



К. 66

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ

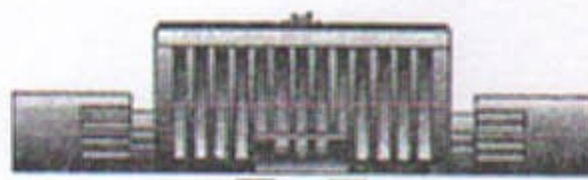
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

им. Г.И.Будкера СО РАН

С.Э. Коренблит, А.Б. Танаев

ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ГЕЙЗЕНБЕРГОВСКИХ
УРАВНЕНИЙ В МОДЕЛЯХ
ЧЕТЫРЕХФЕРМИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ
И ПРОБЛЕМА СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ

ИЯФ 2001-11



НОВОСИБИРСК

2001

✓ +

Линеаризация гейзенберговских уравнений
в моделях четырехфермионного взаимодействия
и проблема связанных состояний

С.Э. Коренблит, А.Б. Танаев

Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера
630090 Новосибирск, Россия

Аннотация

Предложена процедура линеаризации Гейзенберговских уравнений в простой нерелятивистской и некоторых релятивистских моделях четырехфермионного взаимодействия, приводящая к функциональному интегральному представлению нормальной формы гейзенберговского оператора по "пробным" шредингеровским полям. Продемонстрирована связь коэффициентных функций соответствующего разложения Хаага с волновыми функциями рассеяния и связанных состояний.

Ключевые слова: Разложение Хаага, Уравнения Гейзенберга, Четырехфермионное взаимодействие, Связанные состояния.

Linearization of Heisenberg Equations
in Four – Fermion Interaction Model
and Bound State Problem

S.E. Korenblit, A.B. Tanaev¹

Abstract

A linearization procedure is proposed for Heisenberg equations in simple nonrelativistic and some relativistic four – fermion models, leading to functional integral representation of normal form of Heisenberg operator with respect to "trial"Schroedinger fields. The relationship is demonstrated between coefficient functions of corresponding Haag expansion with scattering and bound state wave function.

Key words: Haag expansion, Heisenberg equations, Four – fermion interaction, Bound states.

E-mail: korenb@ic.isu.ru

©Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера СО РАН, Россия

¹Physics Faculty of Irkutsk State University, Irkutsk 644003, Gagarin blvd, 20, Russia.

1 Введение

Хорошо известно, что решения уравнений Гейзенберга (ГУ) являются операторными обобщенными функциями, произведение которых плохо определено уже в самих уравнениях, тогда как корректное определение полевых уравнений подразумевает знание качественных свойств их решений, которые, в свою очередь, весьма сингулярным образом зависят от вида этих уравнений [1]. Так как динамические уравнения квантовой теории поля пишутся для гейзенберговских операторов, а наблюдаемые величины выражаются их матричными элементами по физическим состояниям, построенным над физическим вакуумом в терминах операторов физических полей, то любую квантово-полевую задачу можно, таким образом, свести к проблеме определения гейзенберговских операторов в представлении физических полей. Выбор такого представления неединственен и определяется дополнительными условиями, связанными со свойствами пространства интересующих физических состояний. Именно такая постановка задачи рассмотрена в настоящей работе. Проблема состоит в построении соответствующего динамического отображения [2] гейзенберговских полей (ГП) на физические поля в виде степенного ряда нормальных произведений физических полей – разложения Хаага [3].

Имеется два существенно различных выбора начального момента времени t_0 , [4], [5], [6], [7], приводящих, соответственно, к принципиально различным наборам физических полей:

<p>(Гринберг, Умедзава) $t_0 \rightarrow -\infty$: неоператорное начальное условие $(w) \lim_{t \rightarrow -\infty} \langle a \Psi(x, t) - \psi_{in}(x, t) b \rangle = 0$ $\{\psi_{in}[A_{in}]\}$ = неполное пространство Фока необходимо новое поле V_{in} для каждого связанного состояния $\hat{H} \stackrel{(w)}{=} \hat{H}_0\{A_{in}\} + \hat{H}_1\{V_{in}\} + ? \dots$</p>	<p>(Фаддеев, Широков) $t_0 = 0$: операторное начальное условие $(s) \lim_{t \rightarrow 0} \Psi(x, t) = \Psi[\psi(x, 0)]$ $\{\psi[A]\}$ = полное пространство Фока отсутствие новых полей для связанных состояний $\hat{H} \stackrel{(s)}{=} \hat{H}_0\{A\} + \hat{H}_1\{A\}, \quad (*)$</p>
---	---

Здесь $|a\rangle, |b\rangle$ произвольные нормируемые состояния; A -операторы рождения, уничтожения физических состояний; (w) и (s) отмечают слабые и сильные (операторные) равенства соответственно.

В недавних работах Гринберга [8]-[10], вслед за Умедзавой и др. [2] сделана интересная попытка создания на основе динамического отображения на "in"- поля эф-

эффективного вычислительного метода непертурбативного анализа в квантовой теории поля. Его преимущества обусловлены тем, что соответствующие коэффициентные функции отвечают "минимальному" сходу с массовой поверхности лишь по одной из частиц, автоматически соответствуют связным графам и дают одновременно трехмерное и ковариантное описание, не сталкиваясь с проблемой относительного времени, в отличие от Бете-Солпитеровского подхода. Появление дополнительных *in* - (*out*) операторов связанных состояний в (*) обусловлено несохранением канонических коммутационных соотношений (ККС) в случае слабых начальных условий и позволяет как раз согласовать ККС для гейзенберговских и асимптотических полей [2]. Поскольку, в терминах этих асимптотических полей полный гамильтониан, по определению, выглядит в слабом смысле как свободный [11], то, казалось бы, естественно выбрать эти поля в качестве физических. Такой подход, тесно связанный с S-матричной постановкой задачи рассеяния, является, за редкими исключениями [4]-[7], господствующей парадигмой в квантовой теории поля уже на протяжении многих лет. Трудность его, однако, состоит в том, что именно при наличии связанных состояний полный набор асимптотических *in* - (*out*) полей оказывается шире полного набора гейзенберговских (или шредингеровских) полей и является заранее неизвестным [2]! В частности, не известны ни спектры связанных состояний, фигурирующих в этом асимптотическом гамильтониане (*), ни само их количество.

В данной работе, на примерах различных моделей 4-х фермионного взаимодействия показано, что эффективным инструментом для анализа связанных состояний, в том числе и в неперенормируемых теориях, является динамическое отображение на соответственно подобранные шредингеровские поля при $t = t_0 = 0$, которые и выбираются в качестве физических полей "диагонализирующих конститuentов". Такой выбор представляется физически более адекватным проблеме связанных состояний, поскольку для них взаимодействие никогда не "выключается". Он оказывается, также, наиболее экономным и дает единую трактовку как связанных состояний так и состояний рассеяния в терминах коэффициентных функций динамического отображения.

В рамках этого подхода, в некоторых решаемых случаях, в том числе и для релятивистских моделей, показана возможность "естественной" линеаризации гейзенберговских уравнений, позволяющая получить замкнутые выражения для гейзенберговских полей в терминах физических полей, аналогичные решениям 2D моделей Тирринга, Швингера и Федербуша [10], [12], [13], [14]. В случае одновременной релятивистской потенциальной модели В.Н. Первушина [15], [16] с δ - потенциальным взаимодействием получена нормальная форма операторных решений для этих гейзенберговских полей в виде континуальных интегралов по траекториям в фазовом $\{x, p\}$ - пространстве.

Сама возможность получения таких представлений в релятивистском случае не кажется бесполезной, т.к. дает операторное выражение для гейзенберговского поля

в произвольный момент времени $t = T$ через операторы физических полей в предыдущие моменты, начиная с $t = 0$, независимо от их интерпретации в терминах операторов рождения и уничтожения частиц, что позволяет, в определенном смысле, отделить проблему построения динамики от проблемы (вторичного) квантования. Последняя непосредственно связана с процедурой приведения решения к нормальной форме, - задачей, решаемой в общем виде с помощью теоремы Вика с привлечением техники функционального интегрирования [17], [18]. Во втором параграфе выводятся общие условия линеаризации ГУ для релятивистских моделей четырехфермионного взаимодействия и формальные решения этих уравнений. В третьем параграфе эти решения приводятся к нормальной форме с использованием функциональных методов. В четвертом намечено решение проблемы связанных состояний. В пятом параграфе приведены некоторые выводы.

2 Условия линеаризации

Рассмотрим условия линеаризации для четырехфермионного гамильтониана вида: $x = (x, x_0)$, $\gamma^\nu = (\gamma, \gamma^0)$, $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ - матрицы Дирака,

$$H_{|\Psi\rangle}(t) = \int d^3x \left\{ (\Psi^{\dagger a}(x) \hat{\mathcal{E}}_0(\mathbf{P}) \Psi^a(x)) + \frac{1}{2} \sum_A (S_\Psi^A(x))^2 \right\} \equiv H_{0|\Psi\rangle} + H_{I|\Psi\rangle}, \quad (1)$$

$$\tilde{H}_{|\Psi, B\rangle}(t) = \int d^3x \left\{ (\Psi^{\dagger a}(x) \hat{\mathcal{E}}_0(\mathbf{P}) \Psi^a(x)) + \sum_A (S_\Psi^A(x) B^A(x)) \right\}, \quad \text{где:} \quad (2)$$

$$\hat{\mathcal{E}}_0(\mathbf{P}) = (\hat{\alpha} \cdot \mathbf{P}) + \gamma^0 m_0, \quad \hat{\alpha} = \gamma^0 \gamma, \quad S_\Psi^A(x) = \left(\Psi_\alpha^{\dagger a}(x) (\hat{O}^A)_{\alpha\beta}^{ab} \Psi_\beta^b(x) \right), \quad (3)$$

$$\left. \left\{ \Psi_\alpha^a(x), \Psi_\beta^b(y) \right\} \right|_{x_0=y_0} = 0, \quad \left. \left\{ \Psi_\alpha^a(x), \Psi_\beta^{\dagger b}(y) \right\} \right|_{x_0=y_0} = \delta_{\alpha\beta} \delta^{ab} \delta_3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (4)$$

$\Psi_\alpha^a(x)$ - биспинор с лоренцевым индексом α и индексом внутренней симметрии a , $\bar{\Psi}_\alpha^a(x) = (\Psi^{\dagger a}(x) \gamma^0)_\alpha$, \hat{O}^A - некоторые матрицы по этим индексам, $x_0 = t$ и, в случае необходимости в (4) $\delta_3(\mathbf{x} = 0) \mapsto 1/V^*$. Величине V^* , ниже (см. (20)) придается смысл пространственного объема возбуждений, связанного с параметром импульсного обрезания. Для сравнения параллельно выписывается взаимодействие (2) с внешним полем $B^A(x)$. Из (1)-(4) вытекают формальные уравнения Гейзенберга:

$$i\partial_t \Psi_\alpha^a(x) = [\Psi_\alpha^a(x), H_{|\Psi\rangle}(t)] = \left([\hat{\mathcal{E}}(\mathbf{P}) + \hat{V}_\Psi(x)] \Psi(x) \right)_\alpha^a, \quad \mathbf{P} = -i \vec{\nabla}_x, \quad (5)$$

$$-i\partial_t \Psi_\alpha^{\dagger a}(x) = \left(\Psi^\dagger(x) [\hat{\mathcal{E}}^\dagger(\mathbf{P}^\dagger) + \hat{V}_\Psi^\dagger(x)] \right)_\alpha^a, \quad \text{где: } \mathbf{P}^\dagger = i \vec{\nabla}_x, \quad (6)$$

$$\text{и т.к. } H_{0,I}^\dagger = H_{0,I}, \text{ то } (\hat{\mathcal{E}}(\mathbf{P}))^\dagger = \hat{\mathcal{E}}^\dagger(\mathbf{P}^\dagger) \implies \hat{\mathcal{E}}(\mathbf{P}^\dagger), \quad (\hat{O}^A)^\dagger = \pm \hat{O}^A, \quad (7)$$

$$\hat{V}_\Psi(x) = \hat{V}_\Psi^\dagger(x) = \sum_A S_\Psi^A(x) \hat{O}^A, \quad \hat{V}_B(x) = \hat{V}_B^\dagger(x) = \sum_A B^A(x) \hat{O}^A, \quad (8)$$

$$\hat{\mathcal{E}}(\mathbf{P}) = (\hat{\alpha} \cdot \mathbf{P}) + \gamma^0 m_0 + \hat{\mu}_0 = \hat{\mathcal{E}}_0(\mathbf{P}) + \hat{\mu}_0, \quad \hat{\mu}_0 = \frac{1}{V^*} \sum_A (\hat{O}^A)^2. \quad (9)$$

Здесь † означает либо матричное эрмитово сопряжение, либо (6) для оператора \mathbf{P} . Отсюда находим уравнение движения для гейзенберговского "тока"

$$i\partial_t \hat{V}_\Psi(x) = \sum_A \left\{ (\Psi^\dagger(x) [\hat{O}^A \hat{\mathcal{E}}(\mathbf{P}) - \hat{\mathcal{E}}(\mathbf{P}^\dagger) \hat{O}^A] \Psi(x)) + \right. \quad (10)$$

$$\left. + (\Psi^\dagger(x) [\hat{O}^A \hat{V}_\Psi(x) - \hat{V}_\Psi^\dagger(x) \hat{O}^A] \Psi(x)) \right\} (\hat{O}^A) \equiv [\hat{V}_\Psi(x), H_{|\Psi\rangle}(t)] \quad (11)$$

$$= [\hat{V}_\Psi(x), H_{0|\Psi\rangle}(t)] + [\hat{V}_\Psi(x), H_{I|\Psi\rangle}(t)] \Rightarrow [\hat{V}_\Psi(x), H_{0|\Psi\rangle}(t)], \quad (12)$$

$$\text{тогда необходимо, чтобы } \sum_A \sum_B (\hat{O}^B) [\hat{O}^A, \hat{O}^B] (\hat{O}^A) = 0, \quad (13)$$

$$\text{или: } [\hat{O}^A, \hat{O}^B] = 0, \text{ то есть } [S_\Psi^A(x), S_\Psi^B(y)] \Big|_{x_0=y_0} = 0, \quad (14)$$

где круглые скобки ограничивают действие матричного умножения. Условия (13), (14) удовлетворяются любым набором коммутирующих между собой матриц \hat{O}^A . Например, для единственной матрицы $\hat{O}^A \mapsto \hat{O}$:

(I) выбор $\hat{O} = \sqrt{\lambda} \gamma^0 \otimes I$ отвечает варианту модели Гросса-Невье [19];

(II) выбор $\hat{O} = \sqrt{\lambda} \gamma^0 \gamma^5 \otimes I$, - варианту модели Намбу-Йона-Лазинио [20];

(III) выбор $\hat{O} = \sqrt{\lambda} \gamma^0 \gamma^\nu \epsilon_\nu (c_V + c_A \gamma^5) \otimes I$, $\gamma^\nu \epsilon_\nu = \gamma^0 \epsilon_0 - \gamma \epsilon$, $\epsilon^2 = 1$, или

(IV) набор $\hat{O}^{(V)} = \sqrt{\lambda_V} \gamma^0 \gamma^\nu \epsilon_\nu \otimes I$, $\hat{O}^{(A)} = \sqrt{\lambda_A} \gamma^0 \gamma^5 \gamma^\nu \epsilon_\nu \otimes I$ из двух коммутирующих матриц отвечает вариантам одновременной релятивистской потенциальной модели В.Н. Первушина [15], [16] с δ - потенциалом парного взаимодействия, ϵ_ν - вектор Маркова-Юкавы.

При условиях (13), (14) вклад вторых слагаемых в уравнениях (10)–(11), (12) исчезает и эволюция оператора $\hat{V}_\Psi(x)$ определяется только свободным (квадратичным) гамильтонианом, вообще говоря, с новым кинетическим членом $\hat{E}(\mathbf{P})$, введенным в правой части (12) так, чтобы:

$$\sum_A [\hat{O}^A \hat{\mathcal{E}}(\mathbf{P}) - \hat{\mathcal{E}}(\mathbf{P}^\dagger) \hat{O}^A] = \sum_A [\hat{O}^A \hat{E}(\mathbf{P}) - \hat{E}^\dagger(\mathbf{P}^\dagger) \hat{O}^A]. \quad (15)$$

Поясним эту и другие детали нашего подхода на примере простой нерелятивистской модели [21].

