УЧРЕЖДЕНИЕ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
им. Г.И. Будкера СО РАН
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РАН
(ИЯФ СО РАН)

М.Г. Козлов, А.В. Резниченко, В.С. Фадин

ПРОВЕРКА УСЛОВИЯ РЕДЖЕЗАЦИИ ГЛЮОНА В СЛЕДУЮЩЕМ ЗА ГЛАВНЫМ ПОРЯДКЕ. КВАРКОВАЯ ЧАСТЬ

ИЯФ 2010-26

НОВОСИБИРСК
2010

Проверка условия реджезации глюона в следующем за главным порядке. Кварковая часть

М.Г. Козлов[†], *А.В. Резниченко*[‡], *В.С. Фадин*[††]

Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера,
Новосибирский государственный университет
630090, Новосибирск, Россия

Аннотация

Рассматривается условие бутстрапа для рождения глюона в мультиреджевской кинематике в следующем за главным порядке. Условия бутстрапа вытекают из требования совместимости реджевской формы амплитуд в КХД с s-канальной унитарностью и представляют собой нелинейные связи между траекторией и вершинами реджезованного глюона. Их выполнение обеспечивает реджезацию глюона, т.е. реджевскую форму как упругих, так и неупругих амплитуд. Рассматриваемое условие является единственным, проверка которого не была проведена до сих пор. Демонстрация его выполнения является заключительным шагом в доказательстве реджезации глюона в следующем за главным логарифмическим приближении. В данной статье эта демонстрация проведена для кварковой части условия бутстрапа.

[*] *Work supported in part by the RFBR grant 10-02-01238, in part by the RFBR–MSTI grant 06-02-72041.*

[†] *e-mail address:* M.G.KOZLOV@INP.NSK.SU
[‡] *e-mail address:* A.V.REZNICHENKO@INP.NSK.SU
[††] *e-mail address:* FADIN@INP.NSK.SU

Check of the gluon Reggeization condition in the next-to-leading order. Quark part

M.G. Kozlov, A.V. Reznichenko, V.S. Fadin

Budker Institute of Nuclear Physics
and Novosibirsk State University
630090, Novosibirsk, Russia

Abstract

The bootstrap condition for gluon production in the multi-Regge kinematics in the next to leading order is considered. The bootstrap conditions result from the requirement of the compatibility of the Regge form of QCD amplitudes with the s-channel unitarity and are non-linear restraints on the Reggeized gluon trajectory and vertices. Their fulfillment provides the gluon Reggeization, i.e. the Regge form of elastic and inelastic amplitudes. The condition under consideration remained only one to be checked. The demonstration of its fulfillment is the last step in the proof of the gluon Reggeization in the next-to-leading approximation. In this paper this demonstration is presented for the quark part of the bootstrap condition.

1 Введение

Реджезация глюона [1]–[4] наряду с кварком [2],[5] делает КХД уникальной в Стандартной Модели теорией – в ней все частицы оказываются реджезованными. Вряд ли это обстоятельство случайно; по-видимому, оно является следствием связи КХД с теорией струн. Исследование реджезации кварка и глюона в КХД важно как для понимания структуры теории, так и для ее приложений. Реджезация глюона играет особую роль, так как при высоких энергиях $\sqrt{s}$ не вымирают с ростом s только сечения процессов с глюонными обменами в кросс- (t-) канале. При этом в каждом фиксированном порядке теории возмущений главный вклад в амплитуды этих процессов дает реджезованный глюон. Так что в КХД "реджеонное исчисление" должно быть построено именно на нем. Реджезация глюона лежит в основе подхода БФКЛ [4], [6]–[8], дающего наиболее общий базис для теоретического описания процессов КХД при высоких энергиях. В этом подходе померон, являющийся первичным реджеоном в реджеонном исчислении Грибова [9], появляется как связанное состояние двух реджезованных глюонов. При высоких энергиях и фиксированных поперечных импульсах процессы квантовой хромодинамики описываются эффективным действием для реджезованных глюонов и частиц [10].

Определяющий вклад в сечения взаимодействия частиц при высоких энергиях вносит мультиреджевская кинематика (МРК), в которой частицы в конечном состоянии разделены на группы (мы будем называть их струями) с конечными (не растущими с s) инвариантными массами; при этом инвариантные массы любой пары струй растут с s. На языке импульсов это означает, что поперечные к оси столкновения импульсы рожденных частиц конечны, а продольные импульсы имеют один порядок величины в каждой из струй; при этом отношение характерных продольных импульсов в разных струях сильно отличается от единицы, и это отличие растет с s. Важность МРК была осознана [11] задолго до появления КХД, на основе представлений о помероном обмене. В КХД, однако, померон не является первичным, и главную роль играет обмен реджезованным глюоном. В главном логарифмическом приближении (ГЛП) теории возмущений, когда удерживаются только радиационные поправки вида $(\alpha_s \ln s)^n$, в промежуточных состояниях соотношений унитарности достаточно удерживать только одночастичные струи; в следующем за ним (СГЛП), когда учитываются также члены с дополнительным множителем α_s, одна из струй может быть двухчастичной.

Надо сказать, что реджезованный глюон вовсе не является единственным состоянием, которым могут обмениваться упомянутые выше группы частиц. Однако результаты вычисления нескольких первых членов ряда теории возмущений показывают, что с определенной точностью вещественные части амплитуд процессов в МРК имеют мульти-реджевскую форму, в которой есть только вклад реджезованного глюона (в дальнейшем мы это подразумеваем, употребляя термин "мультиреджевская форма"). Это верно как в ГЛП, так и в СГЛП. Естественным обобщением этих результатов является утверждение, что с указанной точностью вещественные части амплитуд процессов в МРК имеют мультиреджевскую форму во всех порядках теории возмущений. Для краткости и в соответствии с традицией мы говорим об этом как о реджезации глюона. Хотя в ГЛП это утверждение было доказано довольно давно [12], в СГЛП до последнего времени оно оставалось гипотезой. Следует подчеркнуть чрезвычайную мощь этой гипотезы. Она позволяет выразить просуммированные во всех порядках теории возмущений амплитуды бесконечного множества процессов КХД через траекторию и несколько вершин взаимодействия реджезованного глюона. Поэтому доказательство ее чрезвычайно важно. Необходимость его диктуется и тем, что основанный на реджезации глюона подход БФКЛ давно уже интенсивно развивается в СГЛП.

Несколько лет назад [13] нами и Р. Фиоре был разработан путь доказательства этой гипотезы, основанный на s–канальной унитарности и аналитичности. Доказательство реджезации глюона было сведено к проверке так называемых условий бутстрапа, обеспечивающих совместимость реджевской формы амплитуд с s-канальной унитарностью и представляющих собой нелинейные соотношения между траекторией и вершинами реджезованного глюона. Как траектория, так и все необходимые вершины известны в настоящее время в СГЛП. Все условия бутстрапа также были получены ранее в работах [14]–[15], и выполнение всех их, кроме одного, явно продемонстрировано в [16]–[23]. Рассматриваемое в данной работе условие бутстрапа оставалось единственным недоказанным до сих пор. Поэтому проверка его представляет необходимый заключительный шаг в доказательстве реджезации глюона в СГЛП. Проверка является достаточно сложной задачей с технической стороны, так что, к сожалению, использование громоздких формул здесь неизбежно.

Статья построена следующим образом. Во втором разделе приведены используемые определения и обозначения; в третьем – формулируется рассматриваемое условие бутстрапа, приводятся входящие в него реджевские вершины и траектория реджезованного глюона и демонстрируется выполнение условия бутстрапа в главном порядке. Четвертый раздел содержит доказательство выполнения этого условия в следующем за главным порядке для кварковой части. В нем анализируется цветовая структура входящих в условие бутстрапа импакт-факторов и матричных элементов оператора рождения глюона, проводится вычисление их кварковых частей и сравнение левой и правой сторон условия. В заключении определено место полученных результатов в структуре доказательства гипотезы реджезации глюона.

2 Определения и обозначения

Мы используем обозначения, принятые в [13], изменив только нормировку вершин рассеяния частиц на реджезованных глюонах (далее будем называть их просто реджеонами) и знаки импульсов реджеонов. В частности, мы используем светоконусные векторы n_1 и n_2,

$$n_1^2 = 0\,,\; n_2^2 = 0\,,\; n_1 n_2 = 1\,, \tag{1}$$

и разложение

$$p = p^+ n_1 + p^- n_2 + p_\perp\,,\; 2p^+ p^- = p^2 - p_\perp^2 = p^2 + \vec{p}_\perp^{\,2}\,, \tag{2}$$

где индекс $\perp$ обозначает компоненты, поперечные плоскости n_1, n_2. Мы используем физические векторы поляризации глюонов в светоконусной калибровке $e(k)n = 0$:

$$e(k) = e(k)_\perp - \frac{(e(k)_\perp k_\perp)}{(kn)} n\,, \tag{3}$$

где $n = n_2$ ($n = n_1$) для глюонов с доминирующей компонентой импульса вдоль n_1 (n_2). Следует отметить, что реджеонные вершины инвариантны относительно калибровочных преобразований глюонных векторов поляризации, так что калибровка (3) выбирается только для упрощения их формы. Так же, как и в [13], мы используем $\langle \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2|$ и $|\mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2\rangle$ — бра- и кет-векторы состояния двух реджеонов с поперечными импульсами $r_{1\perp}$ и $r_{2\perp}$ и цветовыми индексами c_1 и c_2. По определению, эти состояния являются собственными состояниями операторов импульсов реджеонов:

$$\widehat{r}_{1\perp}|\mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2\rangle = r_{1\perp}|\mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2\rangle;\; \widehat{r}_{2\perp}|\mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2\rangle = r_{2\perp}|\mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2\rangle \tag{4}$$

с нормировкой

$$\langle \mathcal{G}_1\mathcal{G}_2|\mathcal{G}'_1\mathcal{G}'_2\rangle = r^2_{1\perp}r^2_{2\perp}\delta^{\perp}(r_1-r'_1)\delta^{\perp}(r_2-r'_2)\delta_{c_2c'_2}\delta_{c_1c'_1} \ . \tag{5}$$

Здесь и далее $\delta^{\perp}(p) = \delta^{(D-2)}(p_\perp)$. Все используемые ниже векторы состояний задаются их проекциями на $|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle$. Скалярное произведение двух состояний представляется в виде

$$\langle \Psi_1|\Psi_2\rangle = \sum_{c_1,c_2}\int \frac{d^{D-2}r_1 d^{D-2}r_2}{r^2_{1\perp}r^2_{2\perp}}\langle\Psi_1|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle\langle\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2|\Psi_2\rangle\,. \tag{6}$$

Для упрощения обозначений мы будем считать, что индекс частицы (или реджеона) полностью определяет ее состояние (т.е. цвет, поляризацию и импульс); кроме того, в соответствии с нормировкой (5), мы будем использовать $\Delta_{\mathcal{G}'\mathcal{G}} = r^2_\perp\delta^\perp(r-r')\delta_{c'c}$.

