

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Ордена Ленина Сибирское отделение
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
им. Г.И. Будкера СО РАН

Р.Е. Герасимов, В.С. Фадин

ВКЛАД СКАЛЯРОВ
В ЯДРО УРАВНЕНИЯ БФКЛ

ИЯФ 2008-36

НОВОСИБИРСК
2008

Вклад скаляров в ядро уравнения БФКЛ

Р.Е. Герасимов, В.С. Фадин

Институт ядерной физики им. Г.И.Будкера
630090, Новосибирск, Россия

Аннотация

Вычислен вклад скалярных частиц в ядро уравнения Балицкого-Фадина-Кураева-Липатова (БФКЛ). Обнаружено большое сокращение между виртуальными и реальными частями этого вклада, аналогичное сокращению во вкладе кварков в квантовой хромодинамике. Найдена причина этого сокращения. Она является общей для всех частиц. Ее понимание позволяет получать суммарные вклады виртуальных и реальных частей без сложных вычислений, необходимых для нахождения их по отдельности.

Scalar contribution to the BFKL kernel

R.E. Gerasimov, V.S. Fadin

Budker Institute of Nuclear Physics
630090, Novosibirsk, Russia
Submitted to “Yadernaya Fizika”

Abstract

The contribution of scalar particles to the kernel of the Balirskii-Fadin-Kuraev-Lipatov (BFKL) equation is calculated. A great cancellation between the virtual and real parts of this contribution, analogous to the cancellation in the quark contribution in QCD, is observed. The reason of this cancellation is discovered. This reason is common for contribution of particles with any spin. Understanding of this reason permits to obtain the total contribution without the complicated calculations, which are necessary for finding separate pieces.

*Work supported in part by the RFBR grant 07-02-00953, in part by the RFBR–MSTI grant 06-02-72041, in part by the INTAS grant 05-100008-8328.

1 Введение

Исследование процессов с малыми значениями Бьеркеновского параметра $x = Q^2/s$ (Q^2 – характерная виртуальность процесса, а s – квадрат полной энергии в системе центра масс) является одной из важнейших задач современных коллайдеров. Наиболее общим для теоретического исследования этих процессов в рамках квантовой хромодинамики (КХД) является метод, предложенный в работах [1]–[5] и получивший название подхода БФКЛ (Балицкого, Фадына, Кураева, Липатова). Он основан на замечательном свойстве КХД – реджезации глюона. Уравнение эволюции амплитуд с энергией, полученное в этом подходе, называется уравнением БФКЛ. Ядро этого уравнения называется соответственно ядром БФКЛ.

Первоначально подход БФКЛ был разработан в главном логарифмическом приближении (ГЛП), когда суммируются только члены $(\alpha_s \ln s)^n$ ряда теории возмущений. В настоящее время он развит в следующем приближении (СГЛП), когда учитываются и члены $\alpha_s(\alpha_s \ln s)^n$. В частности, ядро БФКЛ найдено в следующем за главным порядке как для рассеяния вперед [6], [7] так и для ненулевой передачи импульса и цвета [8]–[12]. В главном порядке вклад в ядро дают только глюоны, но в следующем вклад вносят все взаимодействующие с глюонами частицы.

В настоящее время большой популярностью пользуются суперсимметричные обобщения калибровочных теорий. В этих обобщениях наряду с фермионами в теории присутствуют скалярные частицы, дающие в ядро БФКЛ вклад, который необходимо учитывать. Для рассеяния вперед в расширенной суперсимметричной теории Янга-Миллса с $N = 4$ этот вклад был найден в [13]. Здесь мы находим вклад скалярных частиц, преобразующихся по произвольному представлению цветовой группы для рассеяния с отличной от нуля передачей импульса. Масса частиц считается равной нулю.

2 Определения и основные уравнения

Подход БФКЛ основан на реджезации глюона. Ядро \hat{K} уравнения БФКЛ состоит из «виртуальной» части $\hat{\Omega} = \hat{\omega}_1 + \hat{\omega}_2$, выражающей через глюонную траекторию $j(t) = 1 + \omega(t)$ (обычно траекторией называют $\omega(t)$), и «реальной» \hat{K}_r , связанной с рождением реальных частиц в реджеон-реджеонных столкновениях:

$$\hat{K} = \hat{\Omega} + \hat{K}_r. \quad (1)$$

Ядро действует в пространстве импульсов, перпендикулярных к импульсам начальных частиц p_a, p_b . В этом пространстве введенные выше операторы определяются матричными элементами (принята нормировка $\langle \vec{q}_i | \vec{q}_i' \rangle = \delta(\vec{q}_i - \vec{q}_i')$):

$$\langle \vec{q}_i | \hat{\omega}_i | \vec{q}_i' \rangle = \delta(\vec{q}_i - \vec{q}_i') \omega(-\vec{q}_i^2), \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \langle \vec{q}_1 \vec{q}_2 | \hat{K}_r^{(\mathcal{R})} | \vec{q}_1' \vec{q}_2' \rangle &= \delta(\vec{q} - \vec{q}') \frac{1}{\vec{q}_1^2 \vec{q}_2^2} K_r^{(\mathcal{R})}(\vec{q}_1, \vec{q}_1'; \vec{q}), \\ \vec{q} &= \vec{q}_1 + \vec{q}_2, \quad \vec{q}' = \vec{q}_1' + \vec{q}_2'. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь \vec{q}_i' и \vec{q}_i , $i = 1, 2$ - поперечные импульсы начальных и конечных реджеонов в t -канале, индекс (\mathcal{R}) обозначает неприводимое представление калибровочной группы $SU(N)_c$ в этом канале; ядро $K_r^{(\mathcal{R})}(\vec{q}_1, \vec{q}_1'; \vec{q})$ выражается через реджеонные вершины по правилам работы [14].

Вклад скалярных частиц в ядро \hat{K} появляется в следующем за лидирующим порядке и состоит из двухпетлевых поправок к траектории и поправок к «реальной» части \hat{K}_r . Траектория записывается в виде

$$\omega(t) = \omega^{(1)}(t) + \omega^{(2)}(t) + \dots, \quad t = -\vec{q}^2, \quad (4)$$

причем в лидирующем приближении

$$\omega^{(1)}(t) = \frac{g^2 N_c t}{2(2\pi)^{D-1}} \int \frac{d^{D-2}r}{\vec{r}^2(\vec{q} - \vec{r})^2} = -g^2(\vec{q}^2) \epsilon \frac{2}{\epsilon} \frac{\Gamma^2(1 + \epsilon)}{\Gamma(1 + 2\epsilon)}, \quad (5)$$

где

$$\vec{q}^2 = \frac{g^2 N_c \Gamma(1 - \epsilon)}{(4\pi)^{2+\epsilon}}, \quad (6)$$

а поправка $\omega^{(2)}(t)$ содержит вклад скалярных частиц $\omega_S^{(2)}(t)$. В формуле (5) и в дальнейшем $D = 4 + 2\epsilon$ – размерность пространства-времени, взятая отличной от 4 для регуляризации расходящихся интегралов, g – перенормированная константа связи. В \overline{MS} схеме она связана с перенормированной g_μ соотношением

$$g^2 = g_\mu^2 \mu^{-2\epsilon} \left[1 + \frac{\beta_0}{N_c} \frac{\vec{g}_\mu^2}{\epsilon} \right], \quad (7)$$

где

$$\vec{g}_\mu^2 = \frac{g_\mu^2 N_c \Gamma(1 - \epsilon)}{(4\pi)^{2+\epsilon}}, \quad (8)$$

а β_0 – первый коэффициент в разложении β -функции, имеющий в КХД с n_f кварковыми ароматами вид

$$\beta_0 = \frac{11N_c}{3} - \frac{2}{3}n_f. \quad (9)$$

"Реальная" часть может быть представлена [14] в виде

$$K_r^{(\mathcal{R})}(\vec{q}_1, \vec{q}_2; \vec{q}) = \int \frac{ds_{RR}}{(2\pi)^D} ImA_{RR}^{(\mathcal{R})}(q_1, q_2; q), \quad (10)$$

где $ImA_{RR}^{(\mathcal{R})}(q_1, q_2; q)$ – s -канальная мнимая часть амплитуды рассеяния реджеонов с начальными импульсами $q_1 = \beta p_a + q_{1\perp}$, $-q'_1 = \alpha p_b - q'_{1\perp}$ и передачей импульса $q = q_\perp$; $q_1 - q'_1 = k$ – полный импульс в s -канале, $ds_{RR} = dk^2$. Мнимая часть амплитуды выражается через эффективные вершины рождения частиц в реджеон-реджеонных столкновениях, с использованием оператора проектирования \hat{P}_R двух-глюонного цветового состояния в t -канале на представление \mathcal{R} группы:

$$ImA_{RR}^{(\mathcal{R})}(q_1, q'_1; q) = \frac{\langle c_1 c_2 | \hat{P}_R | c'_1 c'_2 \rangle}{2n_R} \sum_{\{f\}} \int \gamma_{c_1 c'_1}^{\{f\}}(q_1, q'_1) (\gamma_{c_2 c'_2}^{\{f\}}(-q_2, -q'_2))^* d\rho_f. \quad (11)$$

Здесь c_i и c'_i , $i = 1, 2$ – цветовые индексы реджеонов, $q_1 + q_2 = q'_1 + q'_2 = q = q_\perp$, n_R – число независимых состояний в представлении \mathcal{R} , $\gamma_{c_1 c'_1}^{\{f\}}(q_1, q'_1)$ – эффективная вершина для рождения состояния $\{f\}$ в реджеон-реджеонном столкновении, суммирование идет по всем возможным состояниям и их дискретным квантовым числам, $d\rho_f$ – фазовый объем состояния $\{f\}$. В ГЛП состояние $\{f\}$ может быть только одно-глюонным; вершина рождения глюона в борновском приближении

$$\gamma_{c_1 c'_1}^{(B)G}(q_1, q'_1) = g T_{c_1 c'_1}^d \epsilon_G^{*d} e_G^{*\rho} C_\rho(q_1, q'_1), \quad (12)$$

где T^d – цветовые генераторы в присоединенном представлении, $T_{ab}^d = -if_{dab}$, f_{abc} – структурные константы группы, e_G и ϵ_G – вектор поляризации и цветовая волновая функция глюона соответственно,

$$C^\rho(q_1, q'_1) = (-q_{1\perp} - q'_{1\perp})^\rho + \beta p_a^\rho \left(1 - \frac{2\vec{q}_1'^2}{s\alpha\beta}\right) - \alpha p_b^\rho \left(1 - \frac{2\vec{q}_1'^2}{s\alpha\beta}\right), \quad (13)$$

и

$$d\rho_G = (2\pi)^D \delta^D(q_1 - q'_1 - k) \frac{d^{D-1}k}{(2\pi)^{D-1}2\omega} = 2\pi \delta(k^2), \quad (14)$$

причем $k^2 = s\alpha\beta - \vec{k}^2$. Благодаря поперечности вектора $C(q_1, q'_1)$, $k_\rho C^\rho(q_1, q'_1) = 0$, в сумму по поляризациям глюона можно включить продольные и временные поляризации, так что

$$\sum_G e_G^{*\rho} e_G^\sigma \rightarrow -g^{\rho\sigma}. \quad (15)$$

Используя при $k^2 = 0$ равенство

$$C_\rho(q_1, q'_1) C^\rho(-q_2, -q'_2) = 2\vec{q}^2 - 2 \frac{\vec{q}_1^2 \vec{q}_2'^2 + \vec{q}_2^2 \vec{q}_1'^2}{\vec{k}^2}, \quad (16)$$