2.1 Нерелятивистская модель

Рассмотрим контактное взаимодействие нерелятивистских ферми-полей, $\alpha = 1, 2$, с плотностью:

$$\mathcal{H}_{|\Psi\rangle}(x) = \Psi_\alpha^\dagger(x) \mathcal{E}(\mathbf{P}) \Psi_\alpha(x) + \frac{\lambda}{4} (S_\Psi(x))^2, \quad H\{\Psi\} = \int d^3x \mathcal{H}_{|\Psi\rangle}(x), \quad (16)$$

$$: \mathcal{H}_{|\Psi\rangle}(x) : = w_0 + \Psi_\alpha^\dagger(x) E(\mathbf{P}) \Psi_\alpha(x) + \frac{\lambda}{8} \chi_\Psi^\dagger(x) \chi_\Psi(x), \quad H\{\Psi\} =: H\{\Psi\} :, \quad (17)$$

$$\text{где: } S_\Psi(x) = (\Psi_\alpha^\dagger(x) \Psi_\alpha(x)), \quad \chi_\Psi(x) = \epsilon_{\alpha\beta} \Psi_\alpha(x) \Psi_\beta(x), \quad w_0 \mapsto 0, \quad (18)$$

$$\Psi_\alpha(x) \Psi_\beta(x) = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta} \chi_\Psi(x), \quad \epsilon_{\alpha\beta} = -\epsilon_{\beta\alpha}, \quad \epsilon_{\alpha\beta} \epsilon_{\gamma\beta} = \delta_{\alpha\gamma}, \quad \epsilon_{12} = 1, \quad (19)$$

$$E(k) = \mathcal{E}(k) - \frac{\lambda}{4V^*}, \quad \langle\langle \mathcal{E}(k) \rangle\rangle \stackrel{\text{def}}{=} V^* \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \mathcal{E}(k), \quad V^* = \frac{6\pi^2}{\Lambda^3}. \quad (20)$$

Здесь $\mathcal{E}(k)$ является произвольным "голым" одночастичным спектром, $E(k)$ - перенормированный одночастичный спектр для физических полей, а V^* имеет прежний смысл. Взаимодействие (16) приводит к гамильтониану, диагональному в нормальной форме по гейзенберговским и/или физическим полям (17), если операторная реализация, например, такова, что гейзенберговские поля при $t = t_0 = 0$ просто совпадают с физическими полями:

$$\Psi_\alpha(\mathbf{x}, t) = e^{iHt} \Psi_\alpha(\mathbf{x}, 0) e^{-iHt} \Rightarrow \mathcal{F}_0^t[\psi_\alpha(\mathbf{x}, 0)], \quad \text{где тогда:} \quad (21)$$

$$\Psi_\alpha(\mathbf{x}, 0) = \Psi_\alpha[\psi_\alpha\{A(\mathbf{k})\}] \Rightarrow \psi_\alpha(\mathbf{x}, 0),$$

$$\psi_\alpha(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) - iE(\mathbf{k})t} A_\alpha(\mathbf{k}) = e^{-itE(\mathbf{P})} \psi_\alpha(\mathbf{x}, 0). \quad (22)$$

Соответствующие ГУ (5) для ГП:

$$\Psi_\alpha(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) - iE(\mathbf{k})t} a_\alpha(\mathbf{k}, t), \quad \hat{V}_\Psi(t; \mathbf{x}, \mathbf{P}) = \frac{\lambda}{2} S_\Psi(x), \quad (23)$$

$$(i\partial_t - E(\mathbf{P})) \Psi_\alpha(x) = \hat{V}_\Psi(t; \mathbf{x}, \mathbf{P}) \Psi_\alpha(x) \equiv \mathcal{J}_\alpha(x), \quad (24)$$

эквивалентны интегральному уравнению Янга-Фельдмана:

$$\Psi_\alpha(x) = \psi_\alpha(x) + \int_0^{x_0} dy_0 \int d^3y \Delta_{\alpha\beta}(x-y) \mathcal{J}_\beta(y), \quad (25)$$

где возможны оба знака x_0 и введена перестановочная функция физических полей [17]:

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha\beta}(x-y) &= \{\psi_\alpha(x), \psi_\beta^\dagger(y)\} = \delta_{\alpha\beta} e^{-i(x_0-y_0)E(\mathbf{P}_x)} \delta_3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \\ &= \delta_{\alpha\beta} \langle \mathbf{x} | e^{-i(x_0-y_0)E(\mathbf{P})} | \mathbf{y} \rangle = \delta_{\alpha\beta} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y}))} e^{-i(x_0-y_0)E(\mathbf{k})}. \end{aligned} \quad (26)$$

Диагональность полного гамильтониана (17) на собственном фоковском пространстве перенормированного кинетического гамильтониана в (17) позволяет искать решение этих уравнений (21) в виде следующего разложения Хаага:

$$e^{iHt} A_\alpha(\mathbf{k}) e^{-iHt} \equiv e^{-iE(\mathbf{k})t} a_\alpha(\mathbf{k}, t) = e^{-iE(\mathbf{k})t} A_0^t[A_\alpha(\mathbf{k})], \quad (27)$$

$$A_0^t[A_\alpha(\mathbf{k})] = A_\alpha(\mathbf{k}) + \sum_{n=1}^{\infty} \int d^3l \prod_{j=1}^n \left\{ \int d^3q_j \int d^3p_j \right\} \cdot$$

$$\prod_{j=1}^n \{A_{\beta_j}^\dagger(q_j)\} \prod_{j=n}^1 \{A_{\beta_j}(p_j)\} A_\alpha(1) Y_A^{(n)}(t; \mathbf{k}; \{q_j\}_1^n | \{p_j\}_n^1; 1), \quad (28)$$

из которого немедленно следует, что вакуум и одночастичное состояние остаются стабильными при всех значениях t :

$$a_\alpha(\mathbf{k}, t) |0\rangle \Rightarrow A_\alpha(\mathbf{k}) |0\rangle \equiv 0; \quad a_\alpha^\dagger(\mathbf{k}, t) |0\rangle \Rightarrow A_\alpha^\dagger(\mathbf{k}) |0\rangle = |1, \mathbf{k}, \alpha\rangle, \quad (29)$$

$$[H\{a\}, a_\alpha^\dagger(\mathbf{k}, t)] |0\rangle \equiv e^{iHt - iE(\mathbf{k})t} [H\{A\}, A_\alpha^\dagger(\mathbf{k})] e^{-iHt} |0\rangle = E(\mathbf{k}) A_\alpha^\dagger(\mathbf{k}) |0\rangle.$$

В силу (29) причинный пропагатор гейзенберговских полей сводится к причинному пропагатору физических полей, который для (22) совпадает с запаздывающей функцией Грина:

$$\Delta_{(\Psi)\alpha\beta}^{(C)}(x, y) \equiv \langle 0 | \mathbf{T} (\Psi_\alpha(x) \Psi_\beta^\dagger(y)) | 0 \rangle \Rightarrow \Delta_{(\Psi)\alpha\beta}^{(R)}(x - y) = \quad (30)$$

$$= \theta(x_0 - y_0) \Delta_{\alpha\beta}(x - y) = i\delta_{\alpha\beta} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-i(k, (x-y))} \frac{1}{k_0 - E(\mathbf{k}) + i0}. \quad (31)$$

Возвращаясь к ГУ, рассмотрим вытекающие из них уравнения для тока $S_\Psi(x)$. С учетом (5), (6), (10)

$$i\partial_t S_\Psi(x) = \Psi_\alpha^\dagger(x) [\mathcal{E}(\mathbf{P}) - \mathcal{E}(\mathbf{P}^\dagger)] \Psi_\alpha(x) \Rightarrow \Psi_\alpha^\dagger(x) [E(\mathbf{P}) - E(\mathbf{P}^\dagger)] \Psi_\alpha(x). \quad (32)$$

Для $E(\mathbf{P}) = w(-\nabla^2)$ и любой регулярной в $z = 0$ функции $w(z)$, с током $S_\Psi(x)$ связан сохраняющийся заряд, а из (18) и (4) вытекает соотношение (14):

$$[S_\Psi(x), S_\Psi(y)] \Big|_{x_0=y_0} = 0 \cdot \delta_3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \equiv 0. \quad (33)$$

Появление в (33) швингеровских членов возможно только если для какой либо операторной реализации (22) при $|\mathbf{k}| \rightarrow \infty$, имеются значения энергии обоих знаков, $E(\mathbf{k}) < 0$ и $E(\mathbf{k}) > 0$, т.е. если "дираковский подвал" содержит состояния со сколь угодно большим $|\mathbf{k}|$ [22], [23]. Этого легко избежать, потребовав монотонного возрастания функции $E(\mathbf{k})$, т.е. соответствующей монотонности $\mathcal{E}(\mathbf{k})$ при достаточно больших $|\mathbf{k}|$. Как видно из (32), зависимость от времени оператора $S_\Psi(x)$ вновь определяется только кинетической (квадратичной) частью гамильтониана. Это приводит к тому, что динамическое отображение для него в представлении физических полей (22) оказывается тривиальным. Действительно, тогда из (32), вместо (15), явствует:

$$\mathcal{E}(\mathbf{P}) - \mathcal{E}(\mathbf{P}^\dagger) = E(\mathbf{P}) - E(\mathbf{P}^\dagger), \quad (34)$$

что совместимо с определениями \mathbf{P} , \mathbf{P}^\dagger (5) и $E(\mathbf{P})$ только если

$$E(\mathbf{P}) - \mathcal{E}(\mathbf{P}) = E(\mathbf{P}^\dagger) - \mathcal{E}(\mathbf{P}^\dagger) = const, \quad (35)$$

в соответствии с (20). Поскольку (32) можно представить в виде:

$$i\partial_t S_\Psi(x) = [S_\Psi(x), H_2\{\Psi\}] \Rightarrow [S_\Psi(x), H_0\{\Psi\}] = [S_\Psi(x), H_0\{\Psi\}], \quad (36)$$

то операторные начальные условия (22) приводят к цепочке равенств:

$$S_\Psi(\mathbf{x}, t) \equiv e^{iHt} S_\Psi(\mathbf{x}, 0) e^{-iHt} \Rightarrow e^{iH_0t} S_\Psi(\mathbf{x}, 0) e^{-iH_0t} \Rightarrow \quad (37) \\ \Rightarrow e^{iH_0t} S_\Psi(\mathbf{x}, 0) e^{-iH_0t} \Rightarrow e^{iH_0t} S_\Psi(\mathbf{x}, 0) e^{-iH_0t} \equiv S_\Psi(\mathbf{x}, t).$$

Следовательно, ГУ (24), (25) становятся линейными по отношению к ГП $\Psi_\alpha(\mathbf{x}, t)$:

$$(i\partial_t - E(\mathbf{P})) \Psi_\alpha(\mathbf{x}, t) = \frac{\lambda}{2} S_\Psi(\mathbf{x}, t) \Psi_\alpha(\mathbf{x}, t) \Rightarrow \frac{\lambda}{2} S_\Psi(\mathbf{x}, t) \Psi_\alpha(\mathbf{x}, t), \quad (38)$$

и их решение приводит к явному, хотя и формальному выражению для ГП в терминах физических полей в виде Т-упорядоченной экспоненты [21] при $t > 0$:

$$\Psi_\alpha(\mathbf{x}, t) = \mathbf{T} \left(\exp \left\{ -i \int_0^t d\eta \left[\frac{\lambda}{2} S_\Psi(\mathbf{x}, \eta) + E(\mathbf{P}) \right] \right\} \right) \psi_\alpha(\mathbf{x}, 0) = \quad (39)$$

$$= e^{-itE(\mathbf{P})} \mathbf{T} \left(\exp \left\{ -i \frac{\lambda}{2} \int_0^t d\eta e^{i\eta E(\mathbf{P})} S_\Psi(\mathbf{x}, \eta) e^{-i\eta E(\mathbf{P})} \right\} \right) \psi_\alpha(\mathbf{x}, 0) =$$

$$= e^{-itE(\mathbf{P})} \mathbf{T} \left(\exp \left\{ -i \frac{\lambda}{2} \int_0^t d\eta S_\Psi(\mathbf{x} + \eta \mathbf{v}(\mathbf{P}), \eta) \right\} \right) \psi_\alpha(\mathbf{x}, 0). \quad (40)$$

Здесь \mathbf{P} - оператор дифференцирования из (5), а $\mathbf{v}(\mathbf{p}) = \nabla_{\mathbf{p}} E(\mathbf{p})$, является соответствующей групповой скоростью. Символ Т-упорядочения относится как к операторам физических полей, так и к некоммутирующим между собой операторам \mathbf{P} и $\mathbf{X} = \mathbf{x}$, и не может быть опущен даже если заменить оператор $S_\Psi(\mathbf{x}, \eta)$ классическим внешним полем (см. ниже). При $t > 0$ оператор $\psi_\alpha(\mathbf{x}, 0)$ можно внести под знак Т-произведения. Представляется затруднительным получить такое решение (39) в терминах in-полей, при наличии связанных состояний, вполне допустимых в этой модели [24].

Окончательный вид динамического отображения ГП определяется приведением этого символического решения (39) к нормальной форме по физическим полям. Его можно получить непосредственно в виде (28) из линейризованных ГУ (38) в импульсном представлении:

$$a_\alpha(\mathbf{k}, t) = A_\alpha(\mathbf{k}) + \int_0^t d\eta \int d^3l \langle \mathbf{k} | \widehat{K}_A(\eta) | \mathbf{l} \rangle a_\alpha(\mathbf{l}, \eta) = \\ = \int d^3l \langle \mathbf{k} | \mathbf{T} \exp \left[\int_0^t d\eta \widehat{K}_A(\eta) \right] | \mathbf{l} \rangle A_\alpha(\mathbf{l}), \quad (41)$$

$$\langle \mathbf{k} | \widehat{K}_A(\eta) | \mathbf{l} \rangle = \int d^3q \int d^3p A_\beta^\dagger(\mathbf{q}) A_\beta(\mathbf{p}) \mathcal{X}_A(\eta; \mathbf{k}, \mathbf{q} | \mathbf{p}, \mathbf{l}),$$

$$\mathcal{X}_A(\eta; \mathbf{k}, \mathbf{q} | \mathbf{p}, \mathbf{l}) = \frac{-i\lambda}{2(2\pi)^3} e^{i\eta[E(\mathbf{k})+E(\mathbf{q})-E(\mathbf{p})-E(\mathbf{l})]} \delta_3(\mathbf{k} + \mathbf{q} - \mathbf{p} - \mathbf{l}) = \quad (42)$$

$$= \frac{-i\lambda}{2(2\pi)^3} e^{it[E(\mathbf{q})-E(\mathbf{p})]} \langle \mathbf{k} | e^{itE(\mathbf{P})} e^{-i(\mathbf{q}-\mathbf{p})\mathbf{X}} e^{-itE(\mathbf{P})} | \mathbf{l} \rangle.$$

В силу коммутационных соотношений для ферми-полей, функции $Y^{(n)}$ в (28) должны быть симметричны относительно произвольной, но одновременной и одинаковой перестановки $\{q_j\}_1^n$ и $\{p_j\}_1^n$, так как именно такая симметрия выделяется при интегрировании. Уравнения (41) приводит к рекуррентным уравнениям на $Y^{(n)}$:

$$Y^{(n)}(t; \mathbf{k}; \{q_j\}_1^n | \{p_j\}_1^n; 1) = \int_0^t d\eta \int d^3\kappa \int d^3s \sum_{\nu=1}^n \mathcal{X}(\eta; \mathbf{k}, \mathbf{q}_\nu | \mathbf{s}, \boldsymbol{\kappa}) \cdot \left\{ \delta_3(\mathbf{s} - \mathbf{p}_\nu) \frac{1}{n} Y^{(n-1)}(\eta; \boldsymbol{\kappa}; \{q_j\}_{1-j \neq \nu}^n | \{p_j\}_{1-j \neq \nu}^n; 1) + Y^{(n)}(\eta; \boldsymbol{\kappa}; \{q_j\}_1^{\nu-1}, \mathbf{s}, \{q_j\}_{\nu+1}^n | \{p_j\}_1^n; 1) \right\}. \quad (43)$$

При $n = 1$ здесь нужно заменить $Y^{(n-1)} \rightarrow Y^{(0)}(t; \mathbf{k}|1) = \delta_3(\mathbf{k}-1)$. Бесконечная система уравнений (43) для коэффициентных функций нормальной формы может быть записана в виде одного интегро-дифференциального функционального уравнения для их производящего функционала от классического бислокального источника $\phi(\mathbf{q}|\mathbf{p})$:

$$\mathcal{Z}(t; \mathbf{k}, 1, [\phi]) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{j=1}^n \left\{ \int d^3q_j \int d^3p_j \phi(\mathbf{q}_j|\mathbf{p}_j) \right\} Y^{(n)}(t; \mathbf{k}; \{q_j\}_1^n | \{p_j\}_1^n; 1), \quad (44)$$

$$Y^{(n)}(t; \mathbf{k}; \{q_j\}_1^n | \{p_j\}_1^n; 1) = \frac{1}{n!} \prod_{j=1}^n \left\{ \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{q}_j|\mathbf{p}_j)} \right\} \mathcal{Z}(t; \mathbf{k}, 1, [\phi]) \Big|_{\phi=0}, \quad (45)$$

$$\frac{d}{dt} \mathcal{Z}(t; \mathbf{k}, 1, [\phi]) = \int d^3q \int d^3p \phi(\mathbf{q}|\mathbf{p}) \int d^3\kappa \int d^3s \mathcal{X}(t; \mathbf{k}, \mathbf{q}|\mathbf{s}, \boldsymbol{\kappa}) \cdot \left[\delta_3(\mathbf{s} - \mathbf{p}) + \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{s}|\mathbf{p})} \right] \mathcal{Z}(t; \boldsymbol{\kappa}, 1, [\phi]), \quad (46)$$

$$\text{с начальным условием:} \\ \mathcal{Z}(0; \mathbf{k}, 1, [\phi]) = Y^{(0)}(0; \mathbf{k}|1) = \delta_3(\mathbf{k} - 1) = \langle \mathbf{k}|1 \rangle, \quad (47)$$