3 Условие бутстрапа

В символической форме условие бутстрапа для рождения глюона в мультиреджевской кинематике выглядит следующим образом [13]:

$$\langle GR_1| + gq^2_{1\perp}\langle R_\omega(q_{1\perp})|\widehat{\mathcal{G}} = g\gamma^G_{R_1R_2}\langle R_\omega(q_{2\perp})| \ , \tag{7}$$

где $\langle GR_1|$ и $\langle R_\omega(q)|$ – бра-векторы импакт-фактора перехода реджеона R_1 с импульсом q_1 в глюон G с импульсом $k = q_1 - q_2$ и собственного состояния ядра БФКЛ с собственным значением $\omega(q)$, равным отклонению реджевской траектории глюона с импульсом q от 1 (в дальнейшем называемым просто траекторией глюона); $\widehat{\mathcal{G}}$ – оператор рождения глюона G и $\gamma^G_{R_1R_2}$ – вершина его рождения реджеоном R_1 с импульсом q_1 при переходе в реджеон R_2 с импульсом q_2. Состояние $\langle R_\omega(q)|$ является октетом по цвету:

$$\langle R_\omega(q)|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle = \delta^\perp(q-r_1-r_2)T^R_{\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2}R_\omega(r_{1\perp},r_{2\perp}) \ , \tag{8}$$

где T^a – генераторы цветовой группы в присоединенном представлении, $T^a_{bc} = -if_{abc}$. В (7) и в дальнейшем цвет состояния $\langle R_\omega(q_{i\perp})|$ считается равным R_i. В последнем члене (7) предполагается суммирование по совпадающим цветам реджеона R_2 и состояния $\langle R_\omega(q_{2\perp})|$. Функция $R_\omega(r_{1\perp}, r_{2\perp})$ была найдена в [20] при произвольном $D = 4 + 2\epsilon$. В дальнейшем мы будем удерживать в соотношении бутстрапа только неисчезающие при $\epsilon \to 0$ члены. С этой точностью

$$R_\omega(r_1,r_2) = 1+\bar{g}^2\left[-\frac{\beta_0}{2N_c}\left(\frac{1}{\epsilon}+\ln\left(-q^2\right)+\ln\left(\frac{r_1^2r_2^2}{q^4}\right)\right)\right.$$
$$\left.+\gamma_0-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{r_1^2}{q^2}\right)\ln\left(\frac{r_2^2}{q^2}\right)\right]\,, \tag{9}$$

где

$$\bar{g}^2=\frac{g^2N_c\Gamma(1-\epsilon)}{(4\pi)^{2+\epsilon}}\ ,\ \ \beta_0=\frac{11}{3}N_c-\frac{2}{3}n_f\ ,\ \ \gamma_0=\frac{67}{18}-\zeta(2)-\frac{5}{9}\frac{n_f}{N_c}\ . \tag{10}$$

Здесь g – неперенормированная константа связи, N_c – число цветов, $\Gamma(x)$ – гамма-функция Эйлера, β_0 – первый коэффициент в разложении бета-функции, n_f – число кварковых ароматов, $\zeta(n)$ – дзета-функция Римана ($\zeta(2)=\pi^2/6$).

Входящие в (7) импакт фактор и оператор рождения глюона выражаются через реджеонные вершины и глюонную траекторию [13]. Заметим, что в виртуальном вкладе в импакт-фактор $\langle GR_1|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle$ (анти)симметризация по реджеонам $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ не была выписана в [13] явно. Для полной однозначности мы будем использовать представление

$$\langle GR_1| = \langle GR_1|_s - \langle GR_1|_u\,,\quad \langle GR_1|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle_u = \langle GR_1|\mathcal{G}_2\mathcal{G}_1\rangle_s\ , \tag{11}$$

$$\langle GR_1|_s = \langle GR_1|_s^{\Delta} - \langle GR_1|_s^{B}\Big(\left(\omega(q_{1\perp})-\omega(\hat{r}_{1\perp})\right)\ln\left|\frac{k_\perp}{(q_1-\hat{r}_1)_\perp}\right|$$
$$-\,\omega(\hat{r}_{2\perp})\ln\left|\frac{k_\perp}{\hat{r}_{2\perp}}\right|+\widehat{\mathcal{K}}_r^B\Delta\Big)\ , \tag{12}$$

где $\Delta \gg 1$ — вспомогательный параметр, $\langle GR_1|^{\Delta}$ — импакт-фактор без виртуальных поправок, вычисленный с обрезанием интегралов по относительной быстроте частиц в струях величиной Δ (зависимость от Δ исчезает в правой части (12) благодаря сокращению между первым и последним членом), $\omega(q)$ – однопетлевая траектория глюона, $\langle GR_1|^B$ и $\widehat{\mathcal{K}}_r^B$ — импакт-фактор и реальная (связанная с рождением реальных частиц) часть ядра БФКЛ в борновском приближении:

$$\langle GR_1|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle_s^B = \delta^\perp(q_1-k-r_1-r_2)\sum_{G'}\gamma_{R_1\mathcal{G}_1}^{G'}\Gamma_{GG'}^{\mathcal{G}_2}, \tag{13}$$

$$\langle \mathcal{G}_1'\mathcal{G}_2'|\widehat{\mathcal{K}}_r^B|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle^B = \delta^\perp(r_1'+r_2'-r_1-r_2)\frac{1}{2(2\pi)^{D-1}}\sum_{G'}\gamma_{\mathcal{G}_1'\mathcal{G}_1}^{G'}\gamma_{G'}^{\mathcal{G}_2'\mathcal{G}_2}\ . \tag{14}$$

Здесь суммирование идет по цветам и поляризациям промежуточного глюона G', $\gamma_{G'}^{\mathcal{G}_2'\mathcal{G}_2}$ – вершина поглощения глюона G' реджеоном $\mathcal{G}_2'$ с переходом его в $\mathcal{G}_2$, $\gamma_{R_1\mathcal{G}_1}^{G'}$ и $\gamma_{\mathcal{G}_1'\mathcal{G}_1}^{G'}$– вершины испускания глюона G' реджеонами R_1 и $\mathcal{G}_1'$ соответственно с переходом их в $\mathcal{G}_1$; вершины поглощения связаны с обычно используемыми вершинами испускания соотношением

$$\gamma_G^{\mathcal{R}'\mathcal{R}} = \gamma_{\mathcal{R}'\mathcal{R}}^{G_-}, \tag{15}$$

где индекс “$_-$” у глюона G означает изменение знака импульса и комплексное сопряжение его вектора поляризации; $\Gamma_{GG'}^{\mathcal{G}}$ – вершина перехода глюона G' в G при рассеянии на реджеоне $\mathcal{G}$. Как уже говорилось, нормировка этих вершин отличается от принятой в [13]: здесь мы опускаем множитель $2p_P^+$ $(2p_P^-)$ в вершинах $\Gamma_{P'P}^{\mathcal{G}}$ с большими $^+$ $(^-)$ компонентами импульсов частиц.

Траектория глюона и все требуемые для проверки условия бутстрапа вершины представлены в следующем разделе. В (14) и (13) входят только глюонные вершины в борновском приближении. В СГЛП наряду с этими вершинами, которые должны быть взяты в однопетлевом приближении, входят и вершины с участием двухчастичных струй:

$$\langle GR_1|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle^{\Delta} =$$
$$= \delta^{\perp}(q_1-k-r_1-r_2)\sum_J\int\left(\gamma_{R_1\mathcal{G}_1}^{J}\Gamma_{GJ}^{\mathcal{G}_2} - \gamma_{R_1\mathcal{G}_2}^{J}\Gamma_{GJ}^{\mathcal{G}_1}\right)d\phi_J\prod_i\theta\big(\Delta-(y-z_i)\big)\ . \tag{16}$$

Здесь суммирование идет по сортам струй (одноглюонной $J=G'$, двухглюонной $J=G_1G_2$ и кварк-антикварковой $J=Q\bar{Q}$) и дискретным квантовым числам частиц в струе, $y=\frac{1}{2}\ln(k^+/k^-)$ – быстрота глюона G, $z_i=\frac{1}{2}\ln(l_i^+/l_i^-)$ – быстроты частиц в струе J,

$$d\phi_J = (2\pi)^D\delta^D\Big(l_J-\sum_i l_i\Big)\frac{1}{n!}\frac{dl_J^2}{2\pi}\prod_i\frac{d^{D-1}l_i}{2l_i^0(2\pi)^{D-1}}\ , \tag{17}$$

где $D=4+2\epsilon$ – размерность пространства-времени (ее отличие от 4 регуляризует инфракрасные и ультрафиолетовые расходимости), l_i – импульсы частиц в струе, n – число тождественных частиц в ней.

