  $G$  имеет вид [14]:

$$G(x, y, z, u, v, w) = x^2 y + xy^2 + z^2 u + zu^2 + v^2 w + vw^2 + xzw \quad (22)$$

$$+ xuv + yzv + yuw - xy(z + u + v + w) - zu(x + y + v + w) \\ - vw(x + y + z + u).$$

При монте-карловском интегрировании (21) переменные  $W$  и  $s_1$  генерируются равномерно, а  $s_2$ ,  $t_1$  и  $t_2$  – по функции распределения  $\sim 1/x$ .

Детерминант Грама для рассматриваемой реакции равен [14]:

$$\Delta_4(s, s_1, s_2, t_1, t_2, W^2, m_e^2) = \frac{1}{16} \{ -4t_1 t_2 (s - u_1)(s - u_2) \quad (23)$$

$$+ (u_1 u_2 + t_1 t_2 - 2s\nu)^2 + 4m_e^2 [4s(t_1 t_2 - \nu^2) - t_1(u_2 + t_2)^2$$

$$- t_2(u_1 + t_1)^2 + 2\nu(u_1 + t_1)(u_2 + t_2) \},$$

где

$$\begin{aligned} u_1 &= s_2 - t_1 - m_e^2, \\ u_2 &= s_1 - t_2 - m_e^2, \\ \nu &= \frac{1}{2}(W^2 - t_1 - t_2). \end{aligned}$$

После того, как сгенерирована инвариантная масса  $W$  и определены энергия и импульс системы  $f$ , производится моделирование 4-импульсов частиц, образовавшихся из системы  $f$ , а также 4-импульсов рассеянных электронов. Соответствующие формулы выражающие эти величины через инвариантные переменные  $W$ ,  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $t_1$ ,  $t_2$  приведены в разделе 6.3.

## 6.2 Плотность $\gamma\gamma$ -светимости

Скорость счёта двухфотонных событий с инвариантной массой в интервале  $W_{min} < W < W_{max}$ , идущих в  $e^+e^-$ -столкновении, можно представить в виде:

$$\dot{N} = L_{ee} \cdot \int_{W_{min}}^{W_{max}} \frac{d\sigma}{dW} dW = L_{ee} \cdot \int_{z_{min}}^{z_{max}} \frac{d\sigma}{dz} dz = L_{ee} \sigma_{\gamma\gamma} \cdot \int_{z_{min}}^{z_{max}} F_1(z) dz, \quad (24)$$

где  $L_{ee}$  – светимость  $e^+e^-$  столкновения,  $z = W/\sqrt{s}$ ,  $F_1(z)$  – плотность  $\gamma\gamma$ -светимости.

В формуле (24) сечение  $\sigma_{\gamma\gamma}$  принято независимым от  $W$  и введена плотность двухфотонной светимости  $F_1(z)$ , которую, используя (21), можно записать в виде:

$$F_1(z) = \frac{z\alpha^2}{16\pi^3(s - 4m_e^2)} \cdot \int \frac{\sqrt{X} K_{TT} F(t_1, t_2)}{t_1 t_2 \sqrt{-\Delta_4}} ds_1 ds_2 dt_1 dt_2. \quad (25)$$

Пределы интегрирования при заданном значении  $W$  были выписаны выше.

В работах [16], [17] были получены аналитические формулы для вычисления плотности  $\gamma\gamma$ -светимости  $F_1(z)$ . Вычисления выполнены для поперечных виртуальных фотонов с учётом точной кинематики при интегрировании по фазовому объёму рассеянных электронов. Для проверки правильности работы нашей программы мы

сравнили расчёт по формуле (25) с расчётом согласно [16], [17], который приведён в работе [18] для детектора TASSO при энергии пучка  $E = 15$  ГэВ. Кривые из работы [18] показаны на рисунке 9. На этом рисунке представлен также наш расчёт (показан точками), соответствующий кривой А ( $F(t_1, t_2) = 1$ ). Он хорошо согласуется с расчётом [18].

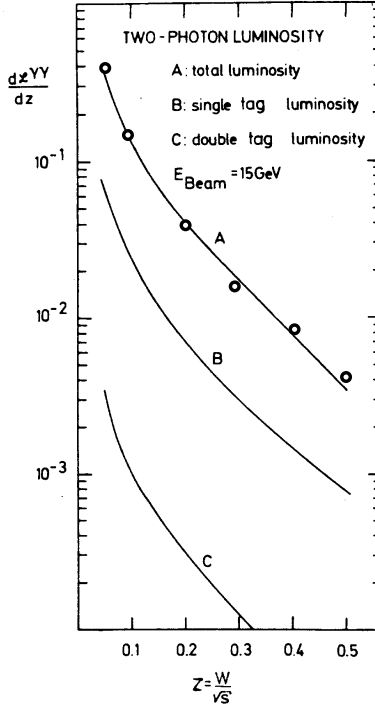


Рис. 9: Плотность двухфотонной светимости при энергии  $\sqrt{s}=30$  ГэВ в зависимости от  $z = W/\sqrt{s}$ . Кривые из работы [18]. Точки – расчёт с помощью (25).

В приближении эквивалентных фотонов функция плотности  $\gamma\gamma$ -светимости  $F_1(z)$  рассчитана в [13]. Результат расчёта не зависит от начальной энергии, данные приведены в таблице 4. Здесь же помещены результаты нашего расчёта при энергии  $\sqrt{s} = 3$  и 10 ГэВ. Расчёты выполнены с учётом МВД.

Таблица 4: Результат расчёта  $10^2 \cdot F_1(z)$ ,  $z = W/\sqrt{s}$ . Первая строка – данные [13], вторая и третья – наш расчёт.

$z$	0.03	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5	0.6
Расчёт [13]	81	36	11	5.1	2.8	1.7	1.1	0.52	0.26	0.13
$\sqrt{s} = 3$ ГэВ	48	23	7.7	3.8	2.1	1.3	0.85	0.39	0.19	0.10
$\sqrt{s} = 10$ ГэВ	61	29	9.1	4.3	2.4	1.4	0.91	0.41	0.20	0.10

Видно, что наш расчёт даёт величину  $F_1(z)$  меньшую на 20-30%, чем [13].

### 6.3 Моделирование процесса $e^+e^- \rightarrow e^+e^- + hadrons$

После того, как сгенерированы переменные  $W$ ,  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $t_1$  и  $t_2$ , производится вычисление в лабораторной системе импульсов и энергий рассеянных электрона и позитрона и системы частиц  $f$  с инвариантной массой  $W$ . Формулы приведены ниже. Они получены при условии, что импульсы сталкивающихся пучков равны и противоположны. Ось  $z$  направлена в направлении импульса падающего пучка  $e^-$ .

$$E'_1 = \frac{s - s_2 + m_e^2}{4E},$$

$$\cos(\vartheta_1) = \frac{EE'_1 - m_e^2 + 0.5t_1}{pp'_1},$$

$$E'_2 = \frac{s - s_1 + m_e^2}{4E},$$

$$\cos(\vartheta_2) = -\frac{EE'_2 - m_e^2 + 0.5t_2}{pp'_2},$$

$$E_f = \frac{s_1 + s_2 - 2m_e^2}{4E},$$

$$\cos(\vartheta_f) = \frac{EE_f - 0.5(s_1 + t_1 - t_2 - m_e^2)}{pp_f}.$$

Здесь:  $E$  и  $p$  – энергия и абсолютная величина импульса электрона (позитрона) пучка,  $E'_1, p'_1$  и  $\vartheta_1$  – энергия, импульс и полярный угол рассеянного электрона,  $E'_2, p'_2$  и  $\vartheta_2$  – энергия, импульс и полярный угол рассеянного позитрона,  $E_f, p_f$  и  $\theta_f$  – энергия, импульс и полярный угол образованной системы  $f$ .

