

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
им. Г.И. Будкера СО РАН
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РАН
(ИЯФ СО РАН)

Р.Е. Герасимов, В.С. Фадин

АНАЛИЗ ПРИБЛИЖЕНИЙ,
ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ
РАДИАЦИОННЫХ ПОПРАВК
К СЕЧЕНИЮ ЭЛЕКТРОН-ПРОТОННОГО
РАССЕЯНИЯ

ИЯФ 2014-10

НОВОСИБИРСК
2014

**Анализ приближений,
используемых при вычислении радиационных поправок
к сечению электрон-протонного рассеяния**

Р.Е. Герасимов, В.С. Фадин

Институт ядерной физики им. Г.И.Будкера
Новосибирский государственный университет
630090, Новосибирск, Россия

Аннотация

В работе проводится анализ приближений, используемых при вычислении радиационных поправок к сечению электрон-протонного рассеяния. Исследуется расхождение между применявшимися при обработке экспериментов результатами работ Мо и Тсяя и более поздними результатами Максимова и Тьена. Обсуждается влияние процедуры учета радиационных поправок на измеряемое отношение формфакторов протона.

** Исследование выполнено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований: грант 13-02-01023, гранта Президента Российской Федерации МК-525.2013.2, а также Фонда некоммерческих программ “Династия”.*

1 Введение

Процесс рассеяния электрона на протоне является одним из главных инструментов для изучения внутренней структуры протона. Сечение этого процесса в борновском приближении выражается через квадраты электрического G_E и магнитного G_M формфакторов протона, являющихся функциями передачи импульса. В классических экспериментах по измерению формфакторов [?] – [?] электрон рассеивался на неподвижном протоне, причем в конечном состоянии регистрировался только рассеянный электрон; фиксировался угол его рассеяния и измерялась энергия. Отбор “упругих” событий проводился ограничением энергии рассеянного электрона снизу. Аналитическое выражение для радиационных поправок в такой постановке эксперимента впервые было получено Тсаем [?]. Некоторые погрешности этой работы были исправлены позднее в работе Мо и Тсяя [?]. Результаты [?] использовались при обработке данных последующих экспериментов [?] – [?] с регистрацией рассеянного электрона.

Значительным улучшением результатов Мо и Тсяя считается [?] более современный расчет радиационных поправок [?], выполненный Максимоном и Тьеном. Наиболее существенны отличия двух расчетов для вкладов диаграмм двухфотонного обмена и тормозного излучения. Кроме этого, есть разница в вычислении виртуальной поправки к протонной вершине.

Расчеты обеих групп авторов по необходимости являются приближенными, поскольку точный расчет радиационных поправок невозможен из-за неэлементарности протона и сильного взаимодействия его составляющих.

Интерес к теме радиационных поправок (инициировавший работу Максимоном и Тьена) возник в начале 2000-х годов, после появления результатов поляризационных экспериментов [?] – [?], согласно которым отношение формфакторов G_E/G_M падает с ростом передачи импульса. Такое поведение находится в явном противоречии с данными, полученными ранее методом розенблютовского разделения [?] G_E и G_M в серии экспериментов с неполяризованными частицами [?] – [?], [?] – [?]. Согласно этим данным, отношение G_E/G_M слабо зависит от передачи импульса. Для

их проверки эксперимент с неполяризованными частицами был проведен в другой постановке, в которой фиксировался конечный протон [?]. Он также дал слабую зависимость G_E/G_M от передачи импульса и, таким образом, ещё более обострил возникшее после работ [?], [?] противоречие.

Одним из возможных объяснений этого противоречия считается недостаточно аккуратный учет радиационных поправок в экспериментах по измерению G_E и G_M методом розенблютовского разделения. Этот метод становится чрезвычайно чувствителен к радиационным поправкам при больших передачах импульса, поскольку относительный вклад G_E в сечение падает с ростом передачи. Ясно, что когда погрешность вычисления радиационных поправок становится больше этого вклада, измерение G_E/G_M становится невозможным.