В соответствии с [13], для оператора рождения глюона имеем:

$$\widehat{\mathcal{G}} = \widehat{\mathcal{G}}^{\Delta} - \Big(\widehat{\mathcal{G}}^B\widehat{\mathcal{K}}^B + \widehat{\mathcal{K}}^B\widehat{\mathcal{G}}^B\Big)\Delta\ , \tag{18}$$

с таким же вспомогательным параметром Δ, как и в (12),

$$\langle \mathcal{G}_1'\mathcal{G}_2'|\widehat{\mathcal{G}}^B|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle = \delta^\perp(r_1'+r_2'-k-r_1-r_2)\left[\gamma^G_{\mathcal{G}_1'\mathcal{G}_1}\Delta_{\mathcal{G}_2'\mathcal{G}_2}+\gamma^G_{\mathcal{G}_2'\mathcal{G}_2}\Delta_{\mathcal{G}_1'\mathcal{G}_1}\right], \quad (19)$$

где вершины $\gamma^G_{\mathcal{G}'\mathcal{G}}$ берутся в борновском приближении, и

$$\langle \mathcal{G}_1'\mathcal{G}_2'|\widehat{\mathcal{G}}^\Delta|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle = \delta^\perp(r_1'+r_2'-k-r_1-r_2)\Bigg[\gamma^G_{\mathcal{G}_1'\mathcal{G}_1}\Delta_{\mathcal{G}_2'\mathcal{G}_2}+\gamma^G_{\mathcal{G}_2'\mathcal{G}_2}\Delta_{\mathcal{G}_1'\mathcal{G}_1}$$

$$+\sum_{G'}\int_{y-\Delta}^{y+\Delta}\frac{dz'}{2(2\pi)^{D-1}}\left(\gamma^{\{GG'\}}_{\mathcal{G}_1'\mathcal{G}_1}\gamma^{\mathcal{G}_2'\mathcal{G}_2}_{G'}+\gamma^{G'}_{\mathcal{G}_1'\mathcal{G}_1}\gamma^{\mathcal{G}_2'\mathcal{G}_2}_{\{GG'\}}\right)\Bigg]\,. \quad (20)$$

Здесь в первых двух слагаемых должны учитываться однопетлевые поправки к вершинам, а в последнем суммирование идет по цветам и поляризациям глюона G' с импульсом k', и интегрирование проводится по его быстроте $z' = \frac{1}{2}\ln(k'^+/k'^-)$; $\gamma^{\{GG'\}}_{\mathcal{G}_1'\mathcal{G}_1}$ – вершина рождения струи, состоящей из глюонов G и G' при реджеонном переходе $\mathcal{G}_1' \to \mathcal{G}_1$; $\gamma^{\mathcal{G}_2'\mathcal{G}_2}_{\{GG'\}}$ – вершина поглощения глюона G' реджеоном $\mathcal{G}_2'$ с переходом его в глюон G и реджеон $\mathcal{G}_2$; при этом

$$\gamma^{\mathcal{G}_2'\mathcal{G}_2}_{\{GG'\}} = \gamma^{\{GG'_-\}}_{\mathcal{G}_2'\mathcal{G}_2}\,. \quad (21)$$

где, как и в (15), индекс "_" означает изменение знака импульса и комплексное сопряжение вектора поляризации.

Реджеонные вершины и траектория

Все реджеонные вершины и глюонная траектория известны в настоящее время в следующем за главным порядке при любом $D = 4+2\epsilon$. Как уже говорилось, мы будем доказывать соотношение бутстрапа (7), удерживая только неисчезающие при $\epsilon \to 0$ члены. Поэтому здесь мы приводим только используемые при доказательстве вершины и траекторию и только с требуемой точностью, приводя для полноты картины ссылки на работы, в которых получены более точные результаты.

Реджевская траектория глюона потребуется нам только в однопетлевом приближении, так что мы будем использовать

$$\omega(q) = -2\bar{g}^2\left[\frac{1}{\epsilon}+\ln(-q^2)\right]\,. \quad (22)$$

Вычисление двухпетлевых поправок к траектории было проведено в [24]–[28] и подтверждено в [29], [30].

В реджеонных вершинах мы будем использовать для векторов поляризации глюонов калибровку $(en_2) = 0$ (см. (3)). Тогда вершина $\gamma^{G}_{R_1R_2}$ рождения глюона G с импульсом $k = q_1 - q_2$ при переходе реджеона R_1 с импульсом q_1 в реджеон R_2 с импульсом q_2 представляется в виде

$$\gamma^{G}_{R_1R_2} = \gamma^{G(B)}_{R_1R_2} + 2g\bar{g}^2 T^{G}_{R_1R_2} e^{*}_{\perp\mu} q^2_{1\perp}\left[V^{\mu}_{g}(q_1,q_2) + \frac{n_f}{3N_c}V^{\mu}_{f}(q_1,q_2)\right] , \quad (23)$$

где $\gamma^{G(B)}_{R_1R_2}$ – вершина в древесном приближении [3], в используемой калибровке имеющая вид

$$\gamma^{G(B)}_{R_1R_2} = -2gT^{G}_{R_1R_2} e^{*}_{\perp\mu} q^2_{1\perp}\left(\frac{q^{\mu}_{1\perp}}{q^2_{1\perp}} - \frac{k^{\mu}_{\perp}}{k^2_{\perp}}\right) , \quad k = q_1 - q_2 , \quad (24)$$

а $V^{\mu}_{g}(q_1,q_2)$ и $V^{\mu}_{f}(q_1,q_2)$ – глюонные и кварковые радиационные поправки, найденные в работах [31]–[34] и [35] соответственно; с нашей точностью

$$V^{\mu}_{g}(q_1,q_2) = \left(\frac{k^{\mu}_{\perp}}{k^2_{\perp}} - \frac{q^{\mu}_{1\perp}}{q^2_{1\perp}}\right)\left(\frac{11}{6}\frac{q^2_{1\perp}+q^2_{2\perp}}{q^2_{1\perp}-q^2_{2\perp}}\ln\frac{q^2_{1\perp}}{q^2_{2\perp}} - \frac{1}{2}\ln^2\frac{q^2_{1\perp}}{q^2_{2\perp}} - \left|k^2_{\perp}\right|^{\epsilon}\left[\frac{1}{\epsilon^2} - \frac{\pi^2}{2}\right]\right.$$
$$\left. + \frac{k^2_{\perp}}{3\left(q^2_{1\perp}-q^2_{2\perp}\right)^2}\left[q^2_{1\perp}+q^2_{2\perp} - \frac{2q^2_{1\perp}q^2_{2\perp}}{q^2_{1\perp}-q^2_{2\perp}}\ln\frac{q^2_{1\perp}}{q^2_{2\perp}}\right]\right) - \frac{k^{\mu}_{\perp}}{k^2_{\perp}}\left(\frac{11}{3}\frac{q^2_{2\perp}}{q^2_{1\perp}-q^2_{2\perp}}\ln\frac{q^2_{1\perp}}{q^2_{2\perp}}\right.$$
$$\left. + \frac{k^2_{\perp}}{6q^2_{1\perp}} - \frac{k^2_{\perp}\left(2k^2_{\perp}-q^2_{1\perp}-q^2_{2\perp}\right)}{6q^2_{1\perp}\left(q^2_{1\perp}-q^2_{2\perp}\right)^2}\left[q^2_{1\perp}+q^2_{2\perp} - \frac{2q^2_{1\perp}q^2_{2\perp}}{q^2_{1\perp}-q^2_{2\perp}}\ln\frac{q^2_{1\perp}}{q^2_{2\perp}}\right]\right) , \quad (25)$$

$$V^{\mu}_{f}(q_1,q_2) = \left(\frac{q^{\mu}_{1\perp}}{q^2_{1\perp}} - \frac{k^{\mu}_{\perp}}{k^2_{\perp}}\right)\left(\frac{q^2_{1\perp}+q^2_{2\perp}}{q^2_{1\perp}-q^2_{2\perp}}\ln\frac{q^2_{1\perp}}{q^2_{2\perp}} + \frac{k^2_{\perp}}{\left(q^2_{1\perp}-q^2_{2\perp}\right)^2}\left[q^2_{1\perp}+q^2_{2\perp} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{2q^2_{1\perp}q^2_{2\perp}}{q^2_{1\perp}-q^2_{2\perp}}\ln\frac{q^2_{1\perp}}{q^2_{2\perp}}\right]\right) + \frac{k^{\mu}_{\perp}}{k^2_{\perp}}\left(\frac{2q^2_{2\perp}}{q^2_{1\perp}-q^2_{2\perp}}\ln\frac{q^2_{1\perp}}{q^2_{2\perp}} + \frac{k^2_{\perp}}{2q^2_{1\perp}} - \right.$$
$$\left. - \frac{k^2_{\perp}\left(2k^2_{\perp}-q^2_{1\perp}-q^2_{2\perp}\right)}{2q^2_{1\perp}\left(q^2_{1\perp}-q^2_{2\perp}\right)^2}\left[q^2_{1\perp}+q^2_{2\perp} - \frac{2q^2_{1\perp}q^2_{2\perp}}{q^2_{1\perp}-q^2_{2\perp}}\ln\frac{q^2_{1\perp}}{q^2_{2\perp}}\right]\right) . \quad (26)$$

Глюонные и кварковые поправки к борновской вершине перехода глюона G в G' при рассеянии на реджеоне R

$$\Gamma^{R(B)}_{G'G} = -g\left(e'^{*}_{\perp}e_{\perp}\right)T^{R}_{G'G}, \quad (27)$$

где e и e' – векторы поляризации глюонов G и G', были вычислены в работах [31], [25] и [36] соответственно. С нашей точностью вершина представляется в виде

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{R}_{G'G} = \Gamma^{R(B)}_{G'G}\left[1-\bar g^2|q_\perp^2|^\epsilon\left(\frac{2}{\epsilon^2}-\frac{\beta_0}{2N_c\epsilon}+\gamma_0-4\zeta(2)\right)\right]- \\
-g\bar g^2 T^R_{G'G}\Big((e'^*_\perp e_\perp)-2\frac{(e'^*_\perp q_\perp)(e_\perp q_\perp)}{q_\perp^2}\Big)\left[\frac{1}{3}-\frac{n_f}{3N_c}\right] ,
\end{aligned}
\tag{28}
$$

где q – импульс реджеона.

Вершины $\gamma^J_{R_1R_2}$ рождения двухглюонных и кварк-антикварковых струй J при реджеонном переходе $R_1 \to R_2$ и вершины Γ^R_{GJ} перехода струи J в глюон G при рассеянии на реджеоне R нужны только в древесном приближении. Будем обозначать импульс струи l, импульсы частиц в струе l_i, $i=1,2$, $l=l_1+l_2$, а доли их “+” компонент x_i, т.е. $l_i^+ = x_i l^+$, $x_1+x_2=1$. Если частицы — кварк и антикварк, то индекс 1 будем относить к кварку. Поскольку $\Gamma^R_{GJ} = \left(\Gamma^R_{JG}\right)^*$, для вершины $\Gamma^R_{G\{Q\bar Q\}}$ получаем из [37] (обозначая по-прежнему импульс глюона k, его вектор поляризации e, а импульс реджеона q)

$$
\begin{aligned}
\Gamma^R_{G\{Q\bar Q\}} = g^2\bar v(l_2)\frac{\not n_2}{2l^+}e^*_{\perp\mu}\Big[t^Rt^G\big(M^\mu(l_1,l_2,k_\perp)-M^\mu(l_1,l_2,l_\perp)\big)- \\
-t^Gt^R\big(\overline{M^\mu(l_2,l_1,k_\perp)}-\overline{M^\mu(l_2,l_1,l_\perp)}\big)\Big]u(l_1) ,
\end{aligned}
\tag{29}
$$

где t^a – генераторы цветовой группы в фундаментальном представлении,

$$
M^\mu(l_1,l_2,p_\perp) = \frac{1}{(l_1-x_1p)^2_\perp}\big(x_1(\not l_1-x_1\not p)_\perp\gamma^\mu - x_2\gamma^\mu(\not l_1-x_1\not p)_\perp\big) ,
$$

$$
\overline{M^\mu} = \gamma^0\left(M^\mu\right)^\dagger\gamma^0 , \tag{30}
$$

цветовые волновые функции кварка и антикварка включены в $u(l_1)$ и $\bar v(l_2)$ соответственно.