Все величины приведены в лабораторной системе отсчёта. Азимутальный угол  $\varphi$  вылета одной из рассеянных частиц относительно оси столкновения моделируется равномерно, азимутальные углы другой рассеянной частицы и системы  $f$  определяются из законов сохранения.

Следующий шаг – моделирование импульсов и энергий частиц, образуемых при изотропном распаде в с.ц.м.  $\gamma\gamma$  системы  $f$  с инвариантной массой  $W$ . Здесь, как и в генераторе EENADRNS, предусмотрено 2 режима для задания множественности и состава частиц.

В первом режиме (IREG=1) производится моделирование системы пионов с переменной множественностью. Алгоритм моделирования в основном совпадает с тем, что описан выше для генератора EENADRNS. Использован тот же вид зависимости заряженной множественности от энергии, идущей на образование частиц. Следует отметить, что в экспериментах с детектором МД-1 [15] была найдена зависимость

$$\langle n_c \rangle = (1.62 \pm 0.37) + (1.83 \pm 0.45) \cdot \ln(W),$$

которая согласуется с (6) для  $e^+e^-$  аннигиляции. Алгоритм моделирования состава частиц в событии следующий.

1. Вычисляется средняя заряженная множественность как функция  $W$  (ГэВ), в соответствии с зависимостью, полученной в  $e^+e^-$  аннигиляции (26). АМС - параметр программы.

$$\langle n_c \rangle = 2.1 + \text{АМС} \cdot \ln(W^2). \quad (26)$$

При  $W < 1$  считается  $\langle n_c \rangle = 2$ .

2. Вычисляется средняя полная множественность в зависимости от параметра программы АМН - доли нейтральных  $\pi^0$ -мезонов.

$$\langle n \rangle = \frac{\langle n_c \rangle}{(1 - \text{АМН})}.$$



3. Определяется максимально возможное число пионов, равное  $n_{max} = W/m_\pi$ , где  $m_\pi$  - масса заряженного пиона. Если  $n_{max} > 18$ , то  $n_{max}$  заменяется на 18.

4. Разыгрывается по Пуассону полная множественность пионов в событии  $n$  со средним  $\langle n \rangle$ . При  $n < 3$  или  $n > n_{max}$  розыгрыш повторяется.

5. Разыгрывается по биномиальному распределению доля нейтралов  $n_n/n$  со средним AMN и определяется  $n_n$ .

6. Вычисляется число заряженных частиц как  $n_c = n - n_n$ . Если оно чётное, то процедура заканчивается, если нечётное, то добавляется +1 или -1 с равной вероятностью и подправляется  $n_n$ , чтобы сохранить  $n$ .

После того, как определён состав частиц в событии, моделирование для режимов генератора IREG=1 и IREG=2 выполняется одинаково: для заданных  $W$  и состава частиц производится моделирование по модели изотропного фазового объема импульсов и энергий всех вновь образованных частиц (не более 18) в с.ц.м.  $\gamma\gamma$  и преобразование их в лабораторную систему (см. Приложения 1,2). Никакие законы сохранения, кроме закона сохранения энергии-импульса не учитываются. GEANT-типы частиц не должны превышать 16.

С помощью генератора GGADRNS можно моделировать события с большими передачами импульса. Для этого нужно задать обрезания сечения по  $t_1, t_2$  виртуальных фотонов (параметры программы CUTT1 и CUTT2). Как указывалось, при помощи параметра KVDM в сечение  $\sigma_{TT}$  может быть включен формфактор в форме МВД (17).

## 7 Программные компоненты генератора

$$e^+e^- \rightarrow e^+e^- + hadrons$$

Программа написана на языке Фортран 77 и содержит все необходимые для моделирования подпрограммы, за исключением генератора случайных чисел. Для моделирования событий в детекторе КЕДР в генераторе GGADRNS в качестве датчика случайных чисел (от 0 до 1) используется подпрограмма GRNDM из пакета

GEANT3. Для моделирования события множественного рождения нужно вызвать подпрограмму GGHADRNS с параметрами, определяющими энергию столкновения и состав частиц. Результат моделирования – 4-х импульсы рождённых частиц – будет находиться в COMMON-блоке /GGHPRT/. В общем блоке /GGHCRSEC/ будет содержаться оценка сечения процесса  $e^+e^- \rightarrow e^+e^- + hadrons$ .

Ниже описаны входные параметры генератора, перечислены используемые подпрограммы и COMMON-блоки. Считается, что сталкивающиеся пучки направлены по оси z. Импульс начального электрона направлен в положительном направлении оси z.

## 7.1 Подпрограммы

SUBROUTINE GGHADRNS(EB,WMIN,WMAX,IREG,AMC, AMN,NT,SGG,KVDM,CUTT1,CUTT2,FM0)

*Назначение:* моделирование события  $e^+e^- \rightarrow e^+e^- + hadrons$ .

*Входные параметры:*

- EB: энергия пучка в ГэВ.
- WMIN: минимальная инвариантная масса  $\gamma\gamma$ -системы в ГэВ/ $c^2$ .
- WMAX: максимальная инвариантная масса  $\gamma\gamma$ -системы в ГэВ/ $c^2$ .
- IREG: режим моделирования  $\gamma\gamma$ -системы.
- IREG=1: моделирование пионной системы с переменной множественностью, зависящей от параметров AMC (см. (26)) и AMN.
- IREG=2: моделирование системы частиц с фиксированной множественностью, состав задаётся в массиве NT(20).
- AMC: параметр, входящий в зависимость  $\langle n_c \rangle$  от энергии для режима IREG=1.
- AMN: средняя доля нейтральных пионов в событии для режима IREG=1.
- NT(20): типы частиц в событии для режима моделирования с фиксированной множественностью (IREG=2).

(Для частиц допускаются типы GEANT не больше 16).  
Используются первые ненулевые элементы массива NT.

- SGG: сечение процесса  $\gamma\gamma \rightarrow hadrons$  в нанобарнах.  
 KVDM: 0/1. 1 – учёт фактора МВД (17) в сечении.  
 CUTT1: обрезание дифференциального сечения по  $t_1 (< 0)$   
 (в  $\text{ГэВ}^2/c^2$ ).  
 CUTT2: обрезание дифференциального сечения по  $t_2 (< 0)$   
 (в  $\text{ГэВ}^2/c^2$ ).  
 FM0: мажоранта для генератора 2→3 (используется в  
 режимах IREG=1,2). При  $FM0 \leq 0$  применяется  
 оценка программы.

Рекомендуемый порядок работы следующий. При первом расчёте с фиксированными входными параметрами нужно задать  $FM0 \leq 0$ . Затем, несколькими итерациями, нужно подобрать величину  $FM0$ , используя полученные в моделировании значения WEMAX и NGT, а также гистограмму по весам ID(20) (см. общий блок /GGHCRSEC/). Мажоранта  $FM0$ , вообще говоря, должна несколько превышать WEMAX. Однако нередко бывает, что при больших флуктуациях веса для повышения эффективности генератора  $FM0$  приходится брать меньше WEMAX. Доля разыгрываемых неправильно событий должна быть невелика [5].

