

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
им. Г.И. Будкера СО РАН
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РАН
(ИЯФ СО РАН)

М.Г. Козлов, А.В. Резниченко, В.С. Фадин

МУЛЬТИРЕДЖЕВСКАЯ ФОРМА АМПЛИТУД
С ГЛЮОННЫМ ОБМЕНОМ
В СУПЕРСИММЕТРИЧНЫХ ТЕОРИЯХ
ЯНГА–МИЛЛСА

ИЯФ 2012-32

НОВОСИБИРСК
2012

Мультиреджевская форма амплитуд с глюонным обменом в суперсимметричных теориях Янга–Миллса

М.Г. Козлов[†], А.В. Резниченко[‡], В.С. Фадин^{††}

Институт ядерной физики им. Г.И.Будкера,
Новосибирский государственный университет
630090, Новосибирск, Россия

Аннотация

В суперсимметричных теориях Янга–Миллса (СЯМ) найдены все эффективные вершины взаимодействия реджезованных глюонов с частицами как для главного логарифмического приближения (ГЛП), так и для следующего за ним (СГЛП). Вычислены вклады скаляров в собственную функцию ядра для присоединенного представления калибровочной группы и в импакт-факторы, аналогичные имеющимся в квантовой хромодинамике (КХД), а также все дополнительные по сравнению с КХД импакт-факторы, возникающие в СЯМ. Доказано выполнение всех условий бутстрапа, гарантирующее мультиреджевскую форму многочастичных амплитуд в СЯМ в СГЛП. Развита метод проверки соотношений бутстрапа без вычисления явного вида вершин и импакт-факторов. С его помощью доказано выполнение условий бутстрапа в теориях с любым числом фермионов и скалярных частиц, преобразующихся по любым представлениям цветовой группы и с любым взаимодействием юкавовского типа между ними.

** Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации: соглашения №14.В37.21.1181 и 14.В37.21.8408, а также при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований: гранты №12-02-31560, 12-02-31504, 12-02-33140, 13-02-01023.*

[†] e-mail address: m.g.kozlov@inp.nsk.su

[‡] e-mail address: a.v.reznichenko@inp.nsk.su

^{††} e-mail address: fadin@inp.nsk.su

Multi-Regge form of amplitudes with gluon exchanges in supersymmetric Yang-Mills theories

V.S. Fadin, M.G. Kozlov, A.V. Reznichenko

Abstract

All effective vertices for Reggeon-particle interaction in supersymmetric Yang-Mills theories (SYM) are found both in the leading and next-to-leading logarithmic approximations (LLA and NLLA). Scalar contributions to the eigenfunction of the octet BFKL kernel for the adjoint representation of the gauge group and to impact-factors, analogous to existing in QCD, as well as all additional impact factors, appearing in SYM, are calculated. On this base, the proof of fulfilment of all bootstrap conditions providing the multi-Regge form of the NLLA amplitude with the gluon exchange is carried out. A new method for check of the bootstrap conditions is developed which does not require explicit calculations of effective vertices and impact-factors. It is used to prove bootstrap conditions in the theories with general Yukawa-type fermion-scalar interactions with arbitrary numbers of fermions and scalars in arbitrary colour group representations.

1 Введение

Суперсимметричные теории Янга—Миллса (СЯМ) привлекают в настоящее время пристальное внимание теоретиков. Особый интерес, связанный с обращением в нуль бета-функции и сохранением конформной инвариантности, вызывает теория Янга—Миллса с максимально расширенной суперсимметрией ($\mathcal{N} = 4$ СЯМ). Интерес чрезвычайно вырос после появления знаменитой гипотезы Малдацены [?, ?, ?, ?] об АдС/КТП соответствии — дуальности между $\mathcal{N} = 4$ СЯМ в четырехмерном пространстве в пределе большого числа цветов N_c и теорией суперструн типа *IIB* в десятимерном пространстве $\text{AdS}_5 \times S^5$ (объединении пятимерного пространства анти-де-Ситтера и пятимерной сферы). Гипотеза Малдацены породила надежды на полную интегрируемость $\mathcal{N} = 4$ СЯМ в планарном пределе и простую форму амплитуд в этом пределе во всех порядках по константе связи [?]. Широкую известность получил так называемый анзац Берна—Диксона—Смирнова (БДС) [?] для n -точечных амплитуд с максимальным нарушением спиральности (МНС), основанный на предположении об итерационной структуре радиационных поправок. Однако оказалось, что он слишком упрощен и не согласуется с дуальностью [?, ?]. Впоследствии его нарушение для шестиглюонной амплитуды было обнаружено прямыми вычислениями в двух петлях [?]. В настоящее время считается правдоподобной возникшая на основе АдС/КТП соответствия гипотеза [?, ?, ?, ?] о том, что n -частичные амплитуды с МНС представляется произведением амплитуд БДС и остаточных функций R_n , зависящих от конформно-инвариантных отношений кинематических переменных. Конформная инвариантность остаточных функций подтверждена рядом прямых вычислений, однако не является вполне доказанной. Принято также считать, что остаточные функции можно получать из вакуумных средних от вильсоновских многоугольников со сторонами, соответствующими импульсам внешних глюонов [?, ?]. Чрезвычайно громоздкий результат вычисления двухпетлевой остаточной функции $R_6^{(2)}$, полученный таким образом в [?, ?], оказалось возможным кардинально упростить с помощью теории символов [?].

Эффективный метод исследования амплитуд $\mathcal{N} = 4$ СЯМ в мультирежневской области дает подход Балицкого—Фадина—Кураева—Липатова

(БФКЛ) [?, ?, ?, ?], основанный на реджезации глюона. В работах [?, ?] было показано наличие в амплитудах с $n > 5$ мандельштамовских разрезов [?], нарушающих БДС-анзац, проведено их исследование в ГЛП и в двухпетлевом приближении, получено явное выражение для вкладов этих разрезов в амплитуды переходов $2 \rightarrow 4$ и $3 \rightarrow 3$. Дальнейшее развитие этот метод получил в работах [?, ?, ?, ?]. В следующем за главным логарифмическим приближении (СГЛП) была найдена высокоэнергетическая асимптотика остаточной функции для шеститочечной амплитуды рассеяния с максимальным нарушением спиральности в кинематической области, содержащей вклад мандельштамовских ветвлений. Лидирующие и следующие за ними сингулярности соответствующих аномальных коллинеарных размерностей были вычислены во всех порядках теории возмущений. Полученные результаты согласуются с известным коллинеарным пределом и с предложенным в [?] анзацем для остаточной функции в трех петлях, если численные параметры анзаца выбрать надлежащим образом.

Целью данной работы является систематическое развитие подхода БФКЛ для $\mathcal{N} = 4$ СЯМ и калибровочных теорий более общего вида, содержащих фермионы и скаляры (мы используем этот термин как для истинных скаляров, так и для псевдоскаляров) в произвольных представлениях калибровочной группы. Для $\mathcal{N} = 4$ СЯМ найдены все эффективные реджевские вершины с однопетлевыми поправками к ним, вычислены однопетлевые вклады скаляров в импакт-факторы, аналогичные имеющимся в КХД, и все дополнительные по сравнению с КХД импакт-факторы, возникающие в СЯМ. В СГЛП доказано, что амплитуды СЯМ с глюонными обменами в перекрестных каналах имеют мультиреджевскую форму. При доказательстве использован развитый в [?] метод, основанный на соотношениях бутстрапа. Вычислен скалярный вклад в собственную функцию ядра БФКЛ для присоединенного представления цветовой группы и доказано выполнение всех условий бутстрапа, гарантирующее мультиреджевскую форму многочастичных амплитуд. Развита метод проверки условий бутстрапа без вычисления явного вида вершин и импакт-факторов, а также с его помощью доказано выполнение условий бутстрапа в теориях с любым числом фермионов и скалярных частиц, преобразующихся по любым представлениям цветовой группы и с любым взаимодействием юкавовского типа между ними.

Статья организована следующим образом. В начале следующего раздела вводится лагранжиан теории $\mathcal{N} = 4$ СЯМ, после чего для данной теории проводится вычисление всех необходимых эффективных реджевских вершин для обоих типов кинематики, существенной в СГЛП:

мультиреджевской (МРК) и квазимультиреджевской (КМРК). Напомним, что в МРК все конечные частицы имеют ограниченные (не растущие с энергией) поперечные импульсы и строго упорядочены по быстротам; в КМРК пара частиц имеет быстроты одного порядка. В конце второго раздела перечислены все новые для СЯМ условия бутстрапа, сгруппированные по кинематическим типам. В третьем разделе для случая КМРК последовательно рассмотрена проверка справедливости условий бутстрапа для рождения двухчастичных струй как в области фрагментации, так и в центральной области быстрой. Четвертый раздел посвящен проверке условий бутстрапа в МРК. В начале проверяются условия в области фрагментации для рассеяния глюона и скаляра. Затем значительное внимание уделено единообразному рассмотрению МРК-условий бутстрапа в теориях с общим типом юкавовского взаимодействия. Завершает раздел проверка в СЯМ условия бутстрапа для рождения глюона в центральной области быстрой. Напомним, что в случае КХД данный анализ представлял наибольшую техническую трудность [?, ?]. В заключении работы еще раз перечислены основные этапы обоснования мультиреджевской формы амплитуд с глюонным обменом в СГЛП для КХД и СЯМ.

2 Определения и обозначения

Здесь приняты те же обозначения, что и в работах [?, ?]. Мы используем разложение импульсов $k = k^+ n_1 + k^- n_2 + k_\perp$, где $n_{1,2}$ — светоконусные векторы, $(n_1, n_2) = 1$, $k^+ = (k, n_2)$, $k^- = (k, n_1)$, $(k_\perp, n_1) = (k_\perp, n_2) = 0$. Для реджевских вершин используется калибровка $(e, n_2) = 0$, если не оговорено иное. Здесь следует отметить, что все рассматриваемые реджевские вершины являются калибровочно-инвариантными. Для регуляризации используется размерность пространства-времени $D = 4 + 2\epsilon$. Все поправки к вершинам от вкладов скалярных частиц вычислены точно по размерности D .

2.1 Лагранжиан $\mathcal{N} = 4$ СЯМ и правила Фейнмана

Если не оговорено другое, ниже рассматривается суперсимметричная теория Янга—Миллса с калибровочной группой $SU(N_c)$ и с числом суперзарядов $\mathcal{N} = 4$. Используется обозначение

$$\bar{g}^2 = \frac{g^2 N_c \Gamma(1 - \epsilon)}{(4\pi)^{D/2}}, \quad (2.1)$$

где g — неперенормированная константа связи, в однопетлевом приближении связанная с перенормированной в схеме \overline{MS} константой соотношением

$$g = g_\mu \mu^{-\epsilon} \left[1 + \frac{g_\mu^2 N_c \Gamma(1-\epsilon) \beta_0}{(4\pi)^{D/2} 2\epsilon} \right], \quad \beta_0 = N_c \left(\frac{11}{3} - \frac{2}{3} n_M - \frac{1}{6} n_s \right). \quad (2.2)$$

Здесь $n_M = \mathcal{N}$ — число майорановских фермионов, $n_s = 2(\mathcal{N} - 1)$ — число скаляров.

В пространстве размерности четыре теория $\mathcal{N} = 4$ СЯМ может быть получена из $\mathcal{N} = 1$ СЯМ в размерности десять с помощью процедуры размерностной редукции [?]. Лагранжиан $\mathcal{N} = 4$ СЯМ представляется в виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} + \frac{1}{2} \bar{\lambda}_i^a \gamma_\mu i (D^\mu \lambda_i^a) + \frac{1}{2} (D_\mu \phi_r^a) (D^\mu \phi_r^a) + \\ & + \frac{g}{2} f^{abc} \Delta_{ji}^r \bar{\lambda}_j^a [\gamma_5]_r \lambda_i^c \phi_r^b - \frac{g^2}{4} f^{abc} f^{ade} \phi_r^b \phi_t^c \phi_r^d \phi_t^e. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь использованы обозначения λ_i^a для полей майорановских спиноров и ϕ_r^a для (псевдо)скалярных полей; $a, b, c, d, e = 1, \dots, N_c$ — цветовые индексы; $i, j = 1, \dots, n_M$, $n_M = 4$ — ароматы майорановских фермионов; $r, t = 1, \dots, n_s$, $n_s = 6$ — ароматы скаляров; f^{abc} — структурные константы калибровочной группы $SU(N_c)$;

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu^a - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu^a - g f^{abc} \mathcal{A}_\mu^b \mathcal{A}_\nu^c,$$

$$D_\mu = \partial_\mu + ig A_\mu^a T^a,$$

$$[\gamma_5]_{r=1,2,3} = 1, \quad [\gamma_5]_{r=4,5,6} = i\gamma_5 = -\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3,$$

$$\Delta^1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta^3 = \begin{pmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & i\sigma_2 \end{pmatrix},$$

$$\Delta^4 = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta^6 = \begin{pmatrix} -i\sigma_2 & 0 \\ 0 & i\sigma_2 \end{pmatrix},$$

$$[\Delta^r]^2 = -1, \quad \text{Tr}[\Delta^r] = 0, \quad \text{Tr}[\Delta^r \Delta^t] = n_M \delta_{rt}.$$

Матрицы Δ^r действуют в четырехмерном пространстве “ароматов” фермионов и описывают взаимодействие со скалярными ($r = 1, 2, 3$) и псевдоскалярными ($r = 3, 4, 5$) полями. Далее мы будем использовать обозначение $(-1)^{I_S}$ для четности (псевдо)скаляра S .

$$\begin{aligned}
&= -igT_{Q_1 Q_2}^G \gamma^\mu \delta_{fi}, \\
&= -igT_{S_1 S_2}^G (l_1 - l_2)^\mu \delta_{r_1 r_2}, \\
&= gT_{Q_1 Q_2}^S \Delta_{fi}^r [\gamma_5]_r, \\
&= ig^2 g_{\mu\nu} \left(\{T^{G_1} T^{G_2}\}_{S_1 S_2} + \{T^{G_2} T^{G_1}\}_{S_1 S_2} \right) \delta_{r_1 r_2}.
\end{aligned}$$

Рис. 1. Простейшие правила Фейнмана, следующие из лагранжиана (2.3). Все импульсы l_k скалярных частиц S_k с ароматами r_k предполагаются выходящими из диаграммы.

Все поля в СЯМ преобразуются по присоединенному представлению калибровочной группы, для генераторов которого мы выбираем стандартную нормировку:

$$T_{bc}^a = -if^{abc}, \quad \text{Tr} [T^a T^b] = N_c \delta^{ab}. \quad (2.4)$$

Отличные от имеющих в КХД правила Фейнмана для вершин приведены на рис. ??.

Для \mathcal{M} не равного четырем структура лагранжиана (2.3) остается прежней, меняется лишь количество полей, а также их тип для фермионов (дираковский, майорановский или вейлевский). Ниже мы не фиксируем число скалярных и спинорных полей, так что все полученные

результаты можно использовать для теорий СЯМ с $\mathcal{N} = 1, 2$. В свою очередь, мы используем результаты, полученные в КХД. Так, при получении импакт-фактора рождения глюона в теории $\mathcal{N} = 4$ СЯМ следует заменить в найденном в КХД фермионном вкладе [?] число кварковых ароматов n_f на $n_M N_c$, после чего сложить с глюонными [?] и с новыми (по сравнению с КХД) вкладами скаляров.

2.2 Эффективные реджевские вершины для МРК

Вершина $\gamma_{R_1 R_2}^G$

Вершина $\gamma_{R_1 R_2}^G$ рождения глюона G с импульсом $k = q_1 - q_2$ и вектором поляризации e при переходе реджеона R_1 с импульсом q_1 в реджеон R_2 с импульсом q_2 представляется в виде

$$\gamma_{R_1 R_2}^G = \gamma_{R_1 R_2}^{G(B)} + \gamma_{R_1 R_2}^{G(1)}, \quad (2.5)$$

при этом $\gamma_{R_1 R_2}^{G(B)}$ – борновская вершина, имеющая в нашей калибровке вид

$$\gamma_{R_1 R_2}^{G(B)} = -2gT_{R_1 R_2}^G e_{\perp\mu}^* q_{1\perp}^2 \left(\frac{q_{1\perp}^\mu}{q_{1\perp}^2} - \frac{k_{\perp}^\mu}{k_{\perp}^2} \right), \quad (2.6)$$

а $\gamma_{R_1 R_2}^{G(1)}$ – однопетлевая поправка к ней. Найденный в [?] вклад скалярных частиц в эту поправку можно записать как

$$\begin{aligned} \gamma_{R_1 R_2}^{G(S)} &= 2n_s N_c g^3 \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma^2(1+\epsilon)}{\Gamma(4+2\epsilon)} e_{\perp\mu}^* q_{1\perp}^2 T_{R_1 R_2}^G \times \\ &\times \left\{ V_s^\mu(q_1, q_2) + \frac{1+\epsilon}{2\epsilon} \left(\frac{q_{1\perp}^\mu}{q_{1\perp}^2} - \frac{k_{\perp}^\mu}{k_{\perp}^2} \right) \Phi_0(q_1, q_2) \right\}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где функция $V_s^\mu(q_1, q_2)$ определена соотношением

$$\begin{aligned} V_s^\mu(q_1, q_2) &= \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\Phi_1(q_1, q_2)}{q_{2\perp}^2 - q_{1\perp}^2} - (1+\epsilon)(-q_{1\perp}^2)^\epsilon \right) \frac{q_{1\perp}^\mu}{q_{1\perp}^2} + \\ &+ \frac{2}{\epsilon} \frac{(q_1, q_1 - q_2)_\perp}{q_{1\perp}^2} \frac{f(q_1, q_2)}{[q_{2\perp}^2 - q_{1\perp}^2]^3} q_{2\perp}^\mu - \frac{g(q_1, q_2)}{[q_{2\perp}^2 - q_{1\perp}^2]^2} (q_1 + q_2)_\perp^\mu, \end{aligned} \quad (2.8)$$

в котором

$$\Phi_n(q_1, q_2) = (-q_{1\perp}^2)^{n+\epsilon} - (-q_{2\perp}^2)^{n+\epsilon}, \quad (2.9)$$

$$f(q_1, q_2) = -\epsilon \left(q_{1\perp}^2 + q_{2\perp}^2 \right) \Phi_1(q_1, q_2) - 2(1+\epsilon) q_{1\perp}^2 q_{2\perp}^2 \Phi_0(q_1, q_2), \quad (2.10)$$

$$g(q_1, q_2) = \Phi_1(q_1, q_2) + \frac{1+\epsilon}{\epsilon} q_{2\perp}^2 \Phi_0(q_1, q_2). \quad (2.11)$$

Вершина $\Gamma_{S'S}^R$

В пространстве ароматов вершина перехода скаляра S в S' при рассеянии на реджеоне R пропорциональна единичной матрице, и в дальнейшем индексы ароматов опущены. Вершина записывается в виде

$$\Gamma_{S'S}^R = \Gamma_{S'S}^{R(B)}(1 + \delta_S), \quad (2.12)$$

при этом

$$\Gamma_{S'S}^{R(B)} = gT_{S'S}^R \quad (2.13)$$

— борновское значение, а δ_S — поправка, которую будем искать, используя схему вычисления реджеонных вершин, развитую в [?]. В этой схеме

$$\delta_S = \delta_S^c + \delta_S^{s.e.} + \delta_S^v + \delta_S^A, \quad (2.14)$$

где первое слагаемое является универсальным, т.е. не зависящим от типа рассеиваемой частицы [?]:

$$\delta_S^c = \frac{\omega^{(1)}(q_\perp)}{2} \left[\ln[\beta_0^2] + \frac{1}{\epsilon} - \psi(1) + \psi(1 - \epsilon) - 2\psi(1 + \epsilon) + 2\psi(1 + 2\epsilon) \right]. \quad (2.15)$$

Здесь β_0 — промежуточный параметр, $|t|/s \ll \beta_0 \ll 1$, сокращающийся в сумме (??), а

$$\omega^{(1)}(q_\perp) = -\bar{g}^2(-q_\perp^2)^\epsilon \frac{2}{\epsilon} \frac{\Gamma^2(1 + \epsilon)}{\Gamma(1 + 2\epsilon)} \quad (2.16)$$

— однопетлевой вклад в глюонную траекторию.