суммирование по цветам

$$\sum_G \epsilon_G^{*d} \epsilon_G^{d'} = \delta^{dd'}, \quad (17)$$

и определение

$$N_{cCR} = \frac{\langle c_1 c_2 | \hat{P}_R | c'_1 c'_2 \rangle}{n_R} T_{c_1 c'_1}^d \left(T_{c_2 c'_2}^d \right)^*, \quad (18)$$

получаем реальную часть ядра в ведущем порядке

$$K_r^{(\mathcal{R})(B)}(\vec{q}_1, \vec{q}'_1; \vec{q}) = \frac{g^2 N_{cCR}}{(2\pi)^{D-1}} \left(\frac{\vec{q}_1^2 \vec{q}_2'^2 + \vec{q}_2^2 \vec{q}_1'^2}{\vec{k}^2} - \vec{q}^2 \right). \quad (19)$$

Наиболее интересные представления \mathcal{R} - цветовой синглет и антисимметричный цветовой октет. Для синглетного случая

$$\langle c_1 c_2 | \hat{P}_1 | c'_1 c'_2 \rangle = \frac{\delta_{c_1 c_2} \delta_{c'_1 c'_2}}{N_c^2 - 1}, \quad n_1 = 1, \quad c_1 = 1, \quad (20)$$

и для октетного случая

$$\langle c_1 c_2 | \hat{P}_{8_a} | c'_1 c'_2 \rangle = \frac{f^{i c_1 c_2} f^{i c'_1 c'_2}}{N_c}, \quad n_8 = N_c^2 - 1, \quad c_8 = \frac{1}{2}. \quad (21)$$

В следующем за главным приближении $\{f\}$ может быть как одночастичным (глюонным), так и двух-частичным состоянием. Скалярные частицы нужно учитывать в обоих случаях: в первом в виртуальной поправке к вершине рождения глюона, а во втором их реальное рождение. Обозначим их вклад в первом случае $K_{RRG}^{(\mathcal{R})S}$, а во втором $K_{RRSS}^{(\mathcal{R})}$. Таким образом, вклад скаляров в реальную часть ядра представляется в виде:

$$K_r^{(\mathcal{R})S}(\vec{q}_1, \vec{q}'_1; \vec{q}) = K_{RRG}^{(\mathcal{R})S}(\vec{q}_1, \vec{q}'_1; \vec{q}) + K_{RRSS}^{(\mathcal{R})}(\vec{q}_1, \vec{q}'_1; \vec{q}). \quad (22)$$

Для его вычисления в первом случае нужно знать виртуальный вклад скалярных частиц в реджеон-реджеон-глюонную вершину; во втором – вершину рождения пары скалярных частиц.

3 Вклад в глюонную траекторию Редже

В работах [15]-[18] в КХД получено выражение для кваркового вклада в траекторию в форме интеграла по пространству поперечных импульсов, в котором подинтегральная функция выражается через кварковый поляризационный оператор:

$$\omega_f^{(2)}(t) = \frac{g^4 \vec{q}^2 n_f N_c}{4(2\pi)^{D-1}} \int \frac{d^{D-2} r}{\vec{r}^2 (\vec{r} - \vec{q})^2} [P_f(-\vec{q}^2) - P_f(-\vec{r}^2) - P_f(-(\vec{q} - \vec{r})^2)], \quad (23)$$

где для безмассовых кварков

$$P_f(q^2) = \frac{8\Gamma(1-\epsilon)\Gamma^2(2+\epsilon)}{(4\pi)^{D/2}} \frac{(\bar{q}^2)^\epsilon}{\Gamma(4+2\epsilon)\epsilon}, \quad q^2 = -\bar{q}^2. \quad (24)$$

Поляризационный оператор $P_f(q^2)$ определен таким образом, что он входит в знаменатель поперечной части полной функции Грина глюона в виде $1 - g^2 P_f(q^2) n_f/2$. При этом кварковый вклад в β_0 равен вычету $P_f(q^2)$ в полюсе $\epsilon = 0$, умноженному на $-(4\pi)^2 n_f/2$.

Вклад скаляров в траекторию получается заменой $P_f(q^2)$ на поляризационный оператор скалярных частиц $P_s(q^2)$ [13], [21]

$$P_s(q^2) = 2 \frac{\Gamma(1-\epsilon)\Gamma^2(2+\epsilon)}{(4\pi)^{D/2}} \frac{(\bar{q}^2)^\epsilon}{\Gamma(4+2\epsilon)\epsilon(1+\epsilon)}, \quad (25)$$

с соответствующей заменой группового и ароматного множителей. Для скаляров, преобразующихся по присоединенному представлению цветовой группы, это замена [13], [21] $n_f \rightarrow n_s N_c$. Легко понять, что в общем случае замена будет $n_f \rightarrow n_s 2T_s$, где T_s определяется равенством

$$\delta^{ab} T_s = \kappa \text{Tr} \left(T_s^a T_s^b \right), \quad (26)$$

в котором T_s^a – генераторы представления цветовой группы для скалярных частиц, а коэффициент κ равен $1/2$ (1) если представление эквивалентно (не эквивалентно) своему сопряженному.

Поскольку поляризационный оператор $P_s(q^2)$ отличается от $P_f(q^2)$ только численным множителем $1/(4(1+\epsilon))$, воспользовавшись полученным в [18] результатом интегрирования (23) для кваркового случая, получаем

$$\begin{aligned} \omega_s^{(2)}(t) &= \bar{g}^4 (\bar{q}^2)^{2\epsilon} \frac{2n_s T_s}{N_c \epsilon (1+\epsilon)} \frac{\Gamma^2(2+\epsilon)}{\Gamma(4+2\epsilon)} \\ &\times \left[\frac{2\Gamma^2(1+\epsilon)}{\epsilon \Gamma(1+2\epsilon)} - \frac{3\Gamma(1-2\epsilon)\Gamma(1+\epsilon)\Gamma(1+2\epsilon)}{\epsilon \Gamma^2(1-\epsilon)\Gamma(1+3\epsilon)} \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

В пределе $\epsilon \rightarrow 0$ уравнение (27) дает

$$\omega_s^{(2)}(t) = -\bar{g}^4 (\bar{q}^2)^{2\epsilon} \frac{n_f T_s}{3N_c} \frac{1}{\epsilon^2} \left[1 - \frac{8}{3}\epsilon - \left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{52}{9} \right) \epsilon^2 \right]. \quad (28)$$

Поскольку вклад скаляров в β_0 получается из кваркового заменой $n_f \rightarrow n_s T_s/2$, т.е. равен

$$\beta_0^s = -\frac{n_s}{3} T_s, \quad (29)$$

то после перехода к перенормированному заряду имеем

$$\begin{aligned} \omega_s(t) &= \bar{g}_\mu^4 \frac{n_s T_s}{3N_c} \frac{1}{\epsilon^2} \left(\frac{\bar{q}^2}{\mu^2} \right)^\epsilon \left[2 \left(1 - \frac{\pi^2}{6} \epsilon^2 \right) - \left(\frac{\bar{q}^2}{\mu^2} \right)^\epsilon \left(1 - \frac{8}{3} \epsilon - \left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{52}{9} \right) \epsilon^2 \right) \right] \\ &= \bar{g}_\mu^4 \frac{n_s T_s}{3N_c} \left[\frac{1}{\epsilon^2} - \ln^2 \left(\frac{\bar{q}^2}{\mu^2} \right) + \frac{8}{3} \left(\frac{1}{\epsilon} + 2 \ln \left(\frac{\bar{q}^2}{\mu^2} \right) \right) - \frac{52}{9} \right]. \end{aligned} \quad (30)$$

4 Вклад скаляров в "реальную" часть ядра

4.1 Вклад в вершину рождения реального глюона

Реджеон-реджеон-глюонная вершина $\gamma_{c_1 c'_1}^G(q_1, q'_1)$ (а значит и интересующий нас вклад скаляров в нее) может быть извлечена из амплитуды $\mathcal{A}_{AB}^{A'GB'}$ рождения глюона G в центральной области быстрот при рассеянии частиц высокой энергии A и B . Поскольку вершина не зависит от сталкивающихся частиц, можно брать их любыми. Мы будем рассматривать рассеяние скалярных частиц. Радиационные поправки, связанные с виртуальными скалярными частицами, не содержат логарифмов энергии, поэтому при учете только таких поправок указанная амплитуда сохраняет борновский вид:

$$\mathcal{A}_{AB}^{A'GB'} = 2s\Gamma_{A'A}^{c_1} \frac{1}{q_1^2} \gamma_{c_1 c'_1}^G(q_1, q'_1) \frac{1}{q_1'^2} \Gamma_{B'B}^{c'_1}, \quad (31)$$

где $\Gamma_{A'A}^c$ и $\Gamma_{B'B}^c$ – вершины взаимодействия реджеонов со скалярными частицами, $s = (p_a + p_b)^2$, p_a и p_b – импульсы частиц A и B соответственно, $q_1 = p_a - p_{a'}$, $q'_1 = p_{b'} - p_b$. В мультиреджевской кинематике

$$s \gg s_i \gg |t_1| \sim |t'_1|, \quad i, j = 1, 2; \quad s_1 = (p_a - q_1')^2, \quad s_2 = (p_b + q_1)^2, \quad t_1 = q_1^2, \quad t'_1 = q_1'^2. \quad (32)$$

При этом можно считать

$$q_1 \simeq q_{1\perp} + \beta p_a, \quad q'_1 \simeq q'_{1\perp} - \alpha p_b, \quad \alpha, \beta \ll 1, \quad s\alpha\beta \sim |q_{1\perp}^2| \sim |q'_{1\perp}{}^2|, \quad (33)$$

где индекс \perp обозначает поперечные к p_a и p_b компоненты вектора; так что $q_1^2 \simeq q_{1\perp}^2 \equiv -\bar{q}_1^2$, $q_1'^2 \simeq q'_{1\perp}{}^2 \equiv -\bar{q}'_1{}^2$. Обозначая импульс рожденного глюона k , имеем $q_1 - q'_1 = k$, и из условия реальности $k^2 = 0$ получаем $s\alpha\beta = (\bar{q}_1 - \bar{q}'_1)^2 = \bar{k}^2$.

В борновском приближении вершины рассеяния частиц реджеоном $\Gamma_{A'A}^{(B)c}$ и $\Gamma_{B'B}^{(B)c}$ получаются сверткой соответствующих вершин рассеяния глюоном, имеющим цветовой индекс c и лоренцовский индекс μ , с векторами ip_b^μ/s и ip_a^μ/s соответственно, так что

$$\Gamma_{A'A}^{(B)c} = g\langle A'|T_s^c|A\rangle, \quad \Gamma_{B'B}^{(B)c} = g\langle B'|T_s^c|B\rangle, \quad (34)$$

где $|A\rangle$, $|B\rangle$ и $|A'\rangle$, $|B'\rangle$ – цветовые состояния начальных и конечных частиц. Вершина рождения глюона в борновском приближении определена в (12), (13).

Радиационные поправки к скалярным вершинам рассеяния могут быть легко вычислены так же как к кварковым [19]. Нас будут интересовать только вклады, пропорциональные n_s . Эти вклады входят только через поляризацию вакуума, так что их учет приводит к появлению множителей $1 + g^2 P_s(q_1^2)n_s T_s/2$ и $1 + g^2 P_s(q_1'^2)n_s T_s/2$ в вершинах $\Gamma_{A'A}^c$ и $\Gamma_{B'B}^c$ соответственно.

