

УЧРЕЖДЕНИЕ  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК  
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ  
им. Г.И. Будкера СО РАН  
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РАН  
(ИЯФ СО РАН)

А.Е. Бондарь, В.С. Воробьев, А.О. Полуэктов

КВАНТОВЫЕ КОРРЕЛЯЦИИ  $D^0\bar{D}^0$   
В ИССЛЕДОВАНИИ  $CP$ -НАРУШЕНИЯ  
 $B$ - И  $D$ -МЕЗОНОВ

ИЯФ 2011-30

НОВОСИБИРСК  
2011

**Квантовые корреляции  $D^0\bar{D}^0$   
в исследовании  $CP$ -нарушения  $B$ - и  $D$ -мезонов**

*А.Е. Бондарь, В.С. Воробьев, А.О. Полуэктов*

Институт ядерной физики им. Г.И.Будкера  
630090, Новосибирск, Россия

**Аннотация**

В данном обзоре рассматриваются перспективные методы измерения угла  $\gamma$  Унитарного Треугольника, а также параметров смешивания и  $CP$ -нарушения в смешивании нейтральных  $D$ -мезонов при помощи модельно-независимого анализа распределения Далица трехчастичного распада  $D$ . Оба измерения используют квантовые корреляции в процессе  $e^+e^- \rightarrow DD^{(*)}$  для устранения теоретической неопределенности в знании комплексной амплитуды распада  $D$ . Этот подход с успехом может применяться на проектируемой в ИЯФ СО РАН супер- $ст$ -фабрике.

**Quantum correlations of  $D^0\bar{D}^0$   
in studies of  $CP$ -violation of  $B$  and  $D$  mesons**

*A. E. Bondar, A. O. Poluektov, V. S. Vorobyev,*

Budker Institute of Nuclear Physics  
630090, Novosibirsk, Russia

**Abstract**

We review promising methods to measure the angle  $\gamma$  of the Unitarity Triangle and parameters of mixing and  $CP$ -violation in mixing of neutral  $D$  mesons. The methods involve model-independent Dalitz plot analysis of tree-body  $D$  decays. Both measurements use quantum correlations in the process  $e^+e^- \rightarrow DD^{(*)}$  to remove theoretical uncertainty in the complex amplitude of  $D$  decay. This approach is promising for super- $c\tau$ -factory planned to be constructed in Budker Institute of Nuclear Physics SB RAS.

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>5</b>
1.1	Матрица СКМ и Унитарный Треугольник . . . . .	7
1.2	Эффект смешивания мезонов . . . . .	10
1.3	Когерентные и некогерентные состояния <i>D</i> -мезонов . . . . .	12
1.4	Анализ распределения Далица . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Измерение угла <math>\gamma</math></b>	<b>16</b>
2.1	Модельно-независимый анализ трехчастичного распада $D^0$	16
2.2	Оптимизация процедуры измерения $\gamma$ . . . . .	19
2.3	Вклад смешивания в модельно-независимое измерение $\gamma$ . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Измерение параметров смешивания</b>	<b>27</b>
3.1	Времени-зависимое измерение . . . . .	27
3.2	Измерение с усреднением по времени . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Заключение</b>	<b>35</b>

---

# 1 Введение

Исследование  $CP$ -нарушения являются одной из актуальнейших задач современной физики высоких энергий.  $CP$ -нарушение отвечает за асимметрию материи и антиматерии во Вселенной. В рамках Стандартной Модели электрослабых взаимодействий (СМ) оно описывается матрицей Кабиббо-Кобаяши-Маскавы (Cabibbo-Kobayashi-Maskawa, СКМ), которая характеризует переходы между различными поколениями кварков за счет слабого взаимодействия [1]. Одним из представлений этой матрицы является Унитарный Треугольник (УТ). Различные наблюдаемые процессы чувствительны к длинам сторон и величинам углов УТ. Эффекты за рамками СМ проявлялись бы в рассогласовании измерений параметров УТ (например, в отклонении суммы углов треугольника от  $180^\circ$ ). Таким образом, прецизионные измерения параметров УТ дополняют прямые поиски эффектов за пределами СМ на высоких энергиях на таких экспериментах как Atlas и CMS.

Многие  $CP$ -нарушающие процессы, наиболее чувствительные к параметрам УТ, наблюдаются в распадах  $B$ -мезонов. На данный момент только один из углов УТ (чаще всего называемый  $\beta$ ) измерен с точностью около  $1^\circ$  экспериментами BaBar [2] и Belle [3] на электрон-позитронных коллайдерах. Эксперимент LHCb и строящиеся супер- $B$ -фабрики [4, 5] смогут значительно уточнить многие другие параметры  $CP$ -нарушения. В частности, угол  $\gamma$ , который сейчас известен наименее точно, может быть измерен с точностью до  $1 - 2$  градусов.

Другим эффектом, имеющим значительный потенциал для наблюдения проявлений «Новой Физики», является смешивание  $D$ -мезонов, когда нейтральный  $D$ -мезон, сначала находившийся в состоянии с определенным ароматом (например,  $D^0$ ), приобретает примесь противоположного аромата ( $\bar{D}^0$ ) в процессе эволюции во времени. Этот феномен предсказывается СМ и уже наблюдается в экспериментах Belle [6] и BaBar [7]. Однако  $CP$ -нарушающие эффекты в смешивании  $D$ -мезонов ожидаются исключительно малыми, а эффекты «Новой Физики» могли бы привести к значительному  $CP$ -нарушению. Чувствительность, достигнутая на сегодняшний день, не позволяет пока поставить каких-либо значительных ограничений на  $CP$ -нарушение в смешивании  $D$  [8].

Оба обсуждаемых в настоящем обзоре измерения — измерение угла  $\gamma$  и измерение параметров смешивания  $D$ -мезонов — требуют значительной экспериментальной статистики, но потенциально могут быть выполнены с очень высокой точностью из-за исчезающе малых теоретических неопределенностей. Технически оба измерения схожи — в обоих требуется определить относительные комплексные амплитуды  $D^0$  и  $\bar{D}^0$  в интерференции этих двух состояний. Для многих подобных измерений удобно использовать анализ распределения Далица трехчастичных распадов  $D$ -мезонов. Этот метод был изначально предложен для измерения угла  $\gamma$  в распадах  $B^\pm \rightarrow DK^\pm$  [9, 10]. Позднее он был применен для измерения смешивания  $D$ -мезонов [11, 13] и для разрешения неопределенности в измерении угла  $\beta$  во времени-зависимом анализе распада  $B^0 \rightarrow D\pi^0$  [14, 15]. Большинство этих измерений основывается на распаде  $D \rightarrow K_S^0\pi^+\pi^-$ , который обеспечивает наилучшую точность среди всех трехчастичных распадов  $D^0$ .

У этого метода есть существенный недостаток: он является модельно-зависимым, т.е. измерение зависит от комплексной амплитуды распада  $D^0$ , которая получается в распадах  $D^{*\pm} \rightarrow D^0\pi^\pm$  с использованием модельных соображений. Таким образом, результат измерения содержит модельную неопределенность. В случае измерения угла  $\gamma$  эта неопределенность ( $\sim 10^\circ$ ) уже сравнима со статистической точностью [16, 17] и будет доминировать в будущих измерениях с большой статистикой на супер- $B$ -фабриках.

В настоящем обзоре мы рассматриваем альтернативный, модельно-независимый, подход к анализу распределения Далица для измерения угла  $\gamma$  и параметров смешивания  $D$ -мезонов, который разрабатывался при участии авторов в последние годы. В этом подходе фазовый объем трехчастичного распада  $D$ -мезона делится на области («бины»). Информация о средней комплексной фазе в каждом бине получается из квантовых корреляций в распадах  $D^0$ -мезонов из процесса  $\psi(3770) \rightarrow D\bar{D}$ . В результате модельная неопределенность заменяется на статистическую ошибку, связанную с точностью измерения параметров, определяющих фазу комплексной амплитуды. Основная идея такого метода была сформулирована в работе [9], затем он был развит в работах [19, 18], где была показана его экспериментальная применимость и была предложена процедура анализа, оптимально использующая доступные распады  $B$  и коррелированных пар  $D$ -мезонов. Измерение фазы в бинах фазового объема распада  $D \rightarrow K_S^0\pi^+\pi^-$  было недавно выполнено коллаборацией CLEO [20, 21]. Коллаборацией Belle было затем выполнено измерение угла  $\gamma$ , основанное на результатах CLEO, в котором ошибка в измерении

угла  $\gamma$ , связанная с неопределенностью в амплитуде  $D \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ , была в результате уменьшена до  $4^\circ$  [22]. В статье [23] был предложен способ модельно-независимого измерения параметров смешивания  $D$ -мезонов.

Проектируемые сейчас в Японии и Италии супер- $B$ -фабрики [4, 5] смогут набрать статистику  $B$ -мезонов для прецизионного измерения угла  $\gamma$  с точностью около  $1^\circ$ . Однако, для этого потребуются соответствующая такой точности статистика коррелированных распадов  $D\bar{D}$ , значительно большая, чем доступна на CLEO и работающей сейчас установке BES-III [24]. Эта задача с успехом может быть решена на проектируемой сейчас в ИЯФ СО РАН супер- $c\tau$ -фабрике,  $e^+e^-$ -коллайдере с проектной светимостью  $10^{35} \text{ см}^{-2}\text{с}^{-1}$  [25, 26]. Эта же установка позволит измерить с прецизионной точностью и параметры смешивания  $D$ -мезонов.

Настоящий обзор построен следующим образом. В разделе 1.1 мы кратко напомним механизм СКМ и рассмотрим, как угол  $\gamma$  может быть получен в распадах  $B$ -мезонов. Раздел 1.2 посвящен феноменологическому описанию смешивания  $D$ -мезонов. В последующих разделах Введения мы рассмотрим возможные состояния, в которых могут находиться нейтральные  $D$ -мезоны при их рождении на  $e^+e^-$ -установке (раздел 1.3) и метод Далиц-анализа, при помощи которого параметры этих состояний могут быть измерены (раздел 1.4). В разделе 2.1 мы рассмотрим основную идею модельно-независимого измерения угла  $\gamma$ . Далее, в разделе 2.2 мы сформулируем условия оптимального использования экспериментальной статистики и получим разбиение фазового объема, которое дает наилучшую статистическую точность. Раздел 2.3 посвящен оценке влияния смешивания  $D$ -мезонов на измерение угла  $\gamma$ . В разделе 3.1 рассмотрено модельно-независимое измерение параметров смешивания  $D$  во времени-зависимом анализе на  $B$ -фабрике, а в разделе 3.2 — усредненное по времени измерение на супер- $c\tau$ -фабрике с симметричными пучками.

## 1.1 Матрица СКМ и Унитарный Треугольник

Часть лагранжиана Стандартной Модели, отвечающая за взаимодействие кварков с полем заряженных векторных бозонов  $W_\mu^\pm$  за счет заряженных токов, имеет вид

$$\mathcal{L}_{CC} = \frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{u}_L, \bar{c}_L, \bar{t}_L) V_{CKM} \gamma^\mu \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \\ b_L \end{pmatrix} W_\mu^+, \quad (1.1)$$

где  $g$  — константа взаимодействия,  $\gamma^\mu$  — матрицы Дирака, а  $V_{CKM}$  — унитарная матрица, связывающая верхние ( $u, c, t$ ) и нижние ( $d, s, b$ ) кварки.