Трем другим слагаемым в (??) сопоставляются диаграммы, изображенные на рис. ?? . Слагаемое $\delta_S^{s.e.}$ учитывает поляризацию вакуума (рис. ?? (a)–(d)):

$$\delta_S^{s.e.} = \frac{\omega^{(1)}(q_\perp)}{2} \left[\frac{19 + 12\epsilon}{8(1 + 2\epsilon)(3 + 2\epsilon)} + \frac{1}{8(1 + 2\epsilon)(3 + 2\epsilon)} - n_M \frac{(1 + \epsilon)}{(1 + 2\epsilon)(3 + 2\epsilon)} - n_s \frac{1}{4(1 + 2\epsilon)(3 + 2\epsilon)} \right], \quad (2.17)$$

Здесь первые три члена получаются из КХД (формула (55) в [?]) заменой $n_f/N_c \rightarrow n_M$, а последний (вклад скаляров) получается из предыдущего заменой $n_M \rightarrow n_S/(4(1 + \epsilon))$ (см.[?]).

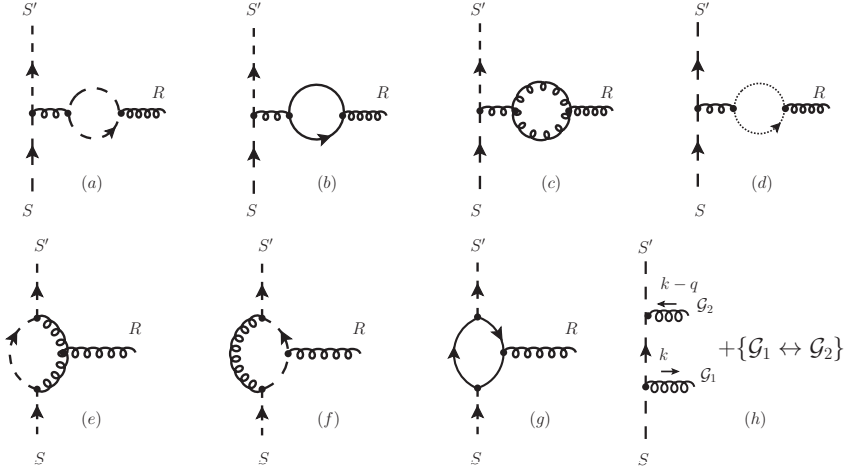


Рис. 2. Схематическое представление различных вкладов в (??): поляризации вакуума скалярами (а), фермионами (b), глюонами (с) и духами (d) для $\delta_S^{s,e.}$, вершинных поправок (е), (f), (g) для δ_S^v и двух-глюонных (h) для δ_S^A .

Слагаемое δ_S^v определяется вкладом вершинных поправок: рис. ??(е)–(g):

$$\delta_S^v = \frac{\omega^{(1)}(q_\perp)}{2} \left[\left(-\frac{1}{4\epsilon} - \frac{1}{2(1+2\epsilon)} \right)_e + \left(\frac{1}{\epsilon} - \frac{2}{1+2\epsilon} \right)_f + \frac{n_M(-1)^{I_S}}{1+2\epsilon} \right]. \quad (2.18)$$

Четвертое слагаемое δ_S^A из (??) определяется формулой (18) из [?], в которой в качестве $A_{\mu\nu}^{c_1 c_1}(p_s, k; p_{s'}, k - q)$ необходимо подставить амплитуду, отвечающую сумме двух диаграмм рис. ??(h). В результате приходим к выражению для δ_S^A , которое получается из формулы (50) в [?] для поправки δ_Q^A к вершине рассеяния кварка на реджеоне заменой под интегралом $1 + \beta$ на $(1 + \frac{\beta}{2})^2$:

$$\delta_S^A = g^2 q_\perp^2 \frac{N_c}{2} \int \frac{d\beta}{\beta} (1 + \frac{\beta}{2})^2 \theta(|\beta| - \beta_0) \int \frac{d^{D-2}k_\perp}{(2\pi)^{D-1}} \int \frac{d(s\alpha)}{2\pi i} \times \quad (2.19)$$

$$\times \frac{1}{[s\alpha\beta + k_\perp^2 + i0][s\alpha\beta + (q - k)_\perp^2 + q_\perp^2\beta + i0][s\alpha(1 + \beta) + k_\perp^2 + i0]}.$$

Контурное интегрирование по $s\alpha$ (ненулевой вклад возникает, когда β меняется в пределах от -1 до $-\beta_0$), а также дальнейшее интегрирование по поперечным импульсам и, наконец, по β дает

$$\delta_S^A = \frac{\omega^{(1)}(q_\perp)}{2} \left[-\ln[\beta_0^2] + 2\psi(1) - 2\psi(1+2\epsilon) + \frac{1}{4\epsilon(1+2\epsilon)} \right]. \quad (2.20)$$

В итоге

$$\begin{aligned} \Gamma_{S'S}^R = & \Gamma_{S'S}^{R(B)} \left[1 + \frac{\omega^{(1)}(q_\perp)}{2} \left(\frac{2}{\epsilon} + \psi(1) + \psi(1-\epsilon) - 2\psi(1+\epsilon) - \right. \right. \\ & - \frac{13+9\epsilon}{2(1+2\epsilon)(3+2\epsilon)} - n_M \frac{1+\epsilon - (-1)^{I_s}(3+2\epsilon)}{(1+2\epsilon)(3+2\epsilon)} - \\ & \left. \left. - \frac{n_s}{4(1+2\epsilon)(3+2\epsilon)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Вершина $\Gamma_{Q'Q}^R$

Так же как и для рассеяния скаляров, вершина перехода фермиона Q в фермион Q' при рассеянии на реджеоне R представляется единичной матрицей в пространстве ароматов, и в дальнейшем индексы ароматов не указываются. Вершина представляется в виде [?, ?, ?, ?]

$$\Gamma_{Q'Q}^R = \Gamma_{Q'Q}^{R(B)} (1 + \delta_Q), \quad (2.22)$$

где $\Gamma_{Q'Q}^{R(B)}$ – борновское значение,

$$\Gamma_{Q'Q}^{R(B)} = g\bar{u}(p')T^R \frac{\not{q}_\perp}{2p^+} u(p), \quad (2.23)$$

а поправка записывается в форме, аналогичной [?]:

$$\delta_Q = \delta_Q^c + \delta_Q^{s.e.} + \delta_Q^v + \delta_Q^A. \quad (2.24)$$

Первые два слагаемых здесь, δ_Q^c и $\delta_Q^{s.e.}$, совпадают с δ_S^c (??) и $\delta_S^{s.e.}$ (??) соответственно. Заметим, что в СЯМ имеет место сокращение вкладов скаляров и псевдоскаляров в вершинной поправке: вклад последних содержит две матрицы γ_5 , разделенные нечетным числом гамма-матриц, что приводит к различным знакам вкладов. Поэтому вершинная поправка δ_Q^v в СЯМ может быть получена из аналогичной поправки, найденной в КХД (см. формулу (48) в [?]), с помощью замены цветового фактора

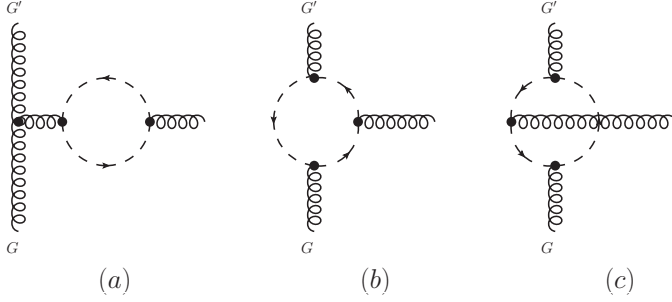


Рис. 3. Диаграммы для вкладов скалярных частиц в $\Gamma_{G'G}^R$: (a) — с поляризацией вакуума; (b) и (c) — с вершинными поправками.

$(1 - \frac{2C_F}{C_A}) = \frac{1}{N_c^2}$ на -1 . Поправка δ_Q^A вычислены в разделе 3.1 работы [?]. Используя эти результаты, получаем

$$\Gamma_{Q'Q}^R = \Gamma_{Q'Q}^{R(B)} \left[1 + \frac{\omega^{(1)}(q_\perp)}{2} \left(\frac{2}{\epsilon} + \psi(1 - \epsilon) - 2\psi(1 + \epsilon) + \psi(1) + \frac{4\epsilon^2 + \epsilon - 7}{2(1 + 2\epsilon)(3 + 2\epsilon)} - n_M \frac{1 + \epsilon}{(1 + 2\epsilon)(3 + 2\epsilon)} - \frac{n_s}{4(1 + 2\epsilon)(3 + 2\epsilon)} \right) \right]. \quad (2.25)$$

Вершина $\Gamma_{G'G}^R$

Вершину представим в виде

$$\Gamma_{G'G}^R = \Gamma_{G'G}^{R(B)} (1 + \delta_G^{s.e.} + \delta_G^A + \delta_G^c) + \Gamma_{G'G}^{R(v)}, \quad (2.26)$$

где

$$\Gamma_{G'G}^{R(B)} = -g(e'^*, e)_\perp T_{G'G}^R \quad (2.27)$$

— борновская вершина, e и e' — векторы поляризации глюонов G и G' соответственно. Поправки δ_G^c и δ_G^A , не содержащие вкладов скалярных частиц, можно получить из результатов раздела 3.2 [?]. Скаляры дают вклад только в $\delta_G^{s.e.}$ и в $\Gamma_{G'G}^{R(v)}$. Поправка $\delta_G^{s.e.}$ совпадает с $\delta_S^{s.e.}$ из (??).

Диаграммы вершинных поправок рис. ??b и рис. ??c дают (индекс (s) здесь и ниже означает, что рассматривается только вклад скалярных частиц)

$$\Gamma_{G'G}^{R(v,s)} = -n_s \frac{N_c}{2} g^3 T_{G'G}^R V_{\mu\nu\rho}(q, p_G) \frac{n_2^\mu}{2p_G^+} e^\nu e'^{* \rho}, \quad (2.28)$$

где p_G — импульс начального глюона, а функция $V_{\mu\nu\rho}(q, p_G)$, введенная в [?], представляется в виде

$$V_{\mu\nu\rho}(q, p_G) = i \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{(2p+q)_\mu (2p+p_G)_\nu (2p+p_G+q)_\rho}{p^2(p+q)^2(p+p_G)^2}. \quad (2.29)$$

В результате вычислений в светоконусной калибровке имеем

$$\Gamma_{G'G}^{R(v,s)} = n_s N_c g^3 T_{G'G}^R \frac{\Gamma(1-\epsilon) \Gamma^2(1+\epsilon)}{(4\pi)^{D/2} \Gamma(4+2\epsilon)} e'_{\perp\mu} e_{\perp\nu} (-q_\perp^2)^\epsilon \left[\frac{g_{\perp}^{\mu\nu}}{\epsilon} + 2 \frac{q_\perp^\mu q_\perp^\nu}{q_\perp^2} \right].$$

В итоге, поправки за счет скалярных частиц к вершине (??) имеют вид:

$$\Gamma_{G'G}^{R(s)} = n_s N_c g^3 \frac{\Gamma(1-\epsilon) \Gamma^2(1+\epsilon)}{(4\pi)^{D/2} \Gamma(4+2\epsilon)} e'_{\perp\mu} e_{\perp\nu} T_{G'G}^R (-q_\perp^2)^\epsilon \left[2 \frac{q_\perp^\mu q_\perp^\nu}{q_\perp^2} + g_{\perp}^{\mu\nu} \frac{1-\epsilon}{2\epsilon} \right]. \quad (2.30)$$

2.3 Эффективные реджевские вершины для КМРК

Обозначения

Введем следующие обозначения для импульсов конечных частиц k_1, k_2 :

$$k_i = k_i^+ n_1 + k_i^- n_2 + k_{i\perp}, \quad k_i^- = -\frac{k_{i\perp}^2}{2k_i^+}, \quad x_i = \frac{k_i^+}{k_1^+ + k_2^+}. \quad (2.31)$$

Импульс начальной частицы обозначим k ,

$$k = k^+ n_1 + k^- n_2 + k_\perp, \quad k^- = -\frac{k_\perp^2}{2k^+}. \quad (2.32)$$

Для вершин в области фрагментации начальной частицы компонента импульса вдоль n_1 считается доминирующей: $k_i^+ \gg k_i^-$, $k^+ \gg k^-$.

Вершина $\gamma_{R_1 R_2}^{\{S_1 S_2\}}$

Вершина рождения двух скаляров реджеонами R_1 и R_2 с импульсами q_1 и $-q_2$, $q_1 - q_2 = k_1 + k_2 \equiv k'$, была получена в [?]:

$$\gamma_{R_1 R_2}^{\{S_1 S_2\}} = g^2 \left[\left(T^{R_1} T^{R_2} \right)_{S_1 S_2} b(q_1; k_1, k_2) + \left(T^{R_2} T^{R_1} \right)_{S_1 S_2} b(q_1; k_2, k_1) \right]. \quad (2.33)$$

Здесь $S_{1,2}$ — цветовые индексы скалярных частиц $S_{1,2}$,

$$b(q_1; k_1, k_2) = 2q_{1\perp}^2 x_1 x_2 \left\{ \left[\frac{x_2 - x_1}{(k_1 - x_1 q_1)_\perp^2 + x_1 x_2 q_{1\perp}^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \frac{(q_1, k_1 - x_1 k')_\perp}{q_{1\perp}^2 (k_1 - x_1 k')_\perp^2} - 2 \frac{(q_1, k_1 - x_1 q_1)_\perp}{q_{1\perp}^2 [(k_1 - x_1 q_1)_\perp^2 + x_1 x_2 q_{1\perp}^2]} \right] - \left[q_1 \rightarrow k' \right] \right\}. \quad (2.34)$$

Ниже нам понадобится симметричная по скалярам комбинация функций (??):

$$b_s(q_1; k_1, k_2) \equiv b(q_1; k_1, k_2) + b(q_1; k_2, k_1) = \\ = \frac{2x_1 x_2 q_{1\perp}^2}{(k_1 - x_1 q_1)_\perp^2 + x_1 x_2 q_{1\perp}^2} \left[x_2 - x_1 - 2 \frac{(k_1 - x_1 q_1, q_1)_\perp}{q_{1\perp}^2} \right] + \\ + \frac{2x_1 x_2 q_{1\perp}^2}{(k_2 - x_2 q_1)_\perp^2 + x_1 x_2 q_{1\perp}^2} \left[x_1 - x_2 - 2 \frac{(k_2 - x_2 q_1, q_1)_\perp}{q_{1\perp}^2} \right]. \quad (2.35)$$

Вершины $\Gamma_{\{S_1 S_2\}G}^R$, $\Gamma_{G\{S_1 S_2\}}^R$, $\Gamma_{\{GS'\}S}^R$

Вершина $\Gamma_{\{S_1 S_2\}G}^R$ получается из борновской амплитуды процесса $G + R \rightarrow \{S_1 + S_2\}$, где в качестве реджеона R выступает глюон с вектором поляризации $-n_2^\mu / (2k^+)$:

$$\Gamma_{\{S_1 S_2\}G}^R = \\ = -2g^2 e_{\perp\mu} \left[\left(T^G T^R \right)_{S_1 S_2} \left\{ M^\mu(k_1, k_2, k; x_1) - M^\mu(k_1, k_2, k'; x_1) \right\} + \right. \\ \left. + \left(T^R T^G \right)_{S_1 S_2} \left\{ M^\mu(k_2, k_1, k; x_2) - M^\mu(k_2, k_1, k'; x_2) \right\} \right], \quad (2.36)$$

где e — вектор поляризации глюона G , $k' = k_1 + k_2$, (??)

$$M^\mu(k_1, k_2, p; x_1) = x_1 x_2 \frac{(k_1 - x_1 p)_\perp^\mu}{(k_1 - x_1 p)_\perp^2}, \quad (2.37)$$

$$M^\mu(k_2, k_1, k'; x_2) = -M^\mu(k_1, k_2, k'; x_1). \quad (2.38)$$

Нам понадобится также вершина $\Gamma_{G\{S_1S_2\}}^R$ перехода скалярной пары в глюон. Она получается комплексным сопряжением:

$$\Gamma_{G\{S_1S_2\}}^R = \left(\Gamma_{\{S_1S_2\}G}^R \right)^*.$$

Вершина перехода скаляра S с импульсом k в скаляр S' с импульсом k_1 и глюон G с импульсом k_2 связана с вершиной (??) кроссингом, который сводится к замене

$$k \rightarrow -k_2, \quad k_2 \rightarrow -k, \quad x_1 \rightarrow -\frac{x_1}{x_2}, \quad x_2 \rightarrow \frac{1}{x_2} \quad (2.39)$$

с последующим умножением на $-x_2$. В итоге

$$\begin{aligned} \Gamma_{\{GS'\}S}^R &= \\ &= -2g^2 e_{\perp\mu}^* \left[\left(T^G T^R \right)_{S'S} \left\{ A^\mu(x_2 k_1 - x_1 k_2) - A^\mu(k_1 - x_1 k) \right\} - \right. \\ &\quad \left. - \left(T^R T^G \right)_{S'S} \left\{ A^\mu(-k_2 + x_2 k) - A^\mu(k_1 - x_1 k) \right\} \right], \quad A^\mu(p) = x_1 \frac{p_\perp^\mu}{p_\perp^2}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Вершины $\Gamma_{\{Q_1Q_2\}S}^R$, $\Gamma_{S\{Q_1Q_2\}}^R$, $\Gamma_{\{Q'S\}Q}^R$

Вершина $\Gamma_{\{Q_1Q_2\}S}^R$ получается из борновской амплитуды процесса $S + R \rightarrow \{Q_1 + Q_2\}'$ где R — глюон с вектором поляризации $-n_2^\mu/(2k^+)$:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\{Q_1Q_2\}S}^R &= (-i)g^2 \Delta_{f_1 f_2}^r \bar{u}_{f_1}(k_1) \frac{\not{n}_2}{2k^+} \times \\ &\quad \times \left[T^R T^S \left(\frac{(x_2 \not{k}_1 - x_1 \not{k}_2)_\perp}{(x_2 k_1 - x_1 k_2)_\perp^2} + \frac{(\not{k}_2 - x_2 \not{k})_\perp}{(k_2 - x_2 k)_\perp^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + T^S T^R \left(\frac{(x_1 \not{k}_2 - x_2 \not{k}_1)_\perp}{(x_2 k_1 - x_1 k_2)_\perp^2} + \frac{(\not{k}_1 - x_1 \not{k})_\perp}{(k_1 - x_1 k)_\perp^2} \right) \right] [\gamma_5]_r v_{f_2}(k_2), \end{aligned} \quad (2.41)$$

f_1, f_2 — ароматы фермионов, r — аромат скаляра.