При рассеянии скалярных частиц радиационные поправки к амплитуде $\mathcal{A}_{AB}^{A'GB'}$ наряду с членами пропорциональными n_s содержат не зависящие от n_s члены. Так же как и для кварков [20] последние члены относятся к поправкам к вершинам $\Gamma_{A'A}^c$ и $\Gamma_{B'B}^c$ и мы не будем их рассматривать. Поправки, пропорциональные n_s , можно разбить на две части, представленные фейнмановскими диаграммами с двумя и тремя пропагаторами скалярных частиц соответственно (диаграммы с одним пропагатором в размерностной регуляризации дают нуль). Учтем, что вклад диаграмм с двух-глюонными вершинами зануляется при интегрировании в силу его антисимметрии относительно перестановки импульсов частиц и античастиц, и что вклад диаграмм поляризации вакуума для глюона на массовой поверхности в размерностной регуляризации равен нулю. Поэтому первая часть представляется диаграммами рис. 1a – 1c, которые отличаются от борновских вставками поляризационного оператора в пропагатор глюона с импульсом q_1 , и диаграмм, получающихся из них заменами $A \leftrightarrow B$, $A' \leftrightarrow B'$ (в которых поляризационный оператор вставляется в пропагатор глюона с импульсом q'_1). Мы используем фейнмановскую калибровку для пропагаторов глюонов и стандартную замену числителя $g^{\mu\nu}$ глюонного пропагатора, соединяющего вершины с индексами μ и ν ,

$$g^{\mu\nu} \rightarrow \frac{2p_b^\mu p_a^\nu}{s}, \quad (35)$$

если в первой (второй) вершине компоненты импульсов вдоль p_a (p_b) велики по сравнению с такими компонентами во второй (первой). Для вкладов диаграмм рис. 1a – 1c получаем соответственно

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^a &= 2s \Gamma_{A'A}^{(B)c_1} \frac{1}{q_1^2} \frac{1}{q_1'^2} \Gamma_{B'B}^{(B)c_1'} \\ &\times g^2 n_s T_s P_s(q_1^2) g T_{c_1 c_1'}^d \epsilon_G^{*d} e_G^{*\rho} [(-q_1 - q_1')_\rho + 2\beta p_{a\rho} - 2\alpha p_{b\rho}], \end{aligned} \quad (36)$$

$$\mathcal{A}^{b+c} = 2s \Gamma_{A'A}^{(B)c_1} \frac{1}{q_1^2} \frac{1}{q_1'^2} \Gamma_{B'B}^{(B)c_1'} g^2 n_s T_s P^s(q_1^2) g T_{c_1 c_1'}^d \epsilon_G^{*d} e_G^{*\rho} \left[2p_{b\rho} \left(\frac{\bar{q}_1'^2}{s\beta} \right) \right]. \quad (37)$$

Для диаграмм, получающихся из рис. 1a – 1c заменами $A \leftrightarrow B$, $A' \leftrightarrow B'$ имеем соответственно

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{a'} &= 2s \Gamma_{A'A}^{(B)c_1} \frac{1}{q_1^2} \frac{1}{q_1'^2} \Gamma_{B'B}^{(B)c_1'} \\ &\times g^2 n_s T_s P_s(q_1'^2) g T_{c_1 c_1'}^d \epsilon_G^{*d} e_G^{*\rho} [(-q_1 - q_1')_\rho + 2\beta p_{a\rho} - 2\alpha p_{b\rho}], \end{aligned} \quad (38)$$

$$\mathcal{A}^{b'+c'} = 2s \Gamma_{A'A}^{(B)c_1} \frac{1}{q_1^2} \frac{1}{q_1'^2} \Gamma_{B'B}^{(B)c_1'} g^2 n_s T_s P_s(q_1'^2) g T_{c_1 c_1'}^d \epsilon_G^{*d} e_G^{*\rho} \left[-2p_{a\rho} \left(\frac{\bar{q}_1'^2}{s\alpha} \right) \right]. \quad (39)$$

Суммируя (36), (37), (38), (39), получаем весь пропорциональный n_s вклад диаграмм с двумя пропагаторами скалярных частиц:

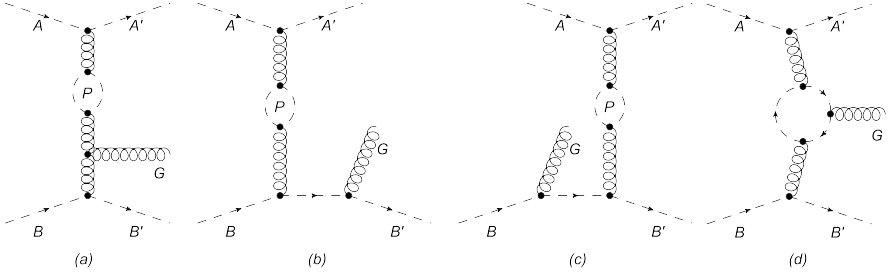


Fig. 1. Диаграммы для радиационных поправок, пропорциональных n_s , к амплитуде $\mathcal{A}_{AB}^{A'GB'}$.

$$\mathcal{A}^{(2)} = 2s\Gamma_{A'A}^{(B)c_1} \frac{1}{q_1^2} \frac{1}{q_1'^2} \Gamma_{B'B}^{(B)c_1'} g^2 n_s T_s g T_{c_1 c_1'}^d \epsilon_G^{*d} e_G^{*p} \times \left\{ P_s(q_1^2) \left[C_\rho(q_1, q_1') + 2p_{a\rho} \left(\frac{\bar{q}_1^2}{s\alpha} \right) \right] + P^s(q_1'^2) \left[C_\rho(q_1, q_1') - 2p_{b\rho} \left(\frac{\bar{q}_1'^2}{s\beta} \right) \right] \right\}. \quad (40)$$

Одна из двух диаграмм с тремя пропагаторами скалярных частиц представлена на рис. 1d; вторая получается изменением направления стрелок на линиях виртуальных частиц. В отсутствие цветových множителей вклады этих диаграмм должны сокращать друг друга согласно теореме Фарри, так что достаточно вычислить вклад диаграммы рис. 1d с цветовым множителем

$$\kappa \text{Tr} \left(\left[T_s^{c_1} T_s^{c_1'} \right] T_s^d \right) = -T_s T_{c_1 c_1'}^d. \quad (41)$$

В результате вклад диаграмм с тремя пропагаторами записывается в виде:

$$\mathcal{A}^{(3)} = 2s\Gamma_{A'A}^{(B)c_1} \frac{1}{q_1^2} \frac{1}{q_1'^2} \Gamma_{B'B}^{(B)c_1'} 2g^2 n_s T_s g T_{c_1 c_1'}^d \epsilon_G^{*d} e_G^{*p} \frac{p_a^\mu p_b^\nu}{s} V_{\mu\nu\rho}^{(0)}(q_1, q_1'), \quad (42)$$

где тензор

$$V_{\mu\nu\rho}^{(0)}(q_1, q_1') = i \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{(2p+q_1)_\mu (2p+q_1+q_1')_\rho (2p+q_1')_\nu}{p^2 (p+q_1)^2 (p+q_1')^2}; \quad (43)$$

индекс $^{(0)}$ указывает, что тензор вычисляется при $k^2 = (q_1 - q_1')^2 = 0$.

Для того, чтобы из выражений (40) и (40) найти поправки к вершине рождения глюона, надо вычесть из их суммы члены, связанные с поправками к вершинам $\Gamma_{A'A}^c$ и $\Gamma_{B'B}^c$. Эти члены равны произведению борновской амплитуды на $g^2 P_s(q_1^2) n_s T_s / 2$ и $g^2 P_s(q_1'^2) n_s T_s / 2$ соответственно. После такого вычитания получаем, что поправки к вершине рождения глюона, связанные со

скалярными частицами, имеют вид:

$$\begin{aligned} \gamma_{c_1 c_1'}^{(s)G}(q_1, q_1') &= n_s T_s g^3 T_{c_1 c_1'}^d \epsilon_G^{*d} \epsilon_G^{*\rho} \left[C_\rho(q_1, q_1') \frac{1}{2} (P_s(q_1^2) + P_s(q_1'^2)) \right. \\ &\left. + 2p_{a\rho} \left(\frac{\vec{q}_1^2}{s\alpha} \right) P_s(q_1^2) - 2p_{b\rho} \left(\frac{\vec{q}_1'^2}{s\beta} \right) P_s(q_1'^2) + 2 \frac{p_a^\mu p_b^\nu}{s} V_{\mu\nu\rho}^{(0)}(q_1, q_1') \right]. \end{aligned} \quad (44)$$

Вычисление тензора $V_{\mu\nu\rho}^{(0)}(q_1, q_1')$ не столь тривиально как предыдущие и требует некоторых усилий. Оно описано в Приложении А. Здесь мы приведем только результат. Опуская члены с $(q_1 - \vec{q}_1')_\rho$, зануляющиеся при свертке с вектором поляризации, имеем

$$\begin{aligned} 2 \frac{p_a^\mu p_b^\nu}{s} V_{\mu\nu\rho}^{(0)}(q_1, q_1') &= \frac{2\Gamma(1-\epsilon)\Gamma^2(1+\epsilon)}{\epsilon\Gamma(4+2\epsilon)(4\pi)^{D/2}(\vec{q}_1^2 - \vec{q}_1'^2)^2} \left\{ \alpha p_{b\rho} ((\vec{q}_1^2 - \vec{q}_1'^2)(2+\epsilon)\Phi_1 - f) \right. \\ &\left. - \beta p_{a\rho} ((\vec{q}_1^2 - \vec{q}_1'^2)(2+\epsilon)\Phi_1 + f) - (q_1 + q_1')_\rho \left(\frac{\vec{k}^2 f}{\vec{q}_1^2 - \vec{q}_1'^2} - (1+\epsilon)(\vec{q}_1^2 - \vec{q}_1'^2)\Phi_1 \right) \right\}, \end{aligned} \quad (45)$$

где

$$f = (\vec{q}_1^2 + \vec{q}_1'^2) \epsilon \Phi_1 - 2\vec{q}_1^2 \vec{q}_1'^2 (1+\epsilon)\Phi_0, \quad \Phi_n = (\vec{q}_1^2)^{n+\epsilon} - (\vec{q}_1'^2)^{n+\epsilon}. \quad (46)$$

Оказывается, однако, что можно вообще избежать вычисления этого тензора, поскольку связанный с ним вклад в ядро БФКЛ сокращается со вкладом рождения реальных частиц. Поэтому ниже в выражении для ядра мы не используем явный вид свертки (45).