Нам будет нужна также вершина $\Gamma^R_{G\{G_1G_2\}}$, получающаяся сопряжением из найденной в [37] вершины $\Gamma^R_{\{G_1G_2\}G}$. Она может быть представлена в форме, аналогичной (29):

$$
\begin{aligned}
\Gamma^R_{G\{G_1G_2\}} = 2g^2\chi_2^T e^{*\mu}_\perp e^\nu_{1\perp}e^\rho_{2\perp}\Big[T^RT^G\big(M_{\mu\nu\rho}(l_1,l_2,k_\perp)-M_{\mu\nu\rho}(l_1,l_2,l_\perp)\big)+ \\
+T^GT^R\big(M_{\mu\rho\nu}(l_2,l_1,k_\perp)-M_{\mu\rho\nu}(l_2,l_1,l_\perp)\big)\Big]\chi_1 ,
\end{aligned}
\tag{31}
$$

где χ_i – цветовые волновые функции глюонов, e_i – их векторы поляризации,

$$M^{\mu\nu\rho}(l_1,l_2,p_\perp) = \frac{1}{(l_1-x_1p)^2_\perp}\big(x_1x_2g^{\nu\rho}(l_1-x_1p)^\mu_\perp - \\ -x_1g^{\mu\nu}(l_1-x_1p)^\rho_\perp - x_2g^{\mu\rho}(l_1-x_1p)^\nu_\perp\big)\ . \quad (32)$$

Рассматривая рождение струй при реджеонном переходе, будем попрежнему обозначать импульсы реджеонов q_1 и q_2, а импульсы частиц в струе l_1 и l_2, $l_1+l_2=l=q_1-q_2$. Используя результаты [38]–[40], получаем

$$\gamma^{\{Q\bar{Q}\}}_{R_1R_2} = g^2\bar{u}(l_1)\frac{\not{n}_2}{l^+}\big(t^{R_1}t^{R_2}b(q_1;l_1,l_2) - t^{R_2}t^{R_1}\overline{b(q_1;l_2,l_1)}\big)v(l_2)\ , \quad (33)$$

где

$$b(q_1;l_1,l_2) = \frac{\not{l}_{1\perp}(\not{l}_{1\perp}-\not{q}_{1\perp})}{x_1(q_1-l_1)^2_\perp + x_2l^2_{1\perp}} + \\ + \frac{x_1x_2}{\Lambda^2_\perp}\left[\frac{q^2_{1\perp}\big(\not{l}_{1\perp}\not{\Lambda}_\perp - \not{\Lambda}_\perp\not{l}_{2\perp}\big)}{\Lambda^2_\perp + x_1x_2(l_1+l_2)^2_\perp} + \frac{\not{\Lambda}_\perp\not{q}_{1\perp}}{x_1} - \frac{\not{q}_{1\perp}\not{\Lambda}_\perp}{x_2}\right] - 1\ , \quad (34)$$

$$\Lambda^\mu_\perp = \big(x_2l_1 - x_1l_2\big)^\mu_\perp\ , \quad \overline{b(q_1;l_1,l_2)} = \gamma^0b^\dagger(q_1;l_1,l_2)\gamma^0\ . \quad (35)$$

Калибровочно-инвариантная вершина рождения двух глюонов была получена в [41]. Согласно [23], в калибровке (3) с $n=n_2$ имеем:

$$\gamma^{\{G_1G_2\}}_{R_1R_2} = 4g^2e^{*\alpha}_{1\perp}e^{*\beta}_{2\perp}\chi_1^\dagger\big[T^{R_1}T^{R_2}b_{\alpha\beta}(q_1;l_1,l_2) + T^{R_2}T^{R_1}b_{\beta\alpha}(q_1;l_2,l_1)\big]\chi_2^*\ , \quad (36)$$

где

$$b^{\alpha\beta}(q_1;l_1,l_2) = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}_\perp\left[\frac{x_1x_2}{\Lambda^2_\perp}\left(-2(q_{1\perp}\Lambda_\perp) + q^2_{1\perp}\frac{(\Lambda_\perp(x_2l_{1\perp}+x_1l_{2\perp}))}{x_2l^2_{1\perp}+x_1l^2_{2\perp}}\right) - \\ - x_1x_2\frac{q^2_{1\perp}-2(q_{1\perp}l_{1\perp})}{x_1(q_1-l_1)^2_\perp + x_2l^2_{1\perp}}\right] - \frac{x_2l^\alpha_{1\perp}q^\beta_{1\perp} - x_1q^\alpha_{1\perp}(q_1-l_1)^\beta_\perp}{x_1(q_1-l_1)^2_\perp + x_2l^2_{1\perp}} \\ - \frac{x_1q^2_{1\perp}l^\alpha_{1\perp}(q_1-l_1)^\beta_\perp}{l^2_{1\perp}(x_1(q_1-l_1)^2_\perp + x_2l^2_{1\perp})} + \frac{x_1q^\alpha_{1\perp}\Lambda^\beta_\perp + x_2q^\beta_{1\perp}\Lambda^\alpha_\perp}{\Lambda^2_\perp} + \frac{x_1q^2_{1\perp}l^\alpha_{1\perp}l^\beta_{2\perp}}{l^2_{1\perp}(x_2l^2_{1\perp}+x_1l^2_{2\perp})} \\ - \frac{x_1x_2q^2_{1\perp}}{\Lambda^2_\perp(x_2l^2_{1\perp}+x_1l^2_{2\perp})}\left(\Lambda^\alpha_\perp l^\beta_{2\perp} + l^\alpha_{1\perp}\Lambda^\beta_\perp\right). \quad (37)$$

Согласно (14), (24) и (15), для ядра в борновском приближении получаем:

$$\langle \mathcal{G}_1'\mathcal{G}_2'|\widehat{\mathcal{K}}_r^B|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle = \delta^{\perp}(r_1+r_2-r_1'-r_2')\times$$
$$\times \sum_G T^G_{\mathcal{G}_1'\mathcal{G}_1} T^G_{\mathcal{G}_2'\mathcal{G}_2} \frac{-2}{N_c} K_r^{(B)}(r_{1\perp}, r_{1\perp}'; r_{1\perp}+r_{2\perp})\,, \tag{38}$$

где

$$K_r^{(B)}(r_{1\perp}, r_{1\perp}'; r_{1\perp}+r_{2\perp}) = \frac{g^2 N_c}{2(2\pi)^{D-1}}\left((r_1+r_2)^2_{\perp} - \frac{r_{1\perp}^2 r_{2\perp}'^2 + r_{1\perp}'^2 r_{2\perp}^2}{(r_1-r_1')^2_{\perp}}\right)\,. \tag{39}$$

Здесь и в дальнейшем по повторяющимся цветовым индексам подразумевается суммирование.

Бутстрап в главном порядке

В этом приближении для импакт-фактора $\langle GR_1|$ из определений (11) и (13) имеем

$$\begin{aligned}\langle GR_1|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle \;&=\; -\delta^{\perp}(q_1-r_1-r_2-k)2g^2 e^*_{\perp}\times\\ &\times\;\left[T^{G'}_{R_1\mathcal{G}_1}T^{\mathcal{G}_2}_{GG'}\left(q_{1\perp}-q_{1\perp}^2\frac{q_{1\perp}-r_{1\perp}}{(q_{1\perp}-r_{1\perp})^2}\right)\right.\\ &\left.-T^{G'}_{R_1\mathcal{G}_2}T^{\mathcal{G}_1}_{GG'}\left(q_{1\perp}-q_{1\perp}^2\frac{q_{1\perp}-r_{2\perp}}{(q_{1\perp}-r_{2\perp})^2}\right)\right]\,,\end{aligned} \tag{40}$$

где k и e – импульс и вектор поляризации глюона G, а для матричных элементов оператора рождения глюона из (19)

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{G}_1'\mathcal{G}_2'|\hat{\mathcal{G}}|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle \;&=\; -\delta^{\perp}(r_1+r_2+k-r_1'-r_2')2ge^*_{\perp}\left[T^G_{\mathcal{G}_1'\mathcal{G}_1}\left(r_{1\perp}'-k_{\perp}\frac{r_{1\perp}'^2}{k_{\perp}^2}\right)\Delta_{\mathcal{G}_2\mathcal{G}_2'}+\right.\\ &\left.+T^G_{\mathcal{G}_2'\mathcal{G}_2}\left(r_{2\perp}'-k_{\perp}\frac{r_{2\perp}'^2}{k_{\perp}^2}\right)\Delta_{\mathcal{G}_1\mathcal{G}_1'}\right].\end{aligned} \tag{41}$$

Используя (6), (8) и (9) в главном порядке, получаем

$$\begin{aligned}gq_{1\perp}^2\langle R_{\omega}(q_{1\perp})|\hat{\mathcal{G}}|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle \;&=\; \delta^{\perp}(q_1-r_1-r_2-k)2g^2q_{1\perp}^2 e^*_{\perp}\times\\ \times\left[T^{R_1}_{\mathcal{G}_1'\mathcal{G}_2}T^G_{\mathcal{G}_1'\mathcal{G}_1}\left(\frac{k_{\perp}}{k_{\perp}^2}-\frac{r_{1\perp}+k_{\perp}}{(r_{1\perp}+k_{\perp})^2}\right)\right.&\left.+T^{R_1}_{\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2'}T^G_{\mathcal{G}_2'\mathcal{G}_2}\left(\frac{k_{\perp}}{k_{\perp}^2}-\frac{r_{2\perp}+k_{\perp}}{(r_{2\perp}+k_{\perp})^2}\right)\right]\,.\end{aligned} \tag{42}$$

Суммирование (40) и (42) дает

$$
\begin{aligned}
& g q_{1\perp}^2 \langle R_\omega(q_{1\perp})|\hat{\mathcal{G}}|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle + \langle GR_1|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle = \\
&= -\delta^\perp(q_1 - r_1 - r_2 - k)2g^2 e_\perp^* T^{R_2}_{\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2} T^G_{R_1R_2}\left(q_{1\perp} - q_{1\perp}^2\frac{k_\perp}{k_\perp^2}\right) \,. \qquad (43)
\end{aligned}
$$

Сравнение правой части этого равенства с соответствующей частью условия бутстрапа (7) доказывает выполнение этого условия в главном порядке.