В данной работе мы анализируем расхождения между результатами Мо-Тсяя [?] и Максимова-Тьена [?], приближения, используемые в этих расчетах, и точность, на которую можно рассчитывать в рамках этих приближений. Из-за противоречия между экспериментальными результатами для G_E/G_M особый интерес представляют радиационные поправки, которые могли повлиять на это отношение. Наибольшая неопределенность связана с вкладами диаграмм двухфотонного обмена для упругого рассеяния и интерференции электронного и протонного тормозного излучения. Для удобства и полноты изложения мы приводим также и те поправки, в вычислении которых нет расхождений.

Статья организована следующим образом. В следующем разделе приводятся используемые обозначения и даются необходимые определения. В третьем разделе рассматриваются виртуальные радиационные поправки, в четвертом – реальные. В Заключение кратко суммируются результаты проведенного анализа. В Приложениях даны детали вычислений петлевых интегралов, функций мягкофотонного приближения, двухфотонной амплитуды рассеяния электрона на точечном протоне и интегралов для вычисления реальных поправок.

2 Определения и основные обозначения

В дальнейшем мы будем использовать следующие обозначения: $\alpha = e^2/(4\pi) \approx 1/137$ – электромагнитная константа связи; m – масса электрона; M – масса протона; $p_1 = (\epsilon_1, \mathbf{p}_1)$ и $p_3 = (\epsilon_3, \mathbf{p}_3)$ – начальный и конечный 4-импульсы электрона; $p_2 = (M, \mathbf{0})$ и $p_4 = (\epsilon_4, \mathbf{p}_4)$ – начальный и конечный 4-импульсы протона (все 4-импульсы приводятся системе покоя начального протона); $q = p_1 - p_3$ – передача импульса,

$Q^2 = -q^2$. Во всех дальнейших вычислениях масса электрона считается малой (если не оговорено противное): m^2/ϵ_1^2 , $m^2/(-q^2)$, $m^2/M^2 \ll 1$. В упругом процессе имеем $\epsilon_{3,el} = \epsilon_1/\eta$, где

$$\eta = 1 + (2\epsilon_1/M) \sin^2(\theta/2), \quad (1)$$

θ — угол рассеяния электрона. Инфракрасные расходимости, возникающие при вычислении радиационных поправок, регуляризуются введением массы фотона λ , которая считается малой по сравнению со всеми другими величинами размерности массы. Для выделения радиационных поправок, связанных с протоном, его заряд считается равным $-Ze$, где e — заряд электрона.

Амплитуда упругого рассеяния в борновском приближении имеет вид

$$M_B = -\frac{Ze^2}{q^2} (\bar{u}_{p_3} \gamma^\mu u_{p_1}) (\bar{U}_{p_4} \Gamma^\mu(q) U_{p_2}), \quad (2)$$

где вершина взаимодействия $\Gamma^\mu(q)$ протона с виртуальным фотоном параметризуется двумя формфакторами

$$\Gamma^\mu(q) = F_1(q^2) \gamma^\mu - F_2(q^2) \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2M}, \quad \sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \quad (3)$$

Формфакторы $F_{1,2}$ связаны с электрическим и магнитным формфакторами $G_{(E,M)}$ соотношениями:

$$F_1(q^2) = \frac{G_E(q^2) + \tau G_M(q^2)}{1 + \tau}, \quad (4)$$

$$F_2(q^2) = \frac{G_M(q^2) - G_E(q^2)}{1 + \tau}, \quad (5)$$

где $\tau = Q^2/(4M^2)$.