Другие подпрограммы генератора перечислены ниже.

<i>Название</i>	<i>Назначение</i>
GGHADR1:	моделирование события $\gamma\gamma \rightarrow hadrons$ .
GGHBIND:	генератор биномиального распределения.
GGHCOSI:	генератор косинуса и синуса случайного угла.
GGHD4:	вычисление детерминанта Грама для $e^+e^- \rightarrow e^+e^- + f$ .
GGHFAC:	вычисление фактора МВД.
GGHFKIN:	вычисление кинематических факторов для сечений $\gamma\gamma \rightarrow hadrons$ .
GGHFUN:	подпрограмма к GGHTABL.
GGHGAUS:	подпрограмма интегрирования по методу Гаусса.

GGHGFUN: кинематическая G-функция.  
GGHINV: моделирование инвариантов  $s_1, s_2, t_1, t_2$ .  
GGHLOREN: преобразование Лоренца.  
GGHMATR: вычисление  $|M|^2 \cdot \text{WSPC}$  (WSPC – вес из GGHSPC).  
GGHMOM: вычисление импульсов рожденных частиц по инвариантам.  
GGHMULT: вычисление множественности.  
GGHPOIS: генератор распределения Пуассона.  
GGHSEC: вычисление парциальных сечений  $\gamma\gamma \rightarrow hadrons$ .  
GGHSPC: вычисление WSPC – веса точки фазового объёма (до 20 частиц),  
моделирование 4-х импульсов рождённых частиц.  
GGHTABL: подготовка таблицы для подпрограммы GGHSPC.

## 7.2 COMMON-блоки

Результаты моделирования (параметры частиц одного события и текущее значение сечения  $e^+e^- \rightarrow e^+e^- + hadrons$ ) находятся в COMMON-блоках /GGHPRT/ и /GGHCRSEC/:

COMMON /GGHPRT/ NP,P(4,20),IS(20)

*Назначение:* содержит параметры частиц сгенерированного события.

NP: число частиц в событии.  
P(1-3,I): компоненты импульса I-ой частицы (ГэВ/с) в л.с.  
P(4,I): энергия I-й частицы (ГэВ) в л.с.  
IS(I): GEANT-тип I-й частицы.

COMMON /GGHCRSEC/ NCALL,SEC,ERSEC,WEMAX,  
ID(20),NGT,NGT1

*Назначение:* содержит величину сечения с ошибкой и другие величины.

NCALL: суммарная статистика, использованная для оценки сечения.

- SEC: полученное сечение процесса  $e^+e^- \rightarrow e^+e^- + hadrons$  (нб).
- ERSEC: ошибка сечения (нб).
- WEMAX: максимальный вес события, полученный для процесса  $2 \rightarrow 3$ .
- ID(20): гистограмма по  $lg_{10}(WE)$  с шагом 1.  $WE$  – вес для процесса  $2 \rightarrow 3$ .
- NGT: число превышений мажоранты при моделировании процесса  $2 \rightarrow 3$ .
- NGT1: число превышений мажоранты при моделировании процесса  $\gamma\gamma \rightarrow hadrons$

Как говорилось выше, генератор GGADRNS состоит из двух блоков: генератора  $2 \rightarrow 3$  и генератора  $\gamma\gamma \rightarrow hadrons$ . В каждом блоке используется своя мажоранта в методе Неймана. В генераторе  $\gamma\gamma \rightarrow hadrons$  мажоранта находится программой в каждом событии после того, как сгенерирована инвариантная масса  $W$  и состав частиц в событии. Это разбиение сделано из-за сильной зависимости от числа частиц (в режиме IREG=1) мажоранты процесса  $\gamma\gamma \rightarrow hadrons$  (в противном случае, можно было бы использовать общую мажоранту). Величина NGT1 позволяет судить о правильности её определения программой. В генераторе  $2 \rightarrow 3$ , как указывалось, подходящая мажоранта FM0 (входной параметр генератора), вообще говоря, должна подбираться, используя величины WEMAX и NGT и гистограмму ID(20).

### COMMON /GGHCONS/ PI,AMASS(16)

*Назначение:* содержит константы.

- PI: число  $\pi$ .
- AMASS(16): массы (ГэВ/ $c^2$ ) частиц с GEANT-типами 1 – 16 (таблица 1).

Другие COMMON-блоки:

/GGHARI/, /GGHMX/, /GGHNER/, /GGHAAA/ предназначены для внутреннего использования.

## 8 Расчеты процесса $e^+e^- \rightarrow e^+e^- + n\pi$ при энергии $\sqrt{s} = 3$ и $10$ ГэВ

В этом параграфе приведены результаты расчёта сечения  $e^+e^- \rightarrow e^+e^- + hadrons$  по данной программе; они сравниваются с оценкой по методу эквивалентных фотонов. Также рассчитаны спектры заряженных пионов для 1-го режима работы генератора (IREG=1). Параметры, определяющие множественность  $\pi^\pm, \pi^0$  в событии, задавались такими же, как те, что были получены в  $e^+e^-$  аннигиляции при низкой энергии: AMC=0.84, AMN=0.333.

Для приближённых оценок в двухфотонной физике полезны формулы, полученные в рамках метод эквивалентных фотонов. Выражение для дифференциального сечения процесса  $e^+e^- \rightarrow e^+e^- + hadrons$  в главном логарифмическом приближении имеет вид [12]:

$$\frac{d\sigma}{dW} = \frac{4}{W} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \sigma_{\gamma\gamma}(W) \left[ \ln^2 \left( \frac{\sqrt{s} m_\rho}{W m_e} \right) \cdot f \left( \frac{W}{\sqrt{s}} \right) - \frac{1}{3} \ln^3 \frac{s}{W^2} \right]. \quad (27)$$

где  $f(x)$  – функция Лоу [19]:

$$f(x) = (2 + x^2)^2 \ln\left(\frac{1}{x}\right) - (1 - x^2)(3 + x^2). \quad (28)$$

При выводе формулы (27) считалось, что максимальный квадрат передачи импульса каждому фотону по модулю равен  $m_\rho^2$ , что соответствует учёту форм-фактора перехода  $\gamma\gamma \rightarrow hadrons$ .

В качестве входного параметра в программе GGHADRNS нужно задавать полное сечение процесса  $\gamma\gamma \rightarrow hadrons$ . Наиболее точные измерения этого сечения в области малых инвариантных масс были выполнены с регистрацией двух рассеянных электронов детектором МД-1 на накопителе ВЭПП-4 [15]. Результаты приведены в таблице 5.

Таблица 5: Данные МД-1 по полному сечению  $\gamma\gamma \rightarrow hadrons$ .

$W$ , ГэВ	1.25-1.75	1.75-2.25	2.25-2.75	2.75-3.25	3.25-3.75	3.75-4.25
$\sigma_{\gamma\gamma}$ , нб	606±117	352±59	356±53	260±43	352±72	214±70

Используя эти сечения, мы рассчитали при двух энергиях  $\sqrt{s}=3$  и 10 ГэВ полное сечение процесса  $e^+e^- \rightarrow e^+e^- + hadrons$  в тех же диапазонах  $W$  и дополнительно в диапазоне  $W = 0.75 - 1.25$  ГэВ (где принято  $\sigma_{\gamma\gamma} = 606$  нб). Последний диапазон включен в рассмотрение, так как КЕДР имеет высокую эффективность регистрации событий с двумя рассеянными электронами в этой области,  $\sim 20\%$  при  $W = 0.5$  ГэВ [20]. Данные получены с учётом фактора (17) в сечении. Результаты расчётов представлены в таблицах 6, 7. Здесь же приведены результаты интегрирования (27).