Вершина перехода фермионной пары в скаляр $\Gamma_{S\{Q_1Q_2\}}^R$ получается

комплексным сопряжением:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{S\{Q_1Q_2\}}^R &= (-i)g^2\Delta_{f_2f_1}^r\bar{v}_{f_2}(k_2)[\gamma_5]_r \times \\
&\times \left[T^S T^R \left(\frac{(x_2\not{k}_1 - x_1\not{k}_2)_\perp}{(x_2k_1 - x_1k_2)_\perp^2} + \frac{(\not{k}_2 - x_2\not{k})_\perp}{(k_2 - x_2k)_\perp^2} \right) + \right. \\
&\left. + T^R T^S \left(\frac{(x_1\not{k}_2 - x_2\not{k}_1)_\perp}{(x_2k_1 - x_1k_2)_\perp^2} + \frac{(\not{k}_1 - x_1\not{k})_\perp}{(k_1 - x_1k)_\perp^2} \right) \right] \frac{\not{k}_2}{2k^+} u_{f_1}(k_1).
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Вершина перехода фермиона с импульсом k в фермион с импульсом k_1 и скаляр с импульсом k_2 получается (??) заменой (??) с последующим умножением на $(-x_2)$:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\{Q'S\}Q}^R &= (-i)g^2\Delta_{f_i}^r\bar{u}_f(k_1)\frac{\not{k}_2}{2k^+}x_2 \times \\
&\times \left[T^R T^S \left(\frac{(\not{k}_1 - x_1\not{k})_\perp}{(k_1 - x_1k)_\perp^2} + \frac{(k_2 - x_2\not{k})_\perp}{(k_2 - x_2k)_\perp^2} \right) + \right. \\
&\left. + T^S T^R \left(\frac{(x_2\not{k}_1 - x_1\not{k}_2)_\perp}{(x_2k_1 - x_1k_2)_\perp^2} - \frac{(\not{k}_1 - x_1\not{k})_\perp}{(k_1 - x_1k)_\perp^2} \right) \right] [\gamma_5]_r u_i(k).
\end{aligned} \tag{2.43}$$

2.4 Условия бутстрапа в $\mathcal{N} = 4$ СЯМ

Схема доказательства в СГЛП глюонной реджезации в КХД основана на бутстрапном подходе, сформулированном в виде соотношений и условий бутстрапа в работе [?]. Ниже мы пользуемся операторными обозначениями и определениями (импакт-факторов и операторов рождения струй), введенными в [?].

Перечислим новые по сравнению с КХД условия бутстрапа, возникающие в СЯМ, а также модификации прежних условий за счет поправок скалярных частиц.

Условия бутстрапа для области фрагментации начальных струй

Первым условием бутстрапа, представленным на рис. ??(а), является существование двухреджеонного состояния $\langle R_\omega(q) |$, являющегося собственным состоянием ядра БФКЛ $\widehat{\mathcal{K}}^A$ в присоединенном представлении (что обозначено индексом A) с собственным значением $\omega(q_\perp)$:

$$\langle R_\omega(q) | \widehat{\mathcal{K}}^A = \omega(q_\perp) \langle R_\omega(q) |. \tag{2.44}$$

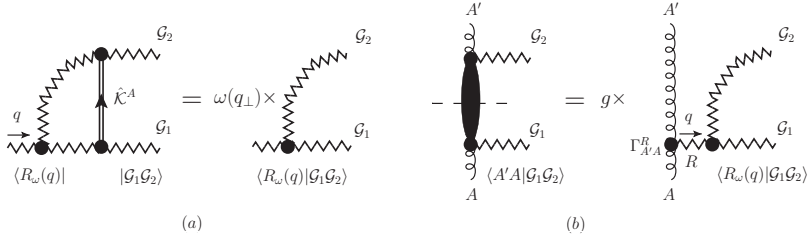


Рис. 4. Условия бутстрапа в области фрагментации.

Второе условие бутстрапа (см. рис. ??(b) для частного случая рассеяния глюона в области фрагментации) связывает собственное состояние $\langle R_\omega(q) |$ с импакт-фактором и эффективной вершиной $\Gamma_{A'A}^R$ перехода начальной струи A в конечную струю A' :

$$\langle A'A | = g \Gamma_{A'A}^R \langle R_\omega(q) |, \quad (2.45)$$

где импакт-фактор $\langle A'A |$ перехода струи A в A' определен формулами (19), (20) из [?], по цветовому индексу реджеона R в правой части подразумевается суммирование, $q = p_A - p_{A'}$, а нормировка состояния $\langle R_\omega(q) |$ задана условием

$$\frac{g^2 q_\perp^2}{2(2\pi)^{D-1}} \langle R'_\omega(q') | R_\omega(q) \rangle = \delta^\perp(q - q') \omega(q_\perp) \delta^{RR'}. \quad (2.46)$$

По сравнению с КХД в СЯМ появляются четыре новых условия бутстрапа типа (??) в квазимультиреджевской кинематике: условие с начальным глюоном $A = G$ и конечной парой скаляров $A' = \{S_1 S_2\}$, условие с начальным скаляром $A = S$ и конечной парой фермионов $A' = \{Q_1 Q_2\}$, либо конечной парой скаляр-глюон $A' = \{S'G\}$ и, наконец, условие с начальным фермионом $A = Q$ и конечной парой скаляр-фермион $A' = \{Q'S\}$. Единообразная проверка всех перечисленных условий проведена в разделе ??.

Для случая мультиреджевской кинематики в СЯМ в первом условии бутстрапа (??), условия (??) для импакт факторов глюона и кварка и условия нормировки (??) нужно учесть поправки от скалярных частиц; кроме того, появляется условие (??) для импакт фактора скаляра. Выполнение измененных условий (??) и (??) и условия (??) для глюона рассмотрено в разделе ??, условия (??) для скаляра и кварка — в разделах ?? и ?? соответственно. В разделе ?? мы демонстрируем также справед-

ливость условий бутстрапа (??) для теорий с общим видом юкавовского взаимодействия (??).

Неупругие условия бутстрапа

Условия бутстрапа для рождения струи J в центральной области быстрот (неупругие условия бутстрапа) формулируются следующим образом [?]:

$$\langle JR_1 | + gq_{1\perp}^2 \langle R_\omega(q_1) | \hat{\mathcal{J}} = g\gamma_{R_1 R_2}^J \langle R_\omega(q_2) |. \quad (2.47)$$

По сравнению с КХД [?] для рождения частиц в КМРК в СЯМ появляется одно новое условие типа (??): условие для рождения пары скаляров в центральной области быстрот $J = \{S_1, S_2\}$. Проверка данного условия проведена в разделе ??.

Кроме того, условие бутстрапа (??) для рождения одного глюона в МРК ($J = G$) по сравнению с КХД [?, ?] приобретает в следующем за борновским приближении скалярные поправки. Их вычислению, а также проверке условия (??) посвящен раздел ??. Заметим, что в неупругие условия бутстрапа в СГЛП юкавовское взаимодействие вклада не дает.

Далее мы последовательно рассматриваем все условия бутстрапа, спротированные на двухреджеонные t -канальные состояния $|\mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2\rangle$.

3 Проверка условий бутстрапа в КМРК

3.1 Условия бутстрапа в области фрагментации

Условие бутстрапа (??) для рождения пары частиц P_1, P_2 с импульсами k_1, k_2 в области фрагментации начальной частицы A с импульсом k имеет вид

$$\langle \{P_1 P_2\} A | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle = g\Gamma_{\{P_1 P_2\} A}^R \langle R_\omega(q) | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle. \quad (3.48)$$

Здесь $q = k - k_1 - k_2$, $\langle R_\omega(q) | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle$ – собственная функция ядра БФКЛ в присоединенном представлении в борновском приближении,

$$\langle R_\omega(q) | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle = \delta^\perp(q - r_1 - r_2) T_{\mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2}^R, \quad (3.49)$$

а $\langle \{P_1 P_2\} A | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle$ – импакт-фактор перехода частицы в пару частиц, выражающийся через эффективные вершины [?]:

$$\begin{aligned}
\langle \{P_1 P_2\} A | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle &= \delta^\perp(k - k_1 - k_2 - r_1 - r_2) \left(\sum_{\{A'\}} \Gamma_{\{P_1 P_2\} A'}^{\mathcal{G}_2} \Gamma_{A' A}^{\mathcal{G}_1} + \right. \\
&+ \left. \sum_{\{P'_1\}} \Gamma_{P_1 P'_1}^{\mathcal{G}_2} \Gamma_{\{P'_1 P_2\} A}^{\mathcal{G}_1} + \sum_{\{P'_2\}} \Gamma_{P_2 P'_2}^{\mathcal{G}_2} \Gamma_{\{P_1 P'_2\} A}^{\mathcal{G}_1} \right) - \{\mathcal{G}_1 \leftrightarrow \mathcal{G}_2\}, \tag{3.50}
\end{aligned}$$

где $r_{1,2}$ — импульсы реджезованных глюонов $\mathcal{G}_{1,2}$; A', P'_1, P'_2 — промежуточные частицы. Все реджевские вершины берутся в борновском приближении, т.е. реджеоны можно считать обычными глюонами с векторами поляризации $e^\mu = -n_2^\mu/(2p^+)$, где p^+ — наибольшая $+$ компонента импульса частиц в вершине. Будем использовать светоконусную формулировку теории, или эквивалентную ей здесь “старую”, нековариантную теорию возмущений. Поскольку вклад имеющих в такой теории диаграмм с рождением частиц из вакуума подавлен при большом k^+ большими энергетическими знаменателями, рассматривать нужно только те же диаграммы, что и в ковариантной теории возмущений, с теми же вершинами (причем в используемой нами калибровке диаграммы с четырехчастичными вершинами не дают вклада), но с физическими, а не виртуальными промежуточными частицами, и с энергетическими знаменателями вместо знаменателей пропагаторов.

Поэтому имеем

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\{BC\}A}^R &= \sum_{A'} \frac{V_{\{BC\}A'} \Gamma_{A'A}^R}{2\epsilon_{A'}(\epsilon_B + \epsilon_C - \epsilon_{A'})} + \\
&+ \sum_{B'} \frac{\Gamma_{BB'}^R V_{\{B'C\}A}}{2\epsilon_A(\epsilon_A - \epsilon_C - \epsilon_{B'})} + \sum_{C'} \frac{\Gamma_{CC'}^R V_{\{BC'\}A}}{2\epsilon_A(\epsilon_A - \epsilon_{C'} - \epsilon_B)}, \tag{3.51}
\end{aligned}$$

где $V_{\{BC\}A}$ — амплитуда перехода $A \rightarrow BC$, в которой импульсы всех частиц лежат на массовой поверхности. Легко видеть, что вклады, получающиеся при подстановке двух последних членов в (??) в первое слагаемое в (??) сокращаются со вкладом, получающимся при подстановке первого члена в (??) во второе и третье слагаемое в (??). А сумма вкладов, получающихся при подстановке второго члена в (??) в третье слагаемое в (??) и третьего члена в (??) во второе слагаемое в (??), исчезает в (??) после антисимметризации относительно замены $\{\mathcal{G}_1 \leftrightarrow \mathcal{G}_2\}$. После указанных сокращений выполнение условия (??) легко продемонстрировать, используя для оставшихся членов МРК-условие бутстрапа в главном порядке.

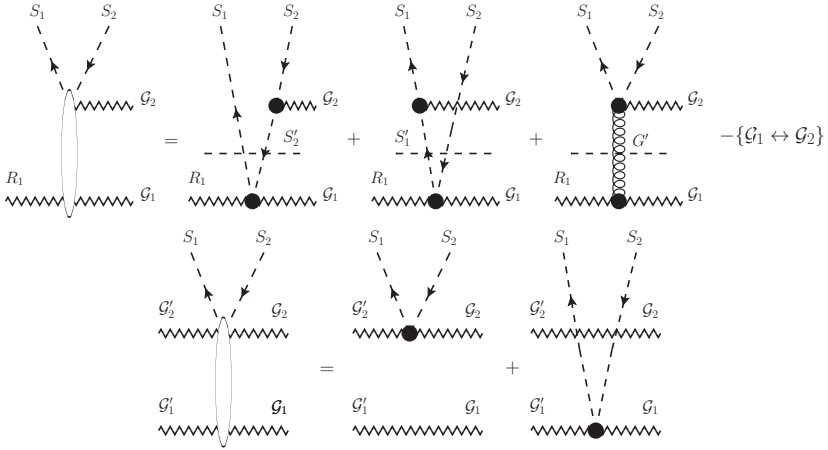


Рис. 5. Импакт-фактор рождения скалярной пары S_1, S_2 и матричный элемент оператора рождения пары в центральной области быстрот.

3.2 Неупругое условие бутстрапа для рождения пары скаляров

Для рождения пары скаляров S_1, S_2 с импульсами k_1, k_2 в центральной области быстрот условие бутстрапа (??) принимает вид

$$\langle \{S_1 S_2\} R_1 | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle + g q_{1\perp}^2 \langle R_\omega(q_1) | \widehat{\mathcal{T}}_{S_1 S_2} | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle = g \gamma_{R_1 R_2}^{\{S_1 S_2\}} \langle R_\omega(q_2) | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle. \quad (3.52)$$

Импакт-фактор рождения пары скаляров S_1, S_2 выражается через эффективные вершины (??), (??), (??) (см. рис. ??, верхний ряд):

$$\begin{aligned} \langle \{S_1 S_2\} R_1 | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle = & \delta^\perp(q_1 - k_1 - k_2 - r_1 - r_2) \left(\sum_{\{S'\}} \left[\gamma_{R_1 \mathcal{G}_1}^{\{S_1 S'\}} \Gamma_{S_2 S'}^{\mathcal{G}_2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \gamma_{R_1 \mathcal{G}_1}^{\{S' S_2\}} \Gamma_{S_1 S'}^{\mathcal{G}_2} \right] + \sum_{\{G'\}} \Gamma_{\{S_1 S_2\} G'}^{\mathcal{G}_2} \gamma_{R_1 \mathcal{G}_1}^{G'} \right) - \{G_1 \leftrightarrow G_2\}, \end{aligned} \quad (3.53)$$

где r_1, r_2, q_1 — импульсы реджеонов $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ и R_1 . Матричный элемент оператора рождения пары скаляров (см. рис. ??, нижний ряд):

$$\langle \mathcal{G}'_1 \mathcal{G}'_2 | \widehat{\mathcal{T}}_{S_1 S_2} | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle = \delta^\perp(r'_1 + r'_2 - k_1 - k_2 - r_1 - r_2) \left[\gamma_{\mathcal{G}'_2 \mathcal{G}_2}^{\{S_1 S_2\}} \Delta_{\mathcal{G}'_1 \mathcal{G}_1} + \gamma_{\mathcal{G}'_1 \mathcal{G}_1}^{\{S_1 S_2\}} \Delta_{\mathcal{G}'_2 \mathcal{G}_2} \right],$$

где $\Delta_{\mathcal{G}'_1 \mathcal{G}_1} = r_{1\perp}^2 \delta^\perp(r_1 - r'_1) \delta_{\mathcal{G}'_1 \mathcal{G}_1}$, \mathcal{G}_i и \mathcal{G}'_i — цветовые индексы реджеонов. Собственная функция ядра БФКЛ в главном приближении дана в (??).