Использование (2) приводит к известной формуле Розенблюта [?] для дифференциального по углу вылета конечного электрона сечения, усредненного по поляризациям начальных и просуммированного по поляризациям конечных частиц:

$$\frac{d\sigma_B}{d\Omega} = \frac{Z^2 \alpha^2 \cos^2(\theta/2)}{4\epsilon_1^2 \eta \sin^4(\theta/2)} \frac{\sigma_R}{\epsilon(1 + \tau)}, \quad (6)$$

где

$$\epsilon = (1 + 2(1 + \tau) \tan^2(\theta/2))^{-1} = \left(1 + \frac{2\tau(1 + \tau)M^2}{\epsilon_1^2 - M\tau(2\epsilon_1 + M)} \right)^{-1}, \quad (7)$$

$$\sigma_R = \tau G_M^2(q^2) + \epsilon G_E^2(q^2). \quad (8)$$

Величину σ_R называют “редуцированным сечением”. При фиксированной передаче импульса оно остается функцией энергии налетающего электрона, что позволяет извлекать из экспериментальных данных отношение формфакторов при заданном значении q^2 . Зависимость σ_R от ϵ изображается прямой с наклоном G_E^2 , пересекающей ось ординат в точке τG_M^2 . Отношение G_E^2/G_M^2 измеряется по наклону прямой, который уменьшается с ростом передачи импульса. Это же относится и к относительному вкладу G_E в сечение. Поэтому определение отношения G_E/G_M таким методом при больших передачах импульса чрезвычайно чувствительно к зависящим от ϵ радиационным поправкам к сечению и становится невозможным, когда вклад G_E в сечение (6) оказывается в пределах точности их вычисления.

Экспериментально наблюдаемым является сечение электрон-протонного рассеяния с излучением любого числа мягких недетектируемых фотонов. В следующем за борновским приближении оно обычно представляется в виде

$$\frac{d\sigma_{exp}}{d\Omega} = (1 + \delta) \frac{d\sigma_0}{d\Omega}, \quad (9)$$

где радиационная поправка δ вычисляется как сумма поправки к сечению упругого процесса от виртуальных фотонов и поправки от излучения реального фотона, $\delta = \delta_{virt} + \delta_{real}$. Виртуальную поправку δ_{virt} дает интерференция борновской амплитуды (2) с однопетлевыми амплитудами упругого процесса; реальная поправка δ_{real} обусловлена излучением одного фотона.

3 Виртуальные радиационные поправки

Виртуальная поправка δ_{virt} состоит из поправок от поляризации вакуума δ_{vac} , от электронной и протонной вершин δ_{vertex}^e и δ_{vertex}^p соответственно и от двухфотонного обмена $\delta_{2\gamma}$,

$$\delta_{virt} = \delta_{vac} + \delta_{vertex}^e + \delta_{vertex}^p + \delta_{2\gamma}. \quad (10)$$

3.1 Поляризация вакуума и поправка к электронной вершине

Поправка от поляризации вакуума δ_{vac} равна удвоенному поляризационному оператору $\mathcal{P}(q^2)$,

$$\delta_{vac} = 2\mathcal{P}(q^2), \quad (11)$$

содержащему лептонный (электронный, мюонный и τ -лептонный) и адронный вклады:

$$\mathcal{P}(q^2) = \mathcal{P}_e(q^2) + \mathcal{P}_\mu(q^2) + \mathcal{P}_\tau(q^2) + \mathcal{P}_h(q^2) \quad (12)$$

Однопетлевой лептонный вклад в поляризацию вакуума $\mathcal{P}_l(q^2)$, $l = e, \mu, \tau$ (рис. 1) хорошо известен:

$$\mathcal{P}_l(q^2) = \frac{\alpha}{\pi} \left(\frac{1}{3} \sqrt{1 - \frac{4m_l^2}{q^2}} \left(1 + \frac{2m_l^2}{q^2} \right) \ln \left(\frac{\sqrt{1 - \frac{4m_l^2}{q^2}} + 1}{\sqrt{1 - \frac{4m_l^2}{q^2}} - 1} \right) - \frac{4m_l^2}{3q^2} - \frac{5}{9} \right). \quad (13)$$