4.2 Вклад виртуальных скалярных частиц

Согласно формулам (10), (11) и (14), одноглюонная часть ядра представляется в виде

$$K_{RRG}^{(\mathcal{R})}(\vec{q}_1, \vec{q}_1', \vec{q}) = \frac{\langle c_1 c_2 | \hat{P}_R | c_1' c_2' \rangle}{2n_R (2\pi)^{D-1}} \sum_G \gamma_{c_1 c_1'}^G(q_1, q_1') (\gamma_{c_2 c_2'}^G(-q_2, -q_2'))^* \quad (47)$$

Нужный нам вклад дают произведения $\gamma_{c_1 c_1'}^{(s)G}(q_1, q_1') (\gamma_{c_2 c_2'}^{(0)G}(-q_2, -q_2'))^*$ и $\gamma_{c_1 c_1'}^{(0)G}(q_1, q_1') (\gamma_{c_2 c_2'}^{(s)G}(-q_2, -q_2'))^*$. Входящие в них вершины определены в (12), (13) и (44). Используя формулы (17), (18) для суммирования по цветам и (15), (16) для суммирования по поляризациям, а также соотношения

$$\frac{2p_{a\rho}}{s\alpha} C^\rho(q_1, q_1') = -\left(1 - \frac{2\vec{q}_1'^2}{k^2}\right), \quad \frac{2p_{b\rho}}{s\beta} C^\rho(q_1, q_1') = \left(1 - \frac{2\vec{q}_1^2}{k^2}\right) \quad (48)$$

при $k^2 = 0$, получаем для вклада виртуальных скалярных частиц:

$$K_{RRG}^{(\mathcal{R})S}(\vec{q}_1, \vec{q}'_1, \vec{q}) = \frac{g^2 n_s T_s}{2} \frac{g^2 N_c c_R}{(2\pi)^{D-1}} \left\{ \left(\frac{\vec{q}_1^2 \vec{q}'_1{}^2 + \vec{q}_2^2 \vec{q}'_1{}^2}{k^2} - \vec{q}^2 \right) [P_s(q_1^2) + P_s(q_1'^2)] \right. \\ \left. + \vec{q}_1^2 P_s(q_1^2) \left(1 - 2 \frac{\vec{q}_2^2}{k^2} \right) + \vec{q}'_1^2 P_s(q_1'^2) \left(1 - 2 \frac{\vec{q}_2^2}{k^2} \right) - I_0 \right\} + \{1 \leftrightarrow 2\}, \quad (49)$$

где

$$I_0 = 2 \frac{p_a^\mu p_b^\nu}{s} C^\rho(-q_2, -q'_2) V_{\mu\nu\rho}^{(0)}(q_1, q'_1), \quad (50)$$

$1 \leftrightarrow 2$ означает $q_1 \leftrightarrow -q_2$, $q'_1 \leftrightarrow -q'_2$.

4.3 Вершина рождения пары скалярных частиц

Чтобы найти эффективную вершину рождения пары скалярных частиц, достаточно вычислить амплитуду процесса $A + B \rightarrow A' + S_1 + S_1 + B'$ с частицами S_1 и S_2 в центральной области быстрой и записать ее в виде (31) с заменой $G \rightarrow S_1 S_2$. Будем использовать обозначения l_1 и l_2 для импульсов частиц S_1 и S_2 соответственно, судаковское разложение для них

$$l_i = l_{i\perp} + \beta_i p_a + \alpha_i p_b, \quad (51)$$

и по-прежнему будем обозначать

$$k = q_1 - q'_1 = \beta p_a + \alpha p_b + q_{1\perp} - q'_{1\perp}, \quad (52)$$

так что

$$l_1 + l_2 = k, \quad \beta_1 + \beta_2 = \beta, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha. \quad (53)$$

Вклад в вершину диаграмм двух-глюонного рождения пары скалярных частиц (рис. 2) легко найти пользуясь заменой (35) и выражениями для вершин рассеяния (34). Для вкладов диаграмм рис. 2а - 2с получаем соответственно

$$\gamma_{c_1 c'_1}^{(a)}(q_1, q'_1) = g^2 (T_s^{c_1} T_s^{c'_1})_{s_1 s_2} \frac{2s\alpha_1\beta_2}{\tilde{t}_1}, \quad (54)$$

$$\gamma_{c_1 c'_1}^{(b)}(q_1, q'_1) = g^2 (T_s^{c'_1} T_s^{c_1})_{s_1 s_2} \frac{2s\alpha_2\beta_1}{\tilde{t}'_1}, \quad (55)$$

$$\gamma_{c_1 c'_1}^{(c)}(q_1, q'_1) = g^2 (T_s^{c_1} T_s^{c'_1} + T_s^{c'_1} T_s^{c_1})_{s_1 s_2}, \quad (56)$$

где s_1 и s_2 - цветовые индексы рожденных частиц и

$$\tilde{t}_1 = (l_1 - q_1)^2, \quad \tilde{t}'_1 = (l_2 - q_1)^2. \quad (57)$$

Заметим, что в выражении для вершины рождения глюона (12), (13) не было использовано условие его реальности $k^2 = 0$. С учетом этого обстоятельства

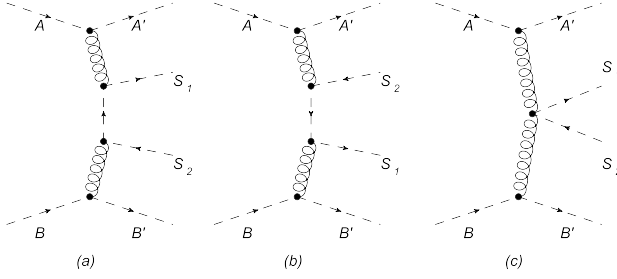


Fig. 2. Диаграммы с рождением пары скалярных частиц.

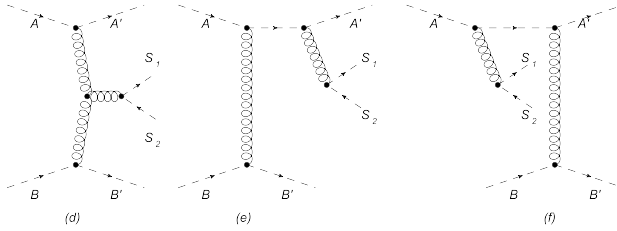


Fig. 3. Диаграммы с рождением пары скалярных частиц.

легко понять, что вклад диаграмм одно-глюонного рождения (рис. 3) получится из вершины рождения глюона заменой его волновой функцией $\epsilon_G^{*d} e_G^{*p}$ на пропагатор виртуального глюона $-i\delta^{dd'} g^{\rho\sigma}/k^2$ умноженный на вершину рождения скалярной пары $-ig(T_s^{d'})_{s_1 s_2} (l_1 - l_2)_\sigma$, так что

$$\gamma_{c_1 c'_1}^{(1)}(q_1, q'_1) = g^2 (T_s^{c_1} T_s^{c'_1} - T_s^{c'_1} T_s^{c_1})_{s_1 s_2} \frac{C_\rho(q_1, q'_1)(l_1 - l_2)^\rho}{k^2}. \quad (58)$$

Введем обозначения:

$$b(q_1; l_1, l_2) = \frac{2s\alpha_1\beta_2}{\tilde{t}'_1} + 1 + \frac{C_\rho(q_1, q'_1)(l_1 - l_2)^\rho}{k^2}, \quad (59)$$

$$b(q_1; l_2, l_1) = \frac{2s\alpha_2\beta_1}{\tilde{t}'_1} + 1 - \frac{C_\rho(q_1, q'_1)(l_1 - l_2)^\rho}{k^2}. \quad (60)$$

Тогда, суммируя выражения (54) - (58), получаем:

$$\gamma_{c_1 c'_1}^{S_1 S_2}(q_1, q'_1) = g^2 [(T_s^{c_1} T_s^{c'_1})_{s_1 s_2} b(q_1; l_1, l_2) + (T_s^{c'_1} T_s^{c_1})_{s_1 s_2} b(q_1; l_2, l_1)]. \quad (61)$$

4.4 Вклад в ядро от рождения скалярной пары

Используя (61), из (10) и (11) получаем

$$\begin{aligned}
 K_{RRSS}^{(\mathcal{R})}(\vec{q}_1, \vec{q}'_1; \vec{q}) &= \kappa \frac{g^4}{(2\pi)^{D-1}} \int \frac{dk^2}{(2\pi)} d\rho_f \frac{\langle c_1 c_2 | \hat{P}_R | c'_1 c'_2 \rangle}{2n_R} \\
 &\times \sum_{\{s_1 s_2\}} \left[(T_s^{c_1} T_s^{c'_1})_{s_1 s_2} b(q_1; l_1, l_2) + (T_s^{c'_1} T_s^{c_1})_{s_1 s_2} b(q_1; l_2, l_1) \right] \\
 &\times \left[(T_s^{c'_2} T_s^{c_2})_{s_2 s_1} b(-q_2; l_1, l_2) + (T_s^{c_2} T_s^{c'_2})_{s_2 s_1} b(-q_2; l_2, l_1) \right]. \quad (62)
 \end{aligned}$$

Здесь κ – введенный в (26) коэффициент, равный $1/2$ (1) если представление, по которому преобразуются скалярные частицы, эквивалентно (не эквивалентно) своему сопряженному;

$$d\rho_f = (2\pi)^D \delta^D(q_1 - q'_1 - k) \frac{d^{D-1}l_1}{(2\pi)^{D-1}2\omega_1} \frac{d^{D-1}l_2}{(2\pi)^{D-1}2\omega_2}. \quad (63)$$

Проведя суммирование по сортам родившихся частиц и по их цветам согласно формуле

$$\sum_{\{s_1 s_2\}} (T_s^a T_s^b)_{s_1 s_2} (T_s^c T_s^d)_{s_2 s_1} = Tr \left(T_s^a T_s^b T_s^c T_s^d \right), \quad (64)$$

воспользовавшись симметрией интегрирования относительно перестановки импульсов этих частиц, соотношением

$$\begin{aligned}
 \kappa Tr \left(T_s^a T_s^b T_s^c T_s^d + T_s^b T_s^a T_s^d T_s^c - T_s^a T_s^b T_s^d T_s^c - T_s^b T_s^a T_s^c T_s^d \right) \\
 = T_{ab}^i T_{cd}^j k Tr \left(T_s^i T_s^j \right) = T_{ab}^i T_{cd}^i, \quad (65)
 \end{aligned}$$

где T_s определено в (26), и формулой (18) с учетом $T_{cd}^i = (T_{dc}^i)^*$, представим (62) в виде суммы "неабелевой" и "абелевой" частей

$$K_{RRSS}^{(\mathcal{R})} = K_{RRSS}^{(\mathcal{R})n} + K_{RRSS}^{(\mathcal{R})a}, \quad (66)$$

где

$$K_{RRSS}^{(\mathcal{R})n}(\vec{q}_1, \vec{q}'_1; \vec{q}) = \frac{g^4 N_c}{(2\pi)^{D-1}} \frac{n_s T_s c_R}{2} \int \frac{dk^2}{(2\pi)} d\rho_f b(q_1; l_1, l_2) b(-q_2; l_1, l_2), \quad (67)$$

и

$$\begin{aligned}
 K_{RRSS}^{(\mathcal{R})a}(\vec{q}_1, \vec{q}'_1; \vec{q}) &= \frac{g^4}{(2\pi)^{D-1}} \frac{n_s b_R}{2} \int \frac{dk^2}{(2\pi)} d\rho_f (b(q_1; l_1, l_2) + b(q_1; l_1, l_2)) \\
 &\times (b(-q_2; l_1, l_2) + b(-q_2; l_2, l_1)). \quad (68)
 \end{aligned}$$

В последней части в подынтегральном выражении вклад одно-глюонного механизма сокращается (см. (59), (60)) и оно становится таким же, как в скалярной электродинамике (аналогом ядра [22], [23] в КЭД), а цветовой коэффициент b_R определяется равенством

$$b_R = \kappa \frac{\langle c_1 c_2 | \hat{P}_R | c'_1 c'_2 \rangle}{2n_R} T_T [T_s^{c_1} T_s^{c'_1} T_s^{c'_2} T_s^{c_2} + T_s^{c'_1} T_s^{c_1} T_s^{c_2} T_s^{c'_2} + T_s^{c'_1} T_s^{c_1} T_s^{c'_2} T_s^{c_2} + T_s^{c_1} T_s^{c'_1} T_s^{c_2} T_s^{c'_2}] . \quad (69)$$

Отметим здесь, что b_R равно нулю для представлений, антисимметричных по отношению к перестановке цветовых индексов, в частности, для антисимметричного октета. Это обстоятельство играет важную роль для реджезации глюона.