Требование унитарности и свобода в переопределении ненаблюдаемых фаз кварковых полей приводит к тому, что матрица  $3 \times 3$  имеет лишь 4 свободных параметра. Из них три параметра — действительные углы вращения, а также одна фаза, задающая  $\mathcal{CP}$ -нарушение. С учетом наблюдаемой в эксперименте иерархии  $V_{ud} \gg V_{us} \gg V_{ub}$ , матрицу  $V_{CKM}$  можно представить в виде разложения по степеням малого параметра  $\lambda = |V_{us}|$ . С точностью до членов 3-го порядка по  $\lambda$  эта т. н. параметризация Вольфенштейна [27] имеет вид

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda^2/2 & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \lambda^2 & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Условие унитарности  $V_{CKM}^\dagger V_{CKM} = 1$  требует в частности, чтобы строки и столбцы матрицы  $V_{CKM}$  были ортогональны. Одно из условий ортогональности имеет вид

$$\frac{V_{ud}V_{ub}^*}{V_{cd}V_{cb}^*} + \frac{V_{td}V_{tb}^*}{V_{cd}V_{cb}^*} + 1 = 0. \quad (1.3)$$

Это условие можно представить геометрически в виде треугольника на комплексной плоскости, называемого Унитарным Треугольником (см. рис. 1). Из параметризации (1.2) видно, что все стороны треугольника имеют порядок единицы. Оставшиеся 5 условий ортогональности также можно представить в виде треугольников, из них 4 оказываются вырожденными (так, что одна сторона много меньше двух других), а один совпадает с уже полученным с точностью до членов порядка  $\lambda^3$ .

Стандартные обозначения углов УТ приведены на рис. 1. Существует два альтернативных способа обозначать углы — используемые чаще всего  $(\beta, \alpha, \gamma)$  соответствуют применяемыми коллаборацией Belle обозначениям  $(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ . Стороны и углы УТ являются физически наблюдаемыми величинами. В частности, не зависящее от параметризации выражение для угла  $\gamma$  имеет вид

$$\gamma = \arg\left(\frac{V_{ud}V_{ub}^*}{V_{cd}V_{cb}^*}\right). \quad (1.4)$$

В параметризации Вольфенштейна  $\gamma = \arg(V_{ub}^*) = \arg(\rho + i\eta)$ .



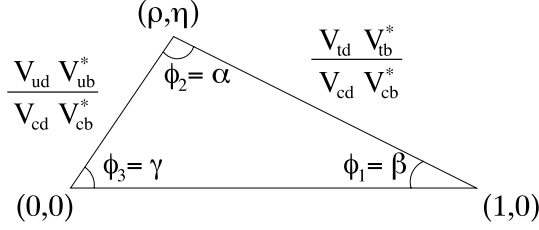


Рис. 1. Унитарный Треугольник.

Таким образом, чувствительный к углу  $\gamma$  процесс должен содержать интерференцию двух амплитуд, одной с элементом  $V_{ub}$ , и другой с другими элементами матрицы СКМ. Одним из таких процессов является распад  $B^\pm \rightarrow DK^\pm$ . Две доминирующие амплитуды, дающие вклад в этот распад, показаны на рис. 2. Поскольку  $D$ -мезоны, входящие в эти амплитуды, имеют противоположный аромат, для интерференции нужно, чтобы и  $D^0$  и  $\bar{D}^0$  распадались в одно и то же конечное состояние  $f$ . Существует несколько возможностей:

- $\mathcal{CP}$ -собственное конечное состояние ( $\mathcal{CP}$ -четное  $\pi\pi$ ,  $KK$  или  $\mathcal{CP}$ -нечетное  $K_S^0\pi^0$ ,  $K_S^0\omega$ ,  $K_S^0\eta$ );
- Конечное состояние, Кабиббо-разрешенное для одного аромата (например,  $D^0 \rightarrow K^-\pi^+$ ) и дважды Кабиббо-подавленное для противоположного аромата ( $\bar{D}^0 \rightarrow K^-\pi^+$ );
- Трех- или даже четырехчастичное состояние ( $D \rightarrow K_S^0\pi^+\pi^-$ ,  $D \rightarrow K^+K^-\pi^+\pi^-$ ).

Наилучшая чувствительность к  $\gamma$  на настоящий момент обеспечивается для трехчастичных распадов  $D \rightarrow K_S^0\pi^+\pi^-$ , который имеет достаточно большую вероятность и исключительно удачную структуру амплитуды, которую мы рассмотрим далее.

Независимо от конечного состояния  $D$ -мезона, процесс  $B^+ \rightarrow D_f K^+$  представляет из себя интерференцию двух амплитуд:

$$\mathcal{A}_B = \bar{\mathcal{A}} + r_B e^{i(\gamma + \delta_B)} \mathcal{A}, \quad (1.5)$$

где  $\mathcal{A}$  – амплитуда распада  $D^0 \rightarrow f$ ,  $\bar{\mathcal{A}}$  – амплитуда распада  $\bar{D}^0 \rightarrow f$ ,  $r_B$  – отношение абсолютных значений интерферирующих амплитуд

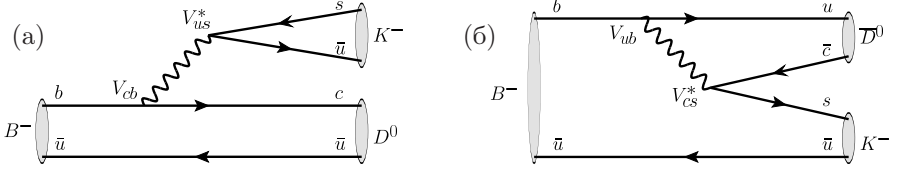


Рис. 2. Диаграммы Фейнмана для (а) разрешенного распада  $B^- \rightarrow D^0 K^-$  и (б) подавленного  $B^- \rightarrow \bar{D}^0 K^-$ .

$B^+ \rightarrow \bar{D}^0 K^+$  и  $B^+ \rightarrow D^0 K^+$  ( $r_B \sim 0.1$ ), а  $\delta_B$  — разность сильных фаз между этими амплитудами. Для зарядово-сопряженного распада  $B^- \rightarrow D_f K^-$ , амплитуда равна

$$\bar{\mathcal{A}}_B = \mathcal{A} + r_B e^{i(-\gamma + \delta_B)} \bar{\mathcal{A}}, \quad (1.6)$$

$\gamma$  меняет знак, тогда как знак сильной фазы  $\delta_B$  остается тем же. Это приводит к тому, что наблюдаемая вероятность распада  $|\mathcal{A}_B|^2$  различается для  $B^+$  и  $B^-$ , то есть испытывает прямое  $\mathcal{CP}$ -нарушение, зависящее от величины угла  $\gamma$ .

## 1.2 Эффект смешивания мезонов

В Стандартной Модели существуют переходы, переводящие нейтральные мезоны и их античастицы друг в друга. Более того, для всех четырех систем нейтральных мезонов ( $K$ ,  $B$ ,  $B_s$  и  $D$ ) такие переходы, называемые смешиванием или осцилляциями, уже наблюдаются экспериментально. Интересующие нас переходы  $D^0 \leftrightarrow \bar{D}^0$  открыты относительно недавно, в 2007 году [6, 7]. Ввиду существования таких переходов состояния с определенным ароматом ( $D^0$  и  $\bar{D}^0$ ) не являются собственными состояниями гамильтониана. Вместо них, в отсутствие  $\mathcal{CP}$ -нарушения в смешивании, массовыми состояниями являются следующие комбинации:

$$D_1 = \frac{D^0 + \bar{D}^0}{\sqrt{2}}, \quad D_2 = \frac{D^0 - \bar{D}^0}{\sqrt{2}}. \quad (1.7)$$

В общем же случае имеем следующие выражения:

$$D_1 = pD^0 + q\bar{D}^0, \quad D_2 = pD^0 - q\bar{D}^0, \quad (1.8)$$

где  $|p|^2 + |q|^2 = 1$ . Явление осцилляций полностью описывается четырьмя действительными параметрами. Эти параметры принято выбирать

следующим образом: два параметра смешивания<sup>1</sup>:

$$x_D = \frac{m_2 - m_1}{\Gamma}, \quad y_D = \frac{\Gamma_2 - \Gamma_1}{2\Gamma} \quad (1.9)$$

и два параметра, описывающих  $\mathcal{CP}$ -нарушение в смешивании:

$$r_{\mathcal{CP}} = \left| \frac{p}{q} \right|, \quad \alpha_{\mathcal{CP}} = \arg \left( \frac{p}{q} \right). \quad (1.10)$$

Здесь  $m_1$  ( $m_2$ ) и  $\Gamma_1$  ( $\Gamma_2$ ) — масса и ширина состояния  $D_1$  ( $D_2$ ), а  $\Gamma = (\Gamma_1 + \Gamma_2)/2$ .

Смешивание изменяет амплитуду распада  $D$ -мезона в некоторое конечное состояние  $f$ . А именно, амплитуды распада состояний с определенными ароматами

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}(D^0 \rightarrow f), \quad \bar{\mathcal{A}} \equiv \mathcal{A}(\bar{D}^0 \rightarrow f) \quad (1.11)$$

переходят в зависящие от времени амплитуды (все величины, учитывающие смешивание, будем обозначать штрихом):

$$\begin{aligned} \mathcal{A}'(t) &= \varkappa(t) \mathcal{A} + \frac{p}{q} \sigma(t) \bar{\mathcal{A}}, \\ \bar{\mathcal{A}}'(t) &= \varkappa(t) \bar{\mathcal{A}} + \frac{q}{p} \sigma(t) \mathcal{A}, \end{aligned} \quad (1.12)$$

где

$$\varkappa(t) = \cos \frac{\Gamma t}{2} (x - iy), \quad \sigma(t) = \sin \frac{\Gamma t}{2} (x - iy). \quad (1.13)$$

Таким образом, если в начальный момент времени было чистое состояние  $D^0$ , то в следующие моменты времени появляется примесь состояния  $\bar{D}^0$ , а временная эволюция напоминает гармонические осцилляции.

Экспериментально установлено, что для системы нейтральных  $D$ -мезонов параметры смешивания малы:  $x_D \sim 1\%$ ,  $y_D \sim 1\%$  [8]. Поэтому ниже мы часто будем использовать разложение по этим параметрам в ряд Тейлора, пренебрегая членами второго порядка.

---

<sup>1</sup>Чаще в литературе эти параметры обозначаются просто  $x$  и  $y$ , но в данном обзоре мы добавляем индекс  $D$ , чтобы отличать их от параметров интерференции  $D$ -мезонов в распадах  $B^\pm \rightarrow DK^\pm$ , введенных далее.

### 1.3 Когерентные и некогерентные состояния $D$ -мезонов

Тот факт, что и  $D^0$  и  $\bar{D}^0$  могут распадаться в одно и то же состояние приводит к тому, что рожденная в эксперименте система, содержащая  $D$ -мезоны, может находиться в нетривиальном квантовом состоянии, включающем в себя смесь нескольких состояний. В этом разделе мы рассмотрим, какие состояния доступны для одного нейтрального  $D$ -мезона и их пары, а также эволюцию этих состояний во времени.

**Состояния одного  $D$ -мезона.** С экспериментальной точки зрения сигнал нейтральных  $D$ -мезонов в состоянии с определенным ароматом ( $D^0$  или  $\bar{D}^0$ ) наиболее удобно получать в распадах возбужденных  $D$ -мезонов:  $D^{*\pm} \rightarrow D\pi^\pm$ . Знак  $\pi$ -мезона определяет аромат  $D$ -мезона в начальный момент времени.

Как мы выяснили в предыдущем пункте, амплитуда распада  $D$ -мезона с учетом смешивания зависит от времени. Формула (1.12) описывает временную эволюцию в случае, когда в начальный момент времени есть чистое состояние  $D^0$  или  $\bar{D}^0$ .