Для электронного вклада, при $-q^2 \gg m^2$, имеем

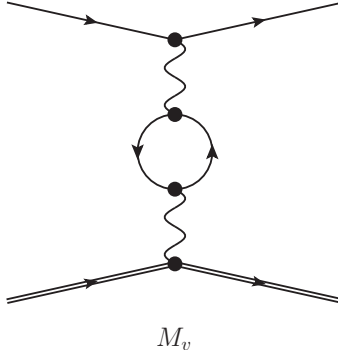


Рис. 1. Диаграмма с лептонной поляризацией вакуума.

$$\mathcal{P}_e(q^2) = \frac{\alpha}{\pi} \left(\frac{1}{3} \ln \left(\frac{-q^2}{m^2} \right) - \frac{5}{9} \right). \quad (14)$$

Мо и Тсай в работе [?] учитывали только этот вклад. Впоследствии при обработке (например, в сравнительно недавнем эксперименте в SLAC [?]) наряду с электронным учитывались также мюонный и тау-лептонный вклады, а также вклад адронов. Адронный вклад $\mathcal{P}_h(q^2)$, включающий в себя эффекты сильного взаимодействия, нельзя найти из первых принципов. Значение $\mathcal{P}_h(q^2)$ при отрицательных значениях q^2 восстанавливается по дисперсионному соотношению из обработки экспериментов по аннигиляции e^+e^- в адроны.

Выражение для поправки к электронной вершине (рис. 2) широко известно в литературе. В пределе $-q^2 \gg m^2$ соответствующая амплитуда

M_e факторизуется:

$$M_e = \frac{\alpha}{2\pi} \left(-K(p_1, p_3) + K(p_1, p_1) + \frac{3}{2} \ln \left(\frac{-q^2}{m^2} \right) - 2 \right) M_1. \quad (15)$$

Мы придерживаемся обозначений из статьи Тсая [?]:

$$K(p_i, p_j) = (p_i \cdot p_j) \int \frac{dy}{p_y^2} \ln \left(\frac{p_y^2}{\lambda^2} \right), \quad (16)$$

где $p_y = p_i y + p_j (1 - y)$. Явное выражение для этих функций выписаны в приложении ???. Соответствующий вклад от электронной вершины в виртуальные поправки равен

$$\delta_{vertex}^e = \frac{\alpha}{\pi} \left(-K(p_1, p_3) + K(p_1, p_1) + \frac{3}{2} \ln \left(\frac{-q^2}{m^2} \right) - 2 \right). \quad (17)$$

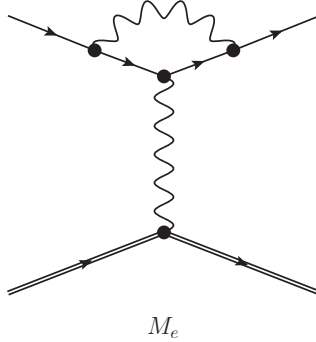


Рис. 2. Диаграмма с поправкой к электронной вершине.

Таким образом, с учетом дополнения о вкладе тяжелых лептонов и адронов в поляризацию вакуума подходы Максимова-Тьена и Мо-Тсая совпадают в этой части виртуальных поправок. Еще раз подчеркнем, что единственное приближение, которое использовалось при выводе (14) и (15) — это то, что $-q^2 \gg m^2$.

3.2 Поправка к протонной вершине

Амплитуда M_p , содержащая электромагнитную поправку к протонной вершине, не может быть вычислена в общем случае. Обе группы авторов

использовали для нее одночастичное приближение. В схеме перенормировок на массовой поверхности оно изображается диаграммой рис. 3. В этом приближении из всех виртуальных адронных состояний удерживаются только протонные, причем используются борновские пропагаторы протонов, а вершины взаимодействия фотонов с протонами берутся на массовой поверхности последних, т.е. в форме (3).