4.5 Неабелева часть вклада

Неабелева часть вклада (67) содержит интеграл

$$I_{na} = \int \frac{dk^2}{(2\pi)} d\rho_f \left(\frac{2s\alpha_1\beta_2}{\tilde{t}_1} + 1 + \frac{C_\rho(q_1, q'_1)(l_1 - l_2)^\rho}{k^2} \right) \times \left(\frac{2s\alpha_1\beta_2}{\tilde{t}_2} + 1 + \frac{C_\sigma(-q_2, -q'_2)(l_1 - l_2)^\sigma}{k^2} \right) , \quad (70)$$

где \tilde{t}_2 получается из \tilde{t}_2 заменой $q_1 \leftrightarrow -q_2$. Удобно выразить его через поперечные компоненты импульсов частиц пары и доли продольных импульсов. В качестве последних можно взять как компоненты вдоль p_a , так и вдоль p_b . Для разных слагаемых в (70) оказывается удобным использовать разные компоненты. Введем переменные

$$x = \frac{\beta_1}{\beta}, \quad 1 - x = \frac{\beta_2}{\beta}, \quad y = \frac{\alpha_2}{\alpha}, \quad 1 - y = \frac{\alpha_1}{\alpha} . \quad (71)$$

Поскольку $s\alpha_1\beta_1 = \vec{l}_1^2$, $s\alpha_2\beta_2 = \vec{l}_2^2$, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, $\beta = \beta_1 + \beta_2$, они связаны соотношениями

$$y = \frac{x\vec{l}_2^2}{x\vec{l}_2^2 + (1-x)\vec{l}_1^2}, \quad x = \frac{y\vec{l}_1^2}{y\vec{l}_1^2 + (1-y)\vec{l}_2^2} . \quad (72)$$

Для меры интегрирования (63) имеем

$$\int \frac{dk^2}{2\pi} d\rho_f = \int_0^1 \frac{dx}{2x(1-x)} \int \frac{d^{D-2}l_1}{(2\pi)^{D-1}} = \int_0^1 \frac{dy}{2y(1-y)} \int \frac{d^{D-2}l_2}{(2\pi)^{D-1}} . \quad (73)$$

В подынтегральном выражении (70) первые два слагаемых в каждой из скобок относятся к матричному элементу двух-глюонного рождения пары, а последние

слагаемые – к матричному элементу одно-глюонного рождения. Соответственно, вклад в I_{na} двух-глюонного рождения есть

$$I_2 = \int \frac{dk^2}{(2\pi)} d\rho_f \left(\frac{2s\alpha_1\beta_2}{\tilde{t}_1} + 1 \right) \times \left(\frac{2s\alpha_1\beta_2}{\tilde{t}_2} + 1 \right) \\ = \int_0^1 \frac{dx}{2x(1-x)} \int \frac{d^{D-2}l_1}{(2\pi)^{D-1}} \left[1 - \frac{2x(1-x)(\vec{Q}_2^2 + \vec{Q}_1^2)l_1^2}{(x\vec{Q}_1^2 + (1-x)\vec{l}_1^2)(x\vec{Q}_2^2 + (1-x)\vec{l}_1^2)} \right], \quad (74)$$

где $\vec{Q}_1 = \vec{l}_1 - \vec{q}_1$, $\vec{Q}_2 = \vec{l}_1 + \vec{q}_2$. Здесь первое слагаемое отбрасывается в размерностной регуляризации; второе легко интегрируется по x . С использованием в полученном результате представления

$$\frac{1}{\vec{Q}_1^2 - \vec{Q}_2^2} \ln \left(\frac{\vec{Q}_1^2}{\vec{Q}_2^2} \right) = \int_0^1 dz \frac{1}{z\vec{Q}_1^2 + (1-z)\vec{Q}_2^2}, \quad (75)$$

также легко проводится интегрирование по \vec{l}_1 и затем по z . Окончательный ответ:

$$I_2 = \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\epsilon(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma^2(2+\epsilon)}{\Gamma(4+2\epsilon)} \frac{4}{(1+\epsilon)} (\vec{q}^2)^{1+\epsilon} = 2\vec{q}^2 P_s(q^2). \quad (76)$$

Не вызывает затруднений и вычисление одно-глюонного вклада

$$I_1 = \int \frac{dk^2}{(2\pi)} d\rho_f \frac{C_\rho(q_1, q'_1)(l_1 - l_2)^\rho}{k^2} \frac{C_\sigma(-q_2, -q'_2)(l_1 - l_2)^\sigma}{k^2}. \quad (77)$$

Здесь можно воспользоваться тем, что после интегрирования по l_i при фиксированном k в силу релятивистской и калибровочной инвариантности

$$(l_1 - l_2)^\rho (l_1 - l_2)^\sigma \rightarrow \frac{1}{D-1} (k^\rho k^\sigma - g^{\rho\sigma} k^2), \quad (78)$$

причем первое слагаемое не дает вклада в (77). Поэтому

$$I_1 = \int \frac{dk^2}{(2\pi)} d\rho_f \frac{C_\rho(q_1, q'_1) C_\rho(-q_2, -q'_2)}{(1-D)k^2} \\ = \int_0^1 \frac{dx}{2x(1-x)} \int \frac{d^{D-2}l_1}{(2\pi)^{D-1}(D-1)} \left[1 - 2\frac{\vec{q}^2}{k^2} + 2\frac{\vec{q}_1^2 \vec{q}_2'^2 + \vec{q}_1'^2 \vec{q}_2^2}{\vec{k}^2} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 + \vec{k}^2} \right) \right], \quad (79)$$

где $k^2 = (\vec{l}_1 - x\vec{k})^2 / (2x(1-x))$. Здесь ненулевой вклад дает только последнее слагаемое, интегрирование которого тривиально. Окончательный результат:

$$I_1 = \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\epsilon(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma^2(2+\epsilon)}{\Gamma(4+2\epsilon)} \frac{4}{1+\epsilon} \frac{(\vec{k}^2)^\epsilon}{\vec{k}^2} (\vec{q}_1^2 \vec{q}_2'^2 + \vec{q}_1'^2 \vec{q}_2^2) = 2 \frac{\vec{q}_1^2 \vec{q}_2'^2 + \vec{q}_1'^2 \vec{q}_2^2}{\vec{k}^2} P^s(k^2). \quad (80)$$

Интерференционные члены представляются суммой интегралов $I_{int}^{(1)}$ и $I_{int}^{(2)}$, где

$$I_{int}^{(1)} = \int \frac{dk^2}{(2\pi)} d\rho_f \left(\frac{2s\alpha_1\beta_2}{\tilde{t}_1} + 1 \right) \frac{C_\rho(-q_2, -q_2')(l_1 - l_2)^\rho}{k^2}, \quad (81)$$

а $I_{int}^{(2)}$ получается из него заменой $1 \leftrightarrow 2$. Вычисление этих членов гораздо сложнее, чем предыдущих. Оно описано в Приложении Б. Приведем здесь результат.

$$\begin{aligned} I_{int}^{(1)} &= \frac{4\Gamma(-\epsilon)}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma^2(1+\epsilon)}{\Gamma(4+2\epsilon)} \times \\ &\times \left[\frac{\vec{k}^2 f}{(\vec{q}_1^2 - \vec{q}_1'^2)^3} \left(-\vec{k}^2 - \vec{q}^2 + \frac{\vec{q}_1^2}{2} + \frac{\vec{q}_1'^2}{2} + \vec{q}_2^2 + \vec{q}_2'^2 + \frac{(\vec{q}_2'^2 - \vec{q}_2^2)(\vec{q}_1^2 - \vec{q}_1'^2)}{2\vec{k}^2} \right) \right. \\ &\left. + \frac{\epsilon (\vec{k}^2 - \vec{q}_2'^2 - \vec{q}_2^2)}{2(\vec{q}_1^2 - \vec{q}_1'^2)} \Phi_1 - \frac{(1+\epsilon)\vec{q}_1^2 \vec{q}_1'^2}{(\vec{q}_1^2 - \vec{q}_1'^2)} \Phi_0 + \frac{(1+\epsilon)\vec{q}^2}{(\vec{q}_1^2 - \vec{q}_1'^2)} \Phi_1 \right]. \quad (82) \end{aligned}$$

Входящие сюда функции f и Φ_i определены в (46). Оказывается, что полное вычисление $I_{int}^{(1)}$ не обязательно. Как будет показано в следующем разделе, наиболее сложная его часть сокращается с членом I_0 во вкладе виртуальных частиц (49). Поэтому, используя формулы (67), (76), (80), представим неабелеву часть вклада от рождения пары скалярных частиц в следующем виде:

$$\begin{aligned} K_{RRSS}^{(\mathcal{R})n}(\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}) &= \frac{g^4 N_c}{(2\pi)^{D-1}} \frac{n_s T_s c_R}{2} \left\{ 2\vec{q}^2 P^s(q^2) + 2P^s(k^2) \frac{\vec{q}_1^2 \vec{q}_2'^2 + \vec{q}_1'^2 \vec{q}_2^2}{\vec{k}^2} \right. \\ &\left. + \left(I_{int}^{(1)} + 1 \leftrightarrow 2 \right) \right\}. \quad (83) \end{aligned}$$

4.6 Абелева часть

Используя (59) и (60), из (68) получаем

$$\begin{aligned} K_{RRSS}^{(\mathcal{R})a}(\vec{q}_1, \vec{q}_1', \vec{q}) &= \frac{2n_s b_R g^4}{(2\pi)^{D-1}} \int \frac{dk^2}{2\pi} d\rho_f \left\{ \frac{s\alpha_1\beta_2}{\tilde{t}_1} + \frac{s\alpha_2\beta_1}{\tilde{t}'_1} + 1 \right\} \left\{ \frac{s\alpha_1\beta_2}{\tilde{t}_2} + \frac{s\alpha_2\beta_1}{\tilde{t}'_2} + 1 \right\} \\ &= \frac{n_s b_R g^4}{(2\pi)^{D-1}} \int_0^1 dx \int \frac{d^{D-2}l_1}{(2\pi)^{D-1}} x(1-x) \left(\frac{\vec{q}_1^2 - 2(\vec{l}_1 \vec{q}_1)}{\sigma_{11}} + \frac{\vec{q}_1^2 - 2(\vec{l}_2 \vec{q}_1)}{\sigma_{21}} \right) \\ &\quad \left(\frac{\vec{q}_2^2 + 2(\vec{l}_1 \vec{q}_2)}{\sigma_{12}} + \frac{\vec{q}_2^2 + 2(\vec{l}_2 \vec{q}_2)}{\sigma_{22}} \right), \quad (84) \end{aligned}$$