Таблица 6: Полное сечение процесса  $e^+e^- \rightarrow e^+e^- + hadrons$  в нанобарнах. Расчёты с помощью GGHADRS (KVDM=1) и формулы (27). Энергия  $\sqrt{s} = 2 \times 1.5 GeV$ . Стат. ошибка  $\sim 1\%$ .

$W$ , ГэВ	GGHADRS	Интеграл (27)
0.75 - 1.25	0.706	1.05
1.25 - 1.75	0.205	0.313
1.75 - 2.25	0.038	0.060
2.25 - 2.75	0.010	0.018
0.75 - 4.25	0.96	1.44

Как видно из таблиц, использование приближённой формулы (27) даёт величину сечения примерно на 30% больше. Величина  $\sigma_{ee \rightarrow ee + hadrons} / \sigma_{\gamma\gamma}$  даёт оценку отношения интегральной  $\gamma\gamma$  светимости к светимости  $e^+e^-$  соударений. При  $W/\sqrt{s} > 0.2$  эта величина составляет около 0.2%. Аналогичная величина, рассчитанная в [13] в рамках метода эквивалентных фотонов, равна 0.3%.

На рис. 10 приведены спектры  $\pi^\pm$ , рассчитанные по программе GGHADRS при энергии  $\sqrt{s}=3$  и 10 ГэВ. Моделирование выполнено при IREG=1, AMC=0.84, AMN=0.333, KVDM=0.

Таблица 7: Полное сечение процесса  $e^+e^- \rightarrow e^+e^- + hadrons$  в нанобарнах. Энергия  $\sqrt{s} = 2 \times 5 \text{ GeV}$ . Стат. ошибка  $\sim 1\%$ .

$W$ , ГэВ	GGHADRNS (KVDM=1)	Интеграл (27)
0.75 – 1.25	2.88	3.80
1.25 – 1.75	1.32	1.74
1.75 – 2.25	0.423	0.560
2.25 – 2.75	0.258	0.450
2.75 – 3.25	0.120	0.163
3.25 – 3.75	0.108	0.149
3.75 – 4.25	0.045	0.063
0.75 – 4.25	5.15	6.93

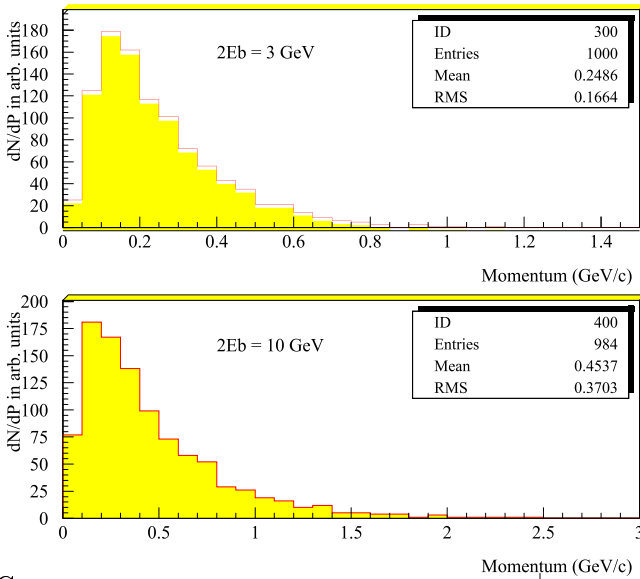


Рис. 10: Спектр заряженных пионов в процессе  $e^+e^- \rightarrow e^+e^- + n\pi$ . Моделирование при  $\sqrt{s} = 3$  и  $10 \text{ ГэВ}$ .



## 9 Приложение 1

В книге Г.И.Копылова [5] описан метод преобразования интеграла по фазовому объёму  $n$  частиц

$$S_n = \int dR_n |M|^2 = \int \frac{d^3\vec{p}_n}{2E_n} \frac{d^3\vec{p}_{n-1}}{2E_{n-1}} \dots \frac{d^3\vec{p}_2}{2E_2} \frac{d^3\vec{p}_1}{2E_1} \delta^4\left(\sum_{i=1}^n \vec{p}_i - \vec{P}_n\right) |M(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n)|^2, \quad (29)$$

к виду, удобному для моделирования. Ниже этот метод подробно излагается.

Будем считать, что вектор  $\vec{P}_n$  – 4-х импульс системы  $n$  частиц – задан в лабораторной системе отсчёта. Введение специальной – переменной – системы отсчёта позволяет преобразовать интеграл (29) к удобному для интегрирования виду, в котором пределы изменения любой переменной не зависят от других. (Как известно, это справедливо в с.д.м. для двух частиц в конечном состоянии. Поэтому в основе метода – последовательное представление реакции с  $k$  частицами в конечном состоянии в виде квазидвухчастичной реакции с одной и  $(k-1)$  частицами в конечном состоянии.)

Сначала воспользуемся системой центра масс всех  $n$  частиц  $O_n$ . В этой системе отсчёта нет ограничений на направление движения любой из частиц. Пусть направление  $n$ -ой частицы задаётся полярным и азимутальным углами  $\tilde{\vartheta}_n$  и  $\tilde{\varphi}_n$ , направление полярной оси  $l_n$  – произвольно. (Импульсы, энергии и угловые переменные, относящиеся к переменной системе отсчёта, здесь и далее помечаются значком  $\tilde{\phantom{x}}$ ). Обозначим  $\cos(\tilde{\vartheta}_n) = \tilde{\eta}_n$ . Эти величины изменяются в пределах

$$\begin{aligned} -1 &\leq \tilde{\eta}_n \leq 1, \\ 0 &\leq \tilde{\varphi}_n \leq 2\pi. \end{aligned} \quad (30)$$

Обозначим суммарную кинетическую энергию  $n$  частиц в системе  $O_n$  через  $\tilde{T}_n$ , а суммарную кинетическую энергию остальных (кроме  $n$ -й) частиц  $1, 2, \dots, n-1$  в их системе центра масс  $O_{n-1}$  через  $\tilde{T}_{n-1}$ . Последняя ограничена естественными пределами

$$0 \leq \tilde{T}_{n-1} \leq \tilde{T}_n,$$

$$\tilde{T}_n = M_n - (m_1 + m_2 + \dots + m_n) = M_n - \mu_n, \quad (31)$$

$M_n$ - эффективная масса  $n$  частиц,

$$\mu_n = m_1 + m_2 + \dots + m_n.$$

Эффективная масса  $M_{n-1}$  системы частиц  $1, 2, \dots, n-1$  равна

$$M_{n-1} = \tilde{T}_{n-1} + m_1 + \dots + m_{n-1} = \tilde{T}_{n-1} + \mu_{n-1}. \quad (32)$$

Из сохранения 4-импульса имеем:

$$(\bar{P}_n - \bar{p}_n)^2 = \bar{P}_{n-1}^2. \quad (33)$$

Здесь  $\bar{P}_{n-1}^2 = M_{n-1}^2$  - инвариантная величина, а  $\bar{P}_n$  - 4-импульс рассматриваемой системы и  $\bar{p}_n$  - 4-импульс  $n$ -й частицы возьмём в системе отсчёта  $O_n$ :  $\bar{P}_n = (0, 0, 0, M_n)$ ,  $\bar{p}_n = (\tilde{p}_n, \tilde{E}_n)$ .