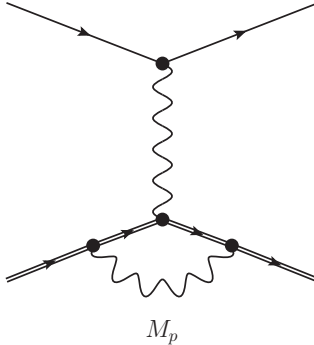


Рис. 3. Поправка к протонной вершине.

Мо и Тсай [?] пошли на дальнейшее упрощение и использовали для этой амплитуды стандартное мягкофотонное приближение, при котором импульсы фотонов в числителях фермионных пропагаторов полагаются равными нулю:

$$M_p = \frac{Z^2 \alpha}{2\pi} (-K(p_2, p_4) + K(p_2, p_2)) M_1, \quad (18)$$

и, соответственно,

$$\delta_{vertex}^p = \frac{Z^2 \alpha}{\pi} (-K(p_2, p_4) + K(p_2, p_2)). \quad (19)$$

Максимон и Тьен применяли одночастичное приближение без дальнейших упрощений. Для входящих в фотонные вершины формфакторов использовались модели с монополярной и дипольной зависимостью от передачи импульса:

$$F_i(q^2) \propto \left(\frac{\Lambda^2}{-q^2 + \Lambda^2} \right)^n, \quad n = 1, 2, \quad \Lambda \simeq 1 \text{ GeV}/c. \quad (20)$$

Оказалось [?], что разница $\delta_{virt}^{(1)}$ между таким приближением для вклада в поправку (10) от протонной вершины и приближением (18) всегда

положительна и пренебрежимо мала в экспериментальной области энергий и передач импульса ($\delta_{virt}^{(1)} < 0.012$ при $Q^2 \lesssim 16$ (GeV/c)²). Но при бóльших передачах отличие становится существенным, и, согласно Максиму и Тьену, поправка $\delta_{virt}^{(1)}$ должна учитываться в экспериментах по электрон-протонному рассеянию при энергиях больше 8 ГэВ.

Однако целесообразность такого учета представляется сомнительной, поскольку вопрос о том, приближает ли учет $\delta_{virt}^{(1)}$ поправку к точной, остается открытым. В самом деле, учет $\delta_{virt}^{(1)}$ означает вычисление вклада в (10) от протонной вершины в описанном выше одночастичном приближении (или, в терминологии [?], с учетом структуры протона), при отбрасывании многоадронных вкладов. Доказательство того, что это приближение лучше, чем стандартное мягкофотонное, отсутствует.

С другой стороны, следует отметить, что протонная вершина имеет вид (3) и с учетом электромагнитных радиационных поправок, так что, на первый взгляд, и не имеет смысл выделять их. Это выделение кажется и физически бессмысленным, поскольку оно означает использование ненаблюдаемых величин – формфакторов без учета электромагнитного взаимодействия. Но проблема в том, что формфакторы ненаблюдаемы даже при включении в них электромагнитного взаимодействия, поскольку они определены для упругого рассеяния, а физически наблюдаемы только процессы с излучением любого числа мягких недетектируемых фотонов. Сечение любого инклюзивного процесса обращается в нуль при учете радиационных поправок, связанных с мягкими фотонами, во всех порядках теории возмущений α . В каждом данном порядке это проявляется через инфракрасные расходимости в виртуальных и реальных поправках к эксклюзивным сечениям, которые сокращаются только в их сумме. Поэтому с учетом электромагнитных поправок формфакторы содержат в каждом порядке инфракрасные расходимости, а при суммировании поправок обращаются в нуль.

Итак, включение электромагнитных поправок в формфакторы делает их бессмысленными из-за инфракрасных расходимостей. Но эти расходимости связаны с мягкими фотонами. Они известны во всех порядках теории возмущений, факторизуются в экспоненту с показателем равным расходящейся части поправки 1-го порядка (см., напр. [?]) и не имеют отношения к структуре протона и к многоадронным промежуточным состояниям.