В условии бутстрапа присутствуют шесть независимых цветовых структур: $\{T^{\mathcal{G}_1} T^{\mathcal{G}_2} T^{R_1}\}_{S_1 S_2}$ и еще пять структур, отличающихся от данной перестановкой верхних индексов. Благодаря симметрии условия (??) относительно перестановки конечных частиц S_1 , S_2 и антисимметрии относительно перестановки реджеонов \mathcal{G}_1 , \mathcal{G}_2 , его достаточно проверять только для двух структур, например,

$$\{T^{R_1} T^{\mathcal{G}_1} T^{\mathcal{G}_2}\}_{S_1 S_2}, \quad \{T^{\mathcal{G}_1} T^{R_1} T^{\mathcal{G}_2}\}_{S_1 S_2}. \quad (3.54)$$

После подстановки эффективных вершин в определение импакт-фактора (??), суммирования по промежуточным состояниям и выделения независимых цветовых структур легко получить

$$\begin{aligned} \langle \{S_1 S_2\} R_l | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle = \mathcal{S} & \left\{ \left[\{T^{R_1} T^{\mathcal{G}_1} T^{\mathcal{G}_2}\}_{S_1 S_2} \left(4 \left(\frac{q_{1\perp}^\mu}{q_{1\perp}^2} - \frac{(q_1 - r_1)_\perp^\mu}{(q_1 - r_1)_\perp^2} \right) \times \right. \right. \right. \\ & \times \left(M^\mu(k_1, k_2, q_1 - r_1; x_1) - M^\mu(k_1, k_2, l; x_1) \right) - \frac{b(q_1; k_1, k_2 + r_2)}{q_{1\perp}^2} \Big) - \\ & - \{T^{\mathcal{G}_1} T^{R_1} T^{\mathcal{G}_2}\}_{S_1 S_2} \left(4 \left(\frac{q_{1\perp}^\mu}{q_{1\perp}^2} - \frac{(q_1 - r_1)_\perp^\mu}{(q_1 - r_1)_\perp^2} \right) \left(M^\mu(k_1, k_2, q_1 - r_1; x_1) - \right. \right. \\ & \left. \left. - M^\mu(k_1, k_2, l; x_1) \right) + \frac{b(q_1; k_2 + r_2, k_1)}{q_{1\perp}^2} \right) \Big] + [S_1 \leftrightarrow S_2] \Big\} - \{\mathcal{G}_1 \leftrightarrow \mathcal{G}_2\}, \end{aligned}$$

где $l = k_1 + k_2$, а общий коэффициент

$$\mathcal{S} = \delta^\perp(q_1 - k_1 - k_2 - r_1 - r_2) q_{1\perp}^2 g^3.$$

Матричный элемент оператора рождения пары скаляров и правая часть условия бутстрапа получаются подстановкой эффективной вершины (??):

$$\begin{aligned} g q_{1\perp}^2 \langle R_\omega(q_1) | \widehat{\mathcal{J}}_{S_1 S_2} | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle = \mathcal{S} & \left\{ \left[\{T^{\mathcal{G}_1} T^{R_1} T^{\mathcal{G}_2} - T^{R_1} T^{\mathcal{G}_1} T^{\mathcal{G}_2}\}_{S_1 S_2} \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \frac{b(q_1 - r_1, k_1, k_2)}{(q_1 - r_1)_\perp^2} \right] + [S_1 \leftrightarrow S_2] \right\} - \{\mathcal{G}_1 \leftrightarrow \mathcal{G}_2\}, \\ g \gamma_{R_1 R_2}^{\{S_1 S_2\}} \langle R_\omega(q_2) | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle = \mathcal{S} & \left\{ \left[-\{T^{R_1} T^{\mathcal{G}_1} T^{\mathcal{G}_2}\}_{S_1 S_2} \frac{b(q_1, k_1, k_2)}{q_{1\perp}^2} \right] + \right. \\ & \left. + [S_1 \leftrightarrow S_2] \right\} - \{\mathcal{G}_1 \leftrightarrow \mathcal{G}_2\}. \end{aligned}$$

Условие бутстрапа при структуре $\{T^{R_1}T^{\mathcal{G}_1}T^{\mathcal{G}_2}\}_{S_1S_2}$ имеет вид:

$$4\left(\frac{q_{1\perp}^\mu}{q_{1\perp}^2} - \frac{(q_1 - r_1)_\perp^\mu}{(q_1 - r_1)_\perp^2}\right)\left(M^\mu(k_1, k_2, q_1 - r_1; x_1) - M^\mu(k_1, k_2, l; x_1)\right) - \frac{b(q_1, k_1, k_2 + r_2)}{q_{1\perp}^2} - \frac{b(q_1 - r_1, k_1, k_2)}{(q_1 - r_1)_\perp^2} = -\frac{b(q_1, k_1, k_2)}{q_{1\perp}^2}. \quad (3.55)$$

Справедливость его следует явно из (??) и (??).

Для второй независимой цветовой структуры $\{T^{\mathcal{G}_1}T^{R_1}T^{\mathcal{G}_2}\}_{S_1S_2} = \{T^{\mathcal{G}_2}T^{R_1}T^{\mathcal{G}_1}\}_{S_2S_1}$ условие бутстрапа сводится к соотношению

$$-4\left(\frac{q_{1\perp}^\mu}{q_{1\perp}^2} - \frac{(q_1 - r_1)_\perp^\mu}{(q_1 - r_1)_\perp^2}\right)\left(M^\mu(k_1, k_2, q_1 - r_1; x_1) - M^\mu(k_1, k_2, l; x_1)\right) - 4\left(\frac{q_{1\perp}^\mu}{q_{1\perp}^2} - \frac{(q_1 - r_2)_\perp^\mu}{(q_1 - r_2)_\perp^2}\right)\left(M^\mu(k_2, k_1, q_1 - r_2; x_2) - M^\mu(k_2, k_1, l; x_2)\right) - \frac{b(q_1, k_2 + r_2, k_1)}{q_{1\perp}^2} + \frac{b(q_1 - r_1, k_1, k_2)}{(q_1 - r_1)_\perp^2} - \frac{b(q_1, k_1 + r_1, k_2)}{q_{1\perp}^2} + \frac{b(q_1 - r_2, k_2, k_1)}{(q_1 - r_2)_\perp^2} = 0. \quad (3.56)$$

Вместо явной проверки этого соотношения можем сложить (??) с равенством (??) и с (??) с заменой $k_1 \leftrightarrow k_2$ и $r_1 \leftrightarrow r_2$. В результате дело сводится к проверке равенства

$$b_s(q_1, k_1, k_2 + r_2) + b_s(q_1, k_2, k_1 + r_1) = b_s(q_1, k_1, k_2), \quad (3.57)$$

справедливость которого легко увидеть из (??). Таким образом, выполнение условия бутстрапа (??) для рождения пары скаляров в центральной области доказано.

4 Проверка условий бутстрапа в МРК

Следуя [?, ?, ?] при проверке условий бутстрапа для амплитуды в МРК мы выбираем следующий базис цветовой структуры:

$$\text{Tr}[T^{\mathcal{G}_2}T^{A'}T^{\mathcal{G}_1}T^A], T_{A\mathcal{G}_1}^c T_{\mathcal{G}_2 A'}^c, T_{A\mathcal{G}_2}^c T_{\mathcal{G}_1 A'}^c, \quad (4.58)$$

где A — индекс начальной частицы (или реджеона для условия бутстрапа в центральной области), а A' — индекс конечной частицы. Первая цветовая структура симметрична относительно перестановки $\mathcal{G}_1 \leftrightarrow \mathcal{G}_2$. Вторая

и третья структуры, далее называемые древесными, выбраны такими же, как для вкладов борновского приближения. Выбор в качестве цветового базиса (??) удобен тем, что виртуальные поправки к вершинам возникают только для древесных структур, а в силу общей антисимметрии импакт-факторов относительно замены $\mathcal{G}_1 \leftrightarrow \mathcal{G}_2$ вклады симметричной цветовой структуры антисимметричны по замене $r_1 \leftrightarrow r_2$ импульсов реджеонов, что существенно облегчает их вычисление.

4.1 Поправки от скаляров в условиях бутстрапа для глюонов и кварков

Вклад скалярных частиц в ядро БФКЛ был найден в [?]. Нас интересует ядро в присоединенном представлении, поэтому из результатов [?] нам достаточно воспользоваться только “неабелевой” частью найденного ядра. Скалярные поправки к ней, аналогично фермионным, выражаются через соответствующий поляризационный оператор и получаются из фермионных заменой $n_M \rightarrow n_S/(4(1+\epsilon))$, так же как и поправки к траектории глюона. С учетом того, что условие (??) выполнено в фермионном секторе [?], отсюда следует, что для выполнения (??) в СЯМ нужно, чтобы таким же образом получался и скалярный вклад в собственную функцию ядра, т.е. должно быть

$$\langle R_\omega(q)|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle^{(B)} + \langle R_\omega(q)|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle^{(s)} = T_{\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2}^R \delta^\perp(q - r_1 - r_2) \left\{ 1 - \frac{n_s}{2} \bar{g}^2 \frac{\Gamma^2(1+\epsilon)}{\Gamma(4+2\epsilon)} \frac{1+\epsilon}{\epsilon} \left[[-(r_1+r_2)_\perp^2]^\epsilon - [-r_{1\perp}^2]^\epsilon - [-r_{2\perp}^2]^\epsilon \right] \right\}. \quad (4.59)$$

При этом выполнение условия (??) в КХД гарантирует его выполнение и в СЯМ.

Перейдем к условиям (??) для глюонов и кварков. Для скалярного вклада в импакт-фактор глюона имеем (как и выше, скалярные поправки мы отмечаем индексом s):

$$\langle G'G|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle^{(s)} = \delta^\perp(q - r_1 - r_2) \sum_f \int d\phi_f \left(\Gamma_{\{f\}G}^{\mathcal{G}_1} \Gamma_{G'\{f\}}^{\mathcal{G}_2} - \Gamma_{\{f\}G}^{\mathcal{G}_2} \Gamma_{G'\{f\}}^{\mathcal{G}_1} \right).$$

Здесь промежуточное состояние f может быть либо одноглюонным $f = \tilde{G}$, либо состоять из двух скаляров $f = \{S_1, S_2\}$. В первом случае вклад, пропорциональный n_s , возникает из поправок (??) к вершине (??). Во втором случае необходимо проводить интегрирование с мерой

(??) для свертки двух вершин (??). Алгебраические преобразования, использующие свойство (??), а также последующее интегрирование по поперечным импульсам и по переменной x_1 элементарны. Окончательно,

$$\begin{aligned} \langle G'G|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle^{(s)} &= 2\delta^\perp(q-r_1-r_2)n_s g^2 \bar{g}^2 \frac{\Gamma^2(1+\epsilon)}{\Gamma(4+2\epsilon)} e(p_G)_{\perp\mu} e^*(p'_G)_{\perp\nu} \times \\ &\times T_{G'G}^a T_{\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2}^a [-q_\perp^2]^\epsilon \left[g_{\perp}^{\mu\nu} \frac{1+\epsilon}{4\epsilon} \left\{ \frac{2}{1+\epsilon} - \left[\frac{r_{1\perp}^2}{q_\perp^2} \right]^\epsilon - \left[\frac{r_{2\perp}^2}{q_\perp^2} \right]^\epsilon \right\} + \frac{q_\perp^\mu q_\perp^\nu}{q_\perp^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Из (??), вида вершины (??) и поправки(??) к $\langle R_\omega(q)|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle$ за счет скаляров очевидно выполнение условия бутстрапа (??).

Скалярный вклад в условие бутстрапа (??) для импакт-фактора фермиона содержит два типа членов. Члены, пропорциональные n_s , идут только от поляризационного оператора скалярных частиц, и проверка условия (??) для них элементарна. Кроме них есть еще члены, обусловленные юкавовским взаимодействием. Выполнение условия (??) для них продемонстрировано в общем виде в разделе ??.

4.2 Условие бутстрапа для рассеяния скаляра

Условие бутстрапа (??) для рассеяния скаляра имеет вид:

$$\langle S'S|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle = g\Gamma_{S'S}^R \langle R_\omega(q)|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle, \quad (4.61)$$

где $q = k - k'$, k и k' — начальный и конечный импульсы скаляра. Имеем [?] рис. 6:

$$\langle S'S| = \langle S'S|\Delta - \langle S'S|^B \left[\omega(\hat{r}_1) \ln \left| \frac{\hat{r}_1}{q_\perp} \right| + \omega(\hat{r}_2) \ln \left| \frac{\hat{r}_2}{q_\perp} \right| + \Delta \hat{\mathcal{K}}_r^B \right]. \quad (4.62)$$

Здесь r_1, r_2 — импульсы реджеонов $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$, Δ — вспомогательный параметр, необходимый для разделения вкладов МРК и КМРК,

$$\begin{aligned} \langle S'S|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle^\Delta &= \delta^\perp(q-r_1-r_2) \left(\sum_{\{\tilde{S}\}} \Gamma_{S'\tilde{S}}^{\mathcal{G}_2} \Gamma_{\tilde{S}S}^{\mathcal{G}_1} + \right. \\ &+ \sum_{\{\tilde{S}G'\}} \int \Gamma_{S'\{\tilde{S}G'\}}^{\mathcal{G}_2} \Gamma_{\{\tilde{S}G'\}S}^{\mathcal{G}_1} d\phi_{\{\tilde{S}G'\}} \theta(\Delta - y_S + z) + \\ &\left. + \sum_{\{Q_1Q_2\}} \int \Gamma_{S'\{Q_1Q_2\}}^{\mathcal{G}_2} \Gamma_{\{Q_1Q_2\}S}^{\mathcal{G}_1} d\phi_{\{Q_1Q_2\}} \right) - \{\mathcal{G}_1 \leftrightarrow \mathcal{G}_2\}, \end{aligned} \quad (4.63)$$

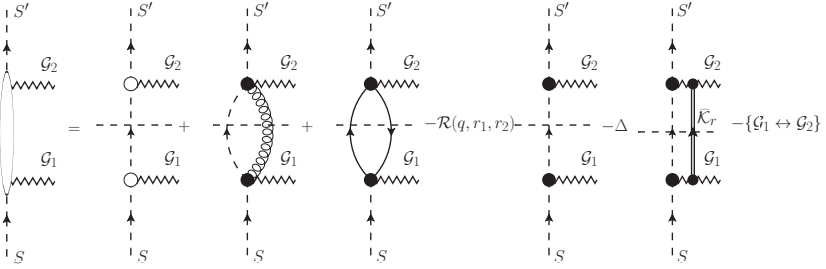


Рис. 6. Импакт-фактор скаляра в СГП. Белые круги — эффективные вершины в СГП, черные круги — эффективные вершины в борновском приближении, горизонтальная штриховая линия — массовая поверхность, $\mathcal{R}(q, r_1, r_2) = \omega(r_{1\perp}) \ln \left| \frac{r_{1\perp}}{q_\perp} \right| + \omega(r_{2\perp}) \ln \left| \frac{r_{2\perp}}{q_\perp} \right|$ — множитель от разложения редже-фактора, двойная линия — борновская реальная часть ядра БФКЛ.

где $y_S = \ln \frac{\sqrt{2}p_\perp^+}{|q_\perp|}$ — быстрота начального скаляра; $z = \frac{1}{2} \ln \frac{l_\perp^+}{l_\perp^-}$, l_2 — быстрота и импульс промежуточного глюона G' . Мера двухчастичного промежуточного состояния $\{P_1(l_1), P_2(l_2)\}$ с полным импульсом $l = l_1 + l_2$,

$$l_i = l_i^+ n_1 + l_i^- n_2 + l_{i\perp}, \quad l_i^- = -\frac{l_{i\perp}^2}{2l_i^+}, \quad x_i = \frac{l_i^+}{l_1^+ + l_2^+}, \quad (4.64)$$

определяется выражением

$$d\phi_{\{P_1 P_2\}} = \kappa d^{D-2} l_{1\perp} d^{D-2} l_{2\perp} \frac{\delta^\perp(l - l_1 - l_2)}{(2\pi)^{D-1}} \frac{dx_1 dx_2}{2(x_1 x_2)} \delta(1 - x_1 - x_2), \quad (4.65)$$

в котором $\kappa = \frac{1}{2}$ в случае тождественности частиц, иначе $\kappa = 1$.