Отсюда получаем энергию и импульс интересующей нас частицы  $n$  в системе  $O_n$ :

$$\begin{aligned} \tilde{E}_n &= \frac{M_n^2 + m_n^2 - M_{n-1}^2}{2M_n}, \\ \tilde{p}_n &= (\tilde{E}_n^2 - m_n^2)^{1/2}. \end{aligned} \quad (34)$$

Далее введём определённые выше переменные в интеграл состояний (29). Так как комбинация  $d^3\tilde{p}_n/2E_n$  инвариантна относительно преобразований Лоренца, переведём её из лабораторной системы в систему  $O_n$ :

$$\int_{l.s.} \frac{d^3\tilde{p}_n}{2E_n} = \int_{O_n} \frac{\tilde{p}_n^2 d\tilde{p}_n d\tilde{\Omega}_n}{2\tilde{E}_n} = \int_{O_n} \frac{1}{2} \frac{\tilde{p}_n^2}{\tilde{E}_n} d\tilde{p}_n d\tilde{\eta}_n d\tilde{\varphi}_n. \quad (35)$$

Из (34) следует, что  $\tilde{p}_n d\tilde{p}_n = \tilde{E}_n d\tilde{E}_n$  и, так как  $dM_n=0$ ,  $d\tilde{E}_n = -(M_{n-1}/M_n)dM_{n-1} = -(M_{n-1}/M_n)d\tilde{T}_{n-1}$ . В итоге получаем:

$$\int_{l.s.} \frac{d^3\tilde{p}_n}{2E_n} = \int_0^{\tilde{T}_n} \frac{\tilde{p}_n M_{n-1}}{2M_n} d\tilde{T}_{n-1} \int_{-1}^1 d\tilde{\eta}_n \int_0^{2\pi} d\tilde{\varphi}_n. \quad (36)$$

Таким образом,  $\tilde{\eta}_n$ ,  $\tilde{\varphi}_n$  и  $\tilde{T}_n$  (через  $M_{n-1} = \tilde{T}_{n-1} + \mu_{n-1}$  и (34)) полностью определяют 4-х импульс частицы  $n$  в системе  $O_n$ . Так

как  $\bar{P}_n$  – 4-х импульс системы  $O_n$  в лабораторной системе известен, то мы можем определить в лабораторной системе 4-х импульс  $\bar{p}_n$  частицы  $n$ , используя преобразования Лоренца (56).

Далее, вычтем известный 4-х импульс  $\bar{p}_n$  из полного 4-х импульса  $\bar{P}_n$  и обозначим разность через  $\bar{P}_{n-1}$ :

$$\bar{P}_{n-1} = \bar{P}_n - \bar{p}_n. \quad (37)$$

Представим аргумент дельта-функции в виде

$$\sum_{i=1}^n \bar{p}_i - \bar{P}_n = \sum_{i=1}^{n-1} \bar{p}_i + \bar{p}_n - \bar{P}_n = \sum_{i=1}^{n-1} \bar{p}_i - \bar{P}_{n-1}.$$

Тогда первоначальный интеграл (29) примет вид:

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^{\tilde{T}_n} \frac{\tilde{p}_n M_{n-1}}{2M_n} d\tilde{T}_{n-1} \int_{-1}^1 d\tilde{\eta}_n \int_0^{2\pi} d\tilde{\varphi}_n \times \\ &\times \int_{l.s.} \frac{d^3\vec{p}_{n-1}}{2E_{n-1}} \dots \frac{d^3\vec{p}_1}{2E_1} \delta^4\left(\sum_{i=1}^{n-1} \bar{p}_i - \bar{P}_{n-1}\right) |M(\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_n)|^2. \end{aligned} \quad (38)$$

Далее, с импульсом частицы  $n - 1$  можно провести те же операции, что и с импульсом частицы  $n$ . (При этом, в матричном элементе переменная  $\bar{p}_n$  уже приобрела определённое значение). Для этого перейдём в систему покоя  $O_{n-1}$  и проделаем те же операции, что и в системе  $O_n$ . Последовательно повторяя эту процедуру, мы дойдём до системы покоя  $O_2$ :

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^{\tilde{T}_n} d\tilde{T}_{n-1} \frac{\tilde{p}_n M_{n-1}}{2M_n} \int_{-1}^1 d\tilde{\eta}_n \int_0^{2\pi} d\tilde{\varphi}_n \times \\ &\times \int_0^{\tilde{T}_{n-1}} d\tilde{T}_{n-2} \frac{\tilde{p}_{n-1} M_{n-2}}{2M_{n-1}} \int_{-1}^1 d\tilde{\eta}_{n-1} \int_0^{2\pi} d\tilde{\varphi}_{n-1} \times \\ &\times \dots \int_0^{\tilde{T}_3} d\tilde{T}_2 \frac{\tilde{p}_3 M_2}{2M_3} \int_{-1}^1 d\tilde{\eta}_3 \int_0^{2\pi} d\tilde{\varphi}_3 \cdot \int \frac{d^3\vec{p}_2}{2E_2} \frac{d^3\vec{p}_1}{2E_1} \delta^4(\bar{p}_1 + \bar{p}_2 - \bar{P}_2) |M|^2. \end{aligned} \quad (39)$$

Оставшаяся непреобразованной часть интеграла (39) выражается через интеграл по фазовому объёму пары частиц  $S_2$ .

Вычислим  $S_2$  в системе центра масс двух частиц  $O_2$ .

$$S_2 = \int dR_2 |M|^2 = \int \frac{d^3\tilde{p}_1}{2\tilde{E}_1} \frac{d^3\tilde{p}_2}{2\tilde{E}_2} \delta^3(\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2) \delta(\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2 - M_2) |M|^2. \quad (40)$$

Сначала проведём интегрирование по  $d^3\tilde{p}_1$ , воспользовавшись  $\delta$ -функцией. Подставив  $\tilde{p}_1 = -\tilde{p}_2$  в подынтегральное выражение, получим

$$S_2 = \int \frac{d^3\tilde{p}_2}{2\tilde{E}_2} \frac{1}{2\sqrt{\tilde{p}_2^2 + m_1^2}} \delta(\sqrt{\tilde{p}_2^2 + m_1^2} + \tilde{E}_2 - M_2) |M|^2. \quad (41)$$

Аналогично тому, как это было сделано выше, зададим вектор  $\tilde{p}_2$  в сферической системе координат его модулем  $\tilde{p}_2$  и угловыми переменными  $\tilde{\eta}_2 = \cos\tilde{\vartheta}_2$ ,  $\tilde{\varphi}_2$ . В системе центра масс  $O_2$  все направления  $\tilde{p}_2$  равновероятны. Наличие дельта-функции под интегралом позволяет выполнить интегрирование по  $\tilde{p}_2$ . Для этого интегрирования требуется предварительное решение уравнения

$$\sqrt{\tilde{p}_2^2 + m_1^2} + \tilde{E}_2 - M_2 = 0.$$

Из последнего уравнения получаем энергию и величину импульса одной из двух частиц в системе отсчёта  $O_2$

$$\tilde{E}_2 = \frac{M_2^2 + m_2^2 - m_1^2}{2M_2},$$

$$\tilde{p}_2 = \frac{\sqrt{M_2^2 - (m_1 + m_2)^2} \sqrt{M_2^2 - (m_1 - m_2)^2}}{2M_2}. \quad (42)$$