Как мы рассмотрели в разделе 1.1, угол  $\gamma$  измеряется в распадах типа  $B^\pm \rightarrow D_f K^\pm$ . В этом случае нейтральный  $D$ -мезон уже не является чистым состоянием по аромату (уравнение (1.5)). При учете смешивания амплитуда этого распада, зависящая от времени  $t$  распада  $D$  будет иметь следующий вид:

$$\mathcal{A}'_B(t) = \bar{\mathcal{A}}'(t) + r_B e^{i(\gamma + \delta_B)} \mathcal{A}'(t), \quad (1.14)$$

т.е. мы получили подобную (1.12) эволюцию, но с другими начальными условиями.

Рассмотренные распады доступны в экспериментах на  $B$ -фабриках и в эксперименте LHCb.

**Когерентные состояния пары  $D$ -мезонов.** Существенно иное состояние, принципиально важное для реализации модельно-независимого подхода, можно получить на симметричной  $st$ -фабрике, работающей на пороге рождения пар  $D$ -мезонов в процессе  $e^+e^- \rightarrow \psi(3770) \rightarrow D\bar{D}$ . Пара родившихся нейтральных  $D$ -мезонов находится в когерентном состоянии, т.е. описывается общей волновой функцией. Действительно, у нас нет возможности отличить один  $D$ -мезон от другого. Далее, т.к. пара рождается через фотон, она находится в состоянии с отрицательной  $C$ -четностью, а волновая функция антисимметрична относительно перестановки двух  $D$ -мезонов:

$$\mathcal{A}_{corr}^{(-)} = \mathcal{A}_1 \bar{\mathcal{A}}_2 - \bar{\mathcal{A}}_1 \mathcal{A}_2, \quad (1.15)$$

где индекс «1» соответствует  $D$ -мезону, распавшемуся первым.

Такой вид волновой функции двух  $D$ -мезонов означает, что их распады теперь не независимы, а коррелируют между собой. Так, если мы зарегистрируем один из  $D$ -мезонов в состоянии с определенной  $\mathcal{CP}$ -четностью, например,  $K^+ K^-$ , то второй  $D$ -мезон обязан находиться в состоянии с противоположной  $\mathcal{CP}$ -четностью. То есть, он может распасться, например, на  $K_S^0 \pi^0$ , но не на  $K^+ K^-$ . Эта корреляция, как мы увидим в разделе 2.1, позволяет получить информацию о фазе амплитуды распада  $D$ , которая в других условиях ненаблюдаема.

При учете смешивания необходимо каждую амплитуду справа заменить на штрихованную:  $\mathcal{A}_{1,2} \rightarrow \mathcal{A}'_{1,2}(t_{1,2})$ . Можно показать, что симметрия полной амплитуды до распада одного из  $D$ -мезонов сохраняется, поэтому полная амплитуда распада пары  $D$ -мезонов зависит только от разности времен  $t = (t_2 - t_1)$ , так что  $t_1$  можно положить равным нулю:

$$\mathcal{A}_{corr}^{(-)'}(t) = \mathcal{A}_1 \bar{\mathcal{A}}_2'(t) - \bar{\mathcal{A}}_1 \mathcal{A}_2'(t). \quad (1.16)$$

Более богатые возможности может предоставить  $\mathcal{CT}$ -фабрика, работающая на пороге рождения  $D^0 \bar{D}^{*0}$ -пары. Процесс  $D^0 \bar{D}^{*0} \rightarrow D^0 \bar{D}^0 \pi^0$  дает доступ к когерентной паре  $D$ -мезонов с отрицательной  $\mathcal{C}$ -четностью (только что рассмотренный случай). В процессе же  $D^0 \bar{D}^{*0} \rightarrow D^0 \bar{D}^0 \gamma$  рождается пара  $D$ -мезонов с положительной  $\mathcal{C}$ -четностью:

$$\mathcal{A}_{corr}^{(+)} = \mathcal{A}_1 \bar{\mathcal{A}}_2 + \bar{\mathcal{A}}_1 \mathcal{A}_2. \quad (1.17)$$

Оказывается, в коррелированных распадах с  $\mathcal{C} = -1$  вклад от смешивания сокращается в первом порядке, что позволяет получить информацию о неискаженной амплитуде распада  $\mathcal{A}_f$  (см. раздел 2.1). Напротив, в распадах с  $\mathcal{C} = +1$  влияние смешивания удваивается по сравнению с некогерентным случаем, что позволяет измерять параметры смешивания на  $\mathcal{CT}$ -фабрике (см. раздел 3.2).

Отметим также, что на  $\mathcal{CT}$ -фабрике можно получить доступ и к некогерентному сигналу, рассмотрев процесс  $D^\pm D^{*\mp} \rightarrow D^\pm D \pi^\mp$ , в котором аромат  $D$ -мезона в начальный момент времени можно фиксировать по знаку заряда  $\pi$ -мезона и заряженного  $D$ -мезона. Все эти свойства превращают  $\mathcal{CT}$ -фабрику в идеальную лабораторию по исследованию смешивания  $D$ -мезонов (см. раздел 3.2).

## 1.4 Анализ распределения Далица

Удобным инструментом для измерения параметров интерференции  $D$ -мезонов является анализ распределения Далица трехчастичного распада  $D$ . По сравнению с двухчастичными распадами, где сохранение энергии и импульса не оставляет никаких внутренних степеней свободы и импульсы конечных частиц строго определены, в трехчастичных распадах на скалярные частицы остается две степени свободы. Зависимость плотности вероятности такого распада от этих двух параметров называется распределением Далица.

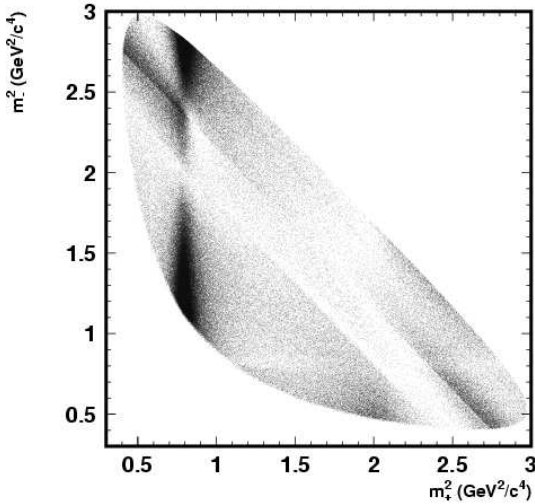


Рис. 3. Распределение Далица распада  $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ .

Переменные распределения Далица могут быть выбраны по-разному, но обычно удобнее всего работать в переменных, которые представляют из себя квадраты инвариантных масс пар частиц конечного состояния. Плотность вероятности распада в таких переменных пропорциональна только квадрату модуля амплитуды:

$$d\Gamma = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{32M^3} |\mathcal{A}|^2 dm_{ab}^2 dm_{bc}^2, \quad (1.18)$$

где  $M$  — масса распадающейся частицы, а  $m_{ab}$  и  $m_{bc}$  — инвариантные массы пар частиц конечного состояния  $abc$ . Таким образом, любая неод-

нородность распределения переменных  $(m_{ab}^2, m_{bc}^2)$  возникает за счет динамической структуры амплитуды  $\mathcal{A}$ .

Распределение Далица распада  $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$  в переменных  $m_+^2 \equiv m_{K_S^0 \pi^+}^2$  и  $m_-^2 \equiv m_{K_S^0 \pi^-}^2$  показано на рис. 3. Кинематические ограничения задают характерный вид доступного фазового объема в виде треугольника со скругленными углами. По виду этого распределения внутри доступного фазового объема можно судить о наличии нескольких интерферирующих двухчастичных амплитуд, наиболее существенный вклад дают промежуточные состояния  $K^*(892)^+ \pi^-$  (вертикальное сгущение точек при  $m_+^2 \simeq 0.8$ ), а также  $K_S^0 \rho(770)^0$  в виде диагональной полосы.

Важным здесь является тот факт, что из-за наличия большого количества интерферирующих вкладов, сильная фаза распада  $D \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$  значительно меняется от точки к точке фазового объема. Это приводит к тому, что при наличии интерферирующих вкладов от  $D^0$  и  $\bar{D}^0$  (как, например, в распаде  $B^\pm \rightarrow DK^\pm$ ), можно, зная амплитуду для чистого состояния  $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ , определить относительную величину и фазу двух интерферирующих амплитуд, причем чувствительность к этим параметрам практически не будет зависеть от самих этих параметров. На этом замечательном свойстве амплитуды  $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$  и основываются различные методы, использующие этот распад для измерения параметров  $\mathcal{CP}$ -нарушения и смешивания.

Однако, как мы только что отметили, для успешного применения этих методов необходимо знать амплитуду  $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ , причем не только ее модуль (который легко получается из распадов  $D$  в состоянии с определенным ароматом), но и фазу. Фаза же получается из модельных предположений — использования квазидвухчастичного описания амплитуды или применения более изощренных методов, таких как  $K$ -матрицы. Поэтому результаты применения этих методов содержат неустраимую неопределенность. Однако существует изящное решение этой проблемы, основанное на том факте, что необходимую информацию о комплексной фазе амплитуды  $\mathcal{A}$  можно получить из коррелированных распадов. Об этом и будет подробно рассказано далее.

## 2 Измерение угла $\gamma$

### 2.1 Модельно-независимый анализ трехчастичного распада $D^0$

В этой части мы рассмотрим основную идею измерения угла  $\gamma$  при помощи анализа распределения Далица распада  $D \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$  из  $B^\pm \rightarrow DK^\pm$  с разбиением фазового объема. Пока мы не будем учитывать эффекты смешивания в распадах  $D$ .

Как мы выяснили в пункте 2.3, амплитуда распада  $B^\pm \rightarrow DK^\pm$ ,  $D \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$  имеет следующий вид:

$$A_B = \overline{A} + r_B e^{i(\delta_B + \gamma)} A.$$

Теперь мы можем уточнить, что 1) амплитуда распада  $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$  зависит от двух переменных Далица  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(m_+^2, m_-^2)$  и, 2) в случае сохранения  $\mathcal{CP}$ -инвариантности в распадах  $D$  выполняется соотношение  $\mathcal{A}(m_+^2, m_-^2) = \overline{\mathcal{A}}(m_-^2, m_+^2)$ . Плотность распределения Далица в распаде  $D$  из процесса  $B^+ \rightarrow DK^+$  пропорциональна квадрату модуля амплитуды:

$$P_B = |\mathcal{A}_B|^2 = \left| \overline{A} + r_B e^{i(\delta_B + \gamma)} A \right|^2 = \overline{P} + r_B^2 P + 2\sqrt{P\overline{P}}(x_{B^+} C + y_{B^+} S), \quad (2.1)$$

где мы перешли к декартовым координатам для описания смеси  $D^0$  и  $\overline{D}^0$ -состояний:

$$x_{B^+} = r_B \cos(\delta_B + \gamma); \quad y_{B^+} = r_B \sin(\delta_B + \gamma). \quad (2.2)$$

Функции  $C = C(m_+^2, m_-^2)$  и  $S = S(m_+^2, m_-^2)$  являются косинусом и синусом разности сильных фаз  $\delta_D = \arg \overline{A} - \arg A$  между амплитудами  $\overline{D}^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$  и  $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ :

$$C = \cos \delta_D(m_+^2, m_-^2); \quad S = \sin \delta_D(m_+^2, m_-^2). \quad (2.3)$$

Уравнения для зарядово-сопряженного распада  $B^- \rightarrow DK^-$  получаются путем замены  $\gamma \rightarrow -\gamma$  и  $A \leftrightarrow \overline{A}$ . Используя распады  $B$ -мезонов обоих зарядов, можно получить  $\gamma$  и  $\delta_B$  по отдельности.

---

<sup>2</sup>В этой статье мы придерживаемся определения сильной фазы из [18].