Импакт-фактор скаляра содержит в определении вычитательное слагаемое, пропорциональное параметру Δ . Это слагаемое необходимо для устранения зависимости от Δ в пределах интегрирования по быстроте. После сокращения Δ в полном выражении для импакт-фактора остаются сложные слагаемые, которые могут быть устранены при проверке условий бутстрапа так же, как это делалось в КХД для глюонных вкладов в импакт-фактор рождения глюона [?]: с помощью умножения всех компонент бутстрапа на оператор $1 - \hat{U}_K$ (здесь K — подходящий импульсный

параметр). Матричный элемент оператора \widehat{U}_K имеет следующий вид [?]:

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{G}'_1 \mathcal{G}'_2 | \widehat{U}_K | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle &= g^2 \delta^\perp (r'_1 + r'_2 - r_1 - r_2) T_{\mathcal{G}'_1 \mathcal{G}'_2}^a T_{\mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2}^a \frac{r'_{1\perp} r'_{2\perp}}{(2\pi)^{D-1}} \times \\
&\times \left(\frac{r'_{1\perp} \alpha}{r'_{1\perp}{}^2} + \frac{(r_1 - r'_1)_\perp \alpha}{(r_1 - r'_1)_\perp{}^2} \right) \left(\frac{r'_{2\perp} \alpha}{r'_{2\perp}{}^2} + \frac{(r_2 - r'_2)_\perp \alpha}{(r_2 - r'_2)_\perp{}^2} \right) \ln \left[\frac{K_\perp^2}{(r'_1 - r_1)_\perp^2} \right] = \quad (4.66) \\
&= \frac{1}{2} \ln \left[\frac{K_\perp^2}{(r_1 - r'_1)_\perp^2} \right] \langle \mathcal{G}'_1 \mathcal{G}'_2 | \widehat{\mathcal{K}}_r^B | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle.
\end{aligned}$$

Выбор параметра K определяется типом импакт-фактора. В нашем случае удобно взять K равным q . Таким образом, далее мы проверяем “повернутое” условие бутстрапа (??):

$$\langle S' S | (1 - \widehat{U}_q) = g \Gamma_{S' S}^R \langle R_\omega(q) | (1 - \widehat{U}_q). \quad (4.67)$$

Следуя [?], “повернутые” величины обозначаем нижним индексом “*”:

$$\langle S' S | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle_* = g \Gamma_{S' S}^R \langle R_\omega(q) | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle_*. \quad (4.68)$$

Преобразованная функция $\langle R_\omega(q_1) | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle_*$ дается точным по $D = 4 + 2\epsilon$ выражением, глюонные и фермионные вклады в которое найдены в работе [?], а скалярные вклады получены из фермионных описанной выше заменой:

$$\begin{aligned}
\langle R_\omega(q_1) | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle_* &\equiv \langle R_\omega(q_1) | (1 - \widehat{U}_q) | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle = \\
&= \delta^\perp (q_1 - r_1 - r_2) T_{\mathcal{G}'_1 \mathcal{G}'_2}^{R_1} \left(1 - \bar{g}^2 R_q^{SYM}(r_1, r_2) \right), \quad (4.69)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_q^{SYM}(r_1, r_2) &= -(r_1 + r_2)_\perp^2 \frac{\epsilon}{\epsilon \Gamma(1 + 2\epsilon)} \left\{ \right. \\
&\left[\frac{r_{1\perp}^2}{(r_1 + r_2)_\perp^2} \right]^\epsilon \ln \left[\frac{(r_1 + r_2)_\perp^2}{r_{1\perp}^2} \right] + \left[\frac{r_{2\perp}^2}{(r_1 + r_2)_\perp^2} \right]^\epsilon \ln \left[\frac{(r_1 + r_2)_\perp^2}{r_{2\perp}^2} \right] + \\
&+ \left(\left[\frac{r_{1\perp}^2}{(r_1 + r_2)_\perp^2} \right]^\epsilon + \left[\frac{r_{2\perp}^2}{(r_1 + r_2)_\perp^2} \right]^\epsilon - 1 \right) \left(\frac{1}{\epsilon} + \ln \left[\frac{q_\perp^2}{(r_1 + r_2)_\perp^2} \right] + \right. \quad (4.70) \\
&+ \psi(1 - \epsilon) - \psi(1) + 2\psi(1 + 2\epsilon) - 2\psi(1 + \epsilon) + \frac{11 + 7\epsilon}{2(1 + 2\epsilon)(3 + 2\epsilon)} - \\
&\left. \left. - n_M \frac{1 + \epsilon}{(1 + 2\epsilon)(3 + 2\epsilon)} - \frac{n_s}{2} \frac{1}{2(3 + 2\epsilon)(1 + 2\epsilon)} \right) \right\}.
\end{aligned}$$

Импакт-фактор скаляра

Разобьем поправки к импакт-фактору скаляра на два типа: виртуальные и реальные

$$\langle S' S | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle_* = \langle S' S | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle_*^{(v)} + \langle S' S | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle_*^{(r)}.$$

Первый тип учитывает поправки к реджевским вершинам и вклад редже-факторов:

$$\begin{aligned} \langle S' S | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle_*^{(v)} &= \delta^\perp (q - r_1 - r_2) \times \\ &\times \left[-\frac{1}{2} \left(\omega^{(1)}(r_{1\perp}) \ln \frac{r_{1\perp}^2}{q_\perp^2} + \omega^{(1)}(r_{2\perp}) \ln \frac{r_{2\perp}^2}{q_\perp^2} \right) \sum_{\{\bar{S}\}} \Gamma_{S' \bar{S}}^{(B) \mathcal{G}_2} \Gamma_{\bar{S} S}^{(B) \mathcal{G}_1} + \right. \\ &\left. + \sum_{\{\bar{S}\}} \left(\Gamma_{\bar{S} S}^{(C) \mathcal{G}_1} \Gamma_{S' \bar{S}}^{(B) \mathcal{G}_2} + \Gamma_{\bar{S} S}^{(B) \mathcal{G}_1} \Gamma_{S' \bar{S}}^{(C) \mathcal{G}_2} \right) \right] - \{\mathcal{G}_1 \leftrightarrow \mathcal{G}_2\}. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Используя (??) и (??), получаем:

$$\begin{aligned} \langle S' S | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle_*^{(v)} &= \mathcal{N} T_{S' S}^R T_{\mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2}^R \left[(-r_{1\perp}^2)^\epsilon \ln \frac{r_{1\perp}^2}{q_\perp^2} + (-r_{2\perp}^2)^\epsilon \ln \frac{r_{2\perp}^2}{q_\perp^2} - \right. \\ &- \left((-r_{1\perp}^2)^\epsilon + (-r_{2\perp}^2)^\epsilon \right) \left(\frac{2}{\epsilon} + \psi(1 - \epsilon) + \psi(1) - 2\psi(1 + \epsilon) + \right. \\ &+ \frac{11 + 7\epsilon}{2(3 + 2\epsilon)(1 + 2\epsilon)} - \frac{4}{1 + 2\epsilon} - n_M \frac{1 + \epsilon - (-1)^{I_s}(3 + 2\epsilon)}{(1 + 2\epsilon)(3 + 2\epsilon)} - \\ &\left. \left. - \frac{n_s}{2} \frac{1}{2(1 + 2\epsilon)(3 + 2\epsilon)} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.72)$$

где

$$\mathcal{N} = \delta^\perp (q - r_1 - r_2) g^2 \bar{g}^2 \frac{\Gamma^2(1 + \epsilon)}{\epsilon \Gamma(1 + 2\epsilon)}. \quad (4.73)$$

Реальные поправки содержат два слагаемых: глюон-скалярное и фермионное:

$$\langle S' S | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle_*^{(r)} = \langle S' S | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle_*^{(r,g)} + \langle S' S | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle_*^{(r,f)}. \quad (4.74)$$

Вклад от промежуточного состояния скаляр-глюон после сокращения вспомогательного параметра Δ (что сводится к замене в мере интегри-

рования множителя $\frac{1}{x_1 x_2}$ на $\frac{1}{(x_1 x_2)_+}$) представим в виде

$$\begin{aligned} \langle S' S | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle_*^{(r, g)} &= \delta^\perp (q - r_1 - r_2) \times \\ &\times \sum_{\{\tilde{S} \mathcal{G}'\}} \int \Gamma_{S' \{\tilde{S} \mathcal{G}'\}}^{\mathcal{G}_2} \Gamma_{\{\tilde{S} \mathcal{G}'\} S}^{\mathcal{G}_1} d\phi_{\{\tilde{S} \mathcal{G}'\}}^+ - \{\mathcal{G}_1 \leftrightarrow \mathcal{G}_2\}, \end{aligned} \quad (4.75)$$

где мера $d\phi_{\{\tilde{S} \mathcal{G}'\}}^+$ получается из (??) с $\kappa = 1$, а входящая в нее функция $\frac{1}{(x_1 x_2)_+}$ определяется следующим образом:

$$\frac{f(x_1)}{(x_1 x_2)_+} = \frac{f(x_1) - x_1 f(1) - x_2 f(0)}{x_1 x_2}. \quad (4.76)$$

Подставляя в это выражение определение вершины (??) и суммируя по поляризациям и цветам промежуточных частиц, получаем

$$\begin{aligned} \langle S' S | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle_*^{(r, g)} &= -2\delta^\perp (q - r_1 - r_2) g^4 \int_0^1 \frac{dx_1}{(x_1 x_2)_+} \int \frac{d^{D-2} l_1}{(2\pi)^{D-1}} \times \\ &\times \left[\{T^{\bar{G}} T^{\mathcal{G}_2}\}_{\tilde{S} S'} \left(A^\mu (l_1 - x_1 l) - A^\mu (l_1 - x_1 k') \right) - \right. \\ &\left. - \{T^{\mathcal{G}_2} T^{\bar{G}}\}_{\tilde{S} S'} \left(A^\mu (-l_2 + x_2 k') - A^\mu (l_1 - x_1 k') \right) \right] \times \\ &\times \left[\{T^{\bar{G}} T^{\mathcal{G}_1}\}_{\tilde{S} S} \left(A_\mu (l_1 - x_1 l) - A_\mu (l_1 - x_1 k) \right) - \right. \\ &\left. - \{T^{\mathcal{G}_1} T^{\bar{G}}\}_{\tilde{S} S} \left(A_\mu (-l_2 + x_2 k) - A_\mu (l_1 - x_1 k) \right) \right] - \{\mathcal{G}_1 \leftrightarrow \mathcal{G}_2\}, \end{aligned} \quad (4.77)$$

где $l = l_1 + l_2$; l_1, l_2 — импульсы промежуточного скаляра и глюона соответственно, $\mathcal{G}_2, A^\mu(p) = x_1 \frac{p^\mu}{p_1^2}$. В итоге

$$\begin{aligned}
\langle S' S | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle_*^{(r,g)} &= -2\delta^\perp (q - r_1 - r_2) g^4 \int_0^1 \frac{dx_1}{(x_1 x_2)_+} \int \frac{d^{D-2}p}{(2\pi)^{D-1}} \times \\
&\left[\frac{N_c}{2} \{ T^{\mathcal{G}_2} T^{\mathcal{G}_1} \}_{S' S} A_\mu(p) \left\{ A^\mu(p - x_1 q) - A^\mu(p - x_1 r_1) - \right. \right. \\
&- A^\mu(p - x_1 r_2) + A^\mu(p - x_2 q) - A^\mu(p - x_2 r_1) - A^\mu(p - x_2 r_2) \left. \right\} + \\
&+ \text{Tr} [T^{S'} T^{\mathcal{G}_1} T^S T^{\mathcal{G}_2}] \left\{ (A_\mu(p - x_2 r_1) - A_\mu(p + x_1 r_1)) \times \right. \\
&\left. \times (A^\mu(p + x_2 r_2) - A^\mu(p - x_1 r_2)) \right\} \left. \right] - \{ \mathcal{G}_1 \leftrightarrow \mathcal{G}_2 \}. \tag{4.78}
\end{aligned}$$

С учетом антисимметрии относительно замены реджеонов \mathcal{G}_1 и \mathcal{G}_2 , можно увидеть, что вклад цветовой структуры $\text{Tr} [T^{S'} T^{\mathcal{G}_1} T^S T^{\mathcal{G}_2}]$ исчезает. Далее, используя два базовых интеграла:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{dx_1}{(x_1 x_2)_+} \int \frac{d^{D-2}p}{(2\pi)^{D-1}} A_\mu(p) A^\mu(p - x_1 q) &= \\
= \frac{\Gamma(1 - \epsilon)}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{2\Gamma^2(1 + \epsilon)}{\epsilon\Gamma(1 + 2\epsilon)} (-q_\perp^2)^\epsilon \left[\psi(1) - \psi(2 + 2\epsilon) \right], \tag{4.79}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{dx_1}{(x_1 x_2)_+} \int \frac{d^{D-2}p}{(2\pi)^{D-1}} A_\mu(p) A^\mu(p - x_2 q) &= \\
= \frac{\Gamma(1 - \epsilon)}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{2\Gamma^2(1 + \epsilon)}{\epsilon\Gamma(1 + 2\epsilon)} (-q_\perp^2)^\epsilon \frac{1}{2\epsilon(1 + 2\epsilon)}, \tag{4.80}
\end{aligned}$$

получаем для вклада промежуточных скаляра и глюона:

$$\begin{aligned}
\langle S' S | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle_*^{(r,g)} &= \mathcal{N} T_{S' S}^R T_{\mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2}^R \left((-q_\perp^2)^\epsilon - (-r_{1\perp}^2)^\epsilon - (-r_{2\perp}^2)^\epsilon \right) \times \\
&\times \left(\frac{4}{1 + 2\epsilon} + 2\psi(2\epsilon) - 2\psi(1) \right).
\end{aligned}$$

Вклад от промежуточной фермионной пары выражается через эффективные вершины следующим образом:

$$\begin{aligned}
\langle S' S | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle_*^{(r,f)} &= \delta^\perp (q - r_1 - r_2) \times \\
&\times \sum_{\{Q_1 Q_2\}} \int \Gamma_{S' \{Q_1 Q_2\}}^{\mathcal{G}_2} \Gamma_{\{Q_1 Q_2\} S}^{\mathcal{G}_1} d\phi_{\{Q_1 Q_2\}} - \{ \mathcal{G}_1 \leftrightarrow \mathcal{G}_2 \}, \tag{4.81}
\end{aligned}$$

где мера $d\phi_{\{Q_1 Q_2\}}$ определена в (??) с $\kappa = \frac{1}{2}$, причем индекс * теперь мы не пишем, поскольку оператор \hat{U}_q не затрагивает фермионный вклад. После подстановки (??), (??) получаем

$$\begin{aligned}
\langle S' S | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle^{(r,f)} &= \delta^\perp(q - r_1 - r_2) \frac{(-1)^{I_s} n_M}{2} \int \frac{d^{D-2} l_{1\perp}}{(2\pi)^{D-1}} \int_0^1 \frac{dx_1}{2x_1 x_2} \times \\
&\times g^4 \text{Tr} \left\{ \frac{\not{l}_2}{2k^+} \left[T^{\mathcal{G}_1} T^S \left(\frac{(x_2 l_1 - x_1 l_2)_\perp}{(x_2 l_1 - x_1 l_2)_\perp^2} + \frac{(l_2 - x_2 k)_\perp}{(l_2 - x_2 k)_\perp^2} \right) + \right. \right. \\
&+ T^S T^{\mathcal{G}_1} \left. \left(\frac{(x_1 l_2 - x_2 l_1)_\perp}{(x_2 l_1 - x_1 l_2)_\perp^2} + \frac{(l_1 - x_1 k)_\perp}{(l_1 - x_1 k)_\perp^2} \right) \right] \times \\
&\times l_2 \frac{\not{l}_2}{2k^+} \left[T^{S'} T^{\mathcal{G}_2} \left(\frac{(x_2 l_1 - x_1 l_2)_\perp}{(x_2 l_1 - x_1 l_2)_\perp^2} + \frac{(l_2 - x_2 k')_\perp}{(l_2 - x_2 k')_\perp^2} \right) + \right. \\
&+ T^{\mathcal{G}_2} T^{S'} \left. \left(\frac{(x_1 l_2 - x_2 l_1)_\perp}{(x_2 l_1 - x_1 l_2)_\perp^2} + \frac{(l_1 - x_1 k')_\perp}{(l_1 - x_1 k')_\perp^2} \right) \right] l_1 \left. \right\} - \{ \mathcal{G}_1 \leftrightarrow \mathcal{G}_2 \}.
\end{aligned}$$

Дальнейшее интегрирование проводится по формулам (??), (??) и дает

$$\begin{aligned}
\langle S' S | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle^{(r,f)} &= (-1)^{I_s} n_M \mathcal{N} [T^{\mathcal{G}_2}, T^{\mathcal{G}_1}]_{S' S} \times \\
&\times \frac{1}{1+2\epsilon} \left((-r_{1\perp}^2)^\epsilon + (-r_{2\perp}^2)^\epsilon - (q_\perp^2)^\epsilon \right). \tag{4.82}
\end{aligned}$$

Полное выражение для импакт-фактора скаляра имеет вид

$$\begin{aligned}
\langle S' S | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle_* &= \mathcal{N} T_{S' S}^R T_{\mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2}^R \left[(-r_{1\perp}^2)^\epsilon \ln \frac{r_{1\perp}^2}{q_\perp^2} + (-r_{2\perp}^2)^\epsilon \ln \frac{r_{2\perp}^2}{q_\perp^2} + \right. \\
&+ (-q_\perp^2)^\epsilon \left(2\psi(2\epsilon) - 2\psi(1) + \frac{4}{1+2\epsilon} - \frac{n_M (-1)^{I_s}}{1+2\epsilon} \right) - \\
&- \left((-r_{1\perp}^2)^\epsilon + (-r_{2\perp}^2)^\epsilon \right) \left(\frac{1}{\epsilon} + \psi(1-\epsilon) - \psi(1) + 2\psi(1+2\epsilon) - \right. \tag{4.83} \\
&- 2\psi(1+\epsilon) + \frac{11+7\epsilon}{2(1+2\epsilon)(3+2\epsilon)} - n_M \frac{1+\epsilon}{(1+2\epsilon)(3+2\epsilon)} - \\
&\left. \left. - \frac{n_s}{2} \frac{1}{2(3+2\epsilon)(1+2\epsilon)} \right) \right].
\end{aligned}$$

Используя (??), (??) и (??), легко убедиться, что правая часть условия бутстрапа (??) полностью совпадает с выражением (??).

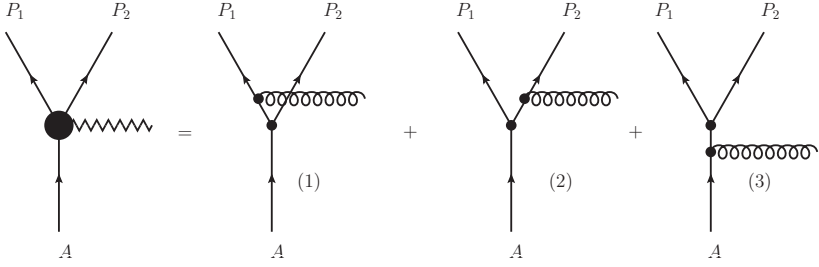


Рис. 7. Схематическое представление КМРК вершины расщепления частицы A : фермиона либо скаляра.

4.3 Условия бутстрапа в теориях с юкавовским взаимодействием общего вида

Продemonстрируем справедливость условий бутстрапа (??) для рассеяния фермиона либо скаляра с учетом юкавовского взаимодействия общего вида,

$$\mathcal{L}^{(Y)} = g(R_{ji}^r)_{c_j c_i}^{\kappa_r} \bar{\psi}_j^{c_j} [\gamma_5]_r \psi_i^{c_i} \phi_r^{\kappa_r} + h. c., \quad (4.84)$$

с различными представлениями цветовой группы для фермионных и бозонных полей разных ароматов. Здесь i, j, r — индексы ароматов, c_i, c_j, c_r , — цветовые индексы; $(R_{ji}^r)_{c_j c_i}^{\kappa_r}$ — матрица констант юкавовского взаимодействия. При фиксированных ароматах i, j и r матрица $(R_{ji}^r)_{c_j c_i}^{\kappa_r}$ представляет собой проектор произведения представлений цветовой группы для фермионов представлений на сопряженное представление для бозонов. Алгебра цветовой группы и калибровочная инвариантность накладывают очевидные ограничения на генераторы цветовой группы t_i^a для фермионов и \mathcal{T}_r^a для бозонов и матрицу юкавовских констант $(R_{ji}^r)_{c_j c_i}^{\kappa_r}$:

$$\begin{aligned} [t_i^a, t_i^b] &= if^{abc} t_i^c, \quad [\mathcal{T}_r^a, \mathcal{T}_r^b] = if^{abc} \mathcal{T}_r^c, \\ (t_f^a)_{c_f b} (R_{fi}^r)_{b c_i}^{\kappa_r} - (R_{fi}^r)_{c_f d}^{\kappa_r} (t_i^a)_{d c_i} &= (R_{fi}^r)_{c_f c_i}^\beta (\mathcal{T}_r^a)_{\beta \kappa_r}, \end{aligned} \quad (4.85)$$

причем по повторяющимся индексам ароматов сумма не подразумевается.