Интегрирование по  $d\tilde{p}_2$  приводит к

$$\int d\tilde{p}_2 \delta(\sqrt{\tilde{p}_2^2 + m_1^2} + \sqrt{\tilde{p}_2^2 + m_2^2} - M_2) =$$

$$\left( \frac{d\sqrt{\tilde{p}_2^2 + m_1^2}}{d\tilde{p}_2} + \frac{d\sqrt{\tilde{p}_2^2 + m_2^2}}{d\tilde{p}_2} \right)^{-1} = \left( \frac{\tilde{p}_2}{\tilde{E}_1} + \frac{\tilde{p}_2}{\tilde{E}_2} \right)^{-1} = \frac{\tilde{E}_1 \tilde{E}_2}{\tilde{p}_2 M_2}. \quad (43)$$

В итоге, для внутреннего интеграла получаем

$$S_2 = \int_{-1}^1 d\tilde{\eta}_2 \int_0^{2\pi} d\tilde{\varphi}_2 \frac{\tilde{p}_2}{4M_2} |M|^2.$$

После его подстановки получаем следующее представление интеграла (29):

$$\begin{aligned} S_n = & \int_0^{\tilde{T}_n} d\tilde{T}_{n-1} \int d\tilde{\eta}_n \int d\tilde{\varphi}_n \cdot \int_0^{\tilde{T}_{n-1}} d\tilde{T}_{n-2} \int d\tilde{\eta}_{n-1} \int d\tilde{\varphi}_{n-1} \cdot \dots \times \\ & \times \int_0^{\tilde{T}_3} d\tilde{T}_2 \int d\tilde{\eta}_3 \int d\tilde{\varphi}_3 \times \\ & \times \int d\tilde{\eta}_2 \int d\tilde{\varphi}_2 \cdot 2^{-n} M_n^{-1} \tilde{p}_n \tilde{p}_{n-1} \dots \tilde{p}_3 \tilde{p}_2 |M(\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_n)|^2. \end{aligned} \quad (44)$$

Пределы интегрирования следующие:

$$\begin{aligned} 0 \equiv \tilde{T}_1 & \leq \tilde{T}_2 \leq \tilde{T}_3 \leq \dots \tilde{T}_{n-1} \leq \tilde{T}_n, \\ -1 \leq \tilde{\eta}_k & \leq 1, \quad 0 \leq \tilde{\varphi}_k \leq 2\pi \quad (k = n, n-1, \dots, 2). \end{aligned} \quad (45)$$

В качестве исходных данных при вычислении необходимо задать следующие величины:

- $\bar{P}_n = (\vec{P}_n, P_n^0)$  – 4-х вектор системы частиц 1, 2, ...,  $n$  в лабораторной системе отсчёта;
- $M_n = \sqrt{\bar{P}_n^2}$  – эффективную массу системы частиц 1, 2, ...,  $n$ ;
- $m_1, m_2, \dots, m_n$  – массы всех вторичных частиц;
- $\tilde{T}_n = M_n - (m_1 + m_2 + \dots + m_n) = M_n - \mu_n$  – суммарную кинетическую энергию вторичных частиц в с.ц.м. всех  $n$  частиц.

С помощью (44) уже можно выполнять моделирование  $n$ -частичного фазового объёма, начиная с  $n$ -й частицы, но эффективность при этом будет невысока. С целью её повышения необходимо ещё одно преобразование интеграла состояний, которое описано ниже.

Эффективность моделирования можно существенно повысить следующим образом. Превратим область интегрирования в единственный гиперкуб. Для этого сделаем следующие замены переменных:

$$\tilde{T}_k = \tilde{T}_{k+1} \xi_k \quad (k = n - 1, \dots, 3, 2), \quad (46)$$

$$\tilde{\eta}_k = 2\beta_k - 1 \quad (k = n, \dots, 3, 2), \quad (47)$$

$$\tilde{\varphi}_k = 2\pi\gamma_k \quad (k = n, \dots, 3, 2). \quad (48)$$

Все переменные  $\xi_k$ ,  $\beta_k$ ,  $\gamma_k$  изменяются теперь в интервале  $(0,1)$ . Якобиан преобразования от  $\tilde{T}_k$  к  $\xi_k$  равен:

$$\frac{d(\tilde{T}_{n-1}, \dots, \tilde{T}_2)}{d(\xi_{n-1}, \dots, \xi_2)} = \xi_{n-3} \xi_{n-4} \dots \xi_3 \tilde{T}_n^{n-2} = \tilde{T}_n^{n-2} \prod_{k=2}^{n-1} \xi_k^{k-2}.$$

В результате  $3n - 4$ -кратный интеграл (44) примет вид:

$$S_n = \frac{(2\pi)^{n-1} \tilde{T}_n^{n-2}}{2M_n} \int_0^1 \dots \int_0^1 \prod_{i=2}^{n-1} d\xi_i \prod_{j=2}^n d\beta_j \prod_{k=2}^n d\gamma_k \prod_{l=2}^{n-1} \xi_l^{l-2} \prod_{m=2}^n \tilde{p}_m |M|^2. \quad (49)$$

Как указывалось, при вычислении последнего интеграла методом Монте-Карло сходимость будет мала даже при  $|M|^2 \equiv 1$  из-за пикованности подинтегрального выражения. Для улучшения сходимости необходимо сделать ещё одну замену переменных, которая следует из поведения подинтегрального выражения в нерелятивистском пределе.

Энергию  $k$ -й частицы в системе  $O_k$  в нерелятивистском пределе можно записать:

$$\tilde{E}_k = \frac{M_k^2 + m_k^2 - M_{k-1}^2}{2M_k} \approx \frac{\tilde{p}_k^2}{2m_k} + m_k.$$

Отсюда получаем:

$$\tilde{p}_k^2 \approx \frac{m_k(M_k^2 - 2m_k M_k + m_k^2 - M_{k-1}^2)}{M_k} = \frac{m_k}{M_k} \left[ (M_k - m_k)^2 - M_{k-1}^2 \right].$$

Подставив

$$M_k = \tilde{T}_k + \mu_k,$$

$$M_{k-1} = \tilde{T}_{k-1} + \mu_{k-1},$$

получим:

$$\tilde{p}_k^2 \approx \frac{m_k}{M_k} (M_k + M_{k-1} - m_k) (\tilde{T}_k - \tilde{T}_{k-1}) \approx \frac{m_k}{M_k} 2\mu_{k-1} (\tilde{T}_k - \tilde{T}_{k-1}), \quad (50)$$

где в 1-й скобке в нерелятивистском пределе использовано  $M_k \approx \mu_k$  и  $M_{k-1} \approx \mu_{k-1}$ . Отсюда:

$$\tilde{p}_k = \sqrt{\frac{2m_k\mu_{k-1}}{\mu_k}} \sqrt{\tilde{T}_k - \tilde{T}_{k-1}}. \quad (51)$$

Воспользовавшись последним выражением и подставив (46) в виде

$$\tilde{T}_k = \tilde{T}_n \xi_{n-1} \xi_{n-2} \dots \xi_k, \quad (k = n-1, \dots, 2),$$

получим:

$$\tilde{p}_k = \sqrt{\frac{2m_k\mu_{k-1}}{\mu_k}} \tilde{T}_n \sqrt{\xi_{n-1} \dots \xi_k} \sqrt{1 - \xi_{k-1}}.$$