Представляется естественным и физически осмысленным включить в определение формфакторов все поправки, кроме факторизующихся в экспоненту инфракрасно расходящихся. Ввиду неоднозначности выделе-

ния расходящейся части поправки, такое определение содержит произвол и требует уточнения. Удобно использовать для этого стандартное мягко-фотонное приближение. Тогда вся поправка от протонной вершины содержится в (19) (и сокращается с соответствующей реальной поправкой), а поправка $\delta_{virt}^{(1)}$ и неучтенная в [?] поправка от многоадронных промежуточных состояний включены в определение формфакторов и вычислять их нет нужды.

Заметим, что хотя включение всех электромагнитных поправок в формфакторы делает каждый из них бессмысленным, их отношение остается конечным и имеющим физический смысл, поскольку, благодаря факторизации инфракрасно расходящихся поправок, они не влияют на это отношение.

3.3 Амплитуды двухфотонного обмена

Наибольшие сложности при вычислении виртуальных поправок связаны с амплитудами двухфотонного обмена. В одночастичном приближении, когда удерживается только протонное промежуточное состояние, эти амплитуды изображаются диаграммами рис. 4. В фейнмановской калибровке для первой амплитуды имеем

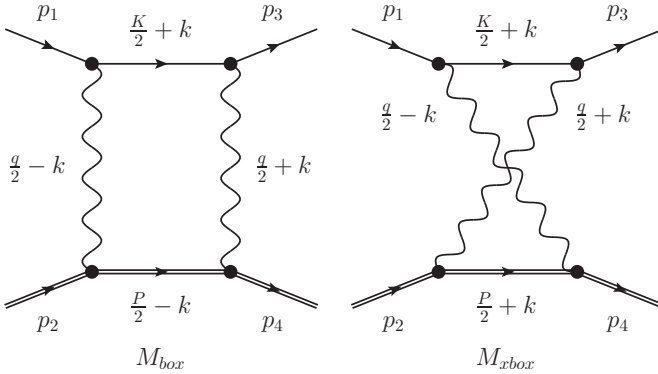


Рис. 4. Диаграммы двухфотонного обмена.

$$\begin{aligned}
 iM_{box} = & Z^2 e^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{d_1 d_2 d_3 d_4} \left(\bar{u}_{p_3} \gamma^\mu \left(\hat{k} + \frac{\hat{K}}{2} + m \right) \gamma^\nu u_{p_1} \right) \times \\
 & \times \left(\bar{U}_{p_4} \Gamma^\mu \left(k + \frac{q}{2} \right) \left(-\hat{k} + \frac{\hat{P}}{2} + M \right) \Gamma^\nu \left(\frac{q}{2} - k \right) U_{p_2} \right), \quad (21)
 \end{aligned}$$

а для второй

$$iM_{xbox} = Z^2 e^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{d_1 d_2 d_3 d'_4} \left(\bar{u}_{p_3} \gamma^\mu \left(\hat{k} + \frac{\hat{K}}{2} + m \right) \gamma^\nu u_{p_1} \right) \times \\ \times \left(\bar{U}_{p_4} \Gamma^\nu \left(\frac{q}{2} - k \right) \left(\hat{k} + \frac{\hat{P}}{2} + M \right) \Gamma^\mu \left(k + \frac{q}{2} \right) U_{p_2} \right). \quad (22)$$

Здесь приняты обозначения

$$d_1 = \left(k - \frac{q}{2} \right)^2 - \lambda^2 + i\epsilon, \quad (23)$$

$$d_2 = \left(k + \frac{K}{2} \right)^2 - m^2 + i\epsilon, \quad (24)$$

$$d_3 = \left(k + \frac{q}{2} \right)^2 - \lambda^2 + i\epsilon, \quad (25)$$

$$d_4 = \left(k - \frac{P}{2} \right)^2 - M^2 + i\epsilon, \quad (26)$$

$$d'_4 = \left(k + \frac{P}{2} \right)^2 - M^2 + i\epsilon, \quad (27)$$

а также $K = p_1 + p_3$ и $P = p_2 + p_4$.