До этого момента описание модельно-зависимого и модельно-независимого подходов не различается. Модельно-зависимый подход имеет дело непосредственно с плотностью распределения Далица, а функции  $C$  и  $S$  получаются из модельных соображений (использование квазидвухчастичных амплитуд) в описании амплитуды  $D \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ . В модельно-независимом подходе фазовый объем (рис. 3) разбивается на  $2\mathcal{N}$  областей («бинов») симметрично относительно замены  $m_-^2 \leftrightarrow m_+^2$ . Ожидаемое количество событий в бине « $i$ » фазового объема распада  $D$  из  $B^\pm \rightarrow DK^\pm$  равно

$$N_i^\pm = h_B \left[ K_{\pm i} + r_B^2 K_{\mp i} + 2\sqrt{K_i K_{-i}} (x_{B^\pm} C_i \pm y_{B^\pm} S_i) \right], \quad (2.4)$$

где  $K_i$  — число событий в соответствующем бине фазового объема распада  $D$  в состоянии с определенным ароматом (полученное из распада  $D^{*\pm} \rightarrow D\pi^\pm$ ), а  $h_B$  — нормировочный множитель. Индекс бина « $i$ » находится в пределах от  $-\mathcal{N}$  до  $\mathcal{N}$  (исключая 0); замене  $m_+^2 \leftrightarrow m_-^2$  соответствует замена  $i \leftrightarrow -i$ . Коэффициенты  $C_i$  и  $S_i$  включают в себя информацию о косинусе и синусе разности сильных фаз, усредненным по области бина:

$$C_i = \frac{\int_{\mathcal{D}_i} |\mathcal{A}| |\bar{\mathcal{A}}| \cos \delta_D d\mathcal{D}}{\sqrt{\int_{\mathcal{D}_i} |\mathcal{A}|^2 d\mathcal{D} \int_{\mathcal{D}_i} |\bar{\mathcal{A}}|^2 d\mathcal{D}}}. \quad (2.5)$$

Здесь  $\mathcal{D}$  — фазовый объем распределения Далица, а  $\mathcal{D}_i$  — область фазового объема, соответствующая бину « $i$ », по которой выполняется интегрирование. Коэффициенты  $S_i$  определяются подобным же образом с синусом вместо косинуса.

Ожидаемое количество событий в каждом бине распределения Далица (2.4) получается очевидным образом из плотности вероятности (2.1) интегрированием по площади бина, что ведет к замене  $P \rightarrow K_i, \bar{P} \rightarrow K_{-i}, C, S \rightarrow C_i, S_i$ . В последующих выкладках мы будем приводить только количество событий, опуская для краткости промежуточные выражения для плотности вероятности. Нормировочные множители (такие как  $h_B$  в выражении (2.4)) также будут опущены.

Симметрия по отношению к замене  $\pi^+ \leftrightarrow \pi^-$  требует, что  $C_i = C_{-i}$  и  $S_i = -S_{-i}$ . Значения коэффициентов  $C_i$  и  $S_i$  могут быть получены на  $\sigma$ -фабрике — установке с электрон-позитронными пучками, работающей на энергии вблизи порога рождения пар  $D$ -мезонов [20, 21].

Технически, система уравнений (2.4) может быть разрешена при  $\mathcal{N} \geq 2$ . Для этого нужно потребовать, что величины  $r_B, \delta_B, \gamma$ , а также

$C_i$  и  $S_i$  равны для  $B^+$  и  $B^-$ . Однако из-за малой величины  $r_B$ , задающей величину интерференционного слагаемого, чувствительность к параметрам  $C_i$  и  $S_i$  в распадах  $B^\pm \rightarrow DK^\pm$  мала, а, следовательно, значительно уменьшается и точность измерения  $\gamma$  [19].

Разрешить эту трудность можно с помощью информации, полученной в когерентных распадах пар  $D$ -мезонов, рожденных в состоянии с  $C = -1$ . Четырехмерная плотность двух коррелированных распределений Далица в случае, если каждый из этих  $D$ -мезонов распадается в состояние  $D \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ , равна

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_{\text{corr}}^{(-)}(m_{1,+}^2, m_{1,-}^2, m_{2,+}^2, m_{2,-}^2)|^2 &= |\mathcal{A}_1 \bar{\mathcal{A}}_2 - \bar{\mathcal{A}}_1 \mathcal{A}_2|^2 = \\ &P_1 \bar{P}_2 + \bar{P}_1 P_2 - 2\sqrt{P_1 \bar{P}_1 \bar{P}_2 P_2} (C_1 C_2 + S_1 S_2). \end{aligned} \quad (2.6)$$

В случае анализа с разбиением, число событий в области фазового объема двух  $D$ -мезонов (мы будем обозначать такое конечное состояние как  $(K_S^0 \pi^+ \pi^-)^2$ ), которая задается индексами « $i$ » и « $j$ », равно

$$\begin{aligned} M_{ij}^{(-)} &= K_i K_{-j} + K_{-i} K_j \\ &- 2\sqrt{K_i K_{-i} K_j K_{-j}} (C_i C_j + S_i S_j). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Дополнительную информацию о коэффициентах  $C_i$  дает также процесс, в котором один из  $D$ -мезонов регистрируется в  $\mathcal{CP}$ -собственном состоянии. При этом, как мы отмечали выше (раздел 1.3), другой  $D$ -мезон (который регистрируется в состоянии  $K_S^0 \pi^+ \pi^-$ ) находится также в  $\mathcal{CP}$ -собственном состоянии, но противоположной четности. Плотность вероятности для его распада равна

$$|\mathcal{A}^{(\pm)}(m_+^2, m_-^2)|^2 = |\mathcal{A} \pm \bar{\mathcal{A}}|^2 = P + \bar{P} \pm 2\sqrt{P\bar{P}}C, \quad (2.8)$$

а количество событий в бинах после разбиения фазового объема

$$M_i^{(\pm)} = K_i + K_{-i} \pm 2\sqrt{K_i K_{-i}} C_i. \quad (2.9)$$

Заметим, что помимо уточнения параметра  $C_i$ , в этом процессе мы получаем разрешение двух неоднозначностей, которые имеются в уравнении (2.7) — оно инвариантно относительно одновременной перестановки всех  $C_i \leftrightarrow S_i$ , а также относительно замены знака всех  $C_i$ . Использование же распадов  $D_{CP} \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$  позволяет эти неоднозначности устранить. Остается лишь одна неоднозначность — замена знака  $S_i$ , которая разрешается слабым модельным предположением.

После того, как значения коэффициентов  $C_i$ ,  $S_i$  измерены в данных с  $st$ -фабрики, система уравнений (2.4) становится хорошо определенной и может быть решена методом максимального правдоподобия для получения величины  $\gamma$ .

## 2.2 Оптимизация процедуры измерения $\gamma$

Рассмотренная выше процедура анализа с разбиением фазового объема должна давать правильный несмещенный результат для любого разбиения. Однако статистическая точность этого метода сильно зависит от поведения амплитуды распада  $D \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$  внутри каждого бина. Поскольку наблюдаемое количество событий в бине представляет собой интеграл по площади бина, значительные изменения комплексной амплитуды (особенно ее фазы) приведут к потере когерентности в интерференционном члене и, следовательно, к ослаблению чувствительности к  $\gamma$ . Это особенно важно учитывать в случае ограниченной статистики, когда приходится использовать малое количество бинов. Поэтому важно выбрать оптимальное разбиение, основываясь на измеренной модели распада  $D \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ . Важно заметить, что, хотя оптимизация разбиения и зависит от модели амплитуды, неправильный выбор модели не приведет к систематической ошибке, а только ухудшит статистическую точность измерения.

Хорошим приближением к оптимальному разбиению является однородное разбиение по разности сильных фаз  $\delta_D$ . В половине фазового объема, соответствующей условию  $m_+^2 < m_-^2$  (т. е. индекс бина  $i > 0$ ) бин  $\mathcal{D}_i$  определяется условием

$$2\pi(i - 1/2)/\mathcal{N} < \delta_D(m_+^2, m_-^2) < 2\pi(i + 1/2)/\mathcal{N}, \quad (2.10)$$

в оставшейся половине ( $i < 0$ ) разбиение выполняется симметричным образом. В дальнейшем мы будем называть такое разбиение  $\delta_D$ -разбиением. В качестве примера на рис. 4 а) показано такое разбиение с  $\mathcal{N} = 8$ .

Разбиение по разности сильных фаз, однако, не оптимально, так как не учитывает изменение величины модуля амплитуды в пределах бина. Оптимальное разбиение должно представлять собой компромисс между разбиением по фазе и по модулю амплитуды. В [18] была предложена процедура оптимизации разбиения для заданного фиксированного количества бинов. Рассмотрим ее ниже.

Для получения статистической чувствительности данного разбиения определим величину  $Q$ , которая является отношением статистической

чувствительности при этом разбиении к чувствительности подхода без разбиения. А именно,  $Q$  представляет собой отношение количества стандартных отклонений, на которое изменяется число событий в бинах данного разбиения при вариации параметров  $x_B$  и  $y_B$ , к количеству стандартных отклонений при разбиении на бесконечно малые области (что эквивалентно подходу без разбиения):

$$Q^2 = \frac{\sum_i \left( \frac{1}{\sqrt{N_i}} \frac{dN_i}{dx_B} \right)^2 + \left( \frac{1}{\sqrt{N_i}} \frac{dN_i}{dy_B} \right)^2}{\int_{\mathcal{D}} \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{|\mathcal{A}_B|^2}} \frac{d|\mathcal{A}_B|^2}{dx_B} \right)^2 + \left( \frac{1}{\sqrt{|\mathcal{A}_B|^2}} \frac{d|\mathcal{A}_B|^2}{dy_B} \right)^2 \right] d\mathcal{D}}, \quad (2.11)$$

где  $\mathcal{A}_B = \bar{\mathcal{A}} + (x_B + iy_B)\mathcal{A}$ ,  $N_i = \int_{\mathcal{D}_i} |\mathcal{A}_B|^2 d\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{D}_i$  — область  $i$ -го бина.

Поскольку точность определения  $x_B$  и  $y_B$  слабо зависит от их значений, можно для простоты взять случай  $x_B = y_B = 0$ . В этом случае можно показать, что

$$Q^2|_{x_B=y_B=0} = \sum_i (c_i^2 + s_i^2) N_i \Big/ \sum_i N_i. \quad (2.12)$$

Определенная таким образом величина  $Q$  — не лучший критерий качества разбиения, т. к. разбиение с достаточно большим  $Q$  может быть нечувствительно к  $x_B$  или  $y_B$  по отдельности, что, конечно, неприемлемо при измерении  $\gamma$ . Однако  $Q$  достаточно легко вычисляется, и корректно воспроизводит относительную точность для вариантов разбиений, которые были исследованы.

Разбиение, получающееся при максимизации параметра  $Q$  для  $\mathcal{N} = 8$  показано на рис. 4 б). Для получения такого разбиения было взято  $\delta_{\mathcal{D}}$ -разбиение в качестве первого приближения, затем границы каждого бина деформировались так, чтобы достичь максимума параметра  $Q$ . В результате величина  $Q$  возросла с 79% до 89%. Таким образом, даже для достаточно грубого разбиения с  $\mathcal{N} = 8$  можно достичь статистической точности измерения  $\gamma$ , лишь на 10–20% хуже, чем в анализе без разбиения. При большой статистике распадов  $B$  можно будет выбрать разбиение с большим  $\mathcal{N}$ , что позволит еще лучше приблизиться к точности модельного подхода.