Отсюда имеем:

$$\prod_{k=2}^n \tilde{p}_k = 2^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\frac{m_1 \dots m_n}{\mu_n}} \tilde{T}_n^{\frac{n-1}{2}} \prod_{k=2}^{n-1} \xi_k^{\frac{k-1}{2}} (1 - \xi_k)^{\frac{1}{2}}. \quad (52)$$

В итоге, в нерелятивистском пределе, после интегрирования по  $\beta_j$  и  $\gamma_k$ , фазовый объём  $n$  частиц выражается через произведение  $n-2$  однократных интегралов:

$$S_n(\tilde{T}_n) = \frac{2^{\frac{3}{2}(n-1)} \pi^{n-1}}{2M_n} \tilde{T}_n^{\frac{3n-5}{2}} \left( \frac{m_1 \dots m_n}{\mu_n} \right)^{\frac{1}{2}} \times \prod_{k=2}^{n-1} \int_0^1 d\xi_k \xi_k^{\frac{3k-5}{2}} (1 - \xi_k)^{\frac{1}{2}}. \quad (53)$$

Из вида интегралов следует замена переменных, необходимая для сглаживания подынтегрального выражения:

$$\alpha_k = \frac{\int_0^{\xi_k} d\xi \xi^{\frac{3k-5}{2}} (1 - \xi)^{\frac{1}{2}}}{\int_0^1 d\xi \xi^{\frac{3k-5}{2}} (1 - \xi)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\int_0^{\xi_k} d\xi \xi^{\frac{3k-5}{2}} (1 - \xi)^{\frac{1}{2}}}{\left[ \frac{\Gamma(3k/2)}{\Gamma(3/2)\Gamma(3(k-1)/2)} \right]}. \quad (54)$$

При такой замене  $\alpha_k$ , как и  $\xi_k$ , изменяется в интервале  $(0,1)$ .

Для численного моделирования фазового объёма  $n$  частиц ( $n=3\div 20$ ) величины  $\alpha_k$  затабулированы (таблица  $C_k(\xi_k)$ , Приложение 2) в зависимости от  $\xi_k$  с маленьким шагом по  $\xi_k$  для  $k$  в интервале  $2\div 19$ . В первоначальном варианте генераторов использовалась таблица из [5], рассчитанная с шагом по  $\xi_k$  равным 0.05. А.Е.Блинов обратил наше внимание на то, что при большой статистике, в сотни тысяч событий, получаемые при моделировании импульсные распределения частиц содержат заметные нерегулярности. Использование таблицы, рассчитанной с шагом по  $\xi_k$  равным 0.005, позволило сгладить эти распределения. Поэтому генераторы были изменены: таблицы для моделирования теперь рассчитываются при первом обращении с шагом по  $\xi_k$  равным 0.005. Этот шаг при необходимости может быть уменьшен ещё, так как он определяется размерностью таблицы  $C_k(\xi_k)$ , которая задаётся в программе в качестве параметра.

При моделировании по случайным числам  $\alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, \dots, \alpha_2$ , равномерно распределённым в интервале  $(0,1)$ , с помощью таблицы  $C_k(\xi_k)$  обратным интерполированием вычисляются  $\xi_{n-1}, \xi_{n-2}, \dots, \xi_2$ , величина  $\xi_1$  полагается равным 0. Это даёт возможность вычислить  $\tilde{T}_{n-1}, \tilde{T}_{n-2}, \dots, \tilde{T}_2$  и, в конечном итоге, импульсы частиц в лабораторной системе отсчёта.

Вес точки равен

$$\Phi(P) = \frac{\pi^{\frac{3}{2}(n-1)} T_n^{\frac{3n-5}{2}}}{2\Gamma(\frac{3(n-1)}{2}) M_n} \prod_2^n \frac{\tilde{p}_k}{\sqrt{\tilde{T}_k - \tilde{T}_{k-1}}} |M|^2. \quad (55)$$

Далее, при помощи метода Неймана, получают события с весом 1. Как указывалось, в генераторах EENADRNS и GGNADRNS используется  $M \equiv 1$ , однако в подпрограммы EENMATR и GGNMATR может быть включен квадрат матричного элемента  $|M(p_1, \dots, p_n)|^2$  не равный 1.

Приведём формулы для перевода энергии и импульса  $k$ -й частицы из переменной системы отсчёта  $O_k$  в лабораторную, необхо-



димые при моделирования конечного состояния  $n$  частиц.

$$E_k = \frac{P_k^0 \tilde{E}_k + (\vec{P}_k, \tilde{\vec{p}}_k)}{M_k}, \quad (56)$$

$$\vec{p}_k = \tilde{\vec{p}}_k + \frac{E_k + \tilde{E}_k}{E_k + M_k} \vec{P}_k.$$

В формулах преобразования (56) используются компоненты 4-х вектора суммарного импульса  $k$  частиц в лабораторной системе  $P_k = (\vec{P}_k, P_k^0)$ . После того, как импульс и энергия  $k$ -й частицы будут определены, можно вычислить 4-х импульс  $\vec{P}_{k-1}$  оставшейся группы частиц (1, 2, ..., k-1) в лабораторной системе отсчёта

$$\vec{P}_{k-1} = \vec{P}_k - \vec{p}_k, \quad (57)$$

и далее последовательно провести процедуру преобразования импульсов для всех  $n$  частиц.

Подробное описание алгоритма моделирования многочастичных событий ("случайных звёзд") [5] приведено в Приложении 2.

## 10 Приложение 2

Алгоритм моделирования многочастичных событий с учётом законов сохранения энергии-импульса (К-процедура) [5] реализован в подпрограммах EENSPC и GGHSPC. Он приводится ниже с небольшими изменениями.

### Исходные данные

$n$  – число частиц.

$m_1, m_2, \dots, m_n$  – массы частиц.

$\vec{p}_0 = (\vec{p}_0, \omega_0) = (p_{0x}, p_{0y}, p_{0z}, \omega_0)$  – начальный 4-х импульс системы в лабораторной с.о.

$|M|^2 = |M(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n)|^2$  – явное выражение для квадрата амплитуды процесса.

## Подготовительные вычисления

**К0:** Рассчитать таблицу  $C_k(\xi_k) = \frac{\int_0^{\xi_k} d\xi \xi^{\frac{3k-5}{2}} (1-\xi)^{1/2}}{\int_0^1 d\xi \xi^{\frac{3k-5}{2}} (1-\xi)^{1/2}}$ .

Таблица  $C_k(\xi_k)$  рассчитывается для  $k = 3 \div 20$  с шагом 0.005 по  $\xi_k$ ,  $0 \leq \xi_k \leq 1$ .

**К1:** Вычислить 4-импульс системы  $n$  частиц в лабораторной с.о.

$$\vec{P}_n = (\vec{P}_n, En), \quad \vec{P}_n = (p_{0x}, p_{0y}, p_{0z}), \quad E_n = \omega_0,$$

$M_n = \sqrt{E_n^2 - P_n^2}$  - эффективная масса системы  $n$  частиц.

**К2:** Задать сумму масс покоя  $n$  частиц.

$$\mu_n = m_1 + m_2 + \dots + m_n.$$

**К3:** Вычислить энерговыделение в с.д.м.  $n$  частиц

$$\tilde{T}_n = M_n - \mu_n.$$

## Рекуррентная часть

Для  $k = n, n-1, \dots, 3, 2$  проделать операции **К4** – **К15**, которые сводятся к моделированию импульса частицы номер  $k$  в системе покоя  $O_k$  и переводу этого импульса в лабораторную систему отсчёта. Величины, относящиеся к переменной системе отсчёта, помечаются значком  $\tilde{\phantom{x}}$ .