Дальнейшие упрощения этих амплитуд, использованные обеими группами авторов, основаны на мягкофотонном приближении в разных его вариантах. Мо и Тсай использовали стандартный вариант, когда импульсом мягкого фотона пренебрегают везде, кроме знаменателей пропагаторов этого фотона и взаимодействующих с ним частиц. С учетом уравнений Дирака это дает

$$iM_{box}^{soft} = (-Ze^2)4(p_1 p_2) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{d_1 d_2 d_4} + \frac{1}{d_2 d_3 d_4} \right) M_1, \quad (28)$$

$$iM_{xbox}^{soft} = (-Ze^2)4(p_1 p_4) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{d_1 d_2 d'_4} + \frac{1}{d_2 d_3 d'_4} \right) M_1, \quad (29)$$

или, с учетом определений (16),

$$M_{box}^{soft} = -\frac{Z\alpha}{2\pi} (K(p_1, -p_2) + K(p_3, -p_4)) M_1 = -\frac{Z\alpha}{\pi} K(p_1, -p_2) M_1, \quad (30)$$

$$M_{xbox}^{soft} = \frac{Z\alpha}{2\pi} (K(p_1, p_4) + K(p_3, p_2)) \quad M_1 = \frac{Z\alpha}{\pi} K(p_1, p_4) \quad M_1. \quad (31)$$

Дополнительное упрощение, использованное в [?], состоит в замене $K(p_1, -p_2)$ на $K(p_1, p_2)$ в выражении для box-диаграммы (30):

$$M_{box}^{MoT} = -\frac{Z\alpha}{\pi} K(p_1, p_2) \quad M_1, \quad (32)$$

$$M_{xbox}^{MoT} = \frac{Z\alpha}{\pi} K(p_1, p_4) \quad M_1. \quad (33)$$

Эта замена обосновывалась тем, что в виртуальные поправки дает вклад только реальная часть $K(p_1, -p_2)$, и что отличием $Re(K(p_1, -p_2))$ от $K(p_1, p_2)$ можно пренебречь. Последнее утверждение никак не было обосновано. По существу, оно и неверно. Как показано в приложении ??,

$$Re(K(p_1, -p_2)) - K(p_1, p_2) = -\frac{\pi^2}{2} + \int_{1-\frac{M^2}{s-M^2}}^{1+\frac{M^2}{s-M^2}} \frac{dt}{t} \ln |1-t|, \quad (34)$$

где $s = (p_1 + p_2)^2$. Видно, что разница скорее велика, чем мала. В пределе больших энергий $s \gg M^2$ она равна $-\pi^2/2$. Нетрудно понять ее происхождение: она связана с разницей дважды-логарифмических членов при $s > 0$ и $s < 0$. С дважды-логарифмической точностью поправку к электронной вершине можно найти, например, в книге Берестецкого, Лифшица и Питаевского [?]. Приведенный там способ выделения дважды-логарифмической асимптотики с незначительными изменениями из-за различия масс $m \neq M$ работает и для функции $K(p_1, p_2)$ и дает

$$K(p_1, p_2) = \ln \frac{mM}{\lambda^2} \ln \frac{-(p_1 - p_2)^2}{mM} + \frac{1}{2} \ln \frac{-(p_1 - p_2)^2}{m^2} \ln \frac{-(p_1 - p_2)^2}{M^2} \quad (35)$$

с положительными аргументами логарифмов. Замена $p_2 \rightarrow -p_2$ означает, что этот результат следует аналитически продолжить в область отрицательных аргументов, что и приводит к добавке $-\pi^2/2$ в $Re(K(p_1, -p_2))$.