Показательный «эксперимент», демонстрирующий преимущества модельно-независимого подхода, можно провести при помощи моделирования. Для этого смоделируем большое количество распадов  $B^\pm \rightarrow DK^\pm$  и коррелированных пар из  $\psi(3770) \rightarrow D^0 \bar{D}^0$  согласно модели амплитуды

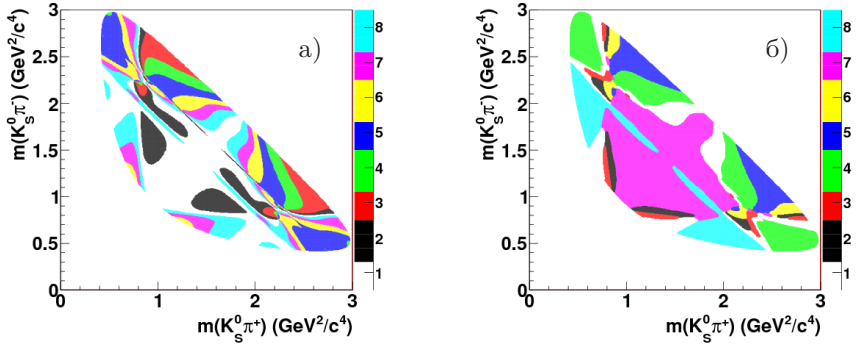


Рис. 4. а) Разбиение фазового объема распада  $D \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$  по разности сильных фаз между  $D^0$  и  $\bar{D}^0$ . б) Оптимальное разбиение фазового объема распада  $D \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$  для максимальной чувствительности к углу  $\gamma$ . Бины представляют собой неодносвязные области, одинаковые цвета соответствуют одному и тому же бину.

(например, измеренной в анализе Belle [16]) и выполним анализ с двумя различными  $\delta_D$ -разбиениями — одним, полученным согласно взятой модели, и другим, по некоторой упрощенной модели (например, взяв лишь несколько доминирующих двухчастичных амплитуд из более десятка, наблюдающихся в эксперименте). Проведем такой эксперимент множество раз, чтобы получить статистические свойства измеряемых величин. Результаты показаны на рис. 5. Мы видим, что величины  $x_B$  и  $y_B$  в обоих случаях оказываются в среднем несмещенными, хотя во втором случае точность и уменьшается (особенно для параметра  $y_B$  для выбранных амплитуд).

Измерение параметров  $C_i$  и  $S_i$  для распадов  $D \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$  и  $D^0 \rightarrow K_S^0 K^+ K^-$  было недавно выполнено коллаборацией CLEO [20, 21]. На рис. 6 показаны полученные для оптимального разбиения из рис. 4 б) значения для амплитуды  $D \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ , а также значения, вычисленные по модели, использованной в анализе Belle [16]. Мы видим, что согласие достаточно хорошее, хотя точность измерения еще достаточно низка и несомненно недостаточна для будущих прецизионных измерений  $\gamma$ .

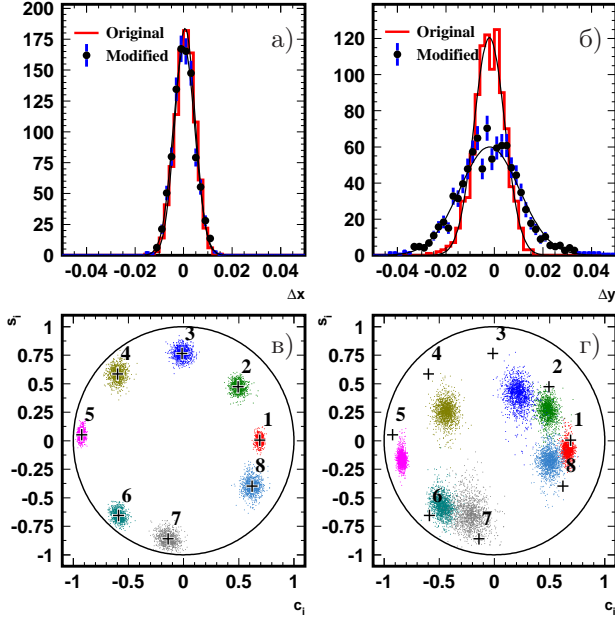


Рис. 5. Результаты моделирования, показывающие отсутствие систематического смещения параметров  $x_B$  и  $y_B$  при варьировании разбиения фазового объема. а) и б) — остаточные распределения  $x_B$  и  $y_B$ , соответственно, для  $\delta_D$  ("original") и модифицированного ("modified") разбиений. в) и г) — значения параметров  $c_i$  и  $s_i$  для этих разбиений. Крестиками показаны значения  $c_i$  и  $s_i$ , вычисленные для оптимального разбиения по истинной амплитуде.

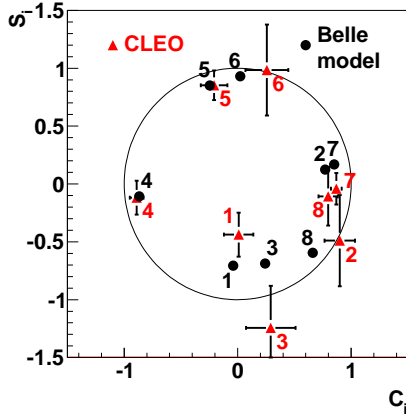


Рис. 6. Сравнение значений параметров  $C_i$  и  $S_i$ , измеренных коллаборацией CLEO [21] и полученных по амплитуде из анализа Belle [16]

### 2.3 Вклад смешивания в модельно-независимое измерение $\gamma$ .

При уровне точности измерения  $\gamma$ , которого можно достичь на супер- $B$ -фабриках (порядка одного градуса) могут стать важными эффекты, которыми просто пренебрегают в современных измерениях. В частности, эффекты смешивания  $D$ -мезонов могут вызвать систематический сдвиг измеренного значения  $\gamma$ . Ранее уже было показано [29], что смешивание дает вклад лишь во втором порядке по параметрам  $x_D$  и  $y_D$  при измерении как с помощью двухчастичных распадов, так и в модельно-независимом Далиц-анализе, так что им можно пренебречь. Однако эффект смешивания в анализе с разбиением, в котором параметры фазы извлекаются из квантовых корреляций в  $D^0\bar{D}^0$ , представляет отдельный интерес.

Ниже мы приводим выражения для всех величин, входящих в модельно-независимый анализ с учетом  $\mathcal{CP}$ -сохраняющего смешивания (соответствующие величины отмечены штрихом). Полный формализм, учитывающий  $\mathcal{CP}$ -нарушение в смешивании, приведен в статье [23].

После интегрирования по времени, количество событий в  $i$ -м бине фазового объема  $D^0 \rightarrow K_S^0\pi^+\pi^-$  для  $D$ -мезона, находившегося в состоянии

с определенным ароматом в момент времени  $t = 0$ , равно

$$K'_i = K_i + \sqrt{K_i K_{-i}}(y_D C_i + x_D S_i) + O(x_D^2, y_D^2). \quad (2.13)$$

Аналогично можно получить и количество событий для распада  $D$ -мезона из процесса  $B^\pm \rightarrow DK^\pm$ :

$$\begin{aligned} N'_i = & N_i + \sqrt{K_i K_{-i}}(y_D C_i + x_D S_i) \\ & + r_B^2 \sqrt{K_i K_{-i}}(y_D C_i - x_D S_i) \\ & + K_i(x_B y_D - y_B x_D) \\ & + K_{-i}(x_B y_D + y_B x_D) + O(x_D^2, y_D^2), \end{aligned} \quad (2.14)$$

где  $N_i$  определяется уравнением (2.4).

Амплитуда распада когерентного состояния пары  $D^0 \bar{D}^0$ , в предположении, что частица, обозначенная индексом «1», распалась первой, равна

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{corr}}^{(-)'}(t, m_{1,+}^2, m_{1,-}^2, m_{2,+}^2, m_{2,-}^2) = \\ \mathcal{A}'_1(0) \bar{\mathcal{A}}'_2(t) - \bar{\mathcal{A}}'_1(0) \mathcal{A}'_2(t). \end{aligned} \quad (2.15)$$

После взятия квадрата модуля амплитуды (2.15) и интегрирования по времени мы получаем количество событий  $M_{ij}^{(-)'}$  в бине « $ij$ » фазового объема распада пары  $D$ -мезонов (все еще предполагая, что частица, обозначенная «1», распалась первой):

$$\begin{aligned} M_{ij}^{(-)'} = & K_i K_{-j} + K_{-i} K_j \\ & - 2\sqrt{K_i K_{-i} K_j K_{-j}}(C_i C_j + S_i S_j) \\ & - K_j \sqrt{K_i K_{-i}}(y_D C_i - x_D S_i) \\ & - K_{-j} \sqrt{K_i K_{-i}}(y_D C_i + x_D S_i) \\ & + K_i \sqrt{K_j K_{-j}}(y_D C_j - x_D S_j) \\ & + K_{-i} \sqrt{K_j K_{-j}}(y_D C_j + x_D S_j) \\ & + O(x_D^2, y_D^2). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Однако поскольку измерение времени в эксперименте с симметричными пучками затруднительно, нужно усреднить по очередности распада. Это приводит к тому, что все члены, линейные по параметрам смешивания, сокращаются:

$$M_{ij}^{(-)'} = M_{ij}^{(-)} + O(x_D^2, y_D^2). \quad (2.17)$$



В анализе на  $c\tau$ -фабрике (например, в анализе CLEO [21]), используются значения  $M_{ij}^{(-)'} (как мы видели, нечувствительные к смешиванию в первом порядке), а также значения  $K_i$ , полученные из коррелированных распадов  $D\bar{D}$ , где один из  $D$ -мезонов реконструирован в состоянии с определенным ароматом ( $D^0$  или  $\bar{D}^0$ ). Полученные таким образом  $K_i$  также не имеют вклада от смешивания в первом порядке. Следовательно, и измеренные в таком анализе коэффициенты  $C_i$  и  $S_i$  не содержат вклада от смешивания.$

Что же касается процессов, наблюдающихся на  $B$ -фабриках, то как распад  $D \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$  из  $B^\pm \rightarrow DK^\pm$ , так и распады  $D \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$  с меченым ароматом содержат вклад от смешивания в первом порядке: наблюдаемые в этих процессах числа событий в бинах равны  $N'_i$  и  $K'_i$ , соответственно. Понятно, что если использовать в анализе величины  $K_i$ , полученные из данных  $c\tau$ -фабрики, для извлечения  $\gamma$  из измеренных на  $B$ -фабрике величин  $N'_i$ , полученное значение  $\gamma$  будет содержать вклад смешивания в первом порядке по  $x_D$  и  $y_D$ . Если же используются значения  $K'_i$ , выражение (2.14) можно переписать как

$$N'_i = K'_i + r_B^2 K'_{-i} + 2\sqrt{K'_i K'_{-i}}(x_B C'_i + y_B S'_i) + O(x_D^2, y_D^2). \quad (2.18)$$

Таким образом, с точностью до членов второго порядка по  $x_D, y_D$  оно принимает ту же форму, что и выражение (2.4) без учета смешивания. Однако фазовые множители  $C'_i, S'_i$  содержат поправки на смешивание в первом порядке:

$$\begin{aligned} C'_i &= C_i + \frac{K'_i + K'_{-i}}{\sqrt{K'_i K'_{-i}}}(1 - C_i^2)y_D + \frac{K'_i - K'_{-i}}{\sqrt{K'_i K'_{-i}}}C_i S_i x_D, \\ S'_i &= S_i - \frac{K'_i - K'_{-i}}{\sqrt{K'_i K'_{-i}}}(1 - S_i^2)x_D - \frac{K'_i + K'_{-i}}{\sqrt{K'_i K'_{-i}}}C_i S_i y_D. \end{aligned} \quad (2.19)$$

В результате, если коэффициенты  $C_i, S_i$  являются свободными параметрами при подгонке данных из распадов  $B$ , поправка на смешивание получается только во втором порядке (в этом случае измеряются эффективные коэффициенты  $C'_i, S'_i$  [29]). Если же  $C_i, S_i$  извлекаются из коррелированных распадов  $D$ -мезонов, возникает поправка к  $\gamma$  первого порядка по параметрам смешивания. Однако эта поправка дополнительно подавлена фактором  $r_B \sim 0.1$ , поэтому вклад смешивания в параметры  $C\mathcal{P}$ -нарушения  $x_B$  и  $y_B$  получается на процентном уровне.