Взаимодействие (??) приводит к появлению условий бутстрапа для импакт-факторов расщепления скаляра на пару фермионов и фермиона на фермион и скаляр и влияет на условия бутстрапа для упругих импакт-факторов фермионов и скаляров. Доказательство первых двух условий

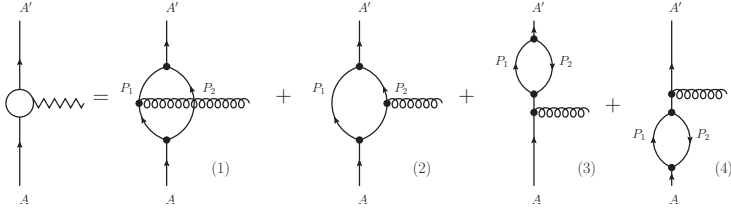


Рис. 8. Схематическое представление однопетлевой юкавовской поправки к МРК вершине рассеяния фермиона либо скаляра A . Диаграммы (3) и (4) учитывают либо перенормировку внешних линий (тогда их вклад в вершину берется с коэффициентом $\frac{1}{2}$), либо переход одного аромата в другой.

является тривиальным обобщением проведенного выше для СЯМ: для него достаточно использовать соотношения (??).

Рассмотрении условие (??) для рассеяния фермиона либо скаляра. Заметим, что юкавовское взаимодействие не меняет собственную функцию $\langle R_\omega(q) | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle$. Представим эффективную вершину расщепления с юкавовским взаимодействием в виде суммы трех членов (рис. ??):

$$\Gamma_{\{P_1 P_2\}A}^R = \Gamma_{\{P_1 P_2\}A}^{R(1)} + \Gamma_{\{P_1 P_2\}A}^{R(2)} + \Gamma_{\{P_1 P_2\}A}^{R(3)}. \quad (4.86)$$

Ниже мы единообразно рассматриваем два случая: либо A и A' — скаляры (тогда P_1 и P_2 фермионы), либо A и A' — фермионы (тогда P_1 — фермион, а P_2 — скаляр). Однопетлевые поправки от юкавовского взаимодействия (далее они выделены индексом Y) к вершине рассеяния фермиона либо скаляра представим в виде суммы вкладов (рис. ??):

$$\Gamma_{A'A}^{R(Y)} = \Gamma_{A'A}^{R(1)} + \Gamma_{A'A}^{R(2)} + \Gamma_{A'A}^{R(3)} + \Gamma_{A'A}^{R(4)}. \quad (4.87)$$

Для общности мы считаем здесь фермионы и скаляры массивными и поэтому учитываем собственно-энергетические вставки во внешние линии, которые отбрасываются при размерностной регуляризации для безмассовых частиц.

Поправки к импакт-фактору рассеяния частицы A даются суммой вкладов одночастичного ($J = \bar{A}$) и двухчастичного ($J = \{P_1 P_2\}$) проме-

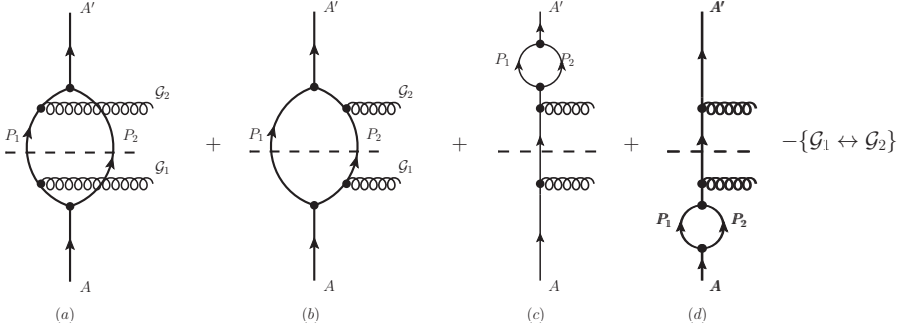


Рис. 9. Графическое представление вкладов в импакт-фактор (??)

жуточных состояний:

$$\begin{aligned}
 \langle A' A | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle^Y &= \delta^\perp(k - k' - r_1 - r_2) \int \frac{dk_J^2}{2\pi} \left[\int d\rho_1 \Gamma_{A'\bar{A}}^{\mathcal{G}_2(B)} \Gamma_{\bar{A}A}^{\mathcal{G}_1(Y)} + \right. \\
 &+ \left. \int d\rho_1 \Gamma_{A'\bar{A}}^{\mathcal{G}_2(Y)} \Gamma_{\bar{A}A}^{\mathcal{G}_1(B)} + \int d\rho_2 \Gamma_{A'\{P_1 P_2\}}^{\mathcal{G}_2} \Gamma_{\{P_1 P_2\}A}^{\mathcal{G}_1} \right] - \{\mathcal{G}_1 \leftrightarrow \mathcal{G}_2\}, \quad (4.88)
 \end{aligned}$$

где k и k' – импульсы частиц A и A' соответственно; $k'^+ = k^+$; k_J^2 – квадрат инвариантной массы струи J , а

$$d\rho_n = (2\pi)^D \delta^D(k_J - \sum_{i=1}^n l_i) \prod_{i=1}^n \frac{d^{D-1}l_i}{2l_i^0 (2\pi)^{D-1}}. \quad (4.89)$$

Во-первых, продемонстрируем, что вершинные поправки в (??) частично сокращают поправки от двухчастичного промежуточного состояния, в результате (??) переходит в сумму вкладов, изображенных в том же порядке на рис. ??:

$$\begin{aligned}
 \langle A' A | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle^Y &= \delta^\perp(k - k' - r_1 - r_2) \times \\
 &\times \int \frac{dk_J^2}{2\pi} \left(\int d\rho_2 \left[\Gamma_{A'\{P_1 P_2\}}^{\mathcal{G}_2(1)} \Gamma_{\{P_1 P_2\}A}^{\mathcal{G}_1(1)} + \Gamma_{A'\{P_1 P_2\}}^{\mathcal{G}_2(2)} \Gamma_{\{P_1 P_2\}A}^{\mathcal{G}_1(2)} \right] + \right. \\
 &+ \left. \int d\rho_1 \left[\Gamma_{A'\bar{A}}^{\mathcal{G}_2(3)} \Gamma_{\bar{A}A}^{\mathcal{G}_1(B)} + \Gamma_{A'\bar{A}}^{\mathcal{G}_2(B)} \Gamma_{\bar{A}A}^{\mathcal{G}_1(4)} \right] \right) - \{\mathcal{G}_1 \leftrightarrow \mathcal{G}_2\}. \quad (4.90)
 \end{aligned}$$

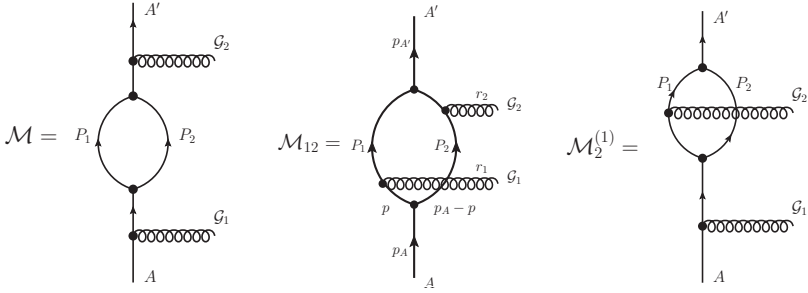


Рис. 10. Амплитуды \mathcal{M} , \mathcal{M}_{12} и $\mathcal{M}_2^{(1)}$, чьи скачки по k_J^2 связаны с поправками к импакт-фактору.

Данное сокращение является следствием серии соотношений:

$$\int \frac{dk_J^2}{2\pi} \left(\int d\rho_2 \Gamma_{A'\{P_1 P_2\}}^{\mathcal{G}_2(3)} \Gamma_{\{P_1 P_2\}A}^{\mathcal{G}_1(3)} + \int d\rho_1 \Gamma_{A'\bar{A}}^{\mathcal{G}_2(4)} \Gamma_{\bar{A}A}^{\mathcal{G}_1(B)} + \int d\rho_1 \Gamma_{A'\bar{A}}^{\mathcal{G}_2(B)} \Gamma_{\bar{A}A}^{\mathcal{G}_1(3)} \right) = 0, \quad (4.91)$$

$$\int \frac{dk_J^2}{2\pi} d\rho_2 \left(\Gamma_{A'\{P_1 P_2\}}^{\mathcal{G}_2(1)} \Gamma_{\{P_1 P_2\}A}^{\mathcal{G}_1(2)} + \Gamma_{A'\{P_1 P_2\}}^{\mathcal{G}_2(2)} \Gamma_{\{P_1 P_2\}A}^{\mathcal{G}_1(1)} \right) - \{\mathcal{G}_1 \leftrightarrow \mathcal{G}_2\} = 0, \quad (4.92)$$

$$\int \frac{dk_J^2}{2\pi} \left(\int d\rho_2 \Gamma_{A'\{P_1 P_2\}}^{\mathcal{G}_2(1)} \Gamma_{\{P_1 P_2\}A}^{\mathcal{G}_1(3)} + \int d\rho_1 \Gamma_{A'\bar{A}}^{\mathcal{G}_2(1)} \Gamma_{\bar{A}A}^{\mathcal{G}_1(B)} \right) = 0, \quad (4.93)$$

$$\int \frac{dk_J^2}{2\pi} \left(\int d\rho_2 \Gamma_{A'\{P_1 P_2\}}^{\mathcal{G}_2(2)} \Gamma_{\{P_1 P_2\}A}^{\mathcal{G}_1(3)} + \int d\rho_1 \Gamma_{A'\bar{A}}^{\mathcal{G}_2(2)} \Gamma_{\bar{A}A}^{\mathcal{G}_1(B)} \right) = 0.$$

Соотношение (??) следует из аналитических свойств изображенной на рис. ?? амплитуды

$$\mathcal{M}(k_J^2) = \frac{G(k_J^2)}{(k_J^2 - m_A^2 + i0)(k_J^2 - m_{A'}^2 + i0)},$$

где $G(k_J^2)$ имеет разрез вдоль вещественной оси при $k_J^2 \geq M^2 > m_A^2, m_{A'}^2$, (при условии, что $m_A^2 \neq m_{A'}^2$). Из соотношения унитарности имеем:

$$\int d\rho_2 \Gamma_{A'\{P_1 P_2\}}^{\mathcal{G}_2(3)} \Gamma_{\{P_1 P_2\}A}^{\mathcal{G}_1(3)} = 2 \frac{\Im G(k_J^2) \theta(k_J^2 - M^2)}{(k_J^2 - m_A^2)(k_J^2 - m_{A'}^2)},$$

$$\int d\rho_1 \Gamma_{A'\bar{A}}^{\mathcal{G}_2(4)} \Gamma_{\bar{A}A}^{\mathcal{G}_1(B)} = -2\pi\delta(k_J^2 - m_A^2) \frac{G(m_A^2)}{m_A^2 - m_{A'}^2},$$

$$\int d\rho_1 \Gamma_{A'\bar{A}}^{\mathcal{G}_2(B)} \Gamma_{\bar{A}A}^{\mathcal{G}_1(3)} = -2\pi\delta(k_J^2 - m_{A'}^2) \frac{G(m_{A'}^2)}{m_{A'}^2 - m_A^2}.$$

В итоге сумма всех трех вкладов дает

$$\int \frac{dk_J^2}{2\pi} \left(\int d\rho_2 \Gamma_{A'\{P_1 P_2\}}^{\mathcal{G}_2(3)} \Gamma_{\{P_1 P_2\}A}^{\mathcal{G}_1(3)} + \int d\rho_1 \left(\Gamma_{A'\bar{A}}^{\mathcal{G}_2(4)} \Gamma_{\bar{A}A}^{\mathcal{G}_1(B)} + \Gamma_{A'\bar{A}}^{\mathcal{G}_2(B)} \Gamma_{\bar{A}A}^{\mathcal{G}_1(3)} \right) \right) =$$

$$= 2 \int_0^\infty \frac{dk_J^2}{2\pi} \Im \mathcal{M}(k_J^2) = -i \oint_C \frac{dk_J^2}{2\pi} \mathcal{M}(k_J^2) = 0, \quad (4.94)$$

где контур C охватывает особенности $\mathcal{M}(k_J^2)$, лежащие на правой полуоси. Интеграл равен нулю, так как других особенностей у $\mathcal{M}(k_J^2)$ нет, и в размерностной регуляризации мы имеем дело только со сходящимися интегралами, так что контур C можно стянуть в точку.

Возможен также случай равенства масс $m_A^2 = m_{A'}^2 = m^2$ (мы полагаем тогда, что частицы A и A' имеют один и тот же аромат), т.е. случай полюса второго порядка:

$$\mathcal{M} = \frac{G(k_J^2)}{(k_J^2 - m^2 + i0)^2}.$$

Тогда, учитывая, что вклады в эффективную вершину от диаграмм перенормировки внешних линий (вклады (3) и (4) рис. ??) берутся с коэффициентом $\frac{1}{2}$, имеем

$$\int d\rho_2 \Gamma_{A'\{P_1 P_2\}}^{\mathcal{G}_2(3)} \Gamma_{\{P_1 P_2\}A}^{\mathcal{G}_1(3)} = 2 \frac{\Im G(k_J^2) \theta(k_J^2 - M^2)}{(k_J^2 - m^2)^2} =$$

$$= 2 \frac{\partial}{\partial m^2} \frac{\Im G(k_J^2) \theta(k_J^2 - M^2)}{k_J^2 - m^2},$$

$$\int d\rho_1 \Gamma_{A'\bar{A}}^{\mathcal{G}_2(4)} \Gamma_{\bar{A}A}^{\mathcal{G}_1(B)} = \int d\rho_1 \Gamma_{A'\bar{A}}^{\mathcal{G}_2(B)} \Gamma_{\bar{A}A}^{\mathcal{G}_1(3)} = -\pi\delta(k_J^2 - m^2) \frac{\partial G(m^2)}{\partial m^2},$$

и опять сумма трех вкладов сводится к контурному интегралу, равному нулю.

Второе соотношение (??) выполняется благодаря равенству скачков амплитуды \mathcal{M}_{12} (ниже мы обозначили $s = (p_A - r_1)^2$, $u = (p_A - r_2)^2$):

$$\text{disc}_s \mathcal{M}_{12}(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2) = \text{disc}_u \mathcal{M}_{12}(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2), \quad (4.95)$$

в котором легко убедиться после замены переменной интегрирования p на $p - r_1$ (см. рис. ??) в выражении для амплитуды \mathcal{M}_{12} , и соотношений

$$i \int \frac{dk_J^2}{2\pi} d\rho_2 \Gamma_{A'\{P_1 P_2\}}^{\mathcal{G}_2(1)} \Gamma_{\{P_1 P_2\}A}^{\mathcal{G}_1(2)} = \int \frac{dk_J^2}{2\pi} \text{disc}_s \mathcal{M}_{21}(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2), \quad (4.96)$$

$$i \int \frac{dk_J^2}{2\pi} d\rho_2 \Gamma_{A'\{P_1 P_2\}}^{\mathcal{G}_2(2)} \Gamma_{\{P_1 P_2\}A}^{\mathcal{G}_1(1)} = \int \frac{dk_J^2}{2\pi} \text{disc}_s \mathcal{M}_{12}(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2). \quad (4.97)$$

При проведении антисимметризации по реджеонам $\mathcal{G}_1 \leftrightarrow \mathcal{G}_2$ в (??) скачки амплитуды из правой части (??) и (??) переходят друг в друга: $\text{disc}_s \mathcal{M}_{21}(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2) \leftrightarrow \text{disc}_u \mathcal{M}_{12}(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$. Из равенства скачков амплитуды следует полное сокращение в (??).

Первое из соотношений (??) вытекает из аналитических свойств амплитуды $\mathcal{M}_2^{(1)}$ (см. рис. ??):

$$\mathcal{M}_2^{(1)}(k_J^2) = \frac{g(k_J^2)}{(k_J^2 - m_A^2 + i0)},$$

где $g(k_J^2)$ имеет разрез вдоль вещественной оси при $k_J^2 \geq M^2 > m_A^2$. При этом

$$\begin{aligned} \int d\rho_2 \Gamma_{A'\{P_1 P_2\}}^{\mathcal{G}_2(1)} \Gamma_{\{P_1 P_2\}A}^{\mathcal{G}_1(3)} &= 2 \frac{\Im g(k_J^2) \theta(k_J^2 - M^2)}{k_J^2 - m_A^2}, \\ \int d\rho_1 \Gamma_{A'\bar{A}}^{\mathcal{G}_2(1)} \Gamma_{\bar{A}A}^{\mathcal{G}_1(B)} &= -2\pi \delta(k_J^2 - m_A^2) g(m_A^2). \end{aligned}$$

и сумма двух вкладов в импакт-фактор

$$\begin{aligned} \int \frac{dk_J^2}{2\pi} \left[\int d\rho_2 \Gamma_{A'\{P_1 P_2\}}^{\mathcal{G}_2(1)} \Gamma_{\{P_1 P_2\}A}^{\mathcal{G}_1(3)} + \int d\rho_1 \Gamma_{A'\bar{A}}^{\mathcal{G}_2(1)} \Gamma_{\bar{A}A}^{\mathcal{G}_1(B)} \right] = \\ = \int dk_J^2 \Im \mathcal{M}_2^{(1)} = 0 \end{aligned} \quad (4.98)$$

по той же причине, что и в (??). Второе соотношение в (??) доказывается аналогично.