4 Проверка кварковой части условия бутстрапа в следующем за главным порядке

Как видно из изложенного выше, в главном приближении цветовая структура левой части условия бутстрапа (7) сводится к $T^a_{R_1\mathcal{G}_1}T^a_{\mathcal{G}_2G}$ и $T^a_{R_1\mathcal{G}_2}T^a_{\mathcal{G}_1G}$. Виртуальные поправки к реджеонным вершинам, участвующим в условии бутстрапа уже в главном приближении, не меняют цветовой структуры. Новые цветовые структуры появляются от учета двухглюонных и кварк-антикварковых струй. Это следы произведений генераторов соответствующих представлений с индексами $R_1, G, \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$, взятыми во всевозможных порядках. Поскольку следы не меняются при циклической перестановке генераторов, число независимых следов, вообще говоря, равно шести. Но для глюонов следы вещественны; в силу эрмитовости генераторов это значит, что след их произведения равен следу произведения в обратном порядке, т.е. число независимых следов равно трем. Это не так для кварк-антикварковых струй; но поскольку их вклад не меняется при замене кварка на антикварк, то он содержит только суммы следов произведений генераторов с взаимно обратными порядками, так что число независимых цветовых структур опять сводится к трем.

Из (11), (18)–(20) и (8), (9) следует, что условие бутстрапа антисимметрично относительно замены реджеонов $\mathcal{G}_1 \leftrightarrow \mathcal{G}_2$. Поэтому удобно выбрать цветовые структуры так, чтобы одна из них была симметрична по индексам $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$, а две другие переходили друг в друга при их замене. При таком выборе нужно будет проверять условие только при симметричной структуре и одной из несимметричных, поскольку множитель при другой будет получаться заменой импульсов реджеонов. Мы будем использовать следующий набор структур:

$$
\mathrm{ReTr}[\mathcal{T}^{R_1}\mathcal{T}^{G}\mathcal{T}^{\mathcal{G}_1}\mathcal{T}^{\mathcal{G}_2}]\,, \quad \mathrm{ReTr}[\mathcal{T}^{R_1}\mathcal{T}^{G}\mathcal{T}^{\mathcal{G}_2}\mathcal{T}^{\mathcal{G}_1}], \quad \mathrm{ReTr}[\mathcal{T}^{R_1}\mathcal{T}^{\mathcal{G}_1}\mathcal{T}^{G}\mathcal{T}^{\mathcal{G}_2}]\,, \qquad (44)
$$

$\mathcal{T}^c = T^c$ для глюонов и $\mathcal{T}^c = t^c$ для кварков. Очевидно, что первые две структуры получаются друг из друга заменой $\mathcal{G}_1 \leftrightarrow \mathcal{G}_2$, а третья не меняется при этой замене в силу инвариантности относительно циклических перестановок генераторов и изменения их порядка на обратный. Цветовые структуры борновского приближения выражаются через структуры (44) следующим образом:

$$\frac{T_{\mathcal{T}}}{2} T^a_{R_1\mathcal{G}_1} T^a_{\mathcal{G}_2 G} = \mathrm{ReTr}[\mathcal{T}^{R_1}\mathcal{T}^{G}\mathcal{T}^{\mathcal{G}_2}\mathcal{T}^{\mathcal{G}_1}] - \mathrm{ReTr}[\mathcal{T}^{R_1}\mathcal{T}^{\mathcal{G}_1}\mathcal{T}^{G}\mathcal{T}^{\mathcal{G}_2}] \ ,$$

$$\frac{T_{\mathcal{T}}}{2} T^a_{R_1\mathcal{G}_2} T^a_{\mathcal{G}_1 G} = \mathrm{ReTr}[\mathcal{T}^{R_1}\mathcal{T}^{G}\mathcal{T}^{\mathcal{G}_1}\mathcal{T}^{\mathcal{G}_2}] - \mathrm{ReTr}[\mathcal{T}^{R_1}\mathcal{T}^{\mathcal{G}_1}\mathcal{T}^{G}\mathcal{T}^{\mathcal{G}_2}] \ , \qquad (45)$$

где множитель $T_{\mathcal{T}}$ определен соотношением

$$\mathrm{Tr}[\mathcal{T}^a\mathcal{T}^b] = T_{\mathcal{T}}\delta^{ab} \ ,$$

так что в фундаментальном представлении $T_{\mathcal{T}} = 1/2$, а в присоединенном $T_{\mathcal{T}} = N_c$.

Кварки появляются в условии бутстрапа только в СГЛП. Здесь мы будем рассматривать безмассовые кварки и считать, что их число (число ароматов) равно n_f. Вклад таких кварков во все входящие в соотношение бутстрапа величины пропорционален n_f. Он естественно делится на две части. Одна из них идет от поправок к реджеонным вершинам, входящим в соотношение бутстрапа уже в главном порядке. Мы будем называть эту часть виртуальной. Вторая часть идет от рождения реальных кварк-антикварковых пар. Как видно из определений (11)–(14), (16) и (18)–(20), импакт-фактор $\langle GR_1|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle$ содержит обе части, тогда как в матричном элементе $\langle R_\omega(q_{1\perp})|\hat{\mathcal{G}}|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle$ кварковая поправка имеет только виртуальную часть.

Виртуальная часть поправок вычисляется без труда с помощью указанных определений и выражений (23), (28) и (9) для вершин. Используя обозначение:

$$\mathcal{F}_\mu = \delta^{\perp}(q_1 - k - r_1 - r_2) q_{1\perp}^2 \frac{4n_f}{3N_c} g^2 \bar{g}^2 e^*_{\perp\mu} \ , \qquad (46)$$

получаем

$$\langle GR_1|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle_{f(v)} = \frac{1}{2} T^a_{R_1\mathcal{G}_1} T^a_{\mathcal{G}_2 G} \mathcal{F}_\mu \Bigg\{ \left(\frac{q^\mu_{1\perp}}{q^2_{1\perp}} - \frac{(q_1 - r_1)^\mu_\perp}{(q_1 - r_1)^2_\perp} \right) \left(\frac{1}{\epsilon} - \frac{2}{3} + \ln|r^2_{2\perp}| \right) -$$
$$- 2\frac{r^\mu_{2\perp}}{r^2_{2\perp}} \left(\frac{q_{1\perp} r_{2\perp}}{q^2_{1\perp}} - \frac{(q_1 - r_1)_\perp r_{2\perp}}{(q_1 - r_1)^2_\perp} \right) + V^\mu_f(q_1, r_1) \Bigg\} - \big(1 \leftrightarrow 2\big) \ , \qquad (47)$$

$$
\begin{aligned}
gq^2_{1\perp}\langle R_\omega(q_{1\perp})|\hat{\mathcal{G}}|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle_{f(v)} = \frac{1}{2}T^a_{R_1\mathcal{G}_1}T^a_{\mathcal{G}_2G}\mathcal{F}_\mu\Bigg\{\left(\frac{(q_1-r_1)^\mu_\perp}{(q_1-r_1)^2_\perp}-\frac{k^\mu_\perp}{k^2_\perp}\right)\times \\
\times\left(-\frac{1}{\epsilon}+\frac{5}{3}+\ln\left|\frac{q^2_{1\perp}}{r^2_{1\perp}(q_1-r_1)^2_\perp}\right|\right)+V^\mu_f(q_1-r_1,r_2)\Bigg\}-\big(1\leftrightarrow 2\big)\ ,
\end{aligned} \tag{48}
$$

где индекс f означает кварковый вклад, (v) – его виртуальную часть, функция V^μ_f определена в (26), и замена $1\leftrightarrow 2$ означает замену импульсов и цветовых индексов реджеонов $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$.

Вычисление реальной поправки к импакт-фактору

Вычисление поправки к импакт-фактору за счет рождения реальных кварков требует некоторых усилий. Нам нужно в (16) положить $J = Q\bar{Q}$, подставить вершины (29), (30) и (33)–(35), просуммировать по всем цветам, поляризациям и ароматам кварков и антикварков и проинтегрировать по их импульсам с мерой (17). Суммирование по поляризациям приводит к следам вида $\mathrm{Tr}\big(b(q_1;l_1,l_2)M^\mu(l_1,l_2,p_\perp)\big)$, $\mathrm{Tr}\big(\overline{b(q_1;l_2,l_1)}M^\mu(l_1,l_2,p_\perp)\big)$ и $\mathrm{Tr}\big(b(q_1;l_1,l_2)\overline{M^\mu(l_2,l_1,p_\perp)}\big)$, $\mathrm{Tr}\big(\overline{b(q_1;l_2,l_1)}\ \overline{M^\mu(l_2,l_1,p_\perp)}\big)$, где $p_\perp$ равно либо $k_\perp$, либо $(l_1+l_2)_\perp = l_\perp$. С помощью соотношений

$$
\mathrm{Tr}\big(b(q_1;l_1,l_2)\overline{M^\mu(l_2,l_1,p_\perp)}\big) = \mathrm{Tr}\big(\overline{b(q_1;l_1,l_2)}M^\mu(l_2,l_1,p_\perp)\big)\ ,
$$

$$
\mathrm{Tr}\big(\overline{b(q_1;l_2,l_1)}\ \overline{M^\mu(l_2,l_1,p_\perp)}\big) = \mathrm{Tr}\big(b(q_1;l_2,l_1)M^\mu(l_2,l_1,p_\perp)\big)
$$

и симметрии меры интегрирования (17), так же, как и произведения θ-функций в (16), относительно замены $l_1\leftrightarrow l_2$, вклады двух последних следов сводятся к вкладам двух первых. После этого суммирование по цветам приводит к цветовым структурам (44). Мера интегрирования (17) представляется в виде

$$
d\phi_J = d^{D-2}l_{1\perp}d^{D-2}l_{2\perp}\frac{\delta^\perp(l-l_1-l_2)}{(2\pi)^{D-1}}\frac{dx_1dx_2}{2x_1x_2}\delta(1-x_1-x_2)\ , \tag{49}
$$

$l_\perp = q_{1\perp}-r_{1\perp}$ для первого слагаемого в (16) и $l_\perp = q_{1\perp}-r_{2\perp}$ для второго слагаемого; $x_i = l^+_i/k^+$. Ограничения на область интегрирования, налагаемые θ-функциями в (16), записываются в виде

$$
x_i \ge \frac{|l_{i\perp}|}{|k_\perp|}e^{-\Delta}\ . \tag{50}
$$

Поскольку интеграл хорошо сходится в области малых x_i, правую часть этого неравенства можно положить нулем. Используя еще равенства (45), приходим к представлению

$$
\begin{aligned}
\langle GR_1|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle_{f(r)} &= \frac{3(4\pi)^{\frac{D}{2}}\mathcal{F}_\mu}{2\Gamma(1-\epsilon)q_{1\perp}^2}\int_0^1 dx_1\int_0^1 dx_2\delta(1-x_1-x_2)\times \\
&\times\int d^{D-2}l_{1\perp}d^{D-2}l_{2\perp}\frac{\delta^\perp(q_1-r_1-l_1-l_2)}{2(2\pi)^{D-1}} \\
&\times\Big[\frac{1}{4}T^a_{R_1\mathcal{G}_1}T^a_{\mathcal{G}_2G}\mathrm{Tr}\Big[b(q_1;l_1,l_2)\big(M^\mu(l_1,l_2,k_\perp)-M^\mu(l_1,l_2,l_\perp)\big)\Big] \\
&- \mathrm{ReTr}[t^{R_1}t^{\mathcal{G}_1}t^{G}t^{\mathcal{G}_2}]\mathrm{Tr}\Big[\Big(\overline{b(q_1;l_2,l_1)}-b(q_1;l_1,l_2)\Big)\big(M^\mu(l_1,l_2,k_\perp) \\
&- M^\mu(l_1,l_2,l_\perp))\Big]\Big] - \big(1\leftrightarrow 2\big)\,,
\end{aligned}
\tag{51}
$$

где индекс (r) означает поправку за счет рождения реальных частиц. Покажем, что член с цветовой структурой $\mathrm{ReTr}[t^{R_1}t^{\mathcal{G}_1}t^{G}t^{\mathcal{G}_2}]$ можно опустить. Рассмотрим сначала член с $M^\mu(l_1,l_2,l_\perp)$ в коэффициенте при этой структуре. Легко видеть, что он обращается в нуль при интегрировании, поскольку мера интегрирования не меняется при замене $l_1\leftrightarrow l_2$, а след, содержащий $M^\mu(l_1,l_2,l_\perp)$ меняет знак. Действительно, след не меняется при изменении порядка матриц на обратный, а для матрицы $M^\mu(l_1,l_2,l_\perp)$ замена $l_1\leftrightarrow l_2$ эквивалентна дираковскому сопряжению (то есть изменению порядка гамма-матриц на обратный), в то время как для $\Big(\overline{b(q_1;l_2,l_1)}-b(q_1;l_1,l_2)\Big)$ – дираковскому сопряжению и изменению знака. Перейдем теперь к члену с $M^\mu(l_1,l_2,k_\perp)$ и убедимся, что он при интегрировании дает вклад, симметричный относительно замены $r_{1\perp}\leftrightarrow r_{2\perp}$. Имеем

$$
\overline{b(q_1;l_2,l_1)}-b(q_1;l_1,l_2) = \frac{(\not{l}_{2\perp}-\not{q}_{1\perp})\not{l}_{2\perp}}{x_2(q_1-l_2)_\perp^2+x_1l_{2\perp}^2} - \frac{\not{l}_{1\perp}(\not{l}_{1\perp}-\not{q}_{1\perp})}{x_1(q_1-l_1)_\perp^2+x_2l_{1\perp}^2}\ . \tag{52}
$$

Симметрия интеграла со вторым слагаемым в (52) очевидна, так как он зависит только от $q_{1\perp}$ и $k_\perp = q_{1\perp}-r_{1\perp}-r_{2\perp}$. Симметрия первого следует из его инвариантности (с учетом упомянутого свойства следа) относительно одновременной замены $r_{1\perp}\leftrightarrow r_{2\perp}$, $x_1\leftrightarrow x_2$, $l_{1\perp}\leftrightarrow (k_\perp - l_{1\perp})$, $l_{2\perp}\leftrightarrow (q_{1\perp}-l_{2\perp})$. Поскольку цветовая структура $\mathrm{ReTr}[t^{R_1}t^{\mathcal{G}_1}t^{G}t^{\mathcal{G}_2}]$ симметрична относительно замены цветовых индексов реджеонов $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$, член с этой структурой в (51) оказывается симметричен относительно замены $1\leftrightarrow 2$ и может быть опущен.

В итоге остается найти только коэффициент при $T^a_{R_1\mathcal{G}_1}T^a_{\mathcal{G}_2G}$. Вычисление следа члена с $M^\mu(l_1,l_2,k_\perp)$ дает

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\big[b(q_1;l_1,l_2)M^\mu(l_1,l_2,k_\perp)\big] = \\
&= \frac{4}{\Delta_\perp^2(Q_\perp^2+x_1x_2q_{1\perp}^2)}\Bigg(\Delta_\perp^\mu[(x_1-x_2)^2(Q_\perp q_{1\perp}) \\
&- 2x_1x_2(x_1-x_2)q_{1\perp}^2] + q_{1\perp}^\mu(Q_\perp\Delta_\perp) - Q_\perp^\mu(q_{1\perp}\Delta_\perp)\Bigg) \\
&- \frac{4}{\Delta_\perp^2\Lambda_\perp^2}\Bigg(\Delta_\perp^\mu(x_1-x_2)^2(\Lambda_\perp q_{1\perp}) - \Lambda_\perp^\mu(\Delta_\perp q_{1\perp}) + q_{1\perp}^\mu(\Delta_\perp\Lambda_\perp)\Bigg) \\
&+ \frac{4x_1x_2q_{1\perp}^2}{\Delta_\perp^2\Lambda_\perp^2(\Lambda_\perp^2+x_1x_2l_\perp^2)}\Bigg(\Delta_\perp^\mu(x_1-x_2)[(x_1-x_2)(\Lambda_\perp l_\perp)+2\Lambda_\perp^2] \\
&- \Lambda_\perp^\mu(\Delta_\perp l_\perp) + l_\perp^\mu(\Delta_\perp\Lambda_\perp)\Bigg)\ ,
\end{aligned}
\tag{53}
$$

где $Q = l_1 - x_1q_1$, $\Delta = l_1 - x_1k$, $\Lambda = x_2l_1 - x_1l_2$. След члена с $M^\mu(l_1,l_2,l_\perp)$ получается из (53) заменой $k \to l$. Очевидно, это справедливо и для соответствующих интегралов, если при их вычислении не предполагать, что $(k-l)_\perp^2 \neq 0$. Проще, однако, вычислять эти интегралы отдельно. Заметим, что интеграл с $M^\mu(l_1,l_2,k_\perp)$, в отличие от интеграла с $M^\mu(l_1,l_2,l_\perp)$, не имеет ни инфракрасных, ни ультрафиолетовых расходимостей, и может быть вычислен сразу при $D=4$. Правда, отдельные слагаемые в нем расходятся в ультрафиолетовой области, и для их вычисления мы используем $D = 4+2\epsilon$. Интегралы по поперечным импульсам сводятся к следующим:

$$
\begin{aligned}
&\int\frac{d^{D-2}r_\perp}{\pi^{1+\epsilon}\Gamma(1-\epsilon)}\frac{1}{r_\perp^2+c_\perp^2} \simeq \frac{1}{\epsilon} + \ln(-c_\perp^2)\ , \\
&\int\frac{d^{D-2}r_\perp}{\pi^{1+\epsilon}\Gamma(1-\epsilon)}\frac{(r-a)_\perp^\mu}{(r-a)_\perp^2((r-b)_\perp^2+c_\perp^2)} \simeq \frac{(a-b)_\perp^\mu}{(a-b)_\perp^2}\ln\frac{(a-b)_\perp^2+c_\perp^2}{c_\perp^2}\ , \\
&\int\frac{d^{D-2}r_\perp}{\pi^{1+\epsilon}\Gamma(1-\epsilon)}\frac{(r-a)^\mu(r-b)^\nu}{(r-a)_\perp^2((r-b)_\perp^2+c_\perp^2)} \simeq \\
&\quad\simeq \frac{(a-b)_\perp^\mu(a-b)_\perp^\nu}{(a-b)_\perp^2}\left[1 - \frac{c_\perp^2}{(a-b)_\perp^2}\ln\frac{(a-b)_\perp^2+c_\perp^2}{c_\perp^2}\right] \\
&\quad+ \frac{g_\perp^{\mu\nu}}{2}\left[\frac{1}{\epsilon} + \ln\left|(a-b)_\perp^2+c_\perp^2\right| + \frac{c_\perp^2}{(a-b)_\perp^2}\ln\frac{(a-b)_\perp^2+c_\perp^2}{c_\perp^2} - 2\right]\ ,
\end{aligned}
\tag{54}
$$

Используя эти интегралы и результат вычисления следа (53), получаем

$$
\int d^{D-2}l_{1\perp}d^{D-2}l_{2\perp}\frac{\delta^{\perp}(q_1-r_1-l_1-l_2)}{(2\pi)^{D-1}}\mathrm{Tr}\Big[b(q_1;l_1,l_2)M^{\mu}(l_1,l_2,k_\perp)\Big]\simeq
$$

$$
\simeq\frac{8\Gamma(1-\epsilon)}{(4\pi)^{2+\epsilon}}\Bigg\{\frac{(q_1-k)^{\mu}_{\perp}}{(q_1-k)^2_{\perp}}\Bigg[-4(q_{1\perp}(q_1-k)_\perp)\times
$$

$$
\times\left(x_1x_2-x_2^2\frac{q^2_{1\perp}}{(q_1-k)^2_\perp}\ln\left(\frac{x_2q^2_{1\perp}+x_1(q_1-k)^2_\perp}{x_2q^2_{1\perp}}\right)\right)
$$

$$
+2x_2(x_1-x_2)q^2_{1\perp}\ln\left(\frac{x_2q^2_{1\perp}+x_1(q_1-k)^2_\perp}{x_2q^2_{1\perp}}\right)\Bigg]
$$

$$
+q^{\mu}_{1\perp}\Bigg[(1-2x_1x_2)\ln\left(\frac{x_2q^2_{1\perp}+x_1(q_1-k)^2_\perp}{x_1(k-l)^2_\perp}\right) \tag{55}
$$

$$
-2x_2^2\frac{q^2_{1\perp}}{(q_1-k)^2_\perp}\ln\left(\frac{x_2q^2_{1\perp}+x_1(q_1-k)^2_\perp}{x_2q^2_{1\perp}}\right)\Bigg]+\frac{(k-l)^{\mu}_\perp}{(k-l)^2_\perp}\Bigg[4x_1x_2(q_{1\perp}(k-l)_\perp)
$$

$$
-2q^2_{1\perp}x_2\left(2x_2\frac{(k_\perp(k-l)_\perp)}{(k-l)^2_\perp}-1\right)\ln\left(\frac{x_2l^2_\perp+x_1(k-l)^2_\perp}{x_2l^2_\perp}\right)\Bigg]
$$

$$
+\frac{l^{\mu}_\perp}{l^2_\perp}q^2_{1\perp}\Bigg[(2x_1x_2-1)\ln\left(\frac{x_2l^2_\perp+x_1(k-l)^2_\perp}{x_1(k-l)^2_\perp}\right)
$$

$$
+2x_2^2\frac{l^2_\perp}{(k-l)^2_\perp}\ln\left(\frac{x_2l^2_\perp+x_1(k-l)^2_\perp}{x_2l^2_\perp}\right)\Bigg]\Bigg\}\ ,
$$

где $l=(l_1+l_2)=q_1-r_1$. Используя далее табличные интегралы, получаем

$$
\int_0^1dx_1\int_0^1dx_2\delta(1-x_1-x_2)\times
$$

$$
\times\int d^{D-2}l_{1\perp}d^{D-2}l_{1\perp}\frac{\delta^{\perp}(q_1-r_1-l_1-l_2)}{(2\pi)^{D-1}}\mathrm{Tr}\Big[b(q_1;l_1,l_2)M^{\mu}(l_1,l_2,k_\perp)\Big]=
$$

$$
=\frac{8\Gamma(1-\epsilon)q^2_{1\perp}}{3(4\pi)^{2+\epsilon}}\Bigg[V^{\mu}_f(q_1,q_2)-V^{\mu}_f(q_1-r_1,r_2)
$$

$$
+\left(\frac{q^{\mu}_{1\perp}}{q^2_{1\perp}}-\frac{(q_1-r_1)^{\mu}_\perp}{(q_1-r_1)^2_\perp}\right)\left(\ln\left(\frac{q^2_{1\perp}q^2_{2\perp}}{r^4_{2\perp}}\right)-1\right)+
$$

$$
+\left(\frac{k_\perp^\mu}{k_\perp^2}-\frac{(q_1-r_1)_\perp^\mu}{(q_1-r_1)_\perp^2}\right)\ln\left(\frac{q_{1\perp}^2 r_{2\perp}^2}{q_{2\perp}^2(q_1-r_1)_\perp^2}\right)+2\frac{(q_1-r_1)_\perp^\mu}{(q_1-r_1)_\perp^2}\ln\left(\frac{q_{1\perp}^2}{(q_1-r_1)_\perp^2}\right)
$$

$$
\left.+2\frac{r_{2\perp}^\mu}{r_{2\perp}^2}\left(\frac{(q_{1\perp}r_{2\perp})}{q_{1\perp}^2}-\frac{((q_1-r_1)_\perp r_{2\perp})}{(q_1-r_1)_\perp^2}\right)\right] . \tag{56}
$$

Вычисление интеграла с $M^\mu(l_1,l_2,l_\perp)$ не составляет труда. Как уже говорилось, след члена с $M^\mu(l_1,l_2,l_\perp)$ получается из (53) заменой $k\to l$. С учетом того, что после усреднения по углам $\Lambda_\perp^\mu\Lambda_\perp^\nu\to\Lambda_\perp^2 g_\perp^{\mu\nu}/(D-2)$, а также $\int d^{D-2}r_\perp/r_\perp^2=0$, интегрирование по поперечным импульсам проводится с помощью формул (54) и дает

$$
\int d^{D-2}l_{1\perp}d^{D-2}l_{2\perp}\frac{\delta^\perp(q_1-r_1-l_1-l_2)}{(2\pi)^{D-1}}\mathrm{Tr}\Big[b(q_1;l_1,l_2)M^\mu(l_1,l_2,l_\perp)\Big]\simeq
$$

$$
\begin{aligned}
&\simeq\frac{8\Gamma(1-\epsilon)}{(4\pi)^{2+\epsilon}}\left\{\frac{(q_1-l)_\perp^\mu}{(q_1-l)_\perp^2}\left[-4(q_{1\perp}(q_1-l)_\perp)\times\right.\right.\\
&\times\left(x_1x_2-x_2^2\frac{q_{1\perp}^2}{(q_1-l)_\perp^2}\ln\left(\frac{x_2q_{1\perp}^2+x_1(q_1-l)_\perp^2}{x_2q_{1\perp}^2}\right)\right)\\
&\left.+2x_2(x_1-x_2)q_{1\perp}^2\ln\left(\frac{x_2q_{1\perp}^2+x_1(q_1-l)_\perp^2}{x_2q_{1\perp}^2}\right)\right]\\
&+q_{1\perp}^\mu\left[(1-2x_1x_2)\left(\frac{1}{\epsilon}+\ln\left|x_1x_2q_{1\perp}^2+x_1^2(q_1-l)_\perp^2\right|\right)\right.\\
&\left.+4x_1x_2-2x_2^2\frac{q_{1\perp}^2}{(q_1-l)_\perp^2}\ln\left(\frac{x_2q_{1\perp}^2+x_1(q_1-l)_\perp^2}{x_2q_{1\perp}^2}\right)\right]\\
&\left.+\frac{l_\perp^\mu}{l_\perp^2}q_{1\perp}^2\left[(2x_1x_2-1)\left(\frac{1}{\epsilon}-1+\ln\left|x_1x_2l_\perp^2\right|\right)-1\right]\right\} ,
\end{aligned} \tag{57}
$$

где $l=(l_1+l_2)=q_1-r_1$. Дальнейшее интегрирование дает

$$
\int_0^1 dx_1\int_0^1 dx_2\delta(1-x_1-x_2)\int d^{D-2}l_{1\perp}d^{D-2}l_{2\perp}\frac{\delta^\perp(q_1-r_1-l_1-l_2)}{(2\pi)^{D-1}}\times
$$

$$
\begin{aligned}
&\times\ \mathrm{Tr}\Big[b(q_1;l_1,l_2)M^\mu(l_1,l_2,l_\perp)\Big]=\\
&=\frac{8\Gamma(1-\epsilon)q_{1\perp}^2}{3(4\pi)^{2+\epsilon}}\left[V_f^\mu(q_1,r_1)+\left(\frac{q_{1\perp}^\mu}{q_{1\perp}^2}-\frac{(q_1-r_1)_\perp^\mu}{(q_1-r_1)_\perp^2}\right)\times\right.\\
&\times\left.\left(\frac{2}{\epsilon}-\frac{10}{3}+\ln\left(q_{1\perp}^2r_{1\perp}^2\right)\right)+2\frac{(q_1-r_1)_\perp^\mu}{(q_1-r_1)_\perp^2}\ln\left(\frac{q_{1\perp}^2}{(q_1-r_1)_\perp^2}\right)\right] .
\end{aligned} \tag{58}
$$

Используя (56) и (58), получаем из (51), с учетом доказанного выше факта, что член с $\mathrm{Tr}[t^{R_1}t^{\mathcal{G}_1}t^{G}t^{\mathcal{G}_2}]$ можно опустить:

$$
\begin{aligned}
&\langle GR_1|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle_{f(r)} = \\
&= \frac{1}{2}T^a_{R_1\mathcal{G}_1}T^a_{\mathcal{G}_2 G}\mathcal{F}_\mu\Bigg\{\left(\frac{(q_1-r_1)^\mu_\perp}{(q_1-r_1)^2_\perp}-\frac{q^\mu_{1\perp}}{q^2_{1\perp}}\right)\left(\frac{2}{\epsilon}-\frac{7}{3}-\ln\Big(\frac{q^2_{2\perp}}{r^2_{1\perp}r^4_{2\perp}}\Big)\right) \\
&+ 2\frac{r^\mu_{2\perp}}{r^2_{2\perp}}\left(\frac{(q_{1\perp}r_{2\perp})}{q^2_{1\perp}}-\frac{((q_1-r_1)_\perp r_{2\perp})}{(q_1-r_1)^2_\perp}\right) \\
&+ \left(\frac{(q_1-r_1)^\mu_\perp}{(q_1-r_1)^2_\perp}-\frac{k^\mu_\perp}{k^2_\perp}\right)\ln\left(\frac{(q_1-r_1)^2_\perp q^2_{2\perp}}{q^2_{1\perp}r^2_{2\perp}}\right) \\
&+ V^\mu_f(q_1,q_2)-V^\mu_f(q_1-r_1,r_2)-V^\mu_f(q_1,r_1)\Bigg\} - \big(1\leftrightarrow 2\big)\ ,
\end{aligned}
\tag{59}
$$

где функция $V^\mu_f(q_1,q_2)$ определена в (26), а $\mathcal{F}_\mu$ в (46).

Проверка условия бутстрапа

Окончательный ответ для кварковой части импакт-фактора получаем, суммируя (47) и (59):

$$
\begin{aligned}
&\langle GR_1|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle_f = \frac{1}{2}T^a_{R_1\mathcal{G}_1}T^a_{\mathcal{G}_2 G}\mathcal{F}_\mu\Bigg\{\left(\frac{(q_1-r_1)^\mu_\perp}{(q_1-r_1)^2_\perp}-\frac{q^\mu_{1\perp}}{q^2_{1\perp}}\right)\left(\frac{1}{\epsilon}-\frac{5}{3}-\ln\Big|\frac{q^2_{2\perp}}{r^2_{1\perp}r^2_{2\perp}}\Big|\right) \\
&+ \left(\frac{(q_1-r_1)^\mu_\perp}{(q_1-r_1)^2_\perp}-\frac{k^\mu_\perp}{k^2_\perp}\right)\ln\left(\frac{(q_1-r_1)^2_\perp q^2_{2\perp}}{q^2_{1\perp}r^2_{2\perp}}\right)+V^\mu_f(q_1,q_2)-V^\mu_f(q_1-r_1,r_2)\Bigg\} \\
&- \big(1\leftrightarrow 2\big).
\end{aligned}
\tag{60}
$$

С учетом того, что за счет кварков матричный элемент $\langle R_\omega(q_{1\perp})|\hat{\mathcal{G}}|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle$ имеет только виртуальные поправки, определенные в (48), для левой части условия бутстрапа (7) получаем

$$
\begin{aligned}
&\langle GR_1|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle_f + gq^2_{1\perp}\langle R_\omega(q_{1\perp})|\hat{\mathcal{G}}|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle_f = \\
&\quad = \frac{1}{2}T^a_{R_1\mathcal{G}_1}T^a_{\mathcal{G}_2 G}\mathcal{F}_\mu\left(\left(\frac{1}{\epsilon}-\frac{5}{3}-\ln\Big|\frac{q^2_{2\perp}}{r^2_{1\perp}r^2_{2\perp}}\Big|\right)\times\right. \\
&\quad \left.\times\left(\frac{k^\mu_\perp}{k^2_\perp}-\frac{q^\mu_{1\perp}}{q^2_{1\perp}}\right)+V^\mu_f(q_1,q_2)\right) - \big(1\leftrightarrow 2\big)\ .
\end{aligned}
\tag{61}
$$

Поправка к правой части условия бутстрапа (7) состоит из поправок к вершине $\gamma^{G}_{R_1R_2}$ и собственной функции $\langle R_\omega(q_{2\perp})|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle$. Используя (23), (8) и (9), получаем для правой части условия бутстрапа следующие фермионные поправки:

$$g\left[\gamma^{G}_{R_1R_2}\langle R_\omega(q_{2\perp})|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle\right]_f =$$
$$= \frac{1}{2}T^a_{GR_1}T^a_{\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2}\mathcal{F}_\mu\left(\left(\frac{1}{\epsilon}-\frac{5}{3}-\ln\left|\frac{q^2_{2\perp}}{r^2_{1\perp}r^2_{2\perp}}\right|\right)\left(\frac{k^\mu_\perp}{k^2_\perp}-\frac{q^\mu_{1\perp}}{q^2_{1\perp}}\right)+V^\mu_f(q_1,q_2)\right). \tag{62}$$

Легко видеть, что правые части (61) и (62) равны. Это значит, что кварковая часть условия бутстрапа (7) выполняется для произвольного цветового состояния в t-канале.

5 Заключение

Разработанный в [13] путь доказательства гипотезы реджезации глюона в СГЛП основан на соотношениях бутстрапа, возникающих из требования совместимости реджевской формы амплитуд с s-канальной унитарностью. В [13] было показано, с одной стороны, что выполнение соотношений бутстрапа обеспечивает реджевскую форму амплитуд; с другой – что для выполнения бесконечного числа этих соотношений достаточно выполнения нескольких соотношений (называемых условиями бутстрапа) между глюонной траекторией и эффективными вершинами, входящими в реджевскую форму амплитуд. Однако до последнего времени полное доказательство реджезации глюона оставалось незавершенным из-за отсутствия последнего элемента – доказательства выполнения условия бутстрапа для неупругой амплитуды рождения одного глюона в мультиреджевской кинематике в следующем за главным порядке.

Данная статья является первой частью работы, в которой проводится это доказательство. Рассматриваемое условие бутстрапа связывает импакт-фактор рождения глюона и матричный элемент оператора рождения глюона с реджеон-реджеон-глюонной вершиной и собственной функцией ядра БФКЛ. Здесь мы привели вычисление кварковых поправок ко всем входящим в условие бутстрапа величинам и продемонстрировали его выполнение с учетом этих поправок. В двух следующих статьях будет приведено вычисление глюонных поправок и доказано выполнение условия бутстрапа с их учетом, что завершит доказательство гипотезы реджезации глюона в СГЛП.

Список литературы

[1] M. T. Grisaru, H. J. Schnitzer and H. S. Tsao, Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 811;

[2] M. T. Grisaru, H. J. Schnitzer and H. S. Tsao, Phys. Rev. D **8**, 4498 (1973).

[3] L. N. Lipatov, Sov. J. Nucl. Phys. **23**, 338 (1976) [Yad. Fiz. **23**, 642 (1976)].

[4] V. S. Fadin, E. A. Kuraev and L. N. Lipatov, Phys. Lett. B **60** (1975) 50.

[5] V. S. Fadin and V. E. Sherman, Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **23** (1976) 599; Zh. Eksp. Teor. Fiz. **72** (1977) 1640.

[6] E. A. Kuraev, L. N. Lipatov and V. S. Fadin, Sov. Phys. JETP **44** (1976) 443 [Zh. Eksp. Teor. Fiz. **71** (1976) 840].

[7] E. A. Kuraev, L. N. Lipatov and V. S. Fadin, Sov. Phys. JETP **45** (1977) 199 [Zh. Eksp. Teor. Fiz. **72** (1977) 377].

[8] I. I. Balitsky and L. N. Lipatov, Sov. J. Nucl. Phys. **28** (1978) 822 [Yad. Fiz. **28** (1978) 1597].

[9] V. N. Gribov, Sov. Phys. JETP **26** (1968) 414 [Zh. Eksp. Teor. Fiz. **53** (1967) 654].

[10] L. N. Lipatov, Nucl. Phys. B **452** (1995) 369; Phys. Rept. **286** (1997) 131.

[11] K.A. Ter-Martirosyan, Nucl. Phys. **68**, 591 (1965).

[12] Ya.Ya. Balitskii, L.N. Lipatov and V.S. Fadin, in *Materials of IV Winter School of LNPI* (Leningrad, 1979) p.109.

[13] V. S. Fadin, R. Fiore, M. G. Kozlov and A. V. Reznichenko, Phys. Lett. B **639** (2006) 74 [arXiv:hep-ph/0602006].

[14] V. S. Fadin and R. Fiore, Phys. Lett. B **440** (1998) 359 [arXiv:hep-ph/9807472].

[15] J. Bartels, V. S. Fadin and R. Fiore, Nucl. Phys. B **672** (2003) 329 [arXiv:hep-ph/0307076].

[16] V. S. Fadin, R. Fiore and A. Papa, Phys. Rev. D **60** (1999) 074025 [arXiv:hep-ph/9812456].

[17] M. Braun and G. P. Vacca, Phys. Lett. B **454** (1999) 319 [arXiv:hep-ph/9810454].

[18] M. A. Braun, arXiv:hep-ph/9901447.

[19] M. Braun and G. P. Vacca, Phys. Lett. B **477** (2000) 156 [arXiv:hep-ph/9910432].

[20] V. S. Fadin, R. Fiore, M. I. Kotsky and A. Papa, Phys. Lett. B **495** (2000) 329 [arXiv:hep-ph/0008057].

[21] V. S. Fadin, R. Fiore, M. I. Kotsky and A. Papa, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **99A** (2001) 222.

[22] V. S. Fadin and A. Papa, Nucl. Phys. B **640** (2002) 309 [arXiv:hep-ph/0206079].

[23] V. S. Fadin, M. G. Kozlov and A. V. Reznichenko, Phys. Atom. Nucl. **67** (2004) 359 [Yad. Fiz. **67** (2004) 377] [arXiv:hep-ph/0302224].

[24] V. S. Fadin, JETP Lett. **61** (1995) 346 [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **61** (1995) 342].

[25] V. S. Fadin, M. I. Kotsky and R. Fiore, Phys. Lett. B **359** (1995) 181.

[26] V. S. Fadin, R. Fiore and A. Quartarolo, Phys. Rev. D **53** (1996) 2729 [arXiv:hep-ph/9506432].

[27] M. I. Kotsky and V. S. Fadin, Phys. Atom. Nucl. **59** (1996) 1035 [Yad. Fiz. **59N6** (1996) 1080].

[28] V. S. Fadin, R. Fiore and M. I. Kotsky, Phys. Lett. B **387** (1996) 593 [arXiv:hep-ph/9605357].

[29] Blumlein, J., Ravindran, V. and van Neerven, W. L., *Phys. Rev.* **D58** (1998) 091502.

[30] Del Duca, V. and Glover, E. W. N., *JHEP* **0110** (2001) 035 [arXiv:hep-ph/0109028].

[31] V. S. Fadin and L. N. Lipatov, Nucl. Phys. B **406** (1993) 259.

[32] V. S. Fadin, R. Fiore and M.I. Kotsky, Phys. Lett. **B389** (1996) 737.

[33] V. Del Duca, and C. R. Schmidt, Phys. Rev. **D59** (1999) 074004.

[34] V. S. Fadin, R. Fiore and A. Papa, Phys. Rev. D **63** (2001) 034001 [arXiv:hep-ph/0008006].

[35] V. S. Fadin, R. Fiore and A. Quartarolo, Phys. Rev. **D50** (1994) 5893.

[36] V. S. Fadin and R. Fiore, Phys. Lett. B **294** (1992) 286.

[37] V. S. Fadin, R. Fiore, M. I. Kotsky and A. Papa, Phys. Rev. D **61** (2000) 094005 [arXiv:hep-ph/9908264].

[38] V. S. Fadin and L. N. Lipatov, Nucl. Phys. B **477** (1996) 767 [arXiv:hep-ph/9602287].

[39] V. S. Fadin, R. Fiore, A. Flachi and M. I. Kotsky, Phys. Lett. B **422** (1998) 287 [arXiv:hep-ph/9711427].

[40] V. S. Fadin, M. I. Kotsky, R. Fiore and A. Flachi, Phys. Atom. Nucl. **62** (1999) 999 [Yad. Fiz. **62** (1999) 1066].

[41] V. S. Fadin and L. N. Lipatov, JETP Lett. **49** (1989) 352 [Yad. Fiz. **50** (1989 SJNCA,50,712.1989) 1141].

М.Г. Козлов, А.В. Резниченко, В.С. Фадин

Проверка условия реджезации глюона в следующем за главным порядке. Кварковая часть

M.G. Kozlov, A.V. Reznichenko, V.S. Fadin

Check of the gluon Reggeization condition in the next-to-leading order. Quark part

ИЯФ 2010-26

Ответственный за выпуск А.В. Васильев
Работа поступила 23.07.2010 г.

Сдано в набор 26.07.2010 г.
Подписано в печать 27.07.2010 г.
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 1.7 печ.л., 1.4 уч.-изд.л.
Тираж 85 экз. Бесплатно. Заказ № 26

Обработано на PC и отпечатано на
ротапринте ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.