где $\vec{l}_1 + \vec{l}_2 = \vec{k} = \vec{q}_1 - \vec{q}_1'$,

$$\sigma_{11} = (\vec{l}_1 - x\vec{q}_1)^2 + x(1-x)\vec{q}_1^2 = -x\tilde{t}_1,$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{21} &= (\vec{l}_2 - (1-x)\vec{q}_1)^2 + x(1-x)\vec{q}_1'^2 = -(1-x)\vec{t}_1', \\
\sigma_{12} &= (\vec{l}_1 + x\vec{q}_2)^2 + x(1-x)\vec{q}_2'^2 = -x\vec{t}_2', \\
\sigma_{22} &= (\vec{l}_2 + (1-x)\vec{q}_2)^2 + x(1-x)\vec{q}_2'^2 = -(1-x)\vec{t}_2'. \tag{85}
\end{aligned}$$

Объединяя знаменатели с помощью фейнмановской параметризации, можно провести интегрирование по \vec{l}_1 . Следует отметить, что абелева часть не имеет ни ультрафиолетовых, ни инфракрасных сингулярностей, так что может быть вычислена при $D = 4$. Однако и при этом результат остается довольно громоздким:

$$\begin{aligned}
K_{RRSS}^{(\mathcal{R})a}(\vec{q}_1, \vec{q}_1', \vec{q}) &= \frac{n_s b_R \alpha_s^2}{2\pi^3} \int_0^1 dx x(1-x) \int_0^1 dz \left[2\vec{q}_1 \vec{q}_2 \ln \left(\frac{R_{11}}{R_{12}} \right) + \right. \\
&\left. \frac{(\vec{q}_1^2 - 2\vec{r}_{11}\vec{q}_1)(\vec{q}_2^2 + 2\vec{r}_{11}\vec{q}_2)}{R_{11}} + \frac{(\vec{q}_1^2 - 2\vec{r}_{12}\vec{q}_1)(\vec{q}_2'^2 - \vec{k}^2 - 2\vec{r}_{12}\vec{q}_2)}{R_{12}} \right], \tag{86}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\vec{r}_{11} &= x(z\vec{q}_1 - (1-z)\vec{q}_2), \quad \vec{r}_{12} = xz\vec{q}_1 + (1-x)(1-z)\vec{q}_2 + (1-z)\vec{k}, \\
R_{11} &= x(1-x)(z\vec{q}_1^2 + (1-z)\vec{q}_2^2) + x^2z(1-z)\vec{q}^2, \\
R_{12} &= x(1-x)(z\vec{q}_1^2 + (1-z)\vec{q}_2^2) + z(1-z)(x\vec{q}_1'^2 + (1-x)\vec{q}_2'^2 - x(1-x)\vec{q}^2). \tag{87}
\end{aligned}$$

Дальнейшее интегрирование делает его необозримым.

Для нулевой передаче импульса, $\vec{q} = 0$, когда $\vec{q}_2 = -\vec{q}_1$, $\vec{q}_2' = -\vec{q}_1'$, беря интеграл с логарифмическим членом в (86) по частям по z и приводя после этого все слагаемые к общему знаменателю, приходим к согласующемуся с [13] результату

$$\begin{aligned}
K_{RRSS}^{(\mathcal{R})a}(\vec{q}_1, \vec{q}_1', 0) &= \frac{n_s b_R \alpha_s^2}{2\pi^3} \int_0^1 dx \int_0^1 dz \frac{1}{x(1-x)\vec{q}_1^2 + z(1-z)\vec{q}_1'^2} \\
&\times (\vec{q}_1^2 \vec{q}_1'^2 (x(1-x) + z(1-z)) + 4x(1-x)z(1-z) ((\vec{q}_1 \vec{q}_1')^2 - 2q_1^2 \vec{q}_1'^2)). \tag{88}
\end{aligned}$$

Используя интегралы

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dz \frac{1}{x(1-x)a + z(1-z)b} = 2 \int_0^\infty dt \frac{\ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right|}{a + t^2 b}, \tag{89}$$

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dz \frac{z(1-z)}{x(1-x)a + z(1-z)b} = \frac{1}{4} \left(\left(1 - \frac{a}{b}\right) \int_0^\infty dt \frac{\ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right|}{a + t^2 b} + \frac{2}{b} - \frac{\ln \frac{b}{a}}{b} \right), \tag{90}$$

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dz \frac{z(1-z)x(1-x)}{x(1-x)a + z(1-z)b} = \frac{1}{32} \left[\left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \right) \int_0^\infty dt \frac{\ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right|}{a + t^2 b} + 3 \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right) - \frac{3}{2} \ln \frac{b}{a} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \right], \quad (91)$$

получаем

$$\begin{aligned} K_{RRSS}^{(\mathcal{R})a}(\vec{q}, \vec{q}', 0) &= \frac{n_s b_R \alpha_s^2}{32\pi^3} \left\{ (3(\vec{q}\vec{q}')^2 - 2\vec{q}^2 \vec{q}'^2) \right. \\ &\quad \times \left(\frac{2}{\vec{q}^2} + \frac{2}{\vec{q}'^2} - \left(\frac{1}{\vec{q}^2} - \frac{1}{\vec{q}'^2} \right) \ln \left(\frac{\vec{q}^2}{\vec{q}'^2} \right) \right) \\ &\quad \left. + \left[(\vec{q}\vec{q}')^2 \left(2 - 3\frac{\vec{q}'^2}{\vec{q}^2} - 3\frac{\vec{q}^2}{\vec{q}'^2} \right) + 2(\vec{q}^2 + \vec{q}'^2)^2 \right] \int_0^\infty \frac{dt}{\vec{q}^2 + t^2 \vec{q}'^2} \ln \left(\frac{|1+t|}{|1-t|} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (92)$$

Формулы (89)-(91) легко получаются, если использовать аналитические свойства интегралов. При фиксированном $a > 0$ они имеют разрез как функции b при $-\infty < b \leq 0$. Вычисляя скачки на разрезе и пользуясь дисперсионными соотношениями, приходим к (89)-(91).

5 Сокращение виртуальных и реальных поправок

Из выражения (81) для $I_{int}^{(1)}$ следует, что интерференционный вклад имеет форму дисперсионного интеграла:

$$I_{int}^{(1)} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{dk^2}{k^2} f(k^2), \quad (93)$$

где

$$f(k^2) = \int d\rho_f \left(\frac{2s\alpha_1\beta_2}{\tilde{t}_1} + 1 \right) C_\rho(-q_2, -q'_2)(l_1 - l_2)^\rho. \quad (94)$$

Пользуясь правилами Кутковского легко видеть, что $f(k^2)$ является мнимой частью функции

$$F(k^2) = 2 \frac{p_a^\mu p_b^\nu}{s} C^\rho(-q_2, -q'_2) V_{\mu\nu\rho}(q_1, q'_1) \quad (95)$$

где $V_{\mu\nu\rho}(q_1, q'_1)$ дается той же формулой (43), что и $V_{\mu\nu\rho}^{(0)}(q_1, q'_1)$, но без условия $k^2 = 0$. Теперь заметим, что входящий в виртуальный вклад (49) член I_0 есть ни что иное, как $F(0)$. С другой стороны, дисперсионный интеграл (93) тоже

вроде бы определяет $F(0)$, то есть, на первый взгляд, должно бы быть равенство $I_{int}^{(1)} = I_0$, и эти два вклада должны бы полностью сокращаются в ядре, поскольку входят в него с одинаковыми по модулю и противоположными по знаку коэффициентами. Однако это не так:

$$I_{int}^{(1)} \neq F(0) = I_0, \quad (96)$$

и полного сокращения нет. Дело здесь в том, что интеграл (93) не является обычным дисперсионным интегралом. Формально он расходится при $k^2 \rightarrow \infty$ и должен вычисляться с использованием размерностной регуляризации. Расходимость обусловлена членами в $F(k^2)$ (95) пропорциональными k^2 , и не влияющими поэтому на $F(0)$. Разумеется, они пропорциональны k^2 и в $f(k^2)$. Именно эти члены ответственны за отличие интеграла (93) от $F(0) = I_0$. Обозначив их $f^d(k^2)$, имеем

$$I_{int}^{(1)} - I_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{dk^2}{k^2} f^d(k^2). \quad (97)$$

. Члены, содержащие явно множитель k^2 , могут идти в (94) только от свертки

$$C_\rho(-q_2, -q'_2)(l_1 - l_2)^\rho = (\vec{q}_2 + \vec{q}'_2)(\vec{l}_2 - \vec{l}_1) + \frac{1-2x}{2}(k^2 + \vec{k}^2 - 2\vec{q}_2'^2) + \frac{1-2y}{2}(k^2 + \vec{k}^2 - 2\vec{q}_2^2), \quad (98)$$

так что

$$I_{int}^{(1)} - I_0 = \int \frac{dk^2}{2\pi} d\rho_f \left(\frac{2s\alpha_1\beta_2}{\vec{l}_1} + 1 \right) ((1-2x) + (1-2y)). \quad (99)$$

Из инвариантности меры интегрирования (73) и первого сомножителя в (99) относительно замены $x \rightarrow y$, $\vec{l}_1 \rightarrow \vec{l}_2$ и $\vec{q}_1 \rightarrow -\vec{q}'_1$ следует, что вклад члена с $1-y$ в (99) получается из вклада члена с $1-x$ заменой $\vec{q}_1 \rightarrow -\vec{q}'_1$. Вычисление последнего члена элементарно и дает

$$\int_0^1 \frac{dx}{2x(1-x)} \int \frac{d^{D-2}l_1}{(2\pi)^{D-1}} \frac{2x(1-x)(\vec{q}_1^2 - 2\vec{l}_1\vec{q}_1)}{(\vec{l}_1 - x\vec{q}_1)^2 + x(1-x)\vec{q}_1^2} (1-2x) = -2\vec{q}_1^2 P_s(q_1^2). \quad (100)$$

Итак, приходим к следующему соотношению:

$$I_{int}^{(1)} - I_0 = -2\vec{q}_1^2 P_s(q_1^2) - 2\vec{q}'_1{}^2 P_s(q_1'^2). \quad (101)$$

В результате сумма вкладов в ядро от виртуальных поправок к рождению реального глюона $K_{RRG}^{(\mathcal{R})S}(\vec{q}_1, \vec{q}'_1, \vec{q})$ (49) и неабелевой части вклада от рождения реальной пары скалярных частиц $K_{RRSS}^{(\mathcal{R})n}(\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q})$ (83) представляется в виде:

$$\begin{aligned}
& K_{RRG}^{(\mathcal{R})S}(\vec{q}_1, \vec{q}'_1, \vec{q}) + K_{RRSS}^{(\mathcal{R})n}(\vec{q}_1, \vec{q}'_1, \vec{q}) \\
&= \frac{g^4 N_c}{(2\pi)^{D-1}} \frac{n_s T_s c_R}{2} \left\{ \left(\frac{\vec{q}_1^2 \vec{q}_2'^2 + \vec{q}_1'^2 \vec{q}_2^2}{\vec{k}^2} \right) 2P_s(k^2) + \right. \\
&+ \vec{q}^2 \left(2P_s(k^2) + 2P_s(q^2) - P_s(q_1^2) - P_s(q_2^2) - P_s(q_1'^2) - P_s(q_2'^2) \right) \\
&\left. - \left(\frac{\vec{q}_1^2 \vec{q}_2'^2 - \vec{q}_2^2 \vec{q}_1'^2}{\vec{k}^2} \right) \left(P_s(q_1^2) - P_s(q_2^2) - P_s(q_1'^2) + P_s(q_2'^2) \right) \right\}. \quad (102)
\end{aligned}$$