Теперь, после упрощения юкавовских поправок в импакт-фактор до выражения (??), покажем, как можно провести доказательство условия бутстрапа для данного типа поправок:

$$\begin{aligned} \int \frac{dk_J^2}{2\pi} \left(\int d\rho_1 \left[\Gamma_{A'\bar{A}}^{\mathcal{G}_2(3)} \Gamma_{\bar{A}A}^{\mathcal{G}_1(B)} + \Gamma_{A'\bar{A}}^{\mathcal{G}_2(B)} \Gamma_{\bar{A}A}^{\mathcal{G}_1(4)} \right] + \right. \\ \left. + \int d\rho_2 \left[\Gamma_{A'\{P_1 P_2\}}^{\mathcal{G}_2(1)} \Gamma_{\{P_1 P_2\}A}^{\mathcal{G}_1(1)} + \Gamma_{A'\{P_1 P_2\}}^{\mathcal{G}_2(2)} \Gamma_{\{P_1 P_2\}A}^{\mathcal{G}_1(2)} \right] \right) - \\ - \{\mathcal{G}_1 \leftrightarrow \mathcal{G}_2\} = g T_{\mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2}^R \Gamma_{A'A}^{R(Y)}. \end{aligned} \quad (4.99)$$

Здесь мы учли, что $\langle R_\omega(q) | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle$ не имеет поправок юкавовского типа.

Равенство (??) следует из серии соотношений:

$$\int \frac{dk_J^2}{2\pi} d\rho_2 \Gamma_{A'\{P_1 P_2\}}^{\mathcal{G}_2(1)} \Gamma_{\{P_1 P_2\}A}^{\mathcal{G}_1(1)} - \{\mathcal{G}_1 \leftrightarrow \mathcal{G}_2\} = g T_{\mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2}^R \Gamma_{A'A}^{R(1)}, \quad (4.100)$$

$$\int \frac{dk_J^2}{2\pi} d\rho_2 \Gamma_{A'\{P_1 P_2\}}^{\mathcal{G}_2(2)} \Gamma_{\{P_1 P_2\}A}^{\mathcal{G}_1(2)} - \{\mathcal{G}_1 \leftrightarrow \mathcal{G}_2\} = g T_{\mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2}^R \Gamma_{A'A}^{R(2)}, \quad (4.101)$$

$$\int \frac{dk_J^2}{2\pi} d\rho_1 \Gamma_{A'A}^{\mathcal{G}_2(3)} \Gamma_{\dot{A}\dot{A}}^{\mathcal{G}_1(B)} - \{\mathcal{G}_1 \leftrightarrow \mathcal{G}_2\} = g T_{\mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2}^R \Gamma_{A'A}^{R(3)}, \quad (4.102)$$

$$\int \frac{dk_J^2}{2\pi} d\rho_1 \Gamma_{A'A}^{\mathcal{G}_2(B)} \Gamma_{\dot{A}\dot{A}}^{\mathcal{G}_1(4)} - \{\mathcal{G}_1 \leftrightarrow \mathcal{G}_2\} = g T_{\mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2}^R \Gamma_{A'A}^{R(4)}. \quad (4.103)$$

Для доказательства первого из них заметим, что правую часть части можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \int \frac{dk_J^2}{2\pi} d\rho_2 \Gamma_{A'\{P_1 P_2\}}^{\mathcal{G}_2(1)} \Gamma_{\{P_1 P_2\}A}^{\mathcal{G}_1(1)} - \{\mathcal{G}_1 \leftrightarrow \mathcal{G}_2\} = T_{\mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2}^R C_{A'A}^R \int \frac{d^{D-2} p_\perp}{(2\pi)^{D-1}} \times \\ & \times \int_0^1 \frac{dx}{2x(1-x)} \frac{F(k, k', p)}{(2k^+)^2 [(p-k')^2 - m_1^2] [(p-k)^2 - m_1^2]} \Big|_{p^2=m_2^2, p^+=xk^+}. \end{aligned} \quad (4.104)$$

где $C_{A'A}^R$ — цветовой множитель, имеющий ту же структуру, что и $\Gamma_{A'A}^{R(1)}$: см. рис. ???. Такая запись возможна благодаря тому, что члены в правой части (??) отличаются только цветовой структурой, поскольку в качестве реджеона здесь выступает глюон с вектором поляризации $-n_2/(2k^+)$.

Далее, запишем вклад диаграммы, отвечающей $\Gamma_{A'A}^{R(1)}$:

$$\begin{aligned} \Gamma_{A'A}^{R(1)} &= C_{A'A}^R \int \frac{dp^+ dp^- d^{D-2} p_\perp}{(2\pi)^D} \frac{G(k, k', p)}{2k^+ [p^2 - m_2^2] [(p-k')^2 - m_1^2 + i0] [(p-k)^2 - m_1^2 + i0]} = \\ &= C_{A'A}^R \int \frac{d^{D-2} p_\perp}{(2\pi)^D} \int_0^{k^+} \frac{dp^+}{2p^+} \frac{(-2\pi i) G(k, k', p)}{2k^+ [(p-k')^2 - m_1^2] [(p-k)^2 - m_1^2]} \Big|_{p^2=m_2^2} = \\ &= C_{A'A}^R \int \frac{d^{D-2} p_\perp}{(2\pi)^{D-1}} \int_0^1 \frac{dx_1}{2x_1} \frac{(-i) G(k, k', p)}{2k^+ [(p-k')^2 - m_1^2] [(p-k)^2 - m_1^2]} \Big|_{p^2=m_2^2, p^+=x_1 k^+}, \end{aligned} \quad (4.105)$$

где функция $G(k, k', p)$ связана с $F(k, k', p)$ соотношением

$$F(k, k', p) = (-ig) 2k^+ (1-x_1) G(k, k', p). \quad (4.106)$$

Эту связь легко найти, если учесть, что реджеонные импульсы имеют преимущественные поперечные компоненты, а также то, что вершины, к которым присоединяются реджеоны, сворачиваются по лоренцевским индексам с вектором n_2 . Второе соотношение (??) доказывается полностью аналогично.

Далее, соотношения (??), (??) непосредственно проверяются из явного вида вершин с помощью элементарной цветовой алгебры.

Таким образом, из (??)–(??) и (??) вытекает справедливость условия бутапра для рассеяния фермиона либо скаляра в секторе юкавовских поправок:

$$\begin{aligned} \langle A' A | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle^Y &= \delta^\perp(k - k' - r_1 - r_2) g T_{\mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2}^R \Gamma_{A' A}^{R(Y)}(q) = \\ &= g \Gamma_{A' A}^{R(Y)}(q) \langle R_\omega(q) | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle^{(B)}. \end{aligned} \quad (4.107)$$

4.4 Условие бутапра для рождения глюона в центральной области

Условие бутапра (??) для рождения глюона имеет вид [?] (рис. ??):

$$\langle GR_1 | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle + g q_{1\perp}^2 \langle R_\omega(q_1) | \widehat{\mathcal{G}} | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle = g \gamma_{R_1 R_2}^G \langle R_\omega(q_2) | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle, \quad (4.108)$$

где $\langle GR_1 | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle$ — импакт фактор перехода реджеона R_1 с импульсом q_1 в глюон G с импульсом $k = q_1 - q_2$, $\widehat{\mathcal{G}}$ — оператор рождения глюона G и $\gamma_{R_1 R_2}^G$ — реджеон-реджеон-глюонная вершина.

Определение импакт-фактора через эффективные реджевские вершины можно найти в работе [?]. Вклад скаляров представим в виде:

$$\langle GR_1 | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle^{(s)} = \langle GR_1 | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle^{(s,v)} + \langle GR_1 | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle^{(s,r)}, \quad (4.109)$$

где $\langle GR_1 | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle^{(s,v)}$ и $\langle GR_1 | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle^{(s,r)}$ — виртуальная и реальная части.

Виртуальная часть имеет вид

$$\begin{aligned} \langle GR_1 | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle^{(s,v)} &\equiv \delta^\perp(q_1 - k - r_1 - r_2) \times \\ &\times \sum_{G'} \left[\gamma_{R_1 \mathcal{G}_1}^{G'(C)} \Gamma_{G G'}^{\mathcal{G}_2(B)} + \gamma_{R_1 \mathcal{G}_1}^{G'(B)} \Gamma_{G G'}^{\mathcal{G}_2(C)} \right] - \{ \mathcal{G}_1 \leftrightarrow \mathcal{G}_2 \}. \end{aligned} \quad (4.110)$$

Используя явные выражения для борновских вершин (??) и (??), а также для поправок (??) и (??) к ним, нетрудно получить

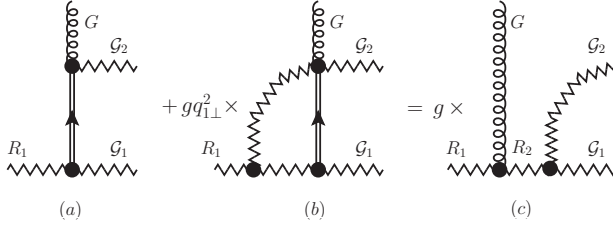


Рис. 11. Схематическое представление условия бутстрапа (??): (a) — импакт-фактор рождения глюона, (b) — матричный элемент оператора рождения глюона, (c) — правая часть условия бутстрапа, представляющая собой свертку эффективной вершины и собственной функции ядра БФКЛ.

$$\begin{aligned}
 \langle GR_1 | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle^{(s, v)} &= \mathcal{S}_\mu T_{R_1 \mathcal{G}_1}^{G'} T_{\mathcal{G}_2 G}^{G'} \times \\
 &\times \left\{ 2(-r_{2\perp}^2)^\epsilon \left(\frac{(q_1, r_2)_\perp}{q_{1\perp}^2} - \frac{(q_1 - r_1, r_2)_\perp}{(q_1 - r_1)_\perp^2} \right) \frac{r_{2\perp}^\mu}{r_{2\perp}^2} + V_s^\mu(q_1, r_1) + \right. \\
 &+ \frac{1}{2\epsilon} \left((1 - \epsilon)(-r_{2\perp}^2)^\epsilon + (1 + \epsilon)(-q_{1\perp}^2)^\epsilon - (1 + \epsilon)(-r_{1\perp}^2)^\epsilon \right) \times \\
 &\times \left. \left(\frac{q_{1\perp}^\mu}{q_{1\perp}^2} - \frac{(q_1 - r_1)_\perp^\mu}{(q_1 - r_1)_\perp^2} \right) \right\} - \{ \mathcal{G}_1 \leftrightarrow \mathcal{G}_2 \}, \quad (4.111)
 \end{aligned}$$

где функция $V_s^\mu(q_1, r_1)$ определена в (??), а

$$\mathcal{S}_\mu = 2q_{1\perp}^2 \delta^\perp(q_1 - k - r_1 - r_2) n_s g^2 \bar{g}^2 \frac{\Gamma^2(1 + \epsilon)}{\Gamma(4 + 2\epsilon)} e_{\perp\mu}^*(k), \quad (4.112)$$

e^μ — вектор поляризации глюона G .

Перейдем к реальной части:

$$\begin{aligned}
 \langle GR_1 | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle^{(s, r)} &= \delta^\perp(q_1 - k - r_1 - r_2) \times \\
 &\times \sum_{S_1 S_2} \int \left[\gamma_{R_1 \mathcal{G}_1}^{\{S_1 S_2\}} \Gamma_{G \{S_1 S_2\}}^{\mathcal{G}_2} - \gamma_{R_1 \mathcal{G}_2}^{\{S_1 S_2\}} \Gamma_{G \{S_1 S_2\}}^{\mathcal{G}_1} \right] d\phi_{\{S_1 S_2\}}. \quad (4.113)
 \end{aligned}$$

Импульсы скаляров $S_{1,2}$ обозначим $l_{1,2}$, см. (??). Интегрирование в (??) проводится с мерой (??) при $\kappa = \frac{1}{2}$. Используя явный вид вершин (??) и

(??), соотношения (??) и (??), а также симметрию меры интегрирования (??) относительно замены $l_1 \leftrightarrow l_2$ получаем:

$$\begin{aligned}
\langle GR_1 | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle^{(s,r)} &= -\delta^\perp(q_1 - k - r_1 - r_2) n_s g^2 \bar{g}^2 e_{\perp\mu}^* \int_0^1 \frac{dx_1}{x_1 x_2} \int \bar{d}l_1 \times \\
&\times \left\{ T_{R_1 \mathcal{G}_1}^{G'} T_{\mathcal{G}_2 G}^{G'} b(q_1; l_1, l_2) \left[M^\mu(l_1, l_2, k; x_1) - M^\mu(l_1, l_2, l; x_1) \right] + \right. \\
&+ \frac{1}{N_c} \text{Tr}[T^{\mathcal{G}_2} T^G T^{\mathcal{G}_1} T^{R_1}] b_s(q_1; l_1, l_2) \left[M^\mu(l_1, l_2, k; x_1) + \right. \\
&\left. \left. + M^\mu(l_2, l_1, k; x_2) \right] \right\} \Bigg|_{l=l_1+l_2=q_1-r_1} - \{ \mathcal{G}_1 \leftrightarrow \mathcal{G}_2 \},
\end{aligned} \tag{4.114}$$

где $\bar{d}l_1 = \frac{d^{D-2} l_1}{\pi^{1+\epsilon} \Gamma(1-\epsilon)}$.

Нетрудно показать, что коэффициент при симметричной цветовой структуре $\text{Tr}[T^{\mathcal{G}_2} T^G T^{\mathcal{G}_1} T^{R_1}]$ равен нулю. Действительно, мы можем заменить под интегралом $\left[M^\mu(l_1, l_2, k; x_1) + M^\mu(l_2, l_1, k; x_2) \right]$ на $M^\mu(l_1, l_2, k; x_1)$. Далее, сделав замену переменной интегрирования l_1 на $l_1 - x_1 k$, получаем, что первое слагаемое из представления (??) для $b_s(q_1; l_1, l_2)$ дает не зависящие от r_1 вклады, а второе — симметрично по замене $r_1 \leftrightarrow r_2$ (при одновременной замене переменной интегрирования $x_1 \leftrightarrow x_2$). В обоих случаях за счет антисимметризации получаем ноль.

Таким образом

$$\begin{aligned}
\langle GR_1 | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle^{(s,r)} &= -\delta^\perp(q_1 - k - r_1 - r_2) n_s g^2 \bar{g}^2 e_{\perp\mu}^* q_{1\perp}^2 \left[T_{R_1 \mathcal{G}_1}^{G'} T_{\mathcal{G}_2 G}^{G'} \times \right. \\
&\times \sum_{i=1}^3 \left(I_i^\mu(k, l; q_1) - I_i^\mu(k, l; l) - I_i^\mu(l, l; q_1) + I_i^\mu(l, l; l) \right) \Bigg|_{l=q_1-r_1} - \\
&- \{ \mathcal{G}_1 \leftrightarrow \mathcal{G}_2 \},
\end{aligned} \tag{4.115}$$

где

$$I_1^\mu(k, l; q_1) = 2 \int_0^1 dx_1 \int \bar{d}l_1 \frac{x_1 x_2 (x_2 - x_1) (l_1 - x_1 k)_\perp^\mu}{(l_1 - x_1 k)_\perp^2 [(l_1 - x_1 q_1)_\perp^2 + x_1 x_2 q_{1\perp}^2]}, \tag{4.116}$$

$$I_2^\mu(k, l; q_1) = 4 \int_0^1 dx_1 x_1 x_2 \int \bar{d}l_1 \frac{(l_1 - x_1 k)_\perp^\mu (q_1, l_1 - x_1 l)_\perp}{(l_1 - x_1 k)_\perp^2 (l_1 - x_1 l)_\perp^2 q_{1\perp}^2}, \tag{4.117}$$

$$I_3^\mu(k, l; q_1) = \int_0^1 dx_1 \int d\bar{l}_1 \frac{(-4)x_1 x_2 (l_1 - x_1 k)_\perp^\mu (q_1, l_1 - x_1 q_1)_\perp}{(l_1 - x_1 k)_\perp^2 [(l_1 - x_1 q_1)_\perp^2 + x_1 x_2 q_{1\perp}^2] q_{1\perp}^2}. \quad (4.118)$$

Метод вычисления интегралов первого типа рассмотрен в работе [?] (Appendix I), см. также [?] (Приложение В). Результат интегрирования

$$I_1^\mu(k, l; q_1) = \frac{2\Gamma^2(1 + \epsilon)}{\Gamma(4 + 2\epsilon)} \times \left(\frac{g(q_1, q_1 - k)}{[(q_1 - k)_\perp^2 - q_{1\perp}^2]^2} - \frac{2}{\epsilon} \frac{f(q_1, q_1 - k)}{[(q_1 - k)_\perp^2 - q_{1\perp}^2]^3} \right) (q_1 - k)_\perp^\mu, \quad (4.119)$$

где функции $f(q_1, q_1 - k)$ и $g(q_1, q_1 - k)$ определены соответственно в (??) и (??).

Интегралы второго типа вычисляются элементарно:

$$I_2^\mu(k, l; q_1) = \frac{2\Gamma^2(1 + \epsilon)}{\Gamma(4 + 2\epsilon)} \times \frac{[-(k - l)_\perp^2]^\epsilon}{\epsilon} \left(\frac{q_{1\perp}^\mu}{q_{1\perp}^2} + 2\epsilon \frac{(k - l)_\perp^\mu (k - l, q_1)_\perp}{q_{1\perp}^2 (k - l)_\perp^2} \right). \quad (4.120)$$

Третий интеграл вычисляется аналогично первому. В результате

$$I_3^\mu(k, l; q_1) = \frac{2\Gamma^2(1 + \epsilon)}{\Gamma(4 + 2\epsilon)} \times \left(\frac{g(q_1, q_1 - k)}{[(q_1 - k)_\perp^2 - q_{1\perp}^2]^2} q_{1\perp}^\mu - \frac{\Phi_1(q_1, q_1 - k)}{\epsilon [(q_1 - k)_\perp^2 - q_{1\perp}^2]} \frac{q_{1\perp}^\mu}{q_{1\perp}^2} + \frac{2(q_1 - k, q_1)_\perp}{\epsilon q_{1\perp}^2} \frac{f(q_1, q_1 - k)}{[(q_1 - k)_\perp^2 - q_{1\perp}^2]^3} (q_1 - k)_\perp^\mu \right), \quad (4.121)$$

где функция $\Phi_1(q_1, q_1 - k)$ определяется из (??).