Были выполнены количественные оценки смещения угла  $\gamma$  из-за эффекта смешивания, в которых рассматривались три различные стратегии измерения  $\gamma$ :

1. Использование  $K_i$  из когерентных распадов  $D\bar{D}$  (без поправки на смешивание).
2. Использование  $K'_i$  (уравнение 2.13), измеренных в распаде  $D^{*\pm} \rightarrow D^0\pi^\pm$ ,  $D \rightarrow K_S^0\pi^+\pi^-$  на  $B$ -фабрике.
3. Использование  $K_i$  и внесение линейной поправки на смешивание по уравнению (2.14) (полагая, что  $x_D$ ,  $y_D$  известны).

Влияние смешивания на получающееся значение  $\gamma$  зависит от параметров  $\alpha_D = \arctan(y_D/x_D)$ , отношения  $\sqrt{x_D^2 + y_D^2}/r_B$ , и значений  $\delta_B$  и  $\gamma$ . В оценке полагалось, что  $\sqrt{x_D^2 + y_D^2}/r_B = 0.1$  (все систематические отклонения пропорциональны этой величине и могут легко быть пересчитаны), остальные параметры варьировались в широких пределах. Результаты моделирования приведены в таблице 1. Ясно, что если в измерении  $\gamma$  используются  $K'_i$  из распадов  $D^{*\pm} \rightarrow D^0\pi^\pm$ ,  $D \rightarrow K_S^0\pi^+\pi^-$ , влиянием смешивания при сегодняшней точности можно пренебречь.

Таблица 1. Оценка влияния смешивания  $D$ -мезонов на величину  $\gamma$ , измеренную методом модельно-независимого Далиц-анализа, для трех различных стратегий анализа. Приведены максимальные смещения  $\gamma$  при варьировании  $\alpha_D = \arctan(y_D/x_D)$ ,  $\delta_B$  и  $\gamma$ , а также значения этих параметров, при которых достигается максимум. При оценке используется  $\sqrt{x_D^2 + y_D^2}/r_B = 0.1$ .

Стратегия	$\Delta\gamma_{\max}$	$\alpha_{\max}$	$\delta_{B,\max}$	$\gamma_{B,\max}$
1. Использование $K_i$	$2.9^\circ$	$184^\circ$	$85^\circ$	$87^\circ$
2. Использование $K'_i$	$-0.2^\circ$	$97^\circ$	$2^\circ$	$90^\circ$
3. Линейная поправка	$0.07^\circ$	$324^\circ$	$72^\circ$	$73^\circ$

Сравним теперь полученные результаты с другими исследованиями влияния смешивания на измерение  $\gamma$  [29, 28]. В статье [28] рассматривается случай, когда амплитуда  $D$  не содержит вклада смешивания (или уже скорректирована на него), а распады  $B$  не скорректированы на смешивание. Это соответствует стратегии 1 в приведенном выше исследовании. Систематический сдвиг  $\gamma$  в этом случае линеен по  $x_D$  и  $y_D$ , и может быть численно велик. В [29] смешиванием пренебрегается как в распадах  $D$  с определенным ароматом, так и в распадах  $B$ -мезонов: систематическое смещение  $\gamma$  в таком случае имеет второй порядок по величине параметров смешивания. В контексте модельно-независимого анализа результаты из [29] могут быть применены только если фазовые коэффициенты

$C_i$  и  $S_i$  являются свободными параметрами. Процедура же анализа, рассматриваемая в настоящей статье, является промежуточным случаем, который реализуется в реальном анализе: часть информации об амплитуде  $D \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$  (а именно, величины  $K_i$ ) получаются из распадов  $D$  с тагированным ароматом (нескорректированных на смешивание), тогда как коэффициенты  $C_i$  и  $S_i$  из коррелированных распадов  $D\bar{D}$  не содержат вклада смешивания. Это приводит к поправке, линейной по  $x_D, y_D$  (хотя и малой по величине из-за подавления малостью  $r_B$ ).

## 3 Измерение параметров смешивания

### 3.1 Времени-зависимое измерение

Очарованные частицы — единственная система, где можно изучать вклад от  $\mathcal{CP}$ -нарушения нижних кварков. Хотя предсказать значения параметров смешивания в Стандартной Модели нелегко,  $\mathcal{CP}$ -нарушение в смешивании ожидается очень слабым. Однако есть варианты расширения СМ, в которых предсказывается значительные  $\mathcal{CP}$ -нарушающие эффекты [30, 31]. По этой причине важно иметь возможность точно измерять не только параметры смешивания, но и параметры  $\mathcal{CP}$ -нарушения в смешивании.

Наиболее точные на настоящий момент измерения параметров смешивания были выполнены на  $B$ -фабриках с использованием времени-зависимых методов [6, 7], т. е. с измерением времени распада  $D$ . Например, наблюдая распады «неправильного знака»  $D^0 \rightarrow K^+ \pi^-$  [7], коллаборация BaBar определяет параметр  $R_{K\pi}$  (отношение вероятностей дважды Кабиббо-подавленного (ДКП)  $D^0 \rightarrow K^+ \pi^-$  и Кабиббо-разрешенного (КР)  $\bar{D}^0 \rightarrow K^+ \pi^-$  распадов) и параметры смешивания  $x_D'^2$  и  $y_D'$ , где  $x_D' = x_D \cos \delta_{K\pi} + y_D \sin \delta_{K\pi}$ ,  $y_D' = -x_D \sin \delta_{K\pi} + y_D \cos \delta_{K\pi}$  и  $\delta_{K\pi}$  — разность сильных фаз между ДКП и КР-амплитудами. Поскольку только  $y_D'$  линейно входит в зависимость вероятности распада от времени, а сильная фаза  $\delta_{K\pi}$  близка к нулю [32], такое измерение практически нечувствительно к параметру  $x_D$ .

Коллаборацией Belle было выполнено измерение параметров смешивания во времени-зависимом анализе распределения Далица распада  $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$  [11]. Подобное измерение выполнялось и в экспериментах CLEO и BaBar [12, 13]. Коллаборация BaBar использовала также и распад  $D^0 \rightarrow K_S^0 K^+ K^-$ . В таком подходе распределение Далица зависит линейно от обоих параметров  $x_D$  и  $y_D$ . Однако в таком анализе нужно

использовать модельные предположения о виде амплитуды распада  $D^0$ , что влечет за собой значительную модельную неопределенность результата измерения.

Таблица 2. Статистическая ошибка параметров смешивания и  $\mathcal{CP}$ -нарушения во времени-зависимом Далиц-анализе. Рассмотрены две стратегии измерения: (i)  $K_i$  зафиксированы из данных  $\sigma\tau$ -фабрики, (ii)  $K_i$  взяты свободными параметрами.

Параметр	Точность	
	$K_i$ зафиксированы	$K_i$ свободные
$x_D (10^{-4})$	17	22
$y_D (10^{-4})$	13	16
$r_{\mathcal{CP}} (10^{-2})$	9	9
$\alpha_{\mathcal{CP}} (^\circ)$	5	5

Модельно-независимый подход к анализу распределения Далица может быть обобщен на времени-зависимое измерение параметров смешивания и  $\mathcal{CP}$ -нарушения в системе  $D$ -мезонов. Зависящее от времени количество событий в бине « $i$ » из распределения Далица для распада  $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$  равно

$$K_i'(t) = h_D e^{-\Gamma t} \left[ K_i + \sqrt{K_i K_{-i}} (y_D C_i + x_D S_i) \Gamma t + O\left((x_D + y_D)^2 (\Gamma t)^2\right) \right]. \quad (3.1)$$

Используя параметры  $C_i$  и  $S_i$ , измеренные на  $\sigma\tau$ -фабрике, мы можем полностью избавиться от модельной ошибки в вычислении значений  $x_D$  и  $y_D$ .

Величины  $K_i$  также могут быть получены с хорошей точностью в эксперименте на  $\sigma\tau$ -фабрике. Однако в этом случае придется учесть систематические эффекты, связанные, например, с различной эффективностью реконструкции для распадов на  $\sigma\tau$ - и  $B$ -фабрике. В зависимости от величины этих эффектов, более оптимальным может оказаться подход, где  $K_i$  являются свободными параметрами. В этом случае статистическая ошибка возрастает, но систематическая неопределенность оказывается минимальна.

Таблица 2 показывает результаты моделирования для этих двух стратегий. В моделировании использовались  $10^6$  распадов  $D$  в состоянии с определенным ароматом из процесса  $D^{*\pm} \rightarrow D\pi^\pm$  (это соответствует

статистике, доступной сейчас на  $B$ -фабриках); в случае зафиксированных  $K_i$  также использовались  $2 \cdot 10^6$  распадов  $D$  из состояния  $C = -1$  (такую статистику можно ожидать в ближайшем будущем в эксперименте на  $c\tau$ -фабрике). В моделировании использовалась амплитуда распада  $D \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ , измеренная коллаборацией Belle [16], и разбиение фазового объема на 8 бинов, однородное по разности сильных фаз  $\delta_D$  [18]. Значения фазовых коэффициентов  $C_i, S_i$  вычислялись из амплитуды  $D \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ ; вклад статистической точности их измерения на окончательный результат пренебрежимо мал уже при теперешнем уровне точности. Наша оценка не учитывает неопределенности в измерении времени распада  $D$ -мезона и эффектов фоновых событий.

### 3.2 Измерение с усреднением по времени

Сокращение линейных по  $x_D$  и  $y_D$  слагаемых в коррелированных распадах получается только в случае, если два  $D$ -мезона родились в состоянии с отрицательной зарядовой четностью  $C = -1$  и их волновая функция антисимметрична. Напомним (см. пункт 1.3), что можно получить пару  $D$ -мезонов в состоянии как с отрицательной, так и с положительной зарядовой четностью в процессе  $e^+e^- \rightarrow \psi(4040) \rightarrow D^0 \bar{D}^{*0}$  [33].<sup>3</sup> Этот процесс доминирует в сечении  $e^+e^- \rightarrow c\bar{c}$  при массе  $\psi(4040)$ ; его сечение сравнимо с сечением рождения  $\psi(3770)$  [34]. В зависимости от конечного состояния, в котором реконструируется  $D^{*0}$  ( $D^0 \pi^0$  или  $D^0 \gamma$ ), пара  $D\bar{D}$  имеет четность  $C = -1$  либо  $C = +1$ , соответственно. В случае  $C = +1$ , амплитуда распада имеет вид

$$A_{\text{corr}}^{(+)} = A_1 \bar{A}_2 + \bar{A}_1 A_2. \quad (3.2)$$

Пусть, в отличие от уравнения (2.17), два  $D$ -мезона могут распадаться в различные конечные состояния. Обозначим число событий в бинах фазового объема распадов с определенным ароматом для двух конечных состояний как  $k_i$  и  $K_i$ , а соответствующие фазовые коэффициенты как  $c_i, s_i$  и  $C_i, S_i$ . В качестве конечных состояний можно взять как двухчастичные (в этом случае нет внутренних степеней свободы и имеет смысл только один «бин», т. е. индекс  $i$  принимает значения  $\pm 1$ ) так и многочастичные распады. Договоримся, что индекс  $i$  принимает положительные значения для распадов  $D^0$  и отрицательные — для распадов  $\bar{D}^0$ . Коэффициенты, отвечающие за разность сильных фаз определены так же, как

<sup>3</sup>Оптимальная энергия в центре масс для такого эксперимента равна 4.01 ГэВ, при этом сечение  $D\bar{D}^*$  близко к максимуму, а рождение  $D^* \bar{D}^*$  находится ниже кинематического порога.