**К4:** Разыграть случайное число  $r$  и вычислить  $\xi_{k-1}$  как корень уравнения  $C_{k-1}(\xi_{k-1}) = r$ , где  $C_k$  было приведено выше. При вычислении  $\xi_{k-1}$  используется линейная интерполяция.

$$\tilde{T}_{k-1} = \tilde{T}_k \xi_{k-1}. \text{ Когда } k = 2, \text{ то } \tilde{T}_{k-1} = 0$$

( $\tilde{T}_{k-1}$  - кинетическая энергия группы частиц  $1, 2, \dots, k-1$  в системе покоя  $O_{k-1}$ ).

**К5:**  $\mu_{k-1} = \mu_k - m_k$  - суммарная масса покоя частиц  $1, 2, \dots, k-1$ .

**К6:**  $M_{k-1} = \mu_{k-1} + \tilde{T}_{k-1}$  - эффективная масса компаунд-частицы  $O_{k-1}$ .

**К7:** Вычислить энергию и модуль импульса частицы  $k$  в системе

$$\text{покоя } O_k. \quad \tilde{\omega}_k = (M_k^2 + m_k^2 - M_{k-1}^2)/2M_k,$$

$$\tilde{p}_k = (\tilde{\omega}_k^2 - m_k^2)^{1/2}.$$

**К8:** Задать  $\tilde{\eta}_k$  - косинус полярного угла между импульсом

частицы  $k$  и осью  $z$  в системе  $O_k$ . Разыграть случайное число  $r$ .  $\tilde{\eta}_k = 2r - 1$ .

**K9:** Задать азимутальный угол  $\tilde{\varphi}_k$  частицы  $k$  в системе  $O_k$ . Разыграть случайное число  $r$ ,  $\tilde{\varphi}_k = 2\pi r$ .

**K10:** Вычислить компоненты импульса частицы в системе  $O_k$ .

$$\begin{aligned}\tilde{p}_{kx} &= \tilde{p}_k(1 - \tilde{\eta}_k^2)^{1/2} \cos \tilde{\varphi}_k, \\ \tilde{p}_{ky} &= \tilde{p}_k(1 - \tilde{\eta}_k^2)^{1/2} \sin \tilde{\varphi}_k, \\ \tilde{p}_{kz} &= \tilde{p}_k \tilde{\eta}_k\end{aligned}$$

**K11:** Вычислить энергию частицы  $k$  в начальной системе отсчёта.

$$\omega_k = (E_k \tilde{\omega}_k + \vec{P}_k \tilde{p}_k) / M_k$$

**K12:** Вычислить вектор импульса частицы  $k$  в начальной системе отсчёта.  $\lambda_k = (\omega_k + \tilde{\omega}_k) / (E_k + M_k)$ .

$$\vec{p}_k = \tilde{p}_k + \vec{P}_k \lambda_k.$$

**K13:** Вычислить 4-импульс  $\vec{P}_{k-1} = (\vec{P}_{k-1}, E_{k-1})$  оставшихся частиц  $1, 2, \dots, k-1$ .  $E_{k-1} = E_k - \omega_k$ ,

$$\vec{P}_{k-1} = \vec{P}_k - \vec{p}_k.$$

Конец рекуррентной процедуры. Если  $k > 2$ , то вернуться к **K4**, заменить  $k$  на  $k - 1$ . Если  $k = 2$ , то

**K14:**  $\vec{p}_1 = \vec{P}_1$ ,  $\omega_1 = E_1$  - импульс частицы 1 равен импульсу  $P_1$

**K15:**  $m_1 \equiv \sqrt{E_1^2 - P_1^2}$  - контроль.

**K16:** Вычисление веса события  $\Phi(P)$  (55). Сюда входит вычисление квадрата амплитуды процесса  $|M(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n)|^2$  при разыгранных значениях  $\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_n$ .

**K17:** Моделирование событий с весом 1 по методу Неймана (производится в подпрограммах EENMATR, GGNMATR). Оценить мажоранту  $\Phi_m$  (по 100-200 событиям). Разыграть случайное число  $r$ . Если  $\Phi(P) < r \Phi_m$  ( $\Phi_m$  - мажоранта веса), то вернуться к пункту **K4**. Если  $\Phi(P) \geq r \Phi_m$ , то событие принимается, ему присваивается вес равный 1.

## Список литературы

- [1] The Lund Monte Carlo programs. Pool programs W5035 / W5045 / W5046 / W5047 / W548 long writeup. CERN 3 April 1987.  
T.Sjöstrand. Pythia 5.7 and Jetset 7.4. CERN-TH.7112/93.
- [2] *F.A.Berends et al.* Computer Physics Communications 40 (1986) 285.  
*F.A.Berends et al.* Computer Physics Communications 40 (1986) 309.
- [3] I. *J.L.Siegrist et.al.* Phys. Rev. D26 (1982) 969.
- [4] II. *G.Hanson et al.*, Phys. Rev. D26 (1982) 991.
- [5] *Г.И.Копылов.* Основы кинематики резонансов, "Наука", Москва, 1970.
- [6] *R.Brun et al.* GEANT3. User's guide. CERN preprint DD/EE/84-1, Geneve, 1987.
- [7] *J.James.* CERN program library, W505.
- [8] *J.H.Friedman.* Journ. Comp. Phys., 7 (1971) 201.
- [9] *Ch.Berger et al.* Phys. Lett., 95B (1980) 313.
- [10] TASSO collaboration, Zeits. Phys., C22 (1984) 307.
- [11] *P.Mättig.* Preprint DESY 83-038, June 1983.
- [12] *V.M.Budnev, I.F.Ginzburg, G.V.Meledin, V.G.Serbo.* Phys. Rep., 15C (1975) 181.
- [13] *В.Г.Сербо.* Конспект лекций по спецкурсу "Фотон-фотонные взаимодействия, 1". Февраль 1999.
- [14] *Е.Бюклинг, К.Каянти.* Кинематика элементарных частиц. "Мир", Москва, 1975.

- [15] *S.E.Baru et al.*. Phys. Rep., 267 (1996) 71.
- [16] *G.Bonneau et al.* Nucl. Phys., B154 (1973) 573.
- [17] *J.H.Field.* Nucl. Phys., B168 (1980) 477, Nucl. Phys., B176 (1980) 545.
- [18] *N.Wermes.* Dissertation. Bonn-IR-82-27, Bonn University, July 1982.
- [19] *F.Low.* Phys. Rev. 120 (1960) 582.
- [20] *V.M.Aulchenko et al.* Nucl. Instr. and Meth., A355 (1995) 261.



*В.А. Таяурский, С.И. Эйдельман*

**Монте-карловские генераторы  
многочастичных событий**

*V.A. Tayursky, S.I. Eidelman*

**Monte Carlo generators  
of multiparticle events**

ИЯФ 2000-78

Ответственный за выпуск А.М. Кудрявцев

Работа поступила 4.10.2000 г.

---

Сдано в набор 10.10.2000 г.

Подписано в печать 18.10.2000 г.

Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 2.8 печ.л., 2.3 уч.-изд.л.

Тираж 140 экз. Бесплатно. Заказ N 78

---

Обработано на IBM PC и отпечатано на  
ротапринте ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН

*Новосибирск, 630090, пр.академика Лаврентьева, 11.*