Подставляя (??), (??), (??) в (??), легко убедиться, что все функции

(??)–(??) собираются в вершинные поправки (??):

$$\begin{aligned}
\langle GR_1 | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle^{(s,r)} &= \mathcal{S}_\mu T_{R_1 \mathcal{G}_1}^{G'} T_{\mathcal{G}_2 G}^{G'} \left\{ V_s^\mu(q_1, q_1 - k) - V_s^\mu(q_1 - r_1, r_2) - \right. \\
&- 2(-r_{2\perp}^2)^\epsilon \left(\frac{(q_1, r_2)_\perp}{q_{1\perp}^2} - \frac{(q_1 - r_1, r_2)_\perp}{(q_1 - r_1)_\perp^2} \right) \frac{r_{2\perp}^\mu}{r_{2\perp}^2} - V_s^\mu(q_1, r_1) - \\
&- \left. \frac{(-r_{2\perp}^2)^\epsilon}{\epsilon} \left(\frac{q_{1\perp}^\mu}{q_{1\perp}^2} - \frac{(q_1 - r_1)_\perp^\mu}{(q_1 - r_1)_\perp^2} \right) \right\} - \{ \mathcal{G}_1 \leftrightarrow \mathcal{G}_2 \}.
\end{aligned} \tag{4.122}$$

Сумма виртуальных (??) и реальных (??) поправок дает

$$\begin{aligned}
\langle GR_1 | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle^{(s)} &= \mathcal{S}_\mu T_{R_1 \mathcal{G}_1}^{G'} T_{\mathcal{G}_2 G}^{G'} \left\{ V_s^\mu(q_1, q_1 - k) - V_s^\mu(q_1 - r_1, r_2) + \right. \\
&+ \frac{1 + \epsilon}{2\epsilon} \left(\frac{q_{1\perp}^\mu}{q_{1\perp}^2} - \frac{(q_1 - r_1)_\perp^\mu}{(q_1 - r_1)_\perp^2} \right) \left((-q_{1\perp}^2)^\epsilon - (-r_{1\perp}^2)^\epsilon - (-r_{2\perp}^2)^\epsilon \right) \left. \right\} - \\
&- \{ \mathcal{G}_1 \leftrightarrow \mathcal{G}_2 \}.
\end{aligned} \tag{4.123}$$

Отметим, что механизм сокращения вершинной функции $V_s^\mu(q_1, r_1)$ и членов с $\frac{r_{2\perp}^\mu}{r_{2\perp}^2}$ в сумме виртуальных и реальных поправок в точности аналогичен сокращению для вклада фермионов в импакт-фактор [?]. Также подобно фермионному вкладу в (??) присутствуют только древесные цветовые структуры, а вклады симметричной цветовой структуры сокращаются.

Как и для вклада фермионов [?], для скалярных частиц матричный элемент оператора рождения глюона имеет только виртуальные поправки. Они вычисляются без труда с помощью (??) и (??):

$$\begin{aligned}
gq_{1\perp}^2 \langle R_\omega(q_1) | \hat{\mathcal{G}} | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle^{(s)} &= \mathcal{S}_\mu T_{R_1 \mathcal{G}_1}^{G'} T_{\mathcal{G}_2 G}^{G'} \left\{ V_s^\mu(q_1 - r_1, r_2) + \right. \\
&+ \frac{1 + \epsilon}{2\epsilon} \left(\frac{(q_1 - r_1)_\perp^\mu}{(q_1 - r_1)_\perp^2} - \frac{k_\perp^\mu}{k_\perp^2} \right) \left((-q_{1\perp}^2)^\epsilon - (-r_{1\perp}^2)^\epsilon - (-r_{2\perp}^2)^\epsilon \right) \left. \right\} - \\
&- \{ \mathcal{G}_1 \leftrightarrow \mathcal{G}_2 \},
\end{aligned} \tag{4.124}$$

где коэффициент \mathcal{S}_μ определен в (??), а вершинная функция V_s^μ — в (??).

Складывая импакт-фактор (??) с матричным элементом оператора рождения глюона (??), получаем для левой части условия бутстрапа

$$\begin{aligned}
& \langle GR_1 | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle^{(s)} + gq_{1\perp}^2 \langle R_\omega(q_1) | \hat{\mathcal{G}} | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle^{(s)} = \\
& = \mathcal{S}_\mu T_{R_1 \mathcal{G}_1}^{G'} T_{\mathcal{G}_2 G}^{G'} \left\{ V_s^\mu(q_1, q_1 - k) + \frac{1 + \epsilon}{2\epsilon} \left(\frac{q_{1\perp}^\mu}{q_{1\perp}^2} - \frac{k_\perp^\mu}{k_\perp^2} \right) \times \right. \\
& \left. \times \left((-q_{1\perp}^2)^\epsilon - (-r_{1\perp}^2)^\epsilon - (-r_{2\perp}^2)^\epsilon \right) \right\} - \{ \mathcal{G}_1 \leftrightarrow \mathcal{G}_2 \}. \tag{4.125}
\end{aligned}$$

Используя поправки (??) для вершины $\gamma_{R_1 R_2}^G$ и результат (??) для собственной функции ядра БФКЛ в присоединенном представлении, несложно получить выражение для правой части условия бутстрапа (??):

$$\begin{aligned}
& g \left[\gamma_{R_1 R_2}^G \langle R_\omega(q_2) | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle \right]^{(s)} = \mathcal{S}_\mu T_{G R_1}^{G'} T_{\mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2}^{G'} \left\{ V_s^\mu(q_1, q_1 - k) + \right. \\
& \left. + \frac{1 + \epsilon}{2\epsilon} \left(\frac{q_{1\perp}^\mu}{q_{1\perp}^2} - \frac{k_\perp^\mu}{k_\perp^2} \right) \left((-q_{1\perp}^2)^\epsilon - (-r_{1\perp}^2)^\epsilon - (-r_{2\perp}^2)^\epsilon \right) \right\}. \tag{4.126}
\end{aligned}$$

Легко видеть, что правые части (??) и (??) равны. Это значит, что для вкладов скаляров условие бутстрапа (??) выполняется в случае произвольного цветового представления в t -канале.

5 Заключение

В теории $\mathcal{N} = 4$ СЯМ для произвольной размерности D в следующем за борновским приближении был найден вклад скаляров в импакт-фактор рождения глюона в мультиреджевской кинематике, а также в собственную функцию ядра БФКЛ для присоединенного представления. С этой целью мы прежде вычислили в СЯМ все необходимые эффективные борновские вершины и однопетлевые поправки к ним как в МРК, так и КМРК. Вычисление всех импакт-факторов, возникающих в СЯМ, позволило провести проверку всех условий бутстрапа в мультиреджевской кинематике. Для неупругого условия бутстрапа аналогичная проверка была ранее проведена в КХД в фермионном [?] и глюонном [?] секторах. В настоящей работе мы также проверили справедливость всех возможных типов условий бутстрапа для квазимультiredжевской кинематики. В КХД такая проверка для глюонных и фермионных вкладов в КМРК

была осуществлена в [?]. Проверка всех перечисленных условий проводилась как для суперсимметричных теорий Янга–Миллса, так и для теорий с достаточно общим видом юкавовского взаимодействия двух фермионов и скаляра. Таким образом, на основе общей схемы доказательства мультиреджевской формы амплитуд с глюонным обменом в СГЛП [?] можно утверждать о справедливости данной формы не только в КХД, но и в СЯМ.

Список литературы

- [1] J. M. Maldacena, “The Large N limit of superconformal field theories and supergravity,” *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 231 [hep-th/9711200].
- [2] S. S. Gubser, I. R. Klebanov and A. M. Polyakov, “Gauge theory correlators from noncritical string theory,” *Phys. Lett. B* **428** (1998) 105 [hep-th/9802109].
- [3] E. Witten, “Anti-de Sitter space and holography,” *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 253 [hep-th/9802150].
- [4] O. Aharony, S. S. Gubser, J. M. Maldacena, H. Ooguri and Y. Oz, “Large N field theories, string theory and gravity,” *Phys. Rept.* **323** (2000) 183 [hep-th/9905111].
- [5] C. Anastasiou, Z. Bern, L. J. Dixon and D. A. Kosower, “Planar amplitudes in maximally supersymmetric Yang-Mills theory,” *Phys. Rev. Lett.* **91** (2003) 251602 [hep-th/0309040].
- [6] Z. Bern, L. J. Dixon and V. A. Smirnov, “Iteration of planar amplitudes in maximally supersymmetric Yang-Mills theory at three loops and beyond,” *Phys. Rev. D* **72** (2005) 085001 [hep-th/0505205].
- [7] L. F. Alday and J. Maldacena, “Comments on gluon scattering amplitudes via AdS/CFT,” *JHEP* **0711** (2007) 068 [hep-th/0710.1060].
- [8] J. M. Drummond, J. Henn, G. P. Korchemsky and E. Sokatchev, “The hexagon Wilson loop and the BDS ansatz for the six-gluon amplitude,” *Phys. Lett. B* **662** (2008) 456 [hep-th/0712.4138].
- [9] Z. Bern, L. J. Dixon, D. A. Kosower, R. Roiban, M. Spradlin, C. Vergu and A. Volovich, “The Two-Loop Six-Gluon MHV Amplitude in Maximally Supersymmetric Yang-Mills Theory,” *Phys. Rev. D* **78** (2008) 045007 [hep-th/0803.1465].

- [10] L. F. Alday and J. M. Maldacena, “Gluon scattering amplitudes at strong coupling,” *JHEP* **0706** (2007) 064 [hep-th/0705.0303].
- [11] J. M. Drummond, G. P. Korchemsky and E. Sokatchev, “Conformal properties of four-gluon planar amplitudes and Wilson loops,” *Nucl. Phys. B* **795** (2008) 385 [hep-th/0707.0243].
- [12] J. M. Drummond, J. Henn, G. P. Korchemsky and E. Sokatchev, “Conformal Ward identities for Wilson loops and a test of the duality with gluon amplitudes,” *Nucl. Phys. B* **826** (2010) 337 [hep-th/0712.1223].
- [13] J. M. Drummond, J. Henn, G. P. Korchemsky and E. Sokatchev, “Dual superconformal symmetry of scattering amplitudes in $N = 4$ super-Yang-Mills theory,” *Nucl. Phys. B* **828** (2010) 317 [hep-th/0807.1095].
- [14] V. Del Duca, C. Duhr and V. A. Smirnov, “An Analytic Result for the Two-Loop Hexagon Wilson Loop in $N = 4$ SYM,” *JHEP* **1003** (2010) 099 [hep-ph/0911.5332].
- [15] V. Del Duca, C. Duhr and V. A. Smirnov, “The Two-Loop Hexagon Wilson Loop in $N = 4$ SYM,” *JHEP* **1005** (2010) 084 [hep-th/1003.1702].
- [16] A. B. Goncharov, M. Spradlin, C. Vergu, A. Volovich, “Classical Polylogarithms for Amplitudes and Wilson Loops,” *Phys. Rev. Lett.* **105** (2010) 151605 [hep-th/1006.5703].
- [17] V. S. Fadin, E. A. Kuraev, L. N. Lipatov, “On The Pomernanchuk Singularity In Asymptotically Free Theories”, *Phys. Lett. B* **60** (1975) 50.
- [18] E. A. Kuraev, L. N. Lipatov and V. S. Fadin, “Multi - Reggeon Processes In The Yang-Mills Theory,” *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **71** (1976) 840 [*Sov. Phys. JETP* **44** (1976) 443].
- [19] E. A. Kuraev, L. N. Lipatov and V. S. Fadin, “The Pomernanchuk Singularity In Nonabelian Gauge Theories,” *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **72** (1977) 377 [*Sov. Phys. JETP* **45** (1977) 199].
- [20] Я. Я. Балицкий, Л. Н. Липатов, “О померанчуковской особености в квантовой хромодинамике”, *Ядерная физика* **28** (1978) 1597.

- [21] J. Bartels, L. N. Lipatov and A. Sabio Vera, “BFKL Pomeron, Reggeized gluons and Bern-Dixon-Smirnov amplitudes,” *Phys. Rev. D* **80** (2009) 045002 [arXiv:0802.2065 [hep-th]].
- [22] J. Bartels, L. N. Lipatov, A. Sabio Vera, “N=4 supersymmetric Yang Mills scattering amplitudes at high energies: The Regge cut contribution,” *Eur. Phys. J.* **C65** (2010) 587 [arXiv:0807.0894 [hep-th]].
- [23] S. Mandelstam, “Cuts In The Angular Momentum Plane. 2,” *Nuovo Cim.* **30** (1963) 1148.
- [24] L. N. Lipatov and A. Prygarin, “Mandelstam cuts and light-like Wilson loops in N=4 SUSY,” *Phys. Rev. D* **83** (2011) 045020 [arXiv:1008.1016 [hep-th]].
- [25] J. Bartels, L. N. Lipatov and A. Prygarin, “MHV Amplitude for 3->3 Gluon Scattering in Regge Limit,” *Phys. Lett. B* **705** (2011) 507 [arXiv:1012.3178 [hep-th]].
- [26] J. Bartels, A. Kormilitzin, L. N. Lipatov and A. Prygarin, “BFKL approach and $2 \rightarrow 5$ maximally helicity violating amplitude in $\mathcal{N} = 4$ super-Yang-Mills theory,” *Phys. Rev. D* **86** (2012) 065026 [arXiv:1112.6366 [hep-th]].
- [27] V. S. Fadin and L. N. Lipatov, “BFKL equation for the adjoint representation of the gauge group in the next-to-leading approximation at N=4 SUSY,” *Phys. Lett. B* **706** (2012) 470 [arXiv:1111.0782 [hep-th]].
- [28] L. J. Dixon, J. M. Drummond and J. M. Henn, “Bootstrapping the three-loop hexagon,” *JHEP* **1111** (2011) 023 [arXiv:1108.4461 [hep-th]].
- [29] V. S. Fadin, R. Fiore, M. G. Kozlov and A. V. Reznichenko, “Proof of the multi-Regge form of QCD amplitudes with gluon exchanges in the NLA,” *Phys. Lett. B* **639** (2006) 74 [arXiv:hep-ph/0602006].
- [30] V. S. Fadin, M. G. Kozlov and A. V. Reznichenko, “Check of the gluon Reggeization condition in the next-to-leading order. Quark part.”, *Yad. Fiz.* **74** (2011) 784–796 [Preprint INP 2010-26].
- [31] V. S. Fadin, M. G. Kozlov and A. V. Reznichenko, “Check of the gluon Reggeization condition in the next-to-leading order. Gluon part.”, *Yad. Fiz.* **75** №4 (2012) 529-542 [Preprint INP 2011-24].

- [32] F. Gliozzi, J. Scherk and D. Olive, “Supersymmetry, supergravity theories and the dual spinor model”, Nucl. Phys. B **122** (1977) 253–290.
- [33] V.S. Fadin, M.G. Kozlov and A.V. Reznichenko, “Impact Factor for Gluon Production in Multi-Regge Kinematics in the Next-to-Leading Order”, Yad. Fiz. **75** №7 (2012) 905-920; [Preprint INP 2011-23].
- [34] R. E. Gerasimov, V. S. Fadin, “Scalar contribution to the BFKL kernel”, Phys.Atom. Nucl. **73** (2010) 1214–1228, Preprint INP 2008-36.
- [35] V. S. Fadin, R. Fiore, “Calculation of reggeon vertices in QCD”, Phys.Rev. D **64** (2001) 114012, [hep-ph/0107010].
- [36] V. S. Fadin and L. N. Lipatov, “Radiative corrections to QCD scattering amplitudes in a multi - Regge kinematics”, Nucl. Phys. B **406** (1993) 259–292.
- [37] V. S. Fadin and R. Fiore, “Quark contribution to the gluon-gluon - reggeon vertex in QCD”, Phys. Lett. B **294** (1992) 286–292.
- [38] V. S. Fadin, R. Fiore and A. Quartarolo, “Radiative corrections to quark quark reggeon vertex in QCD”, Phys. Rev. D **50** (1994) 2265–2276.
- [39] V. S. Fadin, M. I. Kotsky and R. Fiore, “Gluon Reggeization in QCD in the next-to-leading order”, Phys. Lett. **359** (1995) 181–188.
- [40] V. S. Fadin and R. Fiore, “The dipole form of the BFKL kernel in supersymmetric Yang-Mills theories,” Phys. Lett. B **661** (2008) 139 [hep-ph/0712.3901].
- [41] V. S. Fadin, M. G. Kozlov, and A. V. Reznichenko, “Radiative corrections to QCD amplitudes in quasi-multi-Regge kinematics,” Phys. Atom. Nucl. **67** (2004) 359 [Yad. Fiz. **67** (2004) 377] [hep-ph/0302224].
- [42] V. S. Fadin, R. Fiore, and A. Papa, “The quark part of the non-forward BFKL kernel and the “bootstrap” for gluon reggeization”, Phys. Rev. D **60** (1999) 074025.
- [43] V. S. Fadin, R. Fiore, M. I. Kotsky and A. Papa, “The Quark impact factors”, Phys. Rev. D **61**, (2000), 094006.
- [44] V. S. Fadin, R. Fiore, and A. Papa, “The Quark Part of the Non-forward BFKL Kernel and the 'Bootstrap' for the Gluon Reggeization,” Phys. Rev. D **60**, (1999) 074025 [hep-ph/9812456].

М.Г. Козлов, А.В. Резниченко, В.С. Фадин

**Мультиреджевская форма амплитуд с глюонным обменом
в суперсимметричных теориях Янга—Миллса**

V.S. Fadin, M.G. Kozlov, A.V. Reznichenko

**Multi-Regge form of amplitudes with gluon exchanges
in supersymmetric Yang-Mills theories**

ИЯФ 2012-32

Ответственный за выпуск А.В. Васильев

Работа поступила 25.12.2012 г.

Сдано в набор 28.12.2012 г.

Подписано в печать 29.12.2012 г.

Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 3.1 печ.л., 2.5 уч.-изд.л.

Тираж 90 экз. Бесплатно. Заказ № 32

Обработано на РС и отпечатано на

ротапринтере «ИЯФ им. Г.И. Будкера» СО РАН

Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.