$C_i$  и  $S_i$  в выражении (2.5). Количество событий в бинах фазового объема с учетом смешивания равно

$$\begin{aligned}
M_{ij}^{(+)\prime} &= k_i K_{-j} + k_{-i} K_j \\
&+ 2\sqrt{k_i k_{-i} K_j K_{-j}} (c_i C_j + s_i S_j) \\
&+ 2K_j \sqrt{k_i k_{-i}} (y_D c_i - x_D s_i) \\
&+ 2K_{-j} \sqrt{k_i k_{-i}} (y_D c_i + x_D s_i) \\
&+ 2k_i \sqrt{K_j K_{-j}} (y_D C_j - x_D S_j) \\
&+ 2k_{-i} \sqrt{K_j K_{-j}} (y_D C_j + x_D S_j) \\
&+ O(x_D^2, y_D^2)
\end{aligned} \tag{3.3}$$

для  $C = +1$  и

$$\begin{aligned}
M_{ij}^{(-)\prime} &= k_i K_{-j} + k_{-i} K_j \\
&- 2\sqrt{k_i k_{-i} K_j K_{-j}} (c_i C_j + s_i S_j) \\
&+ O(x_D^2, y_D^2)
\end{aligned} \tag{3.4}$$

для  $C = -1$ .

Важные частные случаи для двухчастичных распадов, это:

1. Распад в конечное состояние с определенным ароматом, (например  $D^0 \rightarrow K^- e^+ \nu_e$ ):  $K_1 = 1$ ,  $K_{-1} = 0$ .
2. Распад  $D^0 \rightarrow K^- \pi^+$ :  $K_1 = 1$ ,  $K_{-1} = r_{K\pi}^2$ ,  $C_1 = \cos \delta_{K\pi}$ ,  $S_1 = \sin \delta_{K\pi}$ .

Итак, эффект учета смешивания линеен в случае  $C = +1$ , что позволяет измерить параметры  $x_D$  и  $y_D$ , имея в руках данные распадов с обеими четностями. В простейшем случае стратегия такого анализа может состоять в использовании для одного из  $D$ -мезонов состояния с определенным ароматом (при этом говорят, что другой  $D$ -мезон имеет «меченый аромат»). Тогда распады из состояния с  $C = -1$  дают количество событий в бинах  $D \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$  без вклада смешивания, а состояние с  $C = +1$  содержит линейный вклад смешивания:

$$M_i^{(+)\prime} = K_{-i} + 2\sqrt{K_i K_{-i}} (y_D C_i - x_D S_i) + O(x_D^2, y_D^2). \tag{3.5}$$

Поскольку разбиение выбрано так, что у одних бинов  $|C_i| \sim 1$ , а у других  $|S_i| \sim 1$ , чувствительность и к  $x_D$  и к  $y_D$  получается одного уровня.

Таблица 3. Статистическая чувствительность к параметрам смешивания и  $\mathcal{CP}$ -нарушения в анализе распределения Далица с усреднением по времени для  $10^3 \text{ фб}^{-1}$  распадов  $e^+e^- \rightarrow \psi(4040)$ .

Параметр	Точность		
	Когерентное состояние	Некогерентное состояние	Оба
$x_D (10^{-4})$	12.5	18.4	11.8
$y_D (10^{-4})$	8.7	12.9	8.5
$r_{\mathcal{CP}} (10^{-2})$	5.4	5.2	3.8
$\alpha_{\mathcal{CP}} (^\circ)$	3.5	3.5	2.5

Заметим также, что член, содержащий параметры смешивания, в 2 раза больше, чем в распадах  $D^{*\pm} \rightarrow D^0\pi^\pm$ ,  $D \rightarrow K_S^0\pi^+\pi^-$  (уравнение (2.13)).

Результаты количественной оценки чувствительности к параметрам смешивания при помощи моделирования методом Монте-Карло для объема данных, эквивалентного интегральной светимости  $10^3 \text{ фб}^{-1}$ , приведены в таблице 3. Это соответствует примерно году работы установок с пиковой светимостью  $10^{35} \text{ см}^{-2}\text{с}^{-1}$ , такой как проектируемая в ИЯФ  $\sigma\tau$ -фабрика [25, 26]. Число регистрируемых событий рассчитывалось исходя из эффективности регистрации, получаемой на эксперименте CLEO в реконструкции распадов  $\psi(3770)$  [21].

В моделировании использовались распады  $D \rightarrow K_S^0\pi^+\pi^-$  с меченым ароматом (для получения  $K_i$ ), распады обоих  $D$ -мезонов в  $D \rightarrow K_S^0\pi^+\pi^-$  в когерентном состоянии с  $\mathcal{C} = -1$  (для извлечения  $C_i, S_i$ ), а также два типа распадов  $D \rightarrow K_S^0\pi^+\pi^-$  с меченым ароматом для окончательного извлечения параметров смешивания: из когерентного состояния с  $\mathcal{C} = +1$ , а также из некогерентного состояния (аналогично получаемым на  $B$ -фабриках). Последние можно получить и на  $\sigma\tau$ -фабрике из процесса  $\psi(4040) \rightarrow D^\pm D^{*\mp}$ . В таблице 3 показано, что добавление некогерентных распадов улучшает точность определения параметров смешивания весьма незначительно. Эта точность ограничивается в основном статистикой распадов с меченым ароматом из состояния  $\mathcal{C} = -1$ . Однако добавление некогерентных распадов ощутимо улучшает точность параметров  $\mathcal{CP}$ -нарушения.

Более сложный анализ может также использовать когерентные распады двух  $D$ -мезонов в  $K_S^0\pi^+\pi^-$  в состоянии  $\mathcal{C} = +1$ , которые также чувствительны к смешиванию в первом порядке. Наша оценка чувствитель-

ности предполагает, что систематические погрешности в анализе могут быть значительно подавлены, так как оба состояния с  $C = +1$  и  $C = -1$  имеют схожую кинематику и восстанавливаются одновременно в одних и тех же данных на одном эксперименте.

Выражения (3.3) и (3.4) предполагают отсутствие прямого  $\mathcal{CP}$ -нарушения в распадах  $D$ . Однако и этот эффект можно учесть и измерить в предлагаемом методе. Для этого нужно лишь удвоить количество параметров  $K_i, C_i, S_i$  (рассматривая распады  $D^0$  и  $\bar{D}^0$  по отдельности для конечных состояний, которые не изменяются при зарядовом сопряжении, таких как  $K_S^0\pi^+\pi^-$ , или разделяя  $\mathcal{CP}$ -сопряженные моды для конечных состояний вида  $K^-\pi^+\pi^0$ ). Число уравнений, определяющих фазовые множители  $C_i, S_i$  в распадах  $(K_S^0\pi^+\pi^-)^2$ , останется тем же, но для достаточно большого числа бинов система уравнений все равно останется разрешима. Следовательно, такой метод можно использовать, чтобы различить эффекты прямого  $\mathcal{CP}$ -нарушения и  $\mathcal{CP}$ -нарушения в смешивании.

В случае использования конечных состояний  $K_S^0\pi^+\pi^-$  или других состояний с  $K_S^0$ -мезоном,  $\mathcal{CP}$ -нарушение в смешивании нейтральных каонов может имитировать  $\mathcal{CP}$ -нарушение в распадах  $D$ .  $\mathcal{CP}$ -нарушающие члены в амплитуде  $A_{1,2}$  имеют порядок  $\epsilon\lambda^2$ , где  $\epsilon \simeq 2.2 \times 10^{-3}$  [35] — величина  $\mathcal{CP}$ -нарушения в смешивании каонов, а  $\lambda^2 = \sin^2\theta_C \simeq 0.23^2$  — относительная разница амплитуд  $D^0 \rightarrow K_S^0\pi^+\pi^-$  и  $D^0 \rightarrow K_L^0\pi^+\pi^-$ . Если  $\mathcal{CP}$ -нарушение в каонах не учитывать, оно приведет к «мнимому»  $\mathcal{CP}$ -нарушению в распадах  $D$  величиной порядка  $r_{\mathcal{CP}} \sim \epsilon\lambda^2/(x_D^2 + y_D^2) \sim 1\%$ . Однако если измерить амплитуду распада  $D^0 \rightarrow K_L^0\pi^+\pi^-$  (хотя это и сложнее, чем распад с  $K_S^0$  из-за того, что  $K_L^0$  чрезвычайно трудно зарегистрировать, это можно сделать на  $\sigma\tau$ -фабрике при помощи кинематической реконструкции  $K_L^0$  на пороге рождения  $D\bar{D}$ ), на эффект смешивания каонов можно сделать поправку.

Точность измерения параметров смешивания можно улучшить, добавив в анализ другие трех- и четырехчастичные адронные конечные состояния, такие как  $K^-\pi^+\pi^0$  и  $K^-\pi^+\pi^-\pi^+$ . В этих случаях фазовые коэффициенты  $C_i, S_i$  могут быть определены подобным же образом, как и для  $D \rightarrow K_S^0\pi^+\pi^-$ .

Дополнительное преимущество использования КР и ДКП распадов  $D^0 \rightarrow K^\mp\pi^\pm\pi^0$  для измерения смешивания состоит в том, что относительная величина интерференционного члена, содержащего параметры смешивания, может быть значительно больше, чем для распадов  $D \rightarrow K_S^0\pi^+\pi^-$ . Так, если мы наблюдаем процесс, где один из  $D$ -мезонов помечен как  $D^0$  (например, полулептонным распадом), а дру-



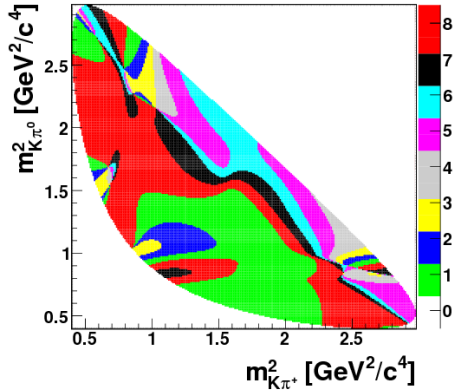


Рис. 7. Однородное разбиение по разности фаз, полученное на основе измеренных КР и ДКП амплитуд  $D^0 \rightarrow K^\mp \pi^\pm \pi^0$ .

гой реконструируется в состоянии  $K^- \pi^+ \pi^0$  (в состоянии с «неправильным знаком» каона), первый член в выражении (3.5) получается порядка  $R_{K\pi\pi} \sim 0.06 \times 0.06$ , тогда как интерференционный член имеет порядок  $\sqrt{R_{K\pi\pi}}(x_D, y_D) \sim 0.06 \times 0.01$ . Хотя статистическая чувствительность к параметрам смешивания будет той же величины, что и в рассмотренном выше случае, можно ожидать, что систематическая ошибка будет меньше, поскольку относительная величина интерференции больше, и, следовательно, анализ менее чувствителен к неопределенностям фона и эффективности.

Для оценки статистической точности параметров смешивания в таком подходе было выполнено моделирование с КР и ДКП амплитудами распада  $D^0 \rightarrow K^\mp \pi^\pm \pi^0$  на основе квазидвухчастичных моделей из измерений CLEO [36] и BaBar [37].