Здесь следует напомнить, что g – неперенормированный заряд. При переходе к перенормированному заряду g_μ пропорциональный n_s вклад возникает от ведущего ядра (19), когда g выражается через g_μ с помощью формулы (7) с учетом (29). Объединяя этот вклад с (102) и обозначая полученную сумму $K_{gn}^{(\mathcal{R})S}$, получаем

$$\begin{aligned}
& K_{na}^{(\mathcal{R})S}(\vec{q}_1, \vec{q}'_1, \vec{q}) \\
&= \frac{g_\mu^2 \mu^{-2\epsilon} c_R \bar{g}_\mu^2 n_s T_s}{(2\pi)^{D-1}} \frac{1}{6} \left\{ \left(\frac{\vec{q}_1^2 \vec{q}_2'^2 + \vec{q}_1'^2 \vec{q}_2^2}{\vec{k}^2} \right) \left(-\frac{2}{\epsilon} + 2 \left(\frac{\vec{k}^2}{\mu^2} \right)^\epsilon \left(\frac{1}{\epsilon} - \frac{8}{3} + \epsilon \left(\frac{52}{9} - \frac{\pi^2}{6} \right) \right) \right) \right. \\
&\left. + \vec{q}^2 \ln \left(\frac{\vec{k}^4 \vec{q}^4}{\vec{q}_1^2 \vec{q}_2^2 \vec{q}_1'^2 \vec{q}_2'^2} \right) - \left(\frac{\vec{q}_1^2 \vec{q}_2'^2 - \vec{q}_2^2 \vec{q}_1'^2}{\vec{k}^2} \right) \ln \left(\frac{\vec{q}_1^2 \vec{q}_2'^2}{\vec{q}_2^2 \vec{q}_1'^2} \right) \right\}. \quad (103)
\end{aligned}$$

Здесь удержаны члены $\sim \epsilon$ при полюсном по \vec{k}^2 множителе. Это необходимо сделать для того, чтобы после действия ядра на регулярную при $\vec{k}^2 = 0$ функцию сохранить все конечные при $\epsilon = 0$ члены.

6 Заключение

В работе получен вклад скалярных частиц, преобразующихся по произвольному представлению цветовой группы, в ядро уравнения БФКЛ для рассеяния с любой передачей импульса и цвета. Этот вклад удобно представить в виде суммы трех слагаемых:

$$\begin{aligned}
K_r^{(\mathcal{R})S}(\vec{q}_1, \vec{q}'_1; \vec{q}) &= \delta(\vec{q}_1 - \vec{q}'_1) (\omega_s(-\vec{q}_1^2) + \omega_s(-\vec{q}_2^2)) \\
&+ K_{gn}^{(\mathcal{R})}(\vec{q}_1, \vec{q}'_1; \vec{q}) + K_{RRSS}^{(\mathcal{R})a}(\vec{q}_1, \vec{q}'_1; \vec{q}), \quad (104)
\end{aligned}$$

$\vec{q} = \vec{q}_1 + \vec{q}_2 = \vec{q}'_1 + \vec{q}'_2$. Здесь ω_s – вклад скалярных частиц в траекторию глюона; $K_{gn}^{(\mathcal{R})}$ – сумма вкладов, связанных с перенормировкой заряда, с поправкой к рождению реального глюона $K_{RRG}^{(\mathcal{R})S}$ и с неабелевой частью вклада от рождения реальной пары $K_{RRSS}^{(\mathcal{R})n}$; $K_{RRSS}^{(\mathcal{R})a}$ – абелева часть вклада от рождения пары. В терминах перенормированной константы связи эти слагаемые даются формулами (30), (103) и (83) соответственно.

Как видно из (103), $K_{gn}^{(\mathcal{R})}$ имеет довольно простой вид, хотя отдельные его слагаемые ($K_{RRG}^{(\mathcal{R})S}$ и $K_{RRSS}^{(\mathcal{R})n}$) весьма громоздки. Большое сокращение между этими слагаемыми обусловлено тем, что они связаны дисперсионными соотношениями. Выяснен механизм этого сокращения, что позволило получить суммарный вклад без сложных вычислений, необходимых для нахождения отдельных слагаемых. Механизм имеет общий характер и позволяет упрощать вычисления для всех частиц.

Приложение А.

Стандартным образом объединяя в (43) знаменатели с помощью фейнмановской параметризации и выполняя интегрирование по p , получаем

$$V_{\mu\nu\rho}^{(0)}(q_1, q'_1) = \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{(4\pi)^{D/2}} \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \frac{\Theta(1-x_1-x_2)}{[\Delta(\vec{q}_1, \vec{q}'_1)]^{1-\epsilon}} \left\{ ((1-2x_1)q_1 - 2x_2q'_1)_\mu \right. \\ \left. \times (-2x_1q_1 + (1-2x_2)q'_1)_\nu ((1-2x_1)q_1 + (1-2x_2)q'_1)_\rho + \frac{2\Delta(\vec{q}_1, \vec{q}'_1)}{\epsilon} [g_{\nu\rho}((1-2x_1)q_1 - 2x_2q'_1)_\mu + g_{\mu\rho}(-2x_1q_1 + (1-2x_2)q'_1)_\nu + g_{\mu\nu}(q_1(1-2x_1) + q'_1(1-2x_2))_\rho] \right\}, \quad (105)$$

где принято обозначение:

$$\Delta(\vec{q}_1, \vec{q}'_1) = (1-x_1-x_2)(x_1\vec{q}_1^2 + x_2\vec{q}'_1{}^2). \quad (106)$$

Для дальнейшего интегрирования удобно перейти к переменным z, v ,

$$x_1 = zv, \quad x_2 = z(1-v), \quad dx_1 dx_2 = z dz dv \quad (107)$$

и интегрировать сначала по v , а затем по z . Интегралы по v элементарны, а по z выражаются через β -функцию Эйлера. Результат интегрирования содержит также функции

$$\Phi_n = (\vec{q}_1^2)^{n+\epsilon} - (\vec{q}'_1{}^2)^{n+\epsilon}, \quad (108)$$

для которых выполняется соотношение:

$$\Phi_{n+2} = (\vec{q}_1^2 + \vec{q}'_1{}^2) \Phi_{n+1} - \vec{q}_1^2 \vec{q}'_1{}^2 \Phi_n. \quad (109)$$

Это соотношение позволяет выразить все интегралы через Φ_0 и Φ_1 . Вычисления элементарны, но громоздки. Приведем интегралы, необходимые для вычисления свертки тензора $V_{\mu\nu\rho}^{(0)}$ с произведением $2p_a^\mu p_b^\nu/s$, входящей в в вершину рождения реального глюона:

$$J_1 = \int_0^1 \int_0^1 z dz dv (1-z) [\Delta(\vec{q}_1, \vec{q}'_1)]^\epsilon = \Gamma \frac{(1+\epsilon)\Phi_1}{(\vec{q}_1^2 - \vec{q}'_1{}^2)}, \quad (110)$$

$$J_2 = \int_0^1 \int_0^1 \frac{z dz dv x_1 x_2 (1-z)}{[\Delta(\vec{q}_1, \vec{q}'_1)]^{1-\epsilon}} = \Gamma \frac{f}{\epsilon(\vec{q}_1^2 - \vec{q}'_1{}^2)^3}, \quad (111)$$

$$J_3 = \int_0^1 \int_0^1 z dz dv x_1 [\Delta(\vec{q}_1, \vec{q}'_1)]^\epsilon = \Gamma \frac{(\vec{q}_1^2 - \vec{q}'_1{}^2)(2+\epsilon)\Phi_1 + f}{2(\vec{q}_1^2 - \vec{q}'_1{}^2)^2}, \quad (112)$$

$$J_4 = \int_0^1 \int_0^1 \frac{z dz dv x_1^2 x_2}{[\Delta(\vec{q}_1, \vec{q}_1')]^{1-\epsilon}} = \frac{\Gamma}{\epsilon^2 (\vec{q}_1^2 - \vec{q}_1'^2)^4} \left\{ [(\vec{q}_1^2)^2 (1 + \epsilon) - \vec{q}_1^2 \vec{q}_1'^2 (5 + \epsilon) - 2(\vec{q}_1'^2)^2] \epsilon \Phi_1 + [\vec{q}_1'^2 (6 + \epsilon) - \vec{q}_1^2 \epsilon] \vec{q}_1^2 \vec{q}_1'^2 (1 + \epsilon) \Phi_0 \right\}, \quad (113)$$

где

$$\Gamma = \frac{\Gamma^2(1 + \epsilon)}{\Gamma(4 + 2\epsilon)}, \quad f = (\vec{q}_1^2 + \vec{q}_1'^2) \epsilon \Phi_1 - 2\vec{q}_1^2 \vec{q}_1'^2 (1 + \epsilon) \Phi_0. \quad (114)$$

Кроме представленных, нужны еще интегралы J'_3 и J'_4 , получающиеся заменой $x_1 \leftrightarrow x_2$ (при неизменном Δ) в подинтегральных выражениях (112) и (113) соответственно; ясно, что они равны J_3 и J_4 с заменой $\{q_1 \leftrightarrow q'_1\}$ в правой части.

Нужная свертка выражается через приведенные интегралы:

$$2 \frac{p_a^\mu p_b^\nu}{s} V_{\mu\nu\rho}^{(0)}(q_1, q'_1) = \frac{2\Gamma(1 - \epsilon)}{\epsilon(4\pi)^{D/2}} \left\{ J'_3 \alpha (2p_b)_\rho - J_3 \beta (2p_a)_\rho - (\epsilon \vec{k}^2 J_2 - J_1) (q_1 + q'_1)_\rho - (J_3 - J'_3 - \epsilon \vec{k}^2 (J_4 - J'_4)) (q_1 - q'_1)_\rho \right\}. \quad (115)$$

Приложение В.