Представив вклад двухфотонных амплитуд в виртуальные радиационные поправки как

$$\delta_{2\gamma} = \delta_{box} + \delta_{xbox}, \quad (36)$$

выпишем окончательные выражения для δ_{box} и δ_{xbox} , которое использовалось в подходе Мо и Тсяя:

$$\delta_{box}^{MoT} = -\frac{2Z\alpha}{\pi} K(p_1, p_2), \quad (37)$$

$$\delta_{xbox}^{MoT} = \frac{2Z\alpha}{\pi} K(p_1, p_4). \quad (38)$$

Как показано выше, проделанная при получении (38) из (30) замена $K(p_1, -p_2)$ на $K(p_1, p_2)$ заметно (при большой энергии на величину $\sim \pi\alpha$) меняет значение поправки. Поэтому такая замена кажется существенным недостатком. Но здесь следует заметить, что само стандартное мягкофотонное приближение (30) (так же как и (31)) при больших энергиях (в реджевской области $s \gg M^2, s \gg |t|$) имеет существенный недостаток, так как дает дважды-логарифмические члены типа $\ln^2(-s)$ (см. (35)), которых, как хорошо известно, заведомо нет в точном ответе. Члены такого типа возникают из-за того, что точный матричный элемент бок-диаграммы (21), в котором подавление вклада больших импульсов виртуальных фотонов связано как с s , так и с t , заменяется на сумму матричных элементов двух треугольных диаграмм (30), в которых это подавление связано только с s . Детально этот вопрос рассмотрен в следующем разделе.

Этот недостаток устранен в приближении, используемом Максимоном и Тьеном. Оно получается приведением членов в (21) и (22) к общему знаменателю и заменой в числителе $d_1 + d_3$ на q^2 (равенство $d_1 + d_3 = q^2$ имеет место при нулевых импульсах любого из фотонов). В результате

$$iM_{box}^{MTj} = (-Ze^2)4(p_1p_2)q^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{d_1d_2d_3d_4} M_1, \quad (39)$$

$$iM_{xbox}^{MTj} = (-Ze^2)4(p_1p_4)q^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{d_1d_2d_3d'_4} M_1, \quad (40)$$

что дает после вычисления интегралов

$$\delta_{box}^{MTj} = -\frac{2Z\alpha}{\pi} \frac{\epsilon_1}{|\mathbf{p}_1|} \ln\left(\frac{\epsilon_1 + |\mathbf{p}_1|}{m}\right) \ln\left(\frac{-q^2}{\lambda^2}\right), \quad (41)$$

$$\delta_{xbox}^{MTj} = \frac{2Z\alpha}{\pi} \frac{\epsilon_3}{|\mathbf{p}_3|} \ln\left(\frac{\epsilon_3 + |\mathbf{p}_3|}{m}\right) \ln\left(\frac{-q^2}{\lambda^2}\right). \quad (42)$$

Способ получения этих выражений приведен в приложении ???. Отметим только, что результаты (41) и (42) получены из (39) и (40) без использования предположения $m \ll \epsilon_1, \epsilon_3$.

Поскольку приближение Максимоном и Тьеном устраняет рассмотренный выше недостаток стандартного мягкофотонного приближения, оно кажется более предпочтительным, чем приближение Мо и Тсяя. Однако

такое заключение преждевременно. Как было показано выше, при выводе (37) было сделано два приближения — стандартное мягкофотонное приближение и замена $K(p_1, -p_2)$ на $K(p_1, p_2)$, каждое из которых имеет свои явные недостатки. Но оказывается, что частично эти недостатки компенсируют друг друга. В самом деле, замена $K(p_1, -p_2)$ на $K(p_1, p_2)$ приводит к отбрасыванию $-\pi^2$ в членах $\ln^2(-(p_1 + p_2)^2)$, имеющихся в $K(p_1, -p_2)$ при больших энергиях. Но, как уже обсуждалось, в точном ответе нет дважды-логарифмических членов типа $\ln^2(-(p_1 + p_2)^2)$, а значит нет и содержащихся в них $-\pi^2$, так что отбрасывание последних частично устраняет недостаток стандартного мягкофотонного приближения. Конечно, только частично, поскольку остается главный член, $\ln^2(p_1 + p_2)^2$, которого заведомо не должно