что подсказывает искать решение (46) в виде матричного элемента оператора

$$\mathcal{Z}(t; \mathbf{k}, 1, [\phi]) = \langle \mathbf{k} | \mathbf{Z}(t, [\phi]) | 1 \rangle. \quad (48)$$

$$\text{Полагая: } \Phi_t^{\mathbf{X}}(\mathbf{q}|\mathbf{p}) = \phi(\mathbf{q}|\mathbf{p}) e^{it[E(\mathbf{q})-E(\mathbf{p})]} e^{-i(\mathbf{q}-\mathbf{p})\mathbf{X}}, \quad (49)$$

$$\text{имеем: } \frac{d}{dt} \mathbf{Z}(t, [\phi]) = \frac{-i\lambda}{2(2\pi)^3} e^{itE(\mathbf{P})} \int d^3q \int d^3p \Phi_t^{\mathbf{X}}(\mathbf{q}|\mathbf{p}) \cdot \quad (50)$$

$$\cdot \left[1 + \int d^3s \frac{\delta}{\delta\Phi_t^{\mathbf{X}}(\mathbf{s}|\mathbf{p})} \right] e^{-itE(\mathbf{P})} \mathbf{Z}(t, [\phi]).$$

Как всегда, при использовании бислокальных источников [25] происходит существенное понижение порядка функциональных производных в (45), а уравнение (50) выглядит проще обычных уравнений для производящего функционала коэффициентных функций нормальной формы S-матрицы для этого же взаимодействия [26]. Его решение также может быть представлено в виде формальной T-упорядоченной экспоненты (I- единичный оператор):

$$\mathbf{Z}_A(T, [\phi]) = e^{iT E(\mathbf{P})} \mathbf{T} \exp \left\{ -i \int_0^T dt \left[E(\mathbf{P}) + \frac{\lambda}{2(2\pi)^3} \right] \right\}. \quad (51)$$

$$\cdot \int d^3q \int d^3p \Phi_t^{\mathbf{X}}(\mathbf{q}|\mathbf{p}) \left(1 + \int d^3s \frac{\delta}{\delta\Phi_t^{\mathbf{X}}(\mathbf{s}|\mathbf{p})} \right) \Big| \Big| \mathbf{I}.$$

2.2 Релятивистская модель

Повторяя для (10)–(15) рассуждения (34)–(38), вновь приходим, казалось бы, к выводу о тривиальности динамического отображения этого оператора в представлении соответствующих физических полей

$$\left\{ \psi_\alpha^a(x), \psi_\beta^b(y) \right\} \Big|_{x_0=y_0} = 0, \quad \left\{ \psi_\alpha^a(x), \psi_\beta^{tb}(y) \right\} \Big|_{x_0=y_0} = \delta_{\alpha\beta} \delta^{ab} \delta_3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (52)$$

$$\psi_\alpha^a(x) = \psi_\alpha^a(\mathbf{x}, t) = e^{itH_0} \psi_\alpha^a(\mathbf{x}, 0) e^{-itH_0} = \left(e^{-it\hat{E}(\mathbf{P})} \psi_\alpha^a(\mathbf{x}, 0) \right)_\alpha, \quad (53)$$

$$\hat{V}_\psi(\mathbf{x}, t) \Rightarrow \hat{V}_\psi(\mathbf{x}, t), \quad H_{0[\psi]}(t) = \int d^3x (\psi^{ta}(x) \hat{E}(\mathbf{P}) \psi^a(x)) = H_{0[\psi]}(0), \quad (54)$$

$$\text{где: } \hat{E}(\mathbf{P}) = \hat{E}_0(\mathbf{P}) + \hat{\mu}_0 + \hat{M} \equiv \hat{E}(\mathbf{P}) + \hat{M}, \quad \hat{M}^\dagger = \hat{M}, \quad (55)$$

$$\text{откуда: } \sum_A [\hat{O}^A, \hat{M}] = 0, \quad (\hat{E}(\mathbf{P}))^\dagger = \hat{E}^\dagger(\mathbf{P}^\dagger) \Rightarrow \hat{E}(\mathbf{P}^\dagger). \quad (56)$$

При этих условиях неизвестная "перенормировка массы" \hat{M} физического поля $\psi_\alpha^a(\mathbf{x}, t)$ также сокращается в разности (15). Однако, хотя $\hat{E}(\mathbf{P})$ (9) удовлетворяет им автоматически, у нас нет оснований приравнять ее $\hat{E}(\mathbf{P})$ до тех пор, пока не установлена связь $\hat{E}(\mathbf{P})$ с одночастичным спектром полного гамильтониана и не фиксирована соответствующая интерпретация физических полей (53) в терминах операторов рождения и уничтожения частиц. Поскольку точная операторная диагонализация полного гамильтониана (1), даже в одночастичном секторе, не представляется возможной, поля ψ (53), в отличие от нерелятивистского случая, играют теперь роль "пробных" полей, и их спектр $\hat{E}(\mathbf{P}) \mapsto \omega(\mathbf{k})$ не обязан непосредственно совпадать с одночастичным спектром полного гамильтониана $W(\mathbf{k})$. Невозможность в релятивистской теории поля, в отличие от (37), гарантировать единственность решения ГУ с заданными начальными условиями, связанная с отсутствием там скольнибудь полного описания всех возможных унитарно неэквивалентных представлений ККС [13], означает что произведенная в (54) замена гейзенберговского "тока" $S_\psi^A(x)$ "током" свободных пробных полей $S_\psi^A(x)$, аналогична допущению о существовании представления взаимодействия [12], хотя является, на наш взгляд, менее жестким предположением. Фактически, (12) совместно с (13)–(15) и принимаются здесь за условия согласованности процедуры квантования (52)–(56) с динамикой системы при отсутствии точной операторной диагонализуемости (29) полного гамильтониана в одночастичном секторе на выбранных физических полях. При этом произвол, допускаемый условиями (15), или (55), (56), оставляет определенные возможности для перенормировки параметров одночастичного спектра. Общее "решение" условия (55) имеет вид:

$$\hat{M} = I\hat{\mu} + \sum_A (\hat{O}^A)^2 \tilde{c} + \gamma^0 \tilde{m} + \gamma^5 \tilde{\nu}, \quad (\gamma^{0,5\dagger} = \gamma^{0,5}, \gamma^\dagger = -\gamma), \quad (57)$$

где, по условию (56), по крайней мере, $\tilde{\mu}$ и/или \tilde{c} могут быть всегда отличны от нуля. Параметру $\tilde{\mu}$, в соответствии с [20], [27] можно придать смысл перенормировки химического потенциала, чье "голое" значение, при $\tilde{\mu}_0 \propto \lambda I$, определяется (9). Это имеет место в случае (I), (II) или (IV) при $\lambda_V + \lambda_A = 0$, т.е. $\tilde{\mu}_0 \equiv 0$. Отметим, что неизбежность его появления уже в уравнениях движения (5), (9) связана с 4-ой степенью взаимодействия ферми-полей и с избранным способом регуляризации (20) коммутационных соотношений (4). Как и в нерелятивистском случае (20), (35), все параметры в (57) являются константами.

Лишь если позволяют условия (15), (56), можно попытаться определить $\tilde{\mathcal{M}}$, аналогично (35), по одночастичному спектру полного гамильтониана, например, из решения соответствующего уравнения Швингера-Дайсона [15], [16], или путем частичной операторной диагонализации *полного* гамильтониана (1) подходящим преобразованием Боголюбова [2]. Интерпретация возможной зависимости от импульса перенормированной массы m (и параметров \tilde{c}, \tilde{v}) вновь диктуется условием (15):

$$\tilde{\mathcal{M}} \mapsto \tilde{\mathcal{M}}(\mathbf{P}^\dagger \mathbf{P}), \quad m = m_0 + \tilde{m}, \quad \tilde{m} \Rightarrow \tilde{m}(\mathbf{k}^2) \mapsto \tilde{m}(\mathbf{P}^\dagger \mathbf{P}), \quad \text{и т.д.} \quad (58)$$

В отличие от нерелятивистской модели, соответствующие "токам" $S_\psi^A(x)$ (3) заряды, вообще говоря, не сохраняются. Это еще не гарантирует неявно предполагаемого отсутствия вкладов швингеровских членов [28] в формальных уравнениях (10)–(12). Однако, непротиворечивость отсутствия таких членов в коммутаторах (14) с соответствующими "токами" пробных (свободных) полей (52), (53) является проявлением самосогласованности предлагаемой процедуры линеаризации (12)–(54).

Решение линеаризованного канонического уравнения (5)

$$i\partial_t \Psi_\alpha^a(\mathbf{x}, t) = \left[\hat{\mathcal{E}}(\mathbf{P}) + \hat{V}_\psi(\mathbf{x}, t) \right] \Psi_\alpha^a(\mathbf{x}, t), \quad \Psi_\alpha^a(\mathbf{x}, 0) = \psi_\alpha^a(\mathbf{x}, 0), \quad (59)$$

может быть записано символически, аналогично формуле (39), в виде T-упорядоченной экспоненты при $T > t > 0$:

$$\Psi_\alpha^a(\mathbf{x}, T) = \mathbf{T} \left(\exp \left\{ -i \int_0^T d\eta \left[\hat{\mathcal{E}}(\mathbf{P}) + \hat{V}_\psi(\mathbf{x}, \eta) \right] \right\} \psi_\alpha^a(\mathbf{x}, 0) \right)_\alpha \equiv \quad (60)$$

$$\equiv \left(\int d^3y \mathcal{Y}_{(\psi)}(T, \mathbf{x}|\mathbf{y}, 0) \psi_\alpha^a(\mathbf{y}, 0) \right)_\alpha = \left(\int d^3y \mathcal{Y}_{(\psi)}(T, \mathbf{x}|\mathbf{y}, t) \Psi_\alpha^a(\mathbf{y}, t) \right)_\alpha \quad (61)$$

$$= \left(e^{-iT\hat{\mathcal{E}}(\mathbf{P})} \mathbf{T} \left(\exp \left\{ -i \int_0^T d\eta e^{i\eta\hat{\mathcal{E}}(\mathbf{P})} \hat{V}_\psi(\mathbf{x}, \eta) e^{-i\eta\hat{\mathcal{E}}(\mathbf{P})} \right\} \right) \psi_\alpha^a(\mathbf{x}, 0) \right)_\alpha, \quad (62)$$

где, при $T > 0$, можно, как и в нерелятивистском случае (39), вынести оператор $\psi_\alpha^a(\mathbf{x}, 0)$ из под знака T-произведения. В последнем выражении, при $\tilde{\mu}_0 \propto \lambda I$, можно "внутри" T-экспоненты снова заменить $\hat{\mathcal{E}}(\mathbf{P}) \mapsto \hat{\mathcal{E}}_0(\mathbf{P})$. Эту T-экспоненту следует сравнить со стандартным выражением для гейзенберговского поля через S-матрицу

в представлении асимптотических (*in, out*) полей или в представлении взаимодействия (*int*) [11], [12], [17]:

$$S_{[\psi^{ex}]} = \mathbf{T} \exp \left\{ -i \int_{-\infty}^{\infty} dt H_{I[\psi^{ex}]}(t) \right\}, \quad (63)$$

$$\Psi_\alpha(x) = S_{[\psi^{ex}]}^{-1} \mathbf{T} \left\{ \psi_\alpha^{ex}(x) S_{[\psi^{ex}]} \right\}, \quad ex = in, out, int. \quad (64)$$

Найденное представление (60) через физические поля (53) выгодно отличается от (64) тем, что, во первых, содержит вдвое меньшую степень полей в экспоненте, а во вторых, стоящий в экспоненте (60) оператор имеет ясный физический смысл: он играет роль эффективного бозонного внешнего поля, которым и может быть заменен в соответствующем приближении самосогласованного поля Хартри-Фока [2]. Действительно, решение в случае внешнего поля (2) получается из (60) заменой *всюду*

$$\hat{\mathcal{E}}(\mathbf{P}) \mapsto \hat{\mathcal{E}}_0(\mathbf{P}), \quad \hat{V}_\psi(x) \mapsto \tilde{V}_B(x), \quad (\text{и } \hat{E}(\mathbf{P}) \mapsto \hat{\mathcal{E}}_0(\mathbf{P}), \quad (65)$$

$$\text{для слабого поля}), \quad \text{то есть: } \mathcal{Y}_{(\psi)}(x_0, \mathbf{x}|\mathbf{y}, y_0) \mapsto \quad (66)$$

$$\mathcal{Y}_{\alpha\beta}^{ab(B)}(x|y) = \theta(x_0 - y_0) \Delta_{\alpha\beta}^{ab(\psi)}(x|y) \equiv \theta(x_0 - y_0) \left\{ \Psi_\alpha^a(x), \Psi_\beta^{\dagger b}(y) \right\},$$

есть функция распространения фермиона во внешнем поле $B^A(x)$ [29]. Согласно (8), (14) это поле будет лоренц-скаляром в случае (I) и псевдоскаляром в случае (II), а в случаях (III), (IV), как показано ниже, эффективно сводится к 4-х вектору, и/или к 4-х псевдовектору.

3 Представления континуальным интегралом

Следующей задачей является "распутывание", на сколько это возможно, T-экспоненты (60) с целью дальнейшего ее приведения к нормальной форме. Эффективным средством достижения обеих этих целей являются континуальные интегралы по траекториям [18]. Поэтому, далее здесь предпринята попытка путем развития идей, заложенных в работах [31]–[35], в частности, при вычислении, евклидовского пропагатора фермиона во внешнем поле, получить непосредственно гейзенберговский оператор ферми-поля в пространстве Минковского, в духе подхода [36].

Символ T-упорядочивания в (60) подразумевает как упорядочивание действия операторов \mathbf{P} и $\mathbf{X} = \mathbf{x}$, так и произведения полевых операторов $\psi(\mathbf{x}, \eta)$, а также произведения матриц $\hat{\alpha}, \gamma^0, \hat{O}^A$: $\mathbf{T} = \mathbf{T}_x \mathbf{T}_\tau \mathbf{T}_\psi$. Записав его при $\tau = T/N$ с помощью формулы Троттера в виде предела:

$$\mathcal{Y}_{(\psi)}(T, \mathbf{x}|\mathbf{y}, 0) = \langle \mathbf{x} | \mathbf{T} \left(\exp \left\{ -i \int_0^T d\eta \left[\hat{\mathcal{E}}(\mathbf{P}) + \hat{V}_\psi(\mathbf{X}, \eta) \right] \right\} \right) | \mathbf{y} \rangle = \quad (67)$$

$$(\text{при } T > t > 0) = \int d^3z \mathcal{Y}_{(\psi)}(T, \mathbf{x}|\mathbf{z}, t) \mathcal{Y}_{(\psi)}(t, \mathbf{z}|\mathbf{y}, 0) = (\dots) = \quad (68)$$

$$\langle \mathbf{x} | \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=N}^1 \left\{ \mathbf{I}_{x_n} \exp \left[-i\tau \hat{\mathcal{E}}(\mathbf{P}) \right] \mathbf{I}_{p_n} \exp \left[-i\tau \hat{V}_\psi(\mathbf{X}, (n-1)\tau) \right] \right\} | \mathbf{y} \rangle,$$

где $x_N = x$, $x_0 = y$, а порядку сомножителей "слева на право" отвечает порядок "снизу вверх", вставляя в каждую n -ую фигурную скобку полные системы состояний

$$I_{x_n} = \int d^3 x_n |x_n\rangle \langle x_n| = I_{p_n} = \int d^3 p_n |p_n\rangle \langle p_n|, \text{ и полагая при } N \rightarrow \infty: p_n = p(n\tau), x_n = x(n\tau), x_n - x_{n-1} \approx \dot{x}(n\tau)\tau, \eta = n\tau, \quad (69)$$

придем к интегралу по траекториям:

$$\mathcal{Y}_{(\psi)}(T, x|y, 0) = \int_{x(0)=y}^{x(T)=x} \mathcal{D}x(\eta) \int \mathcal{D}p(\eta) \exp \left\{ i \int_0^T d\eta (p(\eta) \cdot \dot{x}(\eta)) \right\} \cdot \mathbf{T}_\gamma \mathbf{T}_\psi \left(\exp \left\{ -i \int_0^T d\eta \left[\hat{\mathcal{E}}(p(\eta)) + \hat{V}_\psi(x(\eta), \eta) \right] \right\} \right), \quad (70)$$

$$\text{с мерой: } \mathcal{D}x(\eta) \mathcal{D}p(\eta) = \prod_{\eta=T}^0 \frac{d^3 x(\eta) d^3 p(\eta)}{(2\pi)^3}, \quad (71)$$

$$\text{где: } \int_{x(0)=y}^{x(T)=x} \mathcal{D}x(\eta) = \int \mathcal{D}\dot{x}(\eta) \delta_3 \left(x - y - \int_0^T d\eta \dot{x}(\eta) \right). \quad (72)$$

Это представление однозначно [30], поскольку стоящий в экспоненте гамильтониан является суммой операторов, зависящих отдельно от P и X . Заметим, что таким же свойством обладает нерелятивистский 4-х фермионный гамильтониан (16).

3.1 Нерелятивистский случай

Поскольку в аналогичных формулах нерелятивистской модели (16) отсутствует символ матричного упорядочивания \mathbf{T}_γ , то из (39), вместо (70), для одночастичного спектра $E(k)$ (20) общего вида получаем²:

$$\mathcal{Y}_{(\psi)}(T, x|y, 0) = \int_{x(0)=y}^{x(T)=x} \mathcal{D}x(\eta) \mathcal{L}_E(T|0, [\dot{x}(\eta)]) \cdot \mathbf{T}_\psi \left(\exp \left\{ -i \frac{\lambda}{2} \int_0^T d\eta \left(\psi^\dagger(x(\eta), \eta) \psi(x(\eta), \eta) \right) \right\} \right), \text{ где:} \quad (73)$$

$$\mathcal{L}_E(T|t, [\dot{x}(\eta)]) = \int \mathcal{D}p(\eta) \exp \left\{ i \int_t^T d\eta \left[(p(\eta) \cdot \dot{x}(\eta)) - E(p(\eta)) \right] \right\} \dots \quad (74)$$

Отметим, что при $\lambda = 0$ это выражение, при $T = x_0 - y_0 > 0$, сводится, очевидно, к (запаздывающей) функции Грина (26), (31):

$$\mathcal{Y}_{(\psi)}^{(0)}(x_0, x|y, y_0) = \int_{x(y_0)=y}^{x(x_0)=x} \mathcal{D}x(\eta) \mathcal{L}_E(x_0|y_0, [\dot{x}(\eta)]) = \quad (75)$$

²В этом пункте временно снова ψ - двухкомпонентные спинорные поля.

$$= \theta(T) \langle x | e^{-iTE(\mathbf{P})} | y \rangle = \theta(T) \Delta_{(\psi)}(x - y; T) = (\text{при } x_0 > z_0 > y_0) \\ = \Delta_{(\psi)}^{(R)}(x - y) = \int d^3 z \Delta_{(\psi)}^{(R)}(x - z) \Delta_{(\psi)}^{(R)}(z - y), \quad (76)$$

а в силу запаздывания в (30), для любого t -локального оператора \mathcal{K} :

$$\det [\mathbf{I} - \mathcal{K} \Delta_{(\psi)}^{(C)}] \implies \det [\mathbf{I} - \mathcal{K} \Delta_{(\psi)}^{(R)}] = 1. \quad (77)$$

Тогда квадратичность по ферми-полям функционала (73) позволяет, путем применения к нему Виковской операции приведения (96)–(106) (ниже), получить его нормальный символ [18], в виде (\mathbf{N}_ψ означает нормальную форму по полям ψ):

$$\mathcal{Y}_{(\psi)}(T, x|y, 0) = \int_{x(0)=y}^{x(T)=x} \mathcal{D}x(\eta) \mathcal{L}_E(T|0, [\dot{x}(\eta)]) \cdot \mathbf{N}_\psi \left(\exp \left\{ \int_0^T dt \int_0^t d\xi \left(\psi^\dagger(x(t), t) \mathcal{I}_{[x(\eta)]}(t|\xi) \psi(x(\xi), \xi) \right) \right\} \right), \text{ где:} \quad (78)$$

$$\mathcal{I}_{[x(\eta)]}(t|\xi) = -i \frac{\lambda}{2} \delta(t - \xi) - i \frac{\lambda}{2} \int_\xi^t d\tau \Delta_{(\psi)}(x(t) - x(\tau); t - \tau) \mathcal{I}_{[x(\eta)]}(\tau|\xi). \quad (79)$$

Последнюю величину можно интерпретировать, как "гребенку" полной "амплитуды рассеяния" на "внешнем поле" $\lambda/2$ при движении по заданной траектории $x(\eta)$ между моментами времени ξ и t . Представления (75), (76) и (78) позволяют убедиться, что одномерное уравнение (79) порождает всю бесконечную систему уравнений для коэффициентных функций динамического отображения (43).

Начнем с воспроизведения решения [21] для первой коэффициентной функции $Y^{(1)}$. Воспользовавшись свойствами (68), (75), (76) функциональных интегралов и наличием определенного временного упорядочения $T > t > \xi > 0$, при сравнении с формулой (28) второго члена разложения экспоненты (78) в импульсном представлении полей (22), (23) получаем:

$$Y^{(1)}(T; k, q|p, l) = \langle k + q | \int_0^T dt e^{itE_q^{\mathbf{P}}} \int_0^t d\xi \mathcal{R}(t|\xi) e^{-i\xi E_p^{\mathbf{P}}} | l + p \rangle, \quad (80)$$

$$\langle z | \mathcal{R}(t|\xi) | \zeta \rangle = \int_{x(\xi)=\zeta}^{x(t)=z} \mathcal{D}x(\eta) \mathcal{L}_E(t|\xi, [\dot{x}(\eta)]) \frac{\mathcal{I}_{[x(\eta)]}(t|\xi)}{(2\pi)^3}. \quad (81)$$

Из уравнения (79) для величины $\mathcal{I}_{[x(\eta)]}(t|\xi)$ очевидны как наличие трансляционной инвариантности по функциональной переменной $[x(\eta)]$, так и отсутствие таковой по временным переменным t, ξ , поскольку $\mathcal{I}_{[x(\eta)]}(t|\xi)$ не является "полноценным" матричным элементом какого либо оператора. В тоже время, матричный элемент (81) инвариантен по отношению к обеим трансляциям, т.е. зависит только от разностей $(z - \zeta)$ и $(t - \xi)$. Следовательно, оператор $\mathcal{R}(t|\xi)$ является функцией только

от одного оператора импульса $\mathbf{P} \mapsto \mathcal{P}$ и подчиняется вытекающему из (75) и (79), (81) уравнению:

$$\mathcal{R}(t|\xi) = \frac{-i\lambda}{2(2\pi)^3} \delta(t-\xi) - \frac{i\lambda}{2} \int_{\xi}^t d\eta \mathcal{F}(\mathbf{P}; t-\eta) \mathcal{R}(\eta|\xi) = \mathcal{R}(t-\xi), \quad (82)$$

$$[\Delta_{(\psi)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}; T)]^2 = \langle \mathbf{x} | \mathcal{F}(\mathbf{P}; T) | \mathbf{y} \rangle = \int \frac{d^3\mathcal{P}}{(2\pi)^3} e^{i\mathcal{P}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \mathcal{F}(\mathcal{P}; T), \quad (83)$$

$$\mathcal{F}(\mathbf{P}; T) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{-iT[E(\mathbf{q})+E(\mathbf{P}-\mathbf{q})]} \equiv \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{-iT E_{\mathbf{q}}^{\mathbf{P}}}, \quad (84)$$

которое немедленно решается преобразованием Лапласа:

$$\mathcal{R}(t) = \frac{-\lambda}{2(2\pi)^4} \int_{-i\infty+\Delta\epsilon(t)}^{i\infty+\Delta\epsilon(t)} d\sigma \frac{e^{\sigma t}}{(1+\lambda J_0^{\mathbf{P}}(\sigma))}, \quad \text{где: } \epsilon(t) = \text{sign}(t), \quad (85)$$

$$J_0^{\mathbf{P}}(\sigma) = \frac{i}{2} \int_0^{\infty} dt e^{-\sigma t} \mathcal{F}(\mathbf{P}; t) = \frac{1}{2} \int \frac{d^3\kappa}{(2\pi)^3} \frac{1}{[E_{\kappa}^{\mathbf{P}} - i\sigma]}, \quad (86)$$

в согласии с [21]. Таким образом, при функциональном усреднении в (81) "гребенка" (79) "амплитуды рассеяния" на внешнем поле одной частицы с заданной траекторией превращается в цепочку петлевых диаграмм (83), (86) для амплитуды двухчастичного рассеяния реальных частиц со взаимодействием типа $\lambda\delta_3(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$ [24], подчиняющейся уже уравнению (82) типа Дайсона. Вычисляя в (80) интеграл по ξ и учитывая расположение особенностей в (85) в плоскости σ , можно получить решение непосредственно в операторном виде:

$$Y_A^{(1)}(T; \mathbf{k}, \mathbf{q} | \mathbf{p}, 1) = \langle \mathbf{k} + \mathbf{q} | \mathbf{Y}^{\mathbf{P}}(T; \mathbf{q} | \mathbf{p}) | 1 + \mathbf{p} \rangle, \quad (87)$$

$$\mathbf{Y}^{\mathbf{P}}(T; \mathbf{q} | \mathbf{p}) = \int_0^T dt e^{itE_{\mathbf{q}}^{\mathbf{P}}} \frac{\epsilon(t)}{2(2\pi)^4} \int_{-i\infty+\Delta\epsilon(t)}^{i\infty+\Delta\epsilon(t)} d\sigma \frac{e^{t\sigma}}{(\sigma + iE_{\mathbf{p}}^{\mathbf{P}}) (1 + \lambda J_0^{\mathbf{P}}(\sigma))}, \quad (-\lambda)$$

где $\epsilon(t) = \epsilon(T)$. Подчеркнем, что это решение было получено ранее в [21] без использования линеаризации ГУ.

Для проверки системы уравнений (43), с учетом (22), введем зависящий от траектории $\mathbf{x}(\eta)$ функционал $\mathcal{W}(T, \mathbf{q} | \mathbf{p}, [\mathbf{x}(\eta)])$, положив в (78):

$$\mathcal{W}(T, \mathbf{q} | \mathbf{p}, [\mathbf{x}(\eta)]) = \int_0^T dt \int_0^t d\xi e^{itE(\mathbf{q})-i\mathbf{q}\mathbf{x}(t)} \frac{\mathcal{I}_{[\mathbf{x}(\eta)]}(t|\xi)}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}(\xi)-i\xi E(\mathbf{p})} = \quad (88)$$

$$= \frac{-i\lambda}{2(2\pi)^3} \int_0^T dt \int d^3s e^{it[E(\mathbf{q})-E(\mathbf{s})]-i(\mathbf{q}-\mathbf{s})\mathbf{x}(t)} \left[\delta_3(\mathbf{s}-\mathbf{p}) + \mathcal{W}(t, \mathbf{s} | \mathbf{p}, [\mathbf{x}(\eta)]) \right]. \quad (89)$$

Заметим, теперь, что произведение фермионных операторов в каждом слагаемом динамического отображения (28) является в точности нормальной формой для n -ой

степени произведений $A^\dagger A$, коммутирующих между собой под символом N_ψ (т.к. для (22) $N_\psi = N_A$):

$$N_A \prod_{j=1}^n \left\{ A_{\beta_j}^\dagger(\mathbf{q}_j) A_{\beta_j}(\mathbf{p}_j) \right\} = \prod_{j=1}^n \left\{ A_{\beta_j}^\dagger(\mathbf{q}_j) \right\} \prod_{j=n}^1 \left\{ A_{\beta_j}(\mathbf{p}_j) \right\} \quad (90)$$

Тогда разложение экспоненты в (78) дает следующее выражение для n -ой коэффициентной функции:

$$Y_A^{(n)}(T; \mathbf{k}; \{\mathbf{q}_j\}_1^n | \{\mathbf{p}_j\}_n^1; 1) = e^{iTE(\mathbf{k})} \int d^3\mathbf{x} \int d^3\mathbf{y} \langle \mathbf{k} | \mathbf{x} \rangle \cdot \quad (91)$$

$$\int_{\mathbf{x}(0)=\mathbf{y}}^{\mathbf{x}(T)=\mathbf{x}} \mathcal{D}\mathbf{x}(\eta) \mathcal{L}_E(T|0, [\dot{\mathbf{x}}(\eta)]) \frac{1}{n!} \prod_{j=1}^n \left\{ \mathcal{W}(T, \mathbf{q}_j | \mathbf{p}_j, [\mathbf{x}(\eta)]) \right\} \langle \mathbf{y} | 1 \rangle.$$

Дифференцирование этого выражения по T немедленно приводит к уравнению (43) в дифференциальной по времени форме, если учесть, что, также как и в случае $Y^{(0)}$ и $Y^{(1)}$, зависимость от времени T за счет первых двух факторов взаимно компенсируется в функциональном интеграле, и дифференцировать необходимо только произведение:

$$\frac{d}{dT} \prod_{j=1}^n \left\{ \mathcal{W}(T, (j)) \right\} = \sum_{\nu=1}^n \prod_{1=j \neq \nu}^n \left\{ \mathcal{W}(T, (j)) \right\} \frac{d}{dT} \mathcal{W}(T, (\nu)).$$

Подставив сюда производную из уравнения (89), для вычисления интеграла по $d^3\mathbf{x}$ достаточно в функциональный интеграл, как в матричный элемент (67), вставить единицу в виде:

$$\langle \mathbf{x} | \mathcal{O} = \int d^3\kappa e^{-iTE(\kappa)} \langle \mathbf{x} | \kappa \rangle e^{iTE(\kappa)} \int d^3z \langle \kappa | z \rangle \langle z | \mathcal{O},$$

а затем вновь воспользоваться определениями (91) и (42). Точно таким же путем проверяется, что уравнению (46) удовлетворяет производящий функционал:

$$\mathcal{Z}(T; \mathbf{k}, 1, [\phi]) = e^{iTE(\mathbf{k})} \int d^3\mathbf{x} \int d^3\mathbf{y} \langle \mathbf{k} | \mathbf{x} \rangle \int_{\mathbf{x}(0)=\mathbf{y}}^{\mathbf{x}(T)=\mathbf{x}} \mathcal{D}\mathbf{x}(\eta) \cdot \quad (92)$$

$$\cdot \mathcal{L}_E(T|0, [\dot{\mathbf{x}}(\eta)]) \exp \left\{ \int d^3q \int d^3p \phi(\mathbf{q} | \mathbf{p}) \mathcal{W}(T, \mathbf{q} | \mathbf{p}, [\mathbf{x}(\eta)]) \right\} \langle \mathbf{y} | 1 \rangle.$$

Выделение дельта-функции закона сохранения импульса, вполне очевидное в (87), нетрудно осуществить и для остальных коэффициентных функций $Y^{(n)}$ с $n > 1$. Например, вставляя в функциональный интеграл (91) (умножая его на) единицу [18]:

$$1 = \frac{1}{T} \int_0^T d\tau \int d^3a \delta_3(\mathbf{x}(\tau) - \mathbf{a}), \quad (93)$$

а затем сдвигая переменные $x(\eta) \rightarrow x(\eta) + a$ и то же для x, y , с учетом явного вида (88) и указанных выше трансляционных свойств всех входящих величин, вычислением интеграла по d^3a получаем:

$$Y_A^{(n)}(T; k; \{q_j\}_1^n | \{p_j\}_1^n; 1) = (2\pi)^3 \delta_3 \left(k - 1 + \sum_{j=1}^n (q_j - p_j) \right) \cdot \quad (94)$$

$$\cdot e^{iTE(k)} \int d^3x \int d^3y \langle k|x \rangle \frac{1}{T} \int_0^T d\tau \cdot$$

$$\cdot \int_{x(0)=y}^{x(T)=x} \mathcal{D}x(\eta) \delta_3(x(\tau)) \mathcal{L}_E(T|0, [\dot{x}(\eta)]) \frac{1}{n!} \prod_{j=1}^n \left\{ \mathcal{W}(T, q_j | p_j, [x(\eta)]) \right\} \langle y|1 \rangle.$$

Или, выделяя в (91) среднюю точку: $x = r + h/2, y = r - h/2$, тем же путем находим:

$$Y_A^{(n)}(T; k; \{q_j\}_1^n | \{p_j\}_1^n; 1) = \delta_3 \left(k - 1 + \sum_{j=1}^n (q_j - p_j) \right) \cdot \quad (95)$$

$$\cdot e^{iTE(k)} \int d^3h \exp \left\{ -\frac{i}{2}(k-1)h \right\} \cdot$$

$$\cdot \int_{x(0)=-h}^{x(T)=h} \mathcal{D}x(\eta) \mathcal{L}_E(T|0, [\dot{x}(\eta)]) \frac{1}{n!} \prod_{j=1}^n \left\{ \mathcal{W}(T, q_j | p_j, [x(\eta)]) \right\}.$$

3.2 Релятивистский случай

Прежде всего, напомним основные этапы операции T_ψ приведения к нормальной форме хронологического произведения для экспоненты от квадратичного функционала [17], [18]. Так как для любого функционала $F[\psi]$ (I-единичный оператор):

$$T_\psi F[\psi] = N_\psi \left(\exp \left[\int d^4z \int d^4\zeta \frac{\delta}{\delta \phi_\alpha^a(z)} \Delta_{\gamma\gamma'}^{(C)ab}(z|\zeta) \frac{\delta}{\delta \phi_\beta^b(\zeta)} F[\phi] \Big|_{\phi_\alpha^a = \psi_\alpha^a, \phi_\beta^b = \psi_\beta^b} \right] \right), \quad (96)$$

$$\text{то тогда: } T_\psi \left(\exp \left[\int d^4x \int d^4y \psi_\alpha^a(x) \mathcal{K}_{\alpha\beta}^{ab}(x|y) \psi_\beta^b(y) \right] \right) = \quad (97)$$

$$= \det [I - \mathcal{K} \Delta_{(\psi)}^{(C)}] N_\psi \left(\exp \left[\int d^4x \int d^4y \psi_\alpha^a(x) T_{\alpha\beta}^{ab}(x|y) \psi_\beta^b(y) \right] \right),$$

где пропагаторы и перестановочные функции распространения типа (26), (31) для пробных полей ψ (52), (53), а также ядра операторов определены, с учетом (115) (ниже), соответственно, как:

$$\Delta_{(\psi)\hat{E}}^{(R)}(x|y) = \theta(x_0 - y_0) \Delta_{(\psi)\hat{E}}(x|y) = \int_{x(y_0)=y}^{x(x_0)=x} \mathcal{D}x(\eta) \hat{\mathcal{L}}_{\hat{E}}(x_0|y_0, [\dot{x}(\eta)]), \quad (98)$$

$$\Delta_{\gamma\gamma'(\psi)\hat{E}}^{ab}(x|y) = \{ \psi_\gamma^a(x), \psi_{\gamma'}^b(y) \} = \Delta_{\gamma\gamma'(\psi)\hat{E}}^{(-)ab}(x|y) + \Delta_{\gamma\gamma'(\psi)\hat{E}}^{(+)ab}(x|y) = \quad (99)$$

$$= \delta^{ab} \left(e^{-i(x_0-y_0)\hat{E}(\mathbf{P}_x)} \right)_{\gamma\gamma'} \delta_3(x-y) = \delta^{ab} \langle x | \left(e^{-i(x_0-y_0)\hat{E}(\mathbf{P})} \right)_{\gamma\gamma'} | y \rangle; \quad (100)$$

$$\Delta_{\gamma\gamma'(\psi)\hat{E}}^{(C)ab}(x|y) \equiv \langle \gamma, a, x | \Delta_{(\psi)}^{(C)} | y, b, \gamma' \rangle = \langle 0 | T(\psi_\gamma^a(x) \psi_{\gamma'}^b(y)) | 0 \rangle = \quad (101)$$

$$= T(\psi_\gamma^a(x) \psi_{\gamma'}^b(y)) - N(\psi_\gamma^a(x) \psi_{\gamma'}^b(y)) = \Delta_{\gamma\gamma'(\psi)\hat{E}}^{(R)ab}(x|y) - \Delta_{\gamma\gamma'(\psi)\hat{E}}^{(+)ab}(x|y); \quad (102)$$

$$\mathcal{K}_{\alpha\beta}^{ab}(x|y) = \langle \alpha, a, x | \mathcal{K} | y, b, \beta \rangle, \quad T_{\alpha\beta}^{ab}(x|y) = \langle \alpha, a, x | T | y, b, \beta \rangle; \quad (103)$$

$$T = \mathcal{K} + \mathcal{K} \Delta_{(\psi)}^{(C)} T = [I - \mathcal{K} \Delta_{(\psi)}^{(C)}]^{-1} \mathcal{K} = \mathcal{K} + T \Delta_{(\psi)}^{(C)} \mathcal{K} = \quad (104)$$

$$= \mathcal{K} [I - \Delta_{(\psi)}^{(C)} \mathcal{K}]^{-1} = \mathcal{K} + \mathcal{N} \mathcal{K} (\det [I - \mathcal{K} \Delta_{(\psi)}^{(C)}])^{-1}, \quad (105)$$

$$\det [I - \mathcal{K} \Delta_{(\psi)}^{(C)}] = \exp \{ \text{Tr} (\ln [I - \mathcal{K} \Delta_{(\psi)}^{(C)}]) \}, \quad (106)$$

и где \mathcal{N} и $\det [I - \mathcal{K} \Delta_{(\psi)}^{(C)}]$, соответственно, минор Фредгольма и определитель Фредгольма для оператора $I - \mathcal{K} \Delta_{(\psi)}^{(C)}$. Ограничиваясь далее константной перенормировочной параметризацией (57) с $\tilde{\nu} = 0$, ее можно выбрать так, чтобы иметь в (100) обычный дираковский спектр, тогда, если I -единичная матрица, то из [17], [13], при $(\gamma\partial) = \gamma^\nu \partial_\nu = \gamma^0 \partial_{x^0} + \gamma \nabla_x, \varrho = (x-y)^2$:

$$\hat{E}(\mathbf{P}) = (\hat{\alpha} \cdot \mathbf{P}) + \gamma^0 m, \quad \omega(\mathbf{k}) = +\sqrt{k^2 + m^2}, \quad T = x_0 - y_0, \quad (107)$$

$$e^{-iT\hat{E}(\mathbf{P}_x)} e^{ikx} = \left(I \cos(T\omega(\mathbf{k})) - i\hat{E}(\mathbf{k}) \frac{\sin(T\omega(\mathbf{k}))}{\omega(\mathbf{k})} \right) e^{ikx} = \quad (108)$$

$$= (I\partial_{x^0} - i\hat{E}(\mathbf{P}_x)) \frac{\sin(T\omega(\mathbf{k}))}{\omega(\mathbf{k})} e^{ikx} = \frac{1}{i} (i(\gamma\partial) + m) \gamma^0 \frac{\sin(T\omega(\mathbf{k}))}{\omega(\mathbf{k})} e^{ikx},$$

$$\Delta_{\alpha\beta(\psi)\hat{E}}^{ab}(x-y) = \delta^{ab} [I\partial_{x^0} - i\hat{E}(\mathbf{P}_x)]_{\alpha\beta} D_m(x-y), \quad (109)$$

$$D_m(x-y) = \frac{\varepsilon(x_0 - y_0)}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left[\theta(\varrho) J_0(m\sqrt{\varrho}) \right], \quad D_0(x-y) = \frac{\varepsilon(x_0 - y_0)}{2\pi} \delta(\varrho), \quad (110)$$

$$\Delta_{\alpha\beta(\psi)\hat{E}}^{(C)ab}(x-y) = \delta^{ab} [I\partial_{x^0} - i\hat{E}(\mathbf{P}_x)]_{\alpha\beta} D_m^{(C)}(x-y), \quad (111)$$

$$D_m^{(C)}(x-y) = \frac{i}{2\pi^2} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(K_0(m\sqrt{i\varepsilon - \varrho}) \right), \quad D_0^{(C)}(x-y) = \frac{i}{(2\pi)^2} \frac{1}{(i\varepsilon - \varrho)},$$

где $J_n(z), K_n(z)$ - функции Бесселя и Макдональда соответственно.

Покажем теперь, что в случаях (III) и (IV) в выражении (70) можно "расцепить" T_ψ и T_γ , воспользовавшись, фактически, тем, что в процессе приведения к нормальной форме (97), ферми-поля ψ_α в (96) заменяются грассмановыми величинами ϕ_α . Соответственно, ферми-четные комбинации, например, в случае (III) (где для простоты $c_A = 0$) вида

$$\mathcal{B}_{(\phi)}^\nu(x, t) = \lambda \epsilon^\nu \left(\bar{\phi}(x, t) (\gamma^\epsilon) \phi(x, t) \right), \quad \text{где: } \bar{\phi} = \phi^* \gamma^0, \quad (\gamma^\epsilon) = \gamma^\nu \epsilon_\nu, \quad (112)$$

становятся обычными c -числами. Сдвигая тогда в (70) переменную интегрирования:

$$p(\eta) \rightarrow p(\eta) + \mathcal{B}_{(\phi)}(x(\eta), \eta), \quad \text{при } u(\eta) \equiv (u(\eta), u_0(\eta)) = (\dot{x}(\eta), 1), \quad (113)$$

$$\text{получаем: } \mathcal{Y}_{(\psi)}(T, x|y, 0) = \int_{x(0)=y}^{x(T)=x} \mathcal{D}x(\eta) \hat{\mathcal{L}}_{\hat{E}}(T|0, [\dot{x}(\eta)]) \cdot \quad (114)$$

$\cdot \mathbf{T}_\psi \left(\exp \left\{ -i \int_0^T d\eta \left(u(\eta) \mathcal{B}_{(\psi)}(\mathbf{x}(\eta), \eta) \right) \right\} \right)$, где:

$$\widehat{\mathcal{L}}_{\widehat{\mathcal{E}}}(T|t, [\dot{\mathbf{x}}(\eta)]) = \int \mathcal{D}\mathbf{p}(\eta) \mathbf{T}_\gamma \exp \left\{ i \int_t^T d\eta \left[\left(\mathbf{p}(\eta) \cdot \dot{\mathbf{x}}(\eta) \right) - \widehat{\mathcal{E}}(\mathbf{p}(\eta)) \right] \right\}, \quad (115)$$

аналогично (74). Однако, на этом аналогия заканчивается, и, поскольку причинный пропагатор (101), (102) более не является запаздывающим, из (97), вместо (78), (79), при $x(\eta) = (\mathbf{x}(\eta), \eta)$, $\dot{x}(\eta) = u(\eta)$,

$$\widehat{\mathcal{T}}_{[\mathbf{x}(\eta)]}(x|y) = \delta_3(\mathbf{x} - \mathbf{x}(x_0)) \widehat{\mathcal{I}}_{[\mathbf{x}(\eta)]}(x_0|y_0) \delta_3(\mathbf{y} - \mathbf{x}(y_0)), \quad (116)$$

$$\mathcal{K}_{[\mathbf{x}(\eta)]}(x|y) = \delta_3(\mathbf{x} - \mathbf{x}(x_0)) \widehat{\mathcal{I}}_{[\mathbf{x}(\eta)]}^0(x_0|y_0) \delta_3(\mathbf{y} - \mathbf{x}(y_0)), \quad (117)$$

$$\widehat{\mathcal{I}}_{[\mathbf{x}(\eta)]}^0(t|\xi) = -i\lambda(u(t)\epsilon)\gamma^0(\gamma\epsilon)\delta(t-\xi), \text{ получаем:} \quad (118)$$

$$\mathcal{Y}_{(\psi)}(T, \mathbf{x}|\mathbf{y}, 0) = \int_{\mathbf{x}(0)=\mathbf{y}}^{\mathbf{x}(T)=\mathbf{x}} \mathcal{D}\mathbf{x}(\eta) \widehat{\mathcal{L}}_{\widehat{\mathcal{E}}}(T|0, [\dot{\mathbf{x}}(\eta)]) \det [\mathbf{I} - \mathcal{K}_{[\mathbf{x}(\eta)]} \Delta_{(\psi)}^{(C)}]. \quad (119)$$

$\cdot \mathbf{N}_\psi \left(\exp \left\{ \int_0^T dt \int_0^T d\xi \left(\psi^\dagger(x(t)) \widehat{\mathcal{I}}_{[\mathbf{x}(\eta)]}(t|\xi) \psi(x(\xi)) \right) \right\} \right)$, где:

$$\widehat{\mathcal{I}}_{[\mathbf{x}(\eta)]}(t|\xi) = \widehat{\mathcal{I}}_{[\mathbf{x}(\eta)]}^0(t|\xi) + \int_0^T d\tau \int_0^T d\eta \widehat{\mathcal{I}}_{[\mathbf{x}(\eta)]}^0(t|\tau) \Delta_{(\psi)}^{(C)}(x(\tau)|x(\eta)) \widehat{\mathcal{I}}_{[\mathbf{x}(\eta)]}(\eta|\xi). \quad (120)$$

Здесь, фактически, вновь имеем дело с одномерным, но уже фредгольмовским оператором с несимметричным функциональным матричным ядром

$$\langle t|\widehat{\mathcal{Z}}|\xi \rangle = \widehat{\mathcal{Z}}(t|\xi) = -i\lambda \Delta_{(\psi)\widehat{\mathcal{E}}}^{(C)}(x(t) - x(\xi)) \gamma^0(\gamma\epsilon)(u(\xi)\epsilon), \quad (121)$$

$$\widehat{\mathcal{I}}_{[\mathbf{x}(\eta)]}(t|\xi) = \widehat{\mathcal{I}}_{[\mathbf{x}(\eta)]}^0(t|\xi) + \int_0^T d\tau \widehat{\mathcal{I}}_{[\mathbf{x}(\eta)]}(t|\tau) \widehat{\mathcal{Z}}(\tau|\xi). \quad (122)$$

$$\text{Tr} \{ \widehat{\mathcal{Z}} \} = -i\lambda \left((x(T) - x(0))\epsilon \right) \text{Sp} \left(\Delta_{(\psi)\widehat{\mathcal{E}}}^{(C)}(0) \gamma^0(\gamma\epsilon) \right) = 0, \text{ тогда:} \quad (123)$$

$$\det [\mathbf{I} - \mathcal{K}_{[\mathbf{x}(\eta)]} \Delta_{(\psi)}^{(C)}] = \det [\mathbf{I} - \Delta_{(\psi)}^{(C)} \mathcal{K}_{[\mathbf{x}(\eta)]}] \implies \det [\mathbf{I} - \widehat{\mathcal{Z}}] = \quad (124)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \prod_{j=1}^n \left\{ \int_0^T d\xi_j \right\} \det_{(n)} [\widehat{\mathcal{Z}}_{\alpha_k \alpha_l}(\xi_k|\xi_l)] = \quad (125)$$

$$= e^{-\text{Tr} \{ \widehat{\mathcal{Z}} \}} \det [\mathbf{I} - \mathcal{K}_{[\mathbf{x}(\eta)]} \Delta_{(\psi)}^{(C)}] \implies \quad (126)$$

$$\implies \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \prod_{j=1}^n \left\{ \int_0^{\xi_{j-1}} d\xi_j \right\} \det_{(n)} [\widehat{\mathcal{Z}}_{\alpha_k \alpha_l}(\xi_k|\xi_l)],$$

где $\xi_0 = T$, использована симметрия детерминантов n -ого порядка при произвольной, но одноименной перестановке и строк и столбцов, а тильда в последних равенствах означает, что, в соответствии с (106) и (123), его диагональные элементы вида

$\widehat{\mathcal{Z}}_{\alpha\alpha}(\xi|\xi)$ заменены нулями. С помощью соотношений (98) и (115) вычисление первого члена разложения экспоненты в (119),

$$\mathcal{Y}_{(\psi)}^{(0)}(T, \mathbf{x}|\mathbf{y}, 0) = \int_{\mathbf{x}(0)=\mathbf{y}}^{\mathbf{x}(T)=\mathbf{x}} \mathcal{D}\mathbf{x}(\eta) \widehat{\mathcal{L}}_{\widehat{\mathcal{E}}}(T|0, [\dot{\mathbf{x}}(\eta)]) \det [\mathbf{I} - \widehat{\mathcal{Z}}], \quad (127)$$

сводится, в итоге, к интегрированию лишь по набору причинно упорядоченных траекторий $\mathbf{x}(\xi_j) \mapsto \mathbf{x}_j$, $x_j = (\mathbf{x}_j, \xi_j)$, $x_0 = (\mathbf{x}, T)$:

$$\mathcal{Y}_{(\psi)}^{(0)}(T, \mathbf{x}|\mathbf{y}, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \prod_{j=1}^n \left\{ \int d^3x_j \int_0^{\xi_{j-1}} d\xi_j \Delta_{\widehat{\mathcal{E}}}(x_{j-1}|x_j) \right\} \cdot \Delta_{\widehat{\mathcal{E}}}(x_n|\mathbf{y}) \det_{(n)} [\widehat{\mathcal{Z}}_{\alpha_k \alpha_l}(\xi_k|\xi_l)], \quad (128)$$

где, поэтому, в том числе и причинные пропагаторы в $\widehat{\mathcal{Z}}_{\alpha_k \alpha_l}(\xi_k|\xi_l)$ заменятся соответствующими частотными частями (99), отвечающими, как и в нерелятивистском случае, распространению реальных частиц, находящихся на массовых поверхностях, вообще говоря, различных, если $\widehat{\mathcal{E}} \neq \widehat{E}$. Используя (105) и аналогичное (125) выражение для \mathcal{N} через сумму определителей, можно таким же путем привести к "причинному" виду и второй член разложения экспоненты в (119):

$$\mathcal{Y}_{(\psi)}^{(1)}(T, \mathbf{x}|\mathbf{y}, 0) = \int_{\mathbf{x}(0)=\mathbf{y}}^{\mathbf{x}(T)=\mathbf{x}} \mathcal{D}\mathbf{x}(\eta) \widehat{\mathcal{L}}_{\widehat{\mathcal{E}}}(T|0, [\dot{\mathbf{x}}(\eta)]) \det [\mathbf{I} - \widehat{\mathcal{Z}}]. \quad (129)$$

$$\cdot \mathbf{N}_\psi \left\{ \int_0^T dt \int_0^T d\xi \left(\psi^\dagger(x(t)) \widehat{\mathcal{I}}_{[\mathbf{x}(\eta)]}(t|\xi) \psi(x(\xi)) \right) \right\} =$$

$$\text{при } \mathbf{x}(\xi_j) \mapsto \mathbf{x}_j, \quad x_j = (\mathbf{x}_j, \xi_j), \quad x_0 = (\mathbf{x}, T),$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\prod_{j=1}^{n+1} \left\{ \int d^3x_j \int_0^{\xi_{j-1}} d\xi_j \Delta_{\widehat{\mathcal{E}}}(x_{j-1}|x_j) \right\} \Delta_{\widehat{\mathcal{E}}}(x_{n+1}|\mathbf{y}) \cdot \quad (130)$$

$$\cdot \sum_{k=1}^{n+1} \det_{(n)} [\widehat{\mathcal{Z}}_{\alpha_m \alpha_l}(\xi_m|\xi_l)] \Big|_{m,l \neq k} \mathbf{N}_\psi \left(\psi_{\alpha_k}^\dagger(x_k) \psi_{\alpha_k}(x_k) \right) +$$

$$+ \prod_{j=1}^{n+2} \left\{ \int d^3x_j \int_0^{\xi_{j-1}} d\xi_j \Delta_{\widehat{\mathcal{E}}}(x_{j-1}|x_j) \right\} \Delta_{\widehat{\mathcal{E}}}(x_{n+2}|\mathbf{y}) \cdot$$

$$\cdot \sum_{r=1}^{n+2} \sum_{l \neq r}^{n+2} \det_{(n+1)} [\widehat{\mathcal{Z}}_{\alpha_m \alpha_l}(\xi_m|\xi_l)] \Big|_{l \neq r}^{m \neq k} \mathbf{N}_\psi \left(\psi_{\alpha_r}^\dagger(x_r) \psi_{\alpha_k}(x_k) \right),$$

где вновь использована симметрия детерминантов. Таким образом, на уровне одно- и двухчастичных процессов прослеживается определенная связь предлагаемого подхода с методами Швингеровской теории источников [37]. Предел при $T \rightarrow \infty$ коэффициентных функций операторов $\mathcal{Y}_{(\psi)}^{(0),(1)}(T, \mathbf{x}|\mathbf{y}, 0)$ должен содержать информацию обо всех собственных состояниях одно- и двух-частичного сектора [21] (см. ниже, пункт 4).

3.3 Взаимодействие киральных фермионных полей

Как уже было замечено выше, в случае (IV), при $\lambda_V + \lambda_A = 0$, имеем $\hat{\mu}_0 = 0$. Тогда, при $m_0 = 0$ для оставшихся матриц $\hat{\alpha}^\nu = \gamma^0 \gamma^\nu$ и γ^5 можно выбрать блочно-диагональное спинорное представление (σ -матрицы Паули): $\hat{\alpha}^0 = I$,

$$\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & -\sigma \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \psi_\alpha^a(x) = \begin{pmatrix} \phi_+^a(x) \\ \phi_-^a(x) \end{pmatrix}, \quad (131)$$

$$\hat{E}(\mathbf{P}) = \hat{\mathcal{E}}(\mathbf{P}) = (\hat{\alpha} \cdot \mathbf{P}), \quad \Pi_\zeta = \frac{I + \zeta \gamma^5}{2}, \quad \sigma_\zeta = (\zeta \sigma, I), \quad \zeta = \pm 1, \quad (132)$$

и аналогичное разбиение для гейзенберговских полей $\Psi_\zeta^a(x) = \Pi_\zeta \Psi^a(x)$. Представляя гамильтониан взаимодействия для этого случая в виде

$$H_{I|\Psi} = 2\lambda \left(\Psi_+^{Ia}(x) (\sigma_+ \epsilon) \Psi_+^a(x) \right) \left(\Psi_-^{Ib}(x) (\sigma_- \epsilon) \Psi_-^b(x) \right), \quad (133)$$

с помощью вытекающих из него уравнений движения для полей и токов:

$$j_{\nu(\Psi)}^\alpha(x) = \left(\bar{\Psi}^a(x) \gamma_\nu \Psi^a(x) \right) \text{ и } \left(\Psi_\zeta^{Ia}(x) \mathcal{O} \Psi_\zeta^a(x) \right), \text{ при любом } [\mathcal{O}, (\sigma_\zeta \epsilon)] = 0,$$

$$i\partial_t \Psi_\zeta^a(x) = \left[\zeta (\sigma \cdot \mathbf{P}) + 2\lambda \left(\Psi_-^{Ib}(x) (\sigma_- \epsilon) \Psi_-^b(x) \right) (\sigma_\zeta \epsilon) \right] \Psi_\zeta^a(x), \quad (134)$$

$$i\partial_t \left(\Psi_\zeta^{Ia}(x) \mathcal{O} \Psi_\zeta^a(x) \right) = \Psi_\zeta^{Ia}(x) \zeta \left[\mathcal{O} (\sigma \cdot \mathbf{P}) - (\sigma \cdot \mathbf{P}^\dagger) \mathcal{O} \right] \Psi_\zeta^a(x),$$

$$\text{откуда: } \partial_\nu \left(\Psi_\zeta^{Ia}(x) \sigma_\zeta^\nu \Psi_\zeta^a(x) \right) = 0, \quad \partial^\nu j_{\nu(\Psi)}^\alpha(x) = 0, \quad (135)$$

$$\text{при: } \left(\Psi_-^{Ia}(x) (\sigma_- \epsilon) \Psi_-^a(x) \right) \Rightarrow \left(\phi_-^{Ia}(x) (\sigma_- \epsilon) \phi_-^a(x) \right), \quad (136)$$

нетрудно убедиться, что блочно-диагональная структура (131) оператора (70) воспроизводится в процессе его эволюции (60)–(62):

$$\begin{pmatrix} \Psi_+^a(\mathbf{x}, T) \\ \Psi_-^a(\mathbf{x}, T) \end{pmatrix} = \int d^3y \begin{pmatrix} \mathcal{Y}_{(\phi_-)}(T, \mathbf{x}|\mathbf{y}, 0) & 0 \\ 0 & \mathcal{Y}_{(\phi_+)}(T, \mathbf{x}|\mathbf{y}, 0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_+^a(\mathbf{y}, 0) \\ \phi_-^a(\mathbf{y}, 0) \end{pmatrix}. \quad (137)$$

Повторяя преобразования (67)–(70) и (112)–(122) для каждого из

$$\mathcal{Y}_{(\phi_\zeta)}(T, \mathbf{x}|\mathbf{y}, 0) \Rightarrow \langle \mathbf{x} | \mathbf{T}_x \mathbf{T}_\sigma \mathbf{T}_{\phi_\zeta} \cdot \quad (138)$$

$$\cdot \left(\exp \left\{ i \int_0^T d\eta \left[\zeta (\sigma \cdot \mathbf{P}) - 2\lambda (\sigma_- \epsilon) \left(\phi_\zeta^{Ia}(\mathbf{X}, \eta) (\sigma_\zeta \epsilon) \phi_\zeta^a(\mathbf{X}, \eta) \right) \right] \right\} \right) | \mathbf{y} \rangle,$$

– этих блоков в отдельности, придем к следующим представлениям:

$$\mathcal{Y}_{(\phi_\zeta)}(T, \mathbf{x}|\mathbf{y}, 0) = \int_{\mathbf{x}(0)=\mathbf{y}}^{\mathbf{x}(T)=\mathbf{x}} \mathcal{D}\mathbf{x}(\eta) \hat{\mathcal{L}}_{\zeta\sigma}(T|0, [\dot{\mathbf{x}}(\eta)]) \det [\mathbf{I} - \hat{\mathcal{Z}}_\zeta]. \quad (139)$$

$$\cdot \mathbf{N}_{\phi_\zeta} \left(\exp \left\{ \int_0^T dt \int_0^T d\xi \left(\phi_\zeta^{Ia}(x(t)) \hat{\mathcal{I}}_{[\mathbf{x}(\eta)](\zeta)}(t|\xi) \phi_\zeta^a(x(\xi)) \right) \right\} \right), \text{ где:}$$

$$\hat{\mathcal{L}}_{\zeta\sigma}(T|0, [\dot{\mathbf{x}}(\eta)]) = \int \mathcal{D}\mathbf{p}(\eta) \mathbf{T}_\sigma \exp \left\{ i \int_0^T d\eta \left[\mathbf{p}(\eta) \cdot (\dot{\mathbf{x}}(\eta) + \zeta \sigma) \right] \right\}, \quad (140)$$

$$\int_{\mathbf{x}(y_0)=\mathbf{y}}^{\mathbf{x}(x_0)=\mathbf{x}} \mathcal{D}\mathbf{x}(\eta) \hat{\mathcal{L}}_{-\zeta\sigma}(x_0|y_0, [\dot{\mathbf{x}}(\eta)]) = \theta(x_0 - y_0) \Delta_{(\phi_\zeta)}(x - y), \quad (141)$$

$$\Delta_{(\phi_\zeta)}(x - y) = e^{-i(x_0 - y_0)\zeta(\sigma \cdot \mathbf{P}_x)} \delta_3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \quad (142)$$

$$= [I\partial_{x^0} - i\zeta(\sigma \cdot \mathbf{P}_x)] D_0(x - y) = (\sigma_{-\zeta} \partial_x) \frac{\varepsilon(x_0 - y_0)}{2\pi} \delta((x - y)^2),$$

$$\Delta_{(\phi_\zeta)}^{(c)}(x - y) = (\sigma_\zeta \partial_x)^{-1} \delta_4(x - y) = \frac{2i}{(2\pi)^2} \frac{(\sigma_{-\zeta}(x - y))}{[(x - y)^2 - i\epsilon]^2}, \quad (143)$$

$$\hat{\mathcal{Z}}_\zeta(t|\xi) = -2i\lambda \Delta_{(\phi_\zeta)}^{(c)}(x(t) - x(\xi)) (\sigma_\zeta \epsilon) (u(\xi) \epsilon), \quad (144)$$

$$\hat{\mathcal{I}}_{[\mathbf{x}(\eta)](\zeta)}^0(t|\xi) = -2i\lambda (u(t) \epsilon) (\sigma_\zeta \epsilon) \delta(t - \xi), \quad (145)$$

$$\hat{\mathcal{I}}_{[\mathbf{x}(\eta)](\zeta)}(t|\xi) = \hat{\mathcal{I}}_{[\mathbf{x}(\eta)](\zeta)}^0(t|\xi) + \int_0^T d\tau \hat{\mathcal{I}}_{[\mathbf{x}(\eta)](\zeta)}(t|\tau) \hat{\mathcal{Z}}_\zeta(\tau|\xi). \quad (146)$$

Причинные выражения вида (127)–(130) для первых членов разложения экспоненты (139) также имеют место после выделения $\exp(-Tr\{\hat{\mathcal{Z}}_\zeta\})$, с заменой $\Delta_\varepsilon(x|y) \mapsto \Delta_{(\phi_\zeta)}(x - y)$ (142), и $\hat{\mathcal{Z}}(t|\xi) \mapsto \hat{\mathcal{Z}}_\zeta(t|\xi)$ (144). То есть в каждой из соответствующих петель присутствуют функции распространения обоих полей $\phi_\pm(x)$.

В отличие от работы [35], для вычисления спинорных функционалов (140) как целого воспользуемся "естественной" регуляризацией массовым членом (107) при объединении их в представлении (115), (132):

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathcal{L}}_{-\sigma}(T|0, [\dot{\mathbf{x}}(\eta)]) & 0 \\ 0 & \hat{\mathcal{L}}_{+\sigma}(T|0, [\dot{\mathbf{x}}(\eta)]) \end{pmatrix} = \lim_{m \rightarrow 0} \hat{\mathcal{L}}_{\hat{E}}(T|0, [\dot{\mathbf{x}}(\eta)]), \quad (147)$$

$$\hat{\mathcal{L}}_{\hat{E}}(T|0, [\dot{\mathbf{x}}(\eta)]) = \prod_{\eta=T}^0 \left\{ \int \frac{d^3\mathbf{p}_\eta}{(2\pi)^3} \exp \left[i\tau(\mathbf{p}_\eta \cdot \dot{\mathbf{x}}_\eta) - i\tau \hat{E}(\mathbf{p}_\eta) \right] \right\}, \quad \tau = \frac{T}{N}.$$

Тогда, с помощью (108)–(110) интегралы по \mathbf{p}_η вычисляются в виде:

$$[I\partial_\tau - (\hat{\alpha} \cdot \nabla_z) - im\gamma^0] \frac{\varepsilon(\tau)}{2\pi} \left[\delta(\tau^2 - \mathbf{z}^2) + O(m^2) \right], \quad \mathbf{z} = \tau \dot{\mathbf{x}}_\eta. \quad (148)$$

Отсюда, при $\tau \rightarrow +0$, $m \rightarrow 0$, находим:

$$\hat{\mathcal{L}}_{\zeta\sigma}(T|0, [\dot{\mathbf{x}}(\eta)]) = \mathfrak{S}[\zeta \dot{\mathbf{x}}(\eta)] \mathfrak{N} \prod_{\eta=T}^0 \left\{ \delta^{(1)}(1 - \dot{\mathbf{x}}^2(\eta)) \right\}, \quad (149)$$

$$\text{где: } \mathfrak{S}[\zeta \dot{\mathbf{x}}(\eta)] = \prod_{\eta=T}^0 \left\{ \frac{I - \zeta(\sigma \cdot \dot{\mathbf{x}}(\eta))}{2} \right\}, \quad (150)$$

и \mathfrak{N} - нормировочная константа. Так как оба сомножителя с правой стороны этого равенства определяются единым функциональным интегралом (140) в его левой части, то для функционала $\mathfrak{S}[\zeta \dot{\mathbf{x}}(\eta)]$ необходимо принять:

$$\dot{\mathbf{x}}^2(\eta) = 1, \text{ откуда } (\ddot{\mathbf{x}}(\eta) \cdot \dot{\mathbf{x}}(\eta)) = 0. \quad (151)$$

Тогда, для соседних сомножителей в моменты η и $\eta + \tau$ имеем:

$$\frac{I - \zeta(\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{x}}(\eta + \tau))}{2} \cdot \frac{I - \zeta(\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{x}}(\eta))}{2} = \\ = \left[I + \tau \frac{i}{2} \left((\ddot{\mathbf{x}}(\eta) \times \dot{\mathbf{x}}(\eta)) \cdot \boldsymbol{\sigma} \right) \right] \cdot \frac{I - \zeta(\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{x}}(\eta))}{2} + O(\tau^2),$$

что позволяет получить для него представление:

$$\mathfrak{S}[\zeta \dot{\mathbf{x}}(\eta)] = \mathbf{T}_{\boldsymbol{\sigma}} \exp \left\{ \frac{i}{2} \int_0^T d\eta \left((\ddot{\mathbf{x}}(\eta) \times \dot{\mathbf{x}}(\eta)) \cdot \boldsymbol{\sigma} \right) \right\} \frac{I - \zeta(\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{x}}(0))}{2} = \\ = \frac{I - \zeta(\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{x}}(T))}{2} \mathbf{T}_{\boldsymbol{\sigma}} \exp \left\{ \frac{i}{2} \int_0^T d\eta \left((\ddot{\mathbf{x}}(\eta) \times \dot{\mathbf{x}}(\eta)) \cdot \boldsymbol{\sigma} \right) \right\}. \quad (152)$$

В работе [35] он был получен также в виде:

$$\mathfrak{S}_{D=3}[\zeta \dot{\mathbf{x}}(\eta)] = \frac{I - \zeta(\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{x}}(T))}{2} \cdot \frac{I - \zeta(\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{x}}(0))}{2} \cdot \\ \cdot \left(\frac{I + (\dot{\mathbf{x}}(T) \cdot \dot{\mathbf{x}}(0))}{2} \right)^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{i}{2} \Phi_{D=3} \left(C[\zeta \dot{\mathbf{x}}(\eta)] + \partial C \right) \right\}, \quad (153)$$

$$\text{где: } \Phi_{D=3} \left(C[\mathbf{n}(\ell)] + \partial C \right) = \int_0^{2\pi} d\ell \dot{\phi}(\ell) (1 - \cos \theta(\ell)), \quad (154)$$

$$\mathbf{n}(\ell) = \mathbf{n}(\theta, \phi) = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta),$$

является фазой Берри [38], связанной с адиабатической эволюцией конца единичного вектора $\mathbf{n}(\ell)$, $0 \leq \ell \leq 2\pi$, по замкнутому контуру от начального положения вектора скорости $\mathbf{n}(0) = \zeta \dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{n}(2\pi)$ к конечному положению вектора скорости $\mathbf{n}(\pi) = \zeta \dot{\mathbf{x}}(T)$ вдоль контура $C[\zeta \dot{\mathbf{x}}(\eta)]$ на единичной сфере, и обратно, по кратчайшей дуге ее большого круга ∂C . Геометрически фаза представляет собой площадь, ограниченную этим замкнутым контуром на единичной сфере – вырезанный им телесный угол $\Omega(C + \partial C)$. Таким образом, адиабатическое рассмотрение оказывается вполне адекватным при вычислении спинорного функционала (140), что указывает на его уместность и при определении остальных сомножителей в (139). Отметим, что сам единичный вектор скорости $\mathbf{u}(\eta) = \dot{\mathbf{x}}(\eta)$ не описывает, вообще говоря, замкнутого контура $C + \partial C$, поэтому натуральный параметр $0 \leq \eta \leq T$ траектории $\mathbf{x}(\eta)$ связан с эволюцией только по контуру C .

Используя замкнутость алгебры матриц Паули, матричную T-экспоненту в (152) можно заменить обычной:

$$\mathbf{T}_{\boldsymbol{\sigma}} \exp \left\{ \frac{i}{2} \int_0^T d\eta \left((\dot{\mathbf{u}}(\eta) \times \mathbf{u}(\eta)) \cdot \boldsymbol{\sigma} \right) \right\} = \exp \left\{ -\frac{i}{2} \left(\mathbf{w}(T) \cdot \boldsymbol{\sigma} \right) \right\}, \quad (155)$$

где вектор $\mathbf{w}(t) = r(t)\mathbf{v}(t)$, $|\mathbf{v}(t)| = 1$, определяется из уравнения

$$(\dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{v})(1 - \cos r) - \dot{\mathbf{v}} \sin r - \mathbf{v}\dot{r} = (\dot{\mathbf{u}} \times \mathbf{u}), \quad r(0) = 0. \quad (156)$$

Для его вывода обозначим T-экспоненту слева в (155) через $O(T)$, а справа, – через $\widehat{O}(T)$. Первая подчиняется уравнению:

$$\dot{O}(t) = i \left((\dot{\mathbf{u}}(t) \times \mathbf{u}(t)) \cdot \mathbf{S} \right) O(t), \quad O(0) = \mathbf{I}, \quad \mathbf{S} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}, \quad \text{а вторая:} \\ \dot{\widehat{O}}(t) = \widehat{W}(t) \widehat{O}(t), \quad \widehat{W}(t) = -i \int_0^1 d\xi e^{-i\xi(\mathbf{S}\mathbf{w}(t))} \left(\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{w}}(t) \right) e^{i\xi(\mathbf{S}\mathbf{w}(t))}.$$

Поскольку, под интегралом возник оператор спиновых вращений, немедленно получаем для $\widehat{W}(t)$ выражение из левой части (156), умноженное на $i\mathbf{S}$. Равенство (155) означает [31]: $\widehat{W}(t) = i \left((\dot{\mathbf{u}}(t) \times \mathbf{u}(t)) \cdot \mathbf{S} \right)$, т.е. уравнение (156).

Как известно, фаза Берри связана с наличием кручения у траектории [38]. Будем искать единичный вектор $\mathbf{v}(t)$ в виде разложения по реперу Френе [39] единичных векторов $\mathbf{u}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta}$ – касательной, нормали и бинормали, связанных, согласно (151), с движением по траектории $\mathbf{x}(\eta)$:

$$\mathbf{u} = \dot{\mathbf{x}}(\eta), \quad \boldsymbol{\beta} = (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\nu}), \quad \boldsymbol{\nu} = (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{u}), \quad \mathbf{u} = (\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\beta}): \quad (157)$$

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(\vartheta(t), \varphi(t)) = \mathbf{u} \sin \vartheta \cos \varphi + \boldsymbol{\nu} \sin \vartheta \sin \varphi + \boldsymbol{\beta} \cos \vartheta. \quad (158)$$

Подставляя (158) в (156), с помощью (157) и уравнений Френе [39]:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\boldsymbol{\nu}} \\ \dot{\boldsymbol{\beta}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \kappa \\ 0 & -\kappa & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\nu} \\ \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix}, \quad (159)$$

где k – ее кривизна, а κ – ее кручение, также зависящие от t , после некоторых преобразований придем к системе уравнений:

$$\dot{r} = k \cos \vartheta, \quad \dot{\varphi} = \kappa \cot \vartheta \cos \varphi - \frac{k}{2}, \quad \dot{\vartheta} = \kappa \sin \varphi - \frac{k}{2} \sin \vartheta \cot \frac{r}{2}. \quad (160)$$

Эту систему можно представить в "почти линейном" виде, если с разложением (158) в базисе Френе ассоциировать разложение в неподвижном базисе для вектора $\mathbf{R}(t)$ с компонентами:

$$\mathbf{R}(t) = (X, Y, Z) \equiv \sin \frac{r}{2} (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta), \quad (161)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{k}{2} & 0 \\ -\frac{k}{2} & 0 & \kappa \\ 0 & -\kappa & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{k}{2} \sqrt{1 - R^2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}(0) = 0. \quad (162)$$

Полученная система, хотя и похожа на уравнения Френе (159), имеет совершенно иной смысл, так как описывает изменение компонент вектора в неподвижном базисе, а не самих векторов этого базиса. Отметим также уменьшение вдвое величины, соответствующей кривизне. Для произвольной зависимости от t кривизны и кручения эта

система, безусловно, не проще исходной Т-экспоненты. Однако, она упрощается, если, в адиабатическом приближении, считать их медленно меняющимися функциями, и полностью линеаризуется, если таковым же принять и нелинейный неоднородный член, полагая его равным значению при $t = 0$, т.е. $k/2$. Тогда, решение (162), удовлетворяющее начальному условию имеет вид:

$$\begin{aligned} X(t) &= \frac{k^2 \kappa}{4\omega^2} \left(t - \frac{\sin \omega t}{\omega} \right), & Y(t) &= \frac{k\kappa}{2\omega^2} (1 - \cos \omega t), \\ Z(t) &= \frac{k^3}{8\omega^2} \left(t + \frac{4\kappa^2 \sin \omega t}{k^2 \omega} \right), & \omega &= \sqrt{\kappa^2 + \frac{k^2}{4}}, \end{aligned} \quad (163)$$

Отметим, что без учета неоднородного члена в (162) было бы невозможно удовлетворить начальному условию. Получающееся отсюда, с учетом (158), громоздкое выражение для $w(T)$ выписывать не будем. Ограничимся пределом этого выражения для "почти прямых" траекторий при $k \simeq \kappa$ и $\kappa T \ll 1$. Тогда: $w(T) \simeq \beta(T) \kappa T$, что и по величине и по направлению вполне согласуется с (152)-(154). Поскольку длина траектории, в принятых единицах, равна T , то, согласно формуле Гаусса-Бонне [39] в случае постоянного кручения, для замкнутого контура C имеем: $\kappa T = \Omega(C)$, то есть телесный угол, определяющий фазу Берри.

3.4 Модель Тирринга

В то время, как в четырех измерениях имеется лишь слабая надежда с помощью преобразований Фирца по всем имеющимся индексам установить эквивалентность того или иного 4-х фермионного взаимодействия одному из вариантов (I)-(IV), в двух измерениях, как показано еще Тиррингом, все 4-х фермионные взаимодействия, в отсутствие дополнительных индексов внутренних симметрий, в существенном [12] эквивалентны между собой. Это, безусловно, проливает свет на решаемость модели Тирринга с точки зрения предлагаемого здесь подхода, поскольку, непосредственно на уравнениях движения (168), (169), она оказывается прямым двумерным аналогом киральной модели из предыдущего пункта.

Действительно, для двумерного варианта взаимодействия типа (IV), (133), в соответствующем "киральном" представлении [13], [14], последовательно имеем вместо (131)-(136): (суммирование по ζ нигде нет!)

$$\gamma^0 = \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = -i\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\alpha}^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (164)$$

$$\hat{\alpha}^1 \Rightarrow \gamma^5 = \gamma^0 \gamma^1 = \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad x^\zeta = t + \zeta x^1, \quad \zeta = \pm 1, \quad (165)$$

$$\sigma_\zeta^\nu \mapsto \wp_\zeta^\nu = (\wp_\zeta^1, \wp_\zeta^0) = (\zeta, 1), \quad (\wp_\zeta \epsilon) (\wp_{-\zeta} \epsilon) = (\epsilon^0)^2 - (\zeta \epsilon^1)^2 = \epsilon^2 = 1, \quad (166)$$

$$j_{(\Psi)}^\nu(x) = (\bar{\Psi}(x) \gamma^\nu \Psi(x)), \quad H_{I|\Psi} \mapsto 2\lambda (\Psi_+^\dagger(x) \Psi_+(x)) (\Psi_-^\dagger(x) \Psi_-(x)), \quad (167)$$

$$i\partial_t \Psi_\zeta(x) = [\zeta \mathbf{P}^1 + 2\lambda (\Psi_{-\zeta}^\dagger(x) \Psi_{-\zeta}(x))] \Psi_\zeta(x), \quad \text{или:} \quad (168)$$

$$\partial_\zeta \Psi_\zeta(x) = -i\lambda (\Psi_{-\zeta}^\dagger(x) \Psi_{-\zeta}(x)) \Psi_\zeta(x), \quad \text{где } 2\partial_\zeta = \partial_t + \zeta \partial_{x^1} = \wp_\zeta^\nu \partial_\nu, \quad (169)$$

$$\partial_\nu j_{(\Psi)}^\nu(x) = 0, \quad \partial_\nu (\Psi_\zeta^\dagger(x) \wp_\zeta^\nu \Psi_\zeta(x)) = \partial_\zeta (\Psi_\zeta^\dagger(x) \Psi_\zeta(x)) = 0, \quad (170)$$

$$2 (\Psi_\zeta^\dagger(x) \Psi_\zeta(x)) \Rightarrow 2 (\phi_\zeta^\dagger(x) \phi_\zeta(x)) = j_\phi^\zeta(x) = j_{(\psi)}^0(x) + \zeta j_{(\psi)}^1(x). \quad (171)$$

Таким образом, вектор Маркова-Юкавы ϵ^ν в двумерии автоматически исчезает из гамильтониана взаимодействия. Инвариантные функции свободных полей в двумерии получаются из (110), (111) отбрасыванием производной по ρ и умножением на π [12], [13], [14], [40] (γ_e - постоянная Эйлера, μ - фиксированный массовый масштаб):

$$D_0^{(C)}(x) = \frac{1}{4\pi i} \left[\ln \left(\frac{(i\epsilon - x^2)\mu^2}{4} \right) + 2\gamma_e \right], \quad D_0(x) = \frac{\epsilon(x_0)}{2} \theta(x^2), \quad (172)$$

$$D_0^{(-)}(x) = \frac{1}{4\pi i} \left[\ln \left(\frac{i\epsilon x_0 - \mu^2 x^2}{4} \right) + 2\gamma_e \right], \quad \epsilon \rightarrow +0, \quad x^2 = x^\zeta x^{-\zeta}, \quad (173)$$

$$\Delta_{(\psi)}^{(C)}(x) \gamma^0 = (\gamma \partial) D_0^{(C)}(x) = \frac{(\gamma x)}{2\pi i (x^2 - i\epsilon)}, \quad \text{а т.к. } \partial_\zeta \psi_\zeta(x) = 0, \quad \text{то:} \quad (174)$$

$$\psi_\zeta(x) = \phi_\zeta(x^{-\zeta}), \quad \{ \phi_{-\zeta}(x^\zeta), \phi_{-\zeta}^\dagger(y^\zeta) \} = \delta_{\zeta\zeta'} \delta(x^\zeta - y^\zeta) = \Delta_{(\phi_{-\zeta})}(x|y), \quad (175)$$

$$\langle 0 | \mathbf{T}(\phi_{-\zeta}(x^\zeta), \phi_{-\zeta}^\dagger(y^\zeta)) | 0 \rangle = \frac{(2\pi i)^{-1}}{x^\zeta - y^\zeta - i\epsilon \epsilon(x_0 - y_0)} = \Delta_{(\phi_{-\zeta})}^{(C)}(x|y), \quad (176)$$

$$\langle 0 | \phi_{-\zeta}(x^\zeta) \phi_{-\zeta}^\dagger(y^\zeta) | 0 \rangle = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{(x^\zeta - y^\zeta - i\epsilon)} = \Delta_{(\phi_{-\zeta})}^{(-)}(x|y). \quad (177)$$

Как символические представления (60)-(62), так и функциональные представления (70)-(72), вида (137)-(139), приводят к одним и тем же выражениям для решения ГУ (168), (171):

$$\Psi_\zeta(x^1, T) \equiv \hat{\Psi}_\zeta(x^\zeta, x^{-\zeta}) = \int dy^1 \mathcal{Y}_{(\phi_{-\zeta})}(T, x^1 | y^1, 0) \Psi_\zeta(y^1, 0) = \quad (178)$$

$$= \mathbf{T}_x \mathbf{T}_{\phi_{-\zeta}} \left(\exp \left\{ -i \int_0^T d\eta [\zeta \mathbf{P}_x^1 + \lambda j_\phi^{-\zeta}(x^1, \eta)] \right\} \Psi_\zeta(x^1, 0) \right) =$$

$$= e^{-iT\zeta \mathbf{P}_x^1} \mathbf{T}_x \mathbf{T}_{\phi_{-\zeta}} \left(\exp \left\{ -i\lambda \int_0^T d\eta e^{i\eta\kappa \mathbf{P}_x^1} j_\phi^{-\zeta}(x^1, \eta) e^{-i\eta\kappa \mathbf{P}_x^1} \right\} \Psi_\zeta(x^1, 0) \right)$$

$$\Rightarrow \mathbf{T}_{\phi_{-\zeta}} \exp \left\{ -i\lambda \int_0^T d\eta j_\phi^{-\zeta}(x^1 - \zeta(T - \eta), \eta) \right\} \Psi_\zeta(x^1 - \zeta T, 0), \quad (179)$$

$$\hat{\Psi}_\zeta(x^\zeta, x^{-\zeta}) = \mathbf{T}_{\phi_{-\zeta}} \exp \left\{ -i\lambda \int_{-x^{-\zeta}}^{x^\zeta} dy^\zeta (\phi_{-\zeta}^\dagger(y^\zeta) \phi_{-\zeta}(y^\zeta)) \right\} \hat{\Psi}_\zeta(-x^{-\zeta}, x^{-\zeta}).$$

В операции сдвига (113)-(115) теперь нет необходимости, поскольку нет соответствующего матричного упорядочения \mathbf{T}_σ , в силу чего, также, (141), с учетом (72), сводится к (175), поскольку (140) приводится теперь к виду:

$$\hat{\mathcal{L}}_{-\zeta\sigma}(T|0, [\dot{x}(\eta)]) \mapsto \hat{\mathcal{L}}_{-\zeta}(T|0, [\dot{x}(\eta)]) = \prod_{\eta=T}^0 \left\{ \delta(\dot{x}(\eta) - \zeta) \right\}, \quad (180)$$

а эволюция ГП определяется теперь оператором (178) в виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{(\phi-\zeta)}(T, x^1 | y^1, 0) &= \\ &= \int_{x^1(0)=y^1}^{x^1(T)=x^1} \mathcal{D}x^1(\eta) \hat{\mathcal{L}}_{-\zeta}(T|0, [\dot{x}^1(\eta)]) \mathbf{T}_{\phi-\zeta} \exp \left\{ -i\lambda \int_0^T d\eta j_{\phi}^{-\zeta}(x^1(\eta), \eta) \right\} = \\ &= \delta(x^1 - \zeta T - y^1) \mathbf{T}_{\phi-\zeta} \exp \left\{ -i\lambda \int_0^T d\eta j_{\phi}^{-\zeta}(x^1 - \zeta(T - \eta), \eta) \right\}. \end{aligned} \quad (181)$$

Таким образом, в роли пробного физического поля $\psi(x)$, так же как и в предыдущей модели, выступает свободное безмассовое фермионное поле $\psi_{\zeta}(x^1, t) = \phi_{\zeta}(x^{-\zeta})$ (172)–(177), представимое в виде разложения по операторам рождения и уничтожения [14]:

$$\psi_{\zeta}(x) = \phi_{\zeta}(x^{-\zeta}) = \int \frac{dp^1}{\sqrt{2\pi}} \theta(\zeta p^1) [e^{-i(px)} a_{\zeta}(p^1) + e^{i(px)} b_{\zeta}^{\dagger}(p^1)], \quad (183)$$

$$\{a_{\zeta}(p^1), a_{\zeta'}^{\dagger}(q^1)\} = \{b_{\zeta}(p^1), b_{\zeta'}^{\dagger}(q^1)\} = \delta_{\zeta\zeta'} \delta(p^1 - q^1), \quad (184)$$

$$\{a_{\zeta}(p^1), b_{\zeta'}^{\#}(q^1)\} = 0, \quad b^{\#} = b, b^{\dagger}, \quad (px) = |p^1|t - p^1 x^1.$$

Начальные условия к (178)–(179) также естественно идентифицируются в терминах этих полей в виде:

$$\Psi_{\zeta}(x^1 - \zeta T, 0) \equiv \hat{\Psi}_{\zeta}(-x^{-\zeta}, x^{-\zeta}) \implies \phi_{\zeta}(x^{-\zeta}). \quad (185)$$

Обычное решение модели [12], отвечающее интегрированию уравнений (169), (171), будет отличаться от (179) множителем, связанным с выбором иного нижнего предела интегрирования: $-x^{-\zeta} \mapsto -\infty$ по dy^{ζ} , или $0 \mapsto -\infty$ по $d\eta$. Это принципиальное отличие связано с иной интерпретацией физических полей $\phi_{\zeta}(x^{-\zeta})$, – как асимптотических in - полей:

$$\Psi_{\zeta}(x^1 - \zeta T, -\infty) \equiv \hat{\Psi}_{\zeta}(-\infty, x^{-\zeta}) \xrightarrow{(w)} \phi_{\zeta in}(x^{-\zeta}), \quad (186)$$

имеющей место, вообще говоря, лишь в слабом смысле. Несмотря на то, что, формально для (171), в силу (175):

$$[j_{\phi}^{\zeta}(x^1, \eta), j_{\phi}^{\zeta}(y^1, t)] = 0, \quad (187)$$

неопределенность произведения полей в (171) из-за c -числовой сингулярности (176), (177) не позволяет просто опустить в решении (179), (182) символ упорядочения $\mathbf{T}_{\phi-\zeta}$. Его нужно заменить, при переходе к свободным скалярному и псевдоскалярному полям $\rho(x)$ и $\Sigma(x)$:

$$\begin{aligned} dx^{\zeta} j_{\phi}^{-\zeta}(x^{\zeta}) &\equiv dx^{\zeta} 2 \left(\phi_{-\zeta}^{\dagger}(x^{\zeta}) \phi_{-\zeta}(x^{\zeta}) \right) = \\ &= dx_{\nu} \left(\bar{\psi}(x) \gamma^{\nu} (I - \zeta \gamma^5) \psi(x) \right) \implies dx_{\nu} \partial^{\nu} \left(\rho(x) - \zeta \Sigma(x) \right), \end{aligned} \quad (188)$$

символом соответствующего нормального произведения [12], [13]. Очевидно, второй член разложения такой нормальной экспоненты от (182) будет, как и прежде, в (78),

(129), (139), содержать первые степени этих "составных" полей, отвечающих фермионным связанным состояниям.

Таким образом, основное наблюдение предлагаемого здесь метода линеаризации ГУ выявляется как раз при сравнении этой процедуры в нерелятивистской модели 4-х фермионного взаимодействия и в модели Тирринга. Для линеаризации ГУ обеих моделей существенно, что в теории имеется только фермионное поле, но в первой она тесно связана с диагонализуемостью гамильтониана уже на свободных физических полях, а во второй обязана разделению переменных для прошлого и будущего светового конуса. Не трудно проследить аналогичный механизм линеаризации ГУ и в другой известной точно решаемой 2D модели взаимодействия двух различных массивных ферми-полей, – модели Федербуша [12], в которой, по видимому впервые, в том же контексте, что и в данной работе, фактически были явно использованы свободные "пробные" шредингеровские поля вида (53).

4 Проблема связанных состояний

В работе [21], на примерах нерелятивистских 4-х фермионной и $N\Theta$ моделей было показано, что собственные состояния рассеяния полного гамильтониана просто совпадают с двухчастичными in -, out - состояниями (и аналогично для связанных состояний), если представления коммутационных соотношений остаются неизменными в процессе эволюции, т.е., если полный и кинетический гамильтонианы могут быть реализованы (и диагонализированы) в одном и том же гильбертовом пространстве. Это невозможно в релятивистском случае, поскольку представления ККС для (гейзенберговских [11]) in - и out - операторов теперь отличаются на самом деле от представлений ККС для обычных свободных или "пробных" физических полей (52)–(54), диагонализирующих, соответственно, или только "затравочную" часть, или весь "перенормированный" кинетический гамильтониан (54). Поэтому, при определении БС волновых функций связанных состояний и рассеяния в терминах in - и out - состояний приходится использовать асимптотические условия слабой сходимости LSZ [41]. То есть эти in -, out - состояния являются собственными состояниями только в слабом смысле (*). Попробуем перенести непосредственно на релятивистский случай (52)–(54) соответствующие результаты [21] для первой коэффициентной функции в (28), которая содержит всю информацию о двухчастичном секторе, определяя волновую функцию рассеяния $\Phi_{pq}^{\pm}(\mathbf{k})$, а через вычеты ее аналитического продолжения, – и функции связанных состояний $B^{\mathcal{P}}(\mathbf{k})$:

$$Y_A^{(1)}(t; \mathbf{k}; \mathbf{q} | \mathbf{p}; 1) \equiv \delta_3(\mathbf{k} + \mathbf{q} - \mathbf{p} - 1) F_A^{(1)}(t; \mathbf{p} - \mathbf{k} | 1, \mathbf{k}), \quad (189)$$

$$\Phi_{pq}^{\pm}(\mathbf{k}) = \delta_3(\mathbf{k} - \mathbf{q}) + F_A^{(1)*} \left(t = \mp\infty; \mathbf{k} + \mathbf{q} \left| \frac{\mathcal{P}}{2} - \mathbf{k}, \frac{\mathcal{P}}{2} - \mathbf{q} \right. \right), \quad (190)$$

при $E_2(\mathcal{P}, q) \rightarrow E_2(\mathcal{P}, q) \pm i\delta$, $\delta \rightarrow +0$.

Это соотношение вытекает из сравнения уравнения (43) на функцию (189) с уравнением Липпмана-Швингера на $\Phi_{Pq}^{\pm}(\mathbf{k})$ [21], но имеет существенно асимптотический характер и, фактически, содержится в нелинейном интегральном соотношении между ними:

$$\frac{\Phi_{Pq}^{\pm}(\mathbf{k})}{B^P(\mathbf{k})} \left[\frac{e^{it(E_2(P,\mathbf{k})-E_2(P,q))} - 1}{e^{it(E_2(P,\mathbf{k})-M_2(P))} - 1} \right] = \int d^3l \left\{ \frac{\Phi_{Pq}^{\pm}(l)}{B^P(l)} \right\} F_A^{(1)} \left(t; \mathbf{k} + l \left| \frac{P}{2} - l, \frac{P}{2} - \mathbf{k} \right. \right). \quad (191)$$

Это равенство, в свою очередь, является элементарным следствием двух форм записи общего вида динамического отображения (27), (28) и *сильных* - операторных условий стабильности вакуума и одночастичного состояния (29), которые, как видно из предыдущего, являются простым отражением диагональности полного гамильтониана на этих состояниях, т.е. отсутствия низших флуктуационных членов:

$$\langle 0 | a_{\alpha} \left(\frac{P}{2} + \kappa, t \right) a_{\beta} \left(\frac{P}{2} - \kappa, t \right) | 2, P \rangle = e^{it(E_2(P,\kappa)-W_2(P))} \chi_{\alpha\beta}^P(\kappa) = \quad (192)$$

$$= e^{it(E_2(P,\kappa)-W_2(P))} \langle 0 | A_{\alpha} \left(\frac{P}{2} + \kappa \right) A_{\beta} \left(\frac{P}{2} - \kappa \right) | 2, P \rangle,$$

$$\chi_{\alpha\beta}^P(\kappa) \left[e^{it(E_2(P,\kappa)-W_2(P))} - 1 \right] = \int d^3r \chi_{\alpha\beta}^P(r) F_A^{(1)} \left(t; \kappa + r \left| \frac{P}{2} - r, \frac{P}{2} - \kappa \right. \right), \quad (193)$$

где собственное состояние полного гамильтониана $| 2, P \rangle$ может быть либо связанным состоянием с $W_2(P) = M_2(P)$, либо состоянием рассеяния с $W_2(P) = E_2(P, q)$.

Таким образом, чтобы "перенести" эти формулы на релятивистский случай, необходимо так распорядиться свободой в выборе перенормировочной параметризации (57), чтобы пробные поля (52)-(54) оптимально подходили на роль диагонализующих. Другими словами, чтобы вклад недиагональных (флуктуационных) членов гамильтониана взаимодействия в терминах этих полей был, в некотором смысле, пренебрежимо мал в низших: нуль-, одно-, двух- частичных секторах. Пренебрегая ими в первом приближении, получаем возможность одновременной диагонализации такого (нелокального) "полного" и кинетического гамильтонианов в вакуумном и одночастичном секторе, действующих тогда в одном гильбертовом пространстве, - над одним вакуумом, что вновь приводит к условиям вида (29) для "повернутых" операторов рождения и уничтожения, составляющих теперь единое гейзенберговское поле. Тогда для него условиями стабильности вакуума и одночастичных состояний будут равенства:

$$\Psi_{\alpha}^a(\mathbf{x}, t) | 0 \rangle \Rightarrow \psi_{\alpha}^a(\mathbf{x}, t) | 0 \rangle; \quad \Psi_{\alpha}^{1a}(\mathbf{x}, t) | 0 \rangle \Rightarrow \psi_{\alpha}^{1a}(\mathbf{x}, t) | 0 \rangle.$$

Это позволяет для одновременной БС волновой функции, аналогично (192), (193), получить:

$$\langle 0 | \Psi_{\alpha}^a(\mathbf{x}, t) \Psi_{\beta}^b(-\mathbf{x}, t) | 2, P \rangle = e^{-itW_2(P)} \tilde{\chi}_{\alpha\beta}^{(P)ab}(\mathbf{x}) = \\ = e^{-itW_2(P)} \langle 0 | \psi_{\alpha}^a(\mathbf{x}, 0) \psi_{\beta}^b(-\mathbf{x}, 0) | 2, P \rangle = \langle 0 | \psi_{\alpha}^a(\mathbf{x}, t) \psi_{\beta}^b(-\mathbf{x}, t) | 2, P \rangle.$$

Подстановка динамического отображения $\Psi[\psi]$ в последнее выражение должна, вероятно, привести к интегральным соотношениям вида (191) для отдельных частотных

частей БС волновой функции, откуда предельным переходом $t \rightarrow \pm\infty$ получается их искомая связь с его коэффициентными функциями. Включение флуктуационных членов по теории возмущений должно лишь слегка нарушать эту идиллию, приводя к конечной ширине связанных состояний, определяемых, как обычно, полюсами в амплитудах волновых функций рассеяния.

5 Выводы

Как известно, главную роль при построении решений двумерных моделей Тирринга и Швингера сыграло выяснение полевого состава и свойств имеющихся в модели фермионных токов [12], [13]. Во всех описанных выше примерах линеаризации ГУ делается попытка конструктивно ответить на аналогичный вопрос: Из какого поля построен фермионный ток в данной модели? Такая постановка вопроса правомерна не только в $N\theta$ - модели и моделях 4-х фермионного взаимодействия. Она правомерна, например, в КЭД, если учесть что сохранение фермионного векторного тока также является там следствием уравнений движения и имеет вид равенства (12). Однако, во-первых, этот ток *не содержится* непосредственно в ГУ для ферми-поля, что, в отсутствие операторной диагонализуемости лишает нас возможности самосогласованных предположений о его структуре и операторных начальных условиях. Во-вторых, его различные компоненты не коммутируют между собой, и в его формировании, наряду с ферми- полями, также равноправно участвуют теперь *независимые* операторы квантованного ЭМ поля (ток смещения); например, в модели Швингера полный оператор тока складывается аддитивно из тока свободных фермионов и оператора ЭМП в калибровке Лоренца [14]. Преодоление этих трудностей потребовало бы не только вновь деформировать исходный гамильтониан взаимодействия к одной из моделей типа Ли [1], либо привлечь вновь в теорию понятие операторного равенства в слабом смысле, но и как-то избавиться от этих операторов ЭМП. Поскольку обмен чисто поперечными фотонами не приводит к формированию связанного состояния и взаимодействие с ними оказывается чисто флуктуационным, отвечающим лишь за его распад или аннигиляцию, то для этой цели проще всего проинтегрировать производящий функционал по поперечному фотонному полю (в кулоновской калибровке), что возвращает нас к эффективной 4-х фермионной теории [16].

Авторы благодарны В.Л. Черняку и И.Ф. Гинзбургу за полезные обсуждения, И.В. Колоколову и А.С. Елховскому за ценные замечания, А.Н. Валлу и В.М. Левианту за внимание к работе.

Список литературы

- [1] Хепп К., Теория перенормировок, Москва, Наука, 1974.

- [2] Умедзава Х., Мацумото Х., Татики М., Термополевая динамика и конденсированные состояния, Москва, Мир, 1984.
- [3] Haag R., Dan Vidensk K., *Selsk. Mat-Fys. Medd.* 29 N 12, 1955, pp.1-37.
- [4] Фаддеев Л.Д., Докл. Акад. Наук СССР, 1963, 152, сс. 573-580.
- [5] Широков М.И., Препринт ОИЯИ P2-6454, Дубна, 1972.
- [6] Широков М.И., Препринт ОИЯИ P2-7210, Дубна, 1973.
- [7] Вишинеску М., Широков М.И., Препринт ОИЯИ P2-8148, Дубна, 1974.
- [8] Greenberg O.W., Preprint PP-00-020, University of Maryland, 2000.
- [9] Greenberg O.W., Ray R., Schlumpf F., *Phys.Lett.*, 1995, B353, 284 - 288.
- [10] Greenberg O.W., Preprint 95-99, University of Maryland, 1995.
- [11] Швебер С., Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, Москва, Издательство иностранной литературы, 1963.
- [12] Вайтман А., Проблемы в релятивистской динамике квантовых полей, Москва, Наука, 1968.
- [13] Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Оксак А.И., Тодоров И.Т., Общие принципы квантовой теории поля, Москва, Наука, 1987.
- [14] Тавхелидзе А.Н., Токарев В.Ф., ЭЧАЯ, 1985, 16, вып.5, стр.973-1104.
- [15] Первушин В.Н., Атомы и адроны в калибровочных теориях, Лекции для молодых ученых, Препринт ОИЯИ, P2-90-211, Дубна, 1990.
- [16] Kalinovskiy Yu.L., et al., *Few Body Systems*, 1991, 10, pp. 87-104.
- [17] Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В., Введение в теории квантованных полей, Москва, Наука, 1984.
- [18] Васильев А.Н., Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике, ЛГУ, Ленинград, 1976.
- [19] Gross D.J., Neveu A., *Phys. Rev.*, 1974, D 10, p.3235.
- [20] Klevansky S.P., *Rev.Mod.Phys.*, 1992, 64, No.3, pp. 649-708.
- [21] Vall A.N., Korenblit S.E., Leviant V.M., et al., *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 1997, 4, No 3-4, pp. 492-502; Proceedings of X International Workshop. High Energy Physics and Quantum Field Theory. (Zvenigorod 1995), ed. V.B.Levchenko and V.I.Savrin, Moscow State University, 1996. pp. 279-286.

- [22] Kolokolov I.V., Yelkhovsky A.S., INP Preprint 87-103, Novosibirsk, 1987.
- [23] Vladimirov A.A., JINR Preprint E2-89-39, Dubna, 1989.
- [24] Валл А.Н., Коренблит С.Э., Левиант В.М., и др., *Ядерная физика*, 1997, 60, вып.8, сс. 1451-1458; *International Journal of Modern Physics A*, 1997, 12, No 28, pp. 5039-5052.
- [25] Рочев В.Е., Труды V Школы молодых ученых "Квантовая теория поля и физика высоких энергий", Москва, МГУ, 1990, сс. 126-146.
- [26] Петрина Д.Я., Иванов С.С., Ребенко А.Л., Уравнения для коэффициентных функций матрицы рассеяния, Москва, Наука, 1979.
- [27] Kogut J.B., Stephanov M.A., Toublan D., *Phys. Lett.*, 1999, B464, p.183
- [28] Трейман С., Джекив Р., Гросс Д., Лекции по алгебре токов, Москва, Атомиздат, 1977.
- [29] Гитман Д.М., Фрадкин Е.С., Шварцман Ш.М., Квантовая электродинамика с нестабильным вакуумом, Москва, Наука, 1991.
- [30] Попов В.Н., Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике, Москва, Атомиздат, 1975.
- [31] Колоколов И.В., *ЖЭТФ*, 1986, 91, вып.12, сс.2313-2318.
- [32] Kolokolov I.V., *Phys. Lett.*, 1986, 114A, N2, pp.99-104.
- [33] Kolokolov I.V., *Int.Jour.Mod.Phys.B*, 1996, 10, No 18&19, pp.2189-2215.
- [34] Lunev F.A., hep-th/9609166.
- [35] Korchemsky G.P., *Int.Jour.Mod.Phys.A*, 1992, 7, No2, pp.339-380.
- [36] Менский М.Б., Группа путей, измерения, поля, частицы. Москва, Наука, 1983.
- [37] Швингер Ю., Частицы, источники, поля. Т.1, Москва, Мир, 1973; Т.2, Москва, Мир, 1976.
- [38] Винницкий С.И. и др., *УФН*, 1990, 160, вып.6, сс. 1-49.
- [39] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т., Современная геометрия, Москва, Наука, 1979.
- [40] Siegel W., Fields, Preprint YITP-99-67, hep-th/9912205.
- [41] Архипов А.А., Саврин В.И., ЭЧАЯ, 1985, 16, вып.5, стр.1091-1125.

С.Э. Коренблит, А.Б. Танаев

**Линеаризация гейзенберговских уравнений
в моделях четырехфермионного взаимодействия
и проблема связанных состояний**

S.E. Korenblit, A.B. Tanaev

**Linearization of Heisenberg Equations
in Four – Fermion Interaction Model
and Bound State Problem**

ИЯФ 2001-11

Ответственный за выпуск А.М. Кудрявцев

Работа поступила 15.02.2001 г.

Сдано в набор 19.02.2001 г.

Подписано в печать 20.02.2001 г.

Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 2,3 печ.л., 1,9 уч.-изд.л.

Тираж 110 экз. Бесплатно. Заказ № 11

Обработано на IBM PC и отпечатано на

ротапринте ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН,

Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.