Переходя в подинтегральном выражении (81) к поперечным импульсам и долям продольного импульса $x_1 = x = \beta_1/\beta$, $x_2 = 1 - x = \beta_2/\beta$, имеем

$$\frac{2s\alpha_1\beta_2}{t_1} + 1 = (x_1 - x_2) + \frac{2x_1x_2(\vec{q}_1^2 - 2(\vec{l}_1\vec{q}_1))}{\sigma_{11}}, \quad (116)$$

$$\frac{C_\rho(-q_2, -q'_2)(l_1 - l_2)^\rho}{k^2} = (x_2 - x_1) + \frac{x_1x_2}{\vec{\Lambda}^2} \left[2\vec{q}_2^2 \frac{(x_1 - x_2)\vec{\Lambda}^2}{\Sigma} - 4(\vec{\Lambda}\vec{q}_2) - 4(\vec{\Lambda}\vec{k}) \frac{x_1x_2\vec{q}_2^2}{\Sigma} \right], \quad (117)$$

где σ_{11} определено в (85) и приняты обозначения:

$$\vec{\Lambda} = x_2\vec{l}_1 - x_1\vec{l}_2 = \vec{l}_1 - x_1\vec{k}, \quad \Sigma = x_2\vec{l}_1^2 + x_1\vec{l}_2^2 = \vec{\Lambda}^2 + x_1x_2\vec{k}^2. \quad (118)$$

Используя меру (73) в переменных x, \vec{l}_1 , не представляет труда найти вклад первого слагаемого в (116)

$$I_a = \int \frac{dk^2}{2\pi} d\rho_f(x_1 - x_2) \frac{C_\rho(-q_2, -q'_2)(l_1 - l_2)^\rho}{k^2} = \frac{4\Gamma(-\epsilon)}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma^2(1 + \epsilon)}{\Gamma(4 + 2\epsilon)} \vec{q}_2^2 (1 + \epsilon) (\vec{k}^2)^\epsilon \quad (119)$$

и вклад произведения второго слагаемого в (116) на первое слагаемое в (117):

$$I_b = \int \frac{dk^2}{2\pi} d\rho_f \frac{2x_1x_2(\vec{q}_1^2 - 2(\vec{l}_1\vec{q}_1))}{\sigma_{11}} (x_2 - x_1) = \frac{4\Gamma(-\epsilon)\Gamma^2(1+\epsilon)}{(4\pi)^{D/2}\Gamma(4+2\epsilon)} (1+\epsilon)(\vec{q}_1^2)^{1+\epsilon}. \quad (120)$$

Однако вычисление оставшегося вклада (произведения вторых слагаемых в (116) и (117)) не так просто. Наибольшую сложность представляют члены со знаменателем $\vec{\Lambda}^2 \sigma_{11} \Sigma$. Провести интегрирование этих членов с использованием выбранной меры интегрирования представляется чрезвычайно трудным. Однако можно избежать такого интегрирования, поскольку в переменных интегрирования y, \vec{l}_1 указанные члены не содержат трех зависящих от \vec{l}_1 знаменателей, а мера интегрирования (73) имеет одинаковый вид в переменных x и y . Вклад произведения вторых слагаемых в (116) и (117) можно представить в виде

$$I_c = \int \frac{dk^2}{2\pi} d\rho_f \left\{ \frac{x_1x_2}{\vec{\Lambda}^2} \cdot \frac{2x_1x_2(\vec{q}_1^2 - 2(\vec{l}_1\vec{q}_1))}{\sigma_{11}} \left[\vec{q}_2^2(x_1 - x_2) - 4(\vec{\Lambda}\vec{q}_2) \right] + \left[\frac{x_1x_2}{\vec{\Lambda}^2} \cdot 2x_1x_2(x_1 - x_2)\vec{q}_2'^2 \left(\frac{\vec{q}_1^2 - 2(\vec{l}_1\vec{q}_1)}{\sigma_{11}} - \frac{\vec{k}^2 - 2(\vec{l}_1\vec{k})}{\Sigma} \right) \right]^{(L/R)} \right\}, \quad (121)$$

где (L/R) означает преобразование

$$l_1 \leftrightarrow l_2, \quad x_1 \leftrightarrow y_1 = y, \quad x_2 \leftrightarrow y_2 = 1 - y, \quad q_1 \leftrightarrow -q_1', \quad q_2 \leftrightarrow -q_2'. \quad (122)$$

Выражение (121) сложных знаменателей не содержит. Можно выделить три вклада:

$$I_{c(1)} = \vec{q}_2^2 \cdot \left\{ \int_0^1 \frac{dx_1}{2x_1x_2} \int \frac{d^{D-2}\vec{\Lambda}}{(2\pi)^{D-1}} \frac{x_1x_2}{\vec{\Lambda}^2} \frac{2x_1x_2(\vec{q}_1^2 - 2(\vec{l}_1\vec{q}_1))}{\sigma_{11}} (x_1 - x_2) \right\} + \vec{q}_2^2 \cdot \left\{ \int_0^1 \frac{dx_1}{2x_1x_2} \int \frac{d^{D-2}\vec{\Lambda}}{(2\pi)^{D-1}} \frac{x_1x_2}{\vec{\Lambda}^2} \frac{2x_1x_2(\vec{q}_1^2 - 2(\vec{l}_1\vec{q}_1))}{\sigma_{11}} (x_1 - x_2) \right\}^{(L/R)}, \quad (123)$$

$$I_{c(2)} = \int_0^1 \frac{dx_1}{2x_1x_2} \int \frac{d^{D-2}\vec{\Lambda}}{(2\pi)^{D-1}} \frac{x_1x_2}{\vec{\Lambda}^2} \frac{2x_1x_2(\vec{q}_1^2 - 2(\vec{l}_1\vec{q}_1))}{\sigma_{11}} \left[4(\vec{\Lambda}\vec{q}_2) \right], \quad (124)$$

$$I_{c(3)} = \left\{ \int_0^1 \frac{dx_1}{2x_1x_2} \int \frac{d^{D-2}\vec{\Lambda}}{(2\pi)^{D-1}} \frac{x_1x_2}{\vec{\Lambda}^2} 2x_1x_2(x_1 - x_2)\vec{q}_2'^2 \left(\frac{\vec{k}^2 - 2(\vec{l}_1\vec{k})}{\Sigma} \right) \right\}^{(L/R)}. \quad (125)$$

Для вычисления $I_{c(1)}$ и $I_{c(2)}$, содержащих в знаменателях произведение $\vec{\Lambda}^2 \sigma_{11}$, используется параметризация

$$\frac{1}{\vec{\Lambda}^2 \sigma_{11}} = \int_0^1 dz \frac{1}{\left[(1-z)\vec{\Lambda}^2 + z\sigma_{11} \right]^2}, \quad (126)$$

с последующей заменой $z \rightarrow y/x$. Далее, после вычисления стандартных интегралов по \vec{l}_1 , следует взять интеграл по переменной x : он выражается через функции Φ_n . Затем останется интеграл по y , сводящийся к β -функции Эйлера. Единственной сложностью вычислений является их громоздкость. Приведем только результат всех этих вычислений:

$$I_{c(1)} = \frac{4\Gamma(-\epsilon)\Gamma^2(1+\epsilon)}{(4\pi)^{D/2}\Gamma(4+2\epsilon)} \left\{ \vec{q}_2^2 \frac{1}{(\vec{q}_1^2 - \vec{q}_1'^2)} \Phi_1 + \vec{q}_2^2 \frac{\vec{k}^2}{(\vec{q}_1^2 - \vec{q}_1'^2)^3} f \right\}, \quad (127)$$

$$I_{c(2)} = \frac{4\Gamma(-\epsilon)\Gamma^2(1+\epsilon)}{(4\pi)^{D/2}\Gamma(4+\epsilon)} \left\{ (\vec{q}^2 - \vec{q}_1^2 - \vec{q}_2^2) \left(-\frac{(1+\epsilon)\Phi_1}{(\vec{q}_1^2 - \vec{q}_1'^2)} + \frac{\vec{k}^2 f}{(\vec{q}_1^2 - \vec{q}_1'^2)^3} \right) - (\vec{q}_2'^2 - \vec{q}_2^2 - \vec{k}^2) \left(\frac{f}{2(\vec{q}_1^2 - \vec{q}_1'^2)^2} - \frac{\epsilon \Phi_1}{2(\vec{q}_1^2 - \vec{q}_1'^2)} + \frac{\vec{k}^2 f}{(\vec{q}_1^2 - \vec{q}_1'^2)^3} \right) \right\}. \quad (128)$$

Интеграл $I_{c(3)}$, содержащий в знаменателе $\vec{\Lambda}^2 \Sigma$, вычисляется тривиально:

$$I_a^{(3)} = \frac{4\Gamma(-\epsilon)\Gamma^2(1+\epsilon)}{(4\pi)^{D/2}\Gamma(4+2\epsilon)} \vec{q}_2^2 (1+\epsilon)(\vec{k}^2)^\epsilon. \quad (129)$$

Складывая интегралы (119), (120), (127)-(129), приходим к (82).

Список литературы

- [1] L.N. Lipatov, *Sov. J. Nucl. Phys.* **23** (1976) 338 [*Yad. Fiz.* **23**(1976) 642].
- [2] V.S. Fadin, E.A. Kuraev and L.N. Lipatov, *Phys. Lett. B* **60** (1975) 50.
- [3] E.A. Kuraev, L.N. Lipatov and V.S. Fadin, *Sov. Phys. JETP* **44** (1976) 443 [*Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **71** (1976) 840].
- [4] E.A. Kuraev, L.N. Lipatov and V.S. Fadin, *Sov. Phys. JETP* **45** (1977) 199 [*Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **72** (1977) 377].
- [5] I.I. Balitsky and L.N. Lipatov, *Sov. J. Nucl. Phys.* **28** (1978) 822 [*Yad. Fiz.* **28** (1978) 1597].
- [6] V.S. Fadin and L.N. Lipatov, *Phys. Lett. B* **429** (1998) 127 [arXiv:hep-ph/9802290].
- [7] M. Ciafaloni and G. Camici, *Phys. Lett. B* **430** (1998) 349 [arXiv:hep-ph/9803389].
- [8] V.S. Fadin, R. Fiore and A. Papa, *Phys. Rev. D* **60**, 074025 (1999) [arXiv:hep-ph/9812456].
- [9] V.S. Fadin, D.A. Gorbachev, *JETP Lett.* **71** (2000) 222 [*Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **71** (2000) 322].
- [10] V.S. Fadin, D.A. Gorbachev, *Phys. Atom. Nucl.* **63** (2000) 2157 [*Yad. Fiz.* **63** (2000) 2253].
- [11] V.S. Fadin and R. Fiore, *Phys. Lett. B* **610** (2005) 61 [Erratum-ibid. B **621** (2005) 61];
- [12] V.S. Fadin and R. Fiore, *Phys. Rev. D* **72** (2005) 014018.
- [13] A.V. Kotikov and L.N. Lipatov, *Nucl. Phys. B* **582**, 19 (2000) [arXiv:hep-ph/0004008].
- [14] V.S. Fadin and R. Fiore, *Phys. Lett. B* **440** (1998) 359.
- [15] V.S. Fadin *JETP Lett.* **61** (1995) 346 [*Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **61** (1995) 342].
- [16] V.S. Fadin, R. Fiore and A. Quartarolo, *Phys. Rev. D* **53** (1996) 2729.
- [17] M.I. Kotsky and V.S. Fadin, *Phys. Atom. Nucl.* **59** (1996) 1035 [*Yad. Fiz.* **59** (1996) 1080].
- [18] V.S. Fadin, R. Fiore and M.I. Kotsky, *Phys. Lett. B* **359** (1995) 181.
- [19] V.S. Fadin, R. Fiore and A. Quartarolo, *Phys. Rev. D* **50** (1994) 2265 [arXiv:hep-ph/9310252].
- [20] V.S. Fadin, R. Fiore and A. Quartarolo, *Phys. Rev. D* **50** (1994) 5893 [arXiv:hep-th/9405127].
- [21] V.S. Fadin and R. Fiore, *Phys. Lett. B* **661**, 139 (2008) [arXiv:0712.3901 [hep-ph]].
- [22] V.N. Gribov, L.N. Lipatov and G.V. Frolov, *Sov. J. Nucl. Phys.* **12** (1971) 543 [*Yad. Fiz.* **12** (1970) 994].
- [23] H. Cheng and T.T. Wu, *Phys. Rev.* **D1** (1970) 2775.

Р.Е. Герасимов, В.С. Фадин

Вклад скаляров в ядро уравнения БФКЛ

R.E. Gerasimov, V.S. Fadin

Scalar contribution to the BFKL kernel

ИЯФ 2008-36

Ответственный за выпуск А.В. Васильев

Работа поступила 24.12.2008 г.

Сдано в набор 28.12.2008 г.

Подписано в печать 29.12.2008 г.

Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 1,7 печ.л., 1.3 уч.-изд.л.

Тираж 90 экз. Бесплатно. Заказ № 36

Обработано на РС и отпечатано на
ротапринте ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.