Как и в случае распада  $K_S^0 \pi^+ \pi^-$ , использовалось однородное разбиение по разности сильных фаз [18]; такое разбиение, полученное на основе моделей, использовавшихся в нашем случае, показано на рис. 7. Как обычно, используется статистика распадов, соответствующая интегралу светимости  $10^3 \text{ фб}^{-1}$ . Результаты вычисления статистической неопределенности параметров смешивания в зависимости от средней разности фаз между КР и ДКП амплитудами  $\delta_D^{K\pi\pi^0}$  показаны на рис. 8. Очевидно, что есть симметрия в зависимости от фазы:

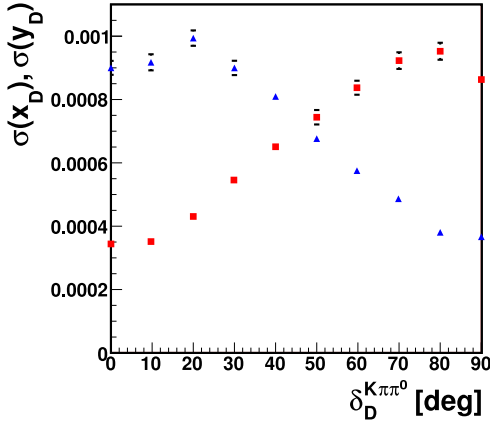


Рис. 8. Статистическая точность измерения  $x_D$  (треугольники) и  $y_D$  (квадраты) в зависимости от средней разности сильных фаз между КР и ДКП амплитудами распадов  $D^0 \rightarrow K^\mp \pi^\pm \pi^0$ .

$\sigma_{x_D}(\delta_D^{K\pi\pi^0}) = \sigma_{y_D}(\delta_D^{K\pi\pi^0} \pm \pi/2)$ . Разность сильных фаз, полученная CLEO, составляет  $227_{-17}^{+14^\circ}$ . Оценка параметров смешивания для этой величины приведена в таблице 4.

Таблица 4. Статистическая точность параметров смешивания и  $\mathcal{CP}$ -нарушения с использованием распадов  $D \rightarrow K\pi\pi^0$ . Результаты моделирования для интегральной светимости  $10^3 \text{ фб}^{-1}$  и разности фаз  $\delta_D^{K\pi\pi^0} = 227^\circ$ .

Параметр	Точность		
	Когерентное состояние	Некогерентное состояние	Оба
$x_D$ ( $10^{-4}$ )	6.2	8.7	6.0
$y_D$ ( $10^{-4}$ )	6.1	8.9	6.1
$r_{\mathcal{CP}}$ ( $10^{-2}$ )	2.6	2.2	1.7
$\alpha_{\mathcal{CP}}$ ( $^\circ$ )	2.4	2.4	1.7

## 4 Заключение

Рассмотрено модельно-независимый подход к измерению угла  $\gamma$  Унитарного Треугольника при помощи анализа распределения Далица трехчастичного распада  $D \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$  из процесса  $B^\pm \rightarrow DK^\pm$ . Модельная неопределенность в таком методе устраняется разбиением фазового объема распада на бины и измерением параметров амплитуды  $D \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$  в квантовых корреляциях  $D$ -мезонов из процесса  $e^+e^- \rightarrow D^0 \bar{D}^0$ . Показано, каким образом можно оптимизировать разбиение фазового объема так, чтобы максимально эффективно использовать имеющуюся экспериментальную статистику.

Исследовано влияние смешивания  $D$ -мезонов на модельно-независимое измерение угла  $\gamma$ . Показано, что эффектом смешивания можно пренебречь на всех стадиях анализа при текущем уровне точности: систематическое смещение  $\gamma$  для измеренных сейчас параметров смешивания составляет порядка  $0.2^\circ$ .

Был рассмотрен модельно-независимый подход к времени-зависимому анализу распределения Далица распада  $D \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$  для измерения параметров смешивания. Такой подход перспективен для измерений с большой статистикой на экспериментах ЛНСб и проектируемой супер- $B$ -фабрике.

Кроме того, показано, что в когерентном рождении системы  $D^0 \bar{D}^{*0}$  в  $e^+e^-$ -столкновениях эффект смешивания усиливается, если  $\bar{D}^{*0}$  реконструирован в состоянии  $D^0 \gamma$ , так, что система  $D^0 \bar{D}^0$  находится в состоянии с положительной зарядовой четностью  $\mathcal{C} = +1$ . Предложен модельно-независимый метод измерения параметров смешивания с усреднением по времени (без необходимости восстанавливать время распада  $D$ -мезонов), что позволяет провести такое измерение на  $c\tau$ -фабрике с пучками электронов и позитронов с одинаковыми энергиями (с симметричными пучками). При помощи моделирования показано, что чувствительность к обоим параметрам смешивания  $x_D$  и  $y_D$  получается около  $10^{-3}$  за год работы со светимостью  $10^{35} \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}$  на пике резонанса  $\psi(4040)$ . Такой метод не требует абсолютного измерения вероятностей распадов, и не содержит неопределенностей из-за абсолютной калибровки эффективности реконструкции. За счет того, что сильная фаза в процессе  $D \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$  значительно изменяется по фазовому объему, ожидаемая чувствительность к параметрам  $x_D$  и  $y_D$  одного порядка. Предложенный метод позволяет также измерить параметры  $\mathcal{CP}$ -нарушения в смешивании  $D$ -мезонов. Этот подход с успехом может применяться на проектируемой в ИЯФ СО РАН супер- $c\tau$ -фабрике.

# Благодарности

Авторы благодарны Дэвиду Аснеру, Алексею Гармашу, Тиму Гершону, Йонасу Радемакеру и Гаю Вилкинсону за ценные обсуждения и критические замечания. Работа финансируется грантом Президента Российской Федерации для поддержки молодых ученых, грант МК-1403.2011.2.

# Список литературы

- [1] M. Kobayashi and T. Maskawa, *Prog. Theor. Phys.* **49**, 652 (1973); N. Cabibbo, *Phys. Rev. Lett.* **10**, 531 (1963).
- [2] B. Aubert *et al.* (BaBar Collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **87**, 091801, (2001).
- [3] K. Abe *et al.* (Belle Collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **87**, 091802, (2001).
- [4] T. Abe, *et al.*, Belle II Technical Design Report, KEK Report 2010-1, [arXiv:1011.0352 [physics.ins-det]].
- [5] SuperB collaboration, SuperB Conceptual Design Report, INFN/AE-07/2, SLAC-R-856, LAL 07-15, [arXiv:0709.0451v2 [hep-ex]].
- [6] M. Staric *et al.* [Belle Collaboration], *Phys. Rev. Lett.* **98**, 211803 (2007) [arXiv:hep-ex/0703036].
- [7] B. Aubert *et al.* [BABAR Collaboration], *Phys. Rev. Lett.* **98**, 211802 (2007) [arXiv:hep-ex/0703020].
- [8] A. J. Schwartz, [arXiv:0911.1464v2 [hep-ex]].
- [9] A. Giri, Y. Grossman, A. Soffer and J. Zupan, *Phys. Rev. D* **68** (2003) 054018 [arXiv:hep-ph/0303187].
- [10] А. Бондарь. Материалы Специального совещания коллаборации Belle по Далиц-анализам, ИЯФ, 24–26 сентября 2002.
- [11] K. Abe *et al.* [BELLE Collaboration], *Phys. Rev. Lett.* **99**, 131803 (2007) [arXiv:0704.1000 [hep-ex]].
- [12] D. Asner *et al.* [CLEO Collaboration], *Phys. Rev. D* **72**, 012001 (2005) [arXiv:hep-ex/0503045].

- [13] P. del Amo Sanchez *et al.* [BABAR Collaboration], [arXiv:1004.5053 [hep-ex]].
- [14] A. Bondar, T. Gershon, P. Krokovny, Phys. Lett. B **624** 1-10 (2005) [arXiv:hep-ph/0503174].
- [15] P. Krokovny *et al.* [BELLE Collaboration], Phys. Rev. Lett. **97**, 081801 (2006) [arXiv:hep-ex/0605023].
- [16] K. Abe *et al.* [Belle Collaboration], [arXiv:0803.3375 [hep-ex]].
- [17] B. Aubert *et al.* [BABAR Collaboration], Phys. Rev. D **78** (2008) 034023 [arXiv:0804.2089 [hep-ex]].
- [18] A. Bondar and A. Poluektov, Eur. Phys. J. C **55** (2008) 51 [arXiv:0801.0840 [hep-ex]].
- [19] A. Bondar and A. Poluektov, Eur. Phys. J. C **47** (2006) 347 [arXiv:hep-ph/0510246].
- [20] R. A. Briere *et al.* [CLEO Collaboration], Phys. Rev. D **80**, 032002 (2009) [arXiv:0903.1681 [hep-ex]].
- [21] CLEO Collaboration, J. Libby, *et al.*, Phys. Rev. D **82**, 112006 (2010).
- [22] I. Adachi, K. Adamczyk, H. Aihara, *et al.* [Belle Collaboration], [arXiv:1106.4046 [hep-ex]].
- [23] A. Bondar, A. Poluektov, V. Vorobiev, Phys. Rev. D **82**, 034033 (2010).
- [24] M. Ablikim *et al.* (BES Collaboration), Nucl. Instrum. Meth. A **614**, 345 (2010).
- [25] A. Blinov *et al.* ICFA Beam Dyn. Newslett. 48:268-279, 2009.
- [26] Супер Charm Тау Фабрика. Концептуальный проект. Новосибирск, 2011.
- [27] L. Wolfenstein, Phys. Rev. Lett. **51**, 1945, (1983).
- [28] J. P. Silva and A. Soffer, Phys. Rev. D **61**, 112001 (2000) [arXiv:hep-ph/9912242].
- [29] Y. Grossman, A. Soffer, J. Zupan, Phys. Rev. D **72**, 031501 (2005).

- [30] Y. Grossman, A. L. Kagan and Y. Nir, Phys. Rev. D **75**, 036008 (2007) [arXiv:hep-ph/0609178].
- [31] E. Golowich, J. Hewett, S. Pakvasa and A. A. Petrov, Phys. Rev. D **76**, 095009 (2007) [arXiv:0705.3650 [hep-ph]].
- [32] D. M. Asner *et al.* [CLEO Collaboration], Phys. Rev. D **78** (2008) 012001 [arXiv:0802.2268 [hep-ex]].
- [33] D. M. Asner and W. M. Sun, Phys. Rev. D **73**, 034024 (2006) [Erratum-*ibid.* D **77**, 019902 (2008)] [arXiv:hep-ph/0507238].
- [34] D. Cronin-Hennessy *et al.* [CLEO Collaboration], Phys. Rev. D **80**, 072001 (2009) [arXiv:0801.3418 [hep-ex]].
- [35] C. Amsler *et al.* (Particle Data Group), Phys. Lett. B **667**, 1 (2008).
- [36] S. Kopp *et al.* [CLEO Collaboration], Phys. Rev. D **63**, 092001 (2001) [arXiv:hep-ex/0011065].
- [37] B. Aubert *et al.* [BABAR Collaboration], Phys. Rev. Lett. **103**, 211801 (2009) [arXiv:0807.4544 [hep-ex]].
- [38] N. Lowrey *et al.* [CLEO Collaboration], Phys. Rev. D **80**, 031105 (2009) [arXiv:0903.4853 [hep-ex]].
- [39] Z. z. Xing, Phys. Rev. D **55**, 196 (1997) [arXiv:hep-ph/9606422].

*А.Е. Бондарь, В.С. Воробьев, А.О. Полуэктов*

**Квантовые корреляции  $D^0\bar{D}^0$   
в исследовании CP-нарушения B- и D-мезонов**

*A.E. Bondar, A.O. Poluektov, V.S. Vorobyev,*

**Quantum correlations of  $D^0\bar{D}^0$   
in studies of CP-violation of B and D mesons**

ИЯФ 2011-30

Ответственный за выпуск А.В. Васильев

Работа поступила 10.11.2011 г.

---

Сдано в набор 11.11.2011 г.

Подписано в печать 11.11.2011 г.

Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 2,5 печ.л., 2.0 уч.-изд.л.

Тираж 90 экз. Бесплатно. Заказ № 30

---

Обработано на РС и отпечатано на

ротапринте ИЯФ им. Г. И. Будкера СО РАН

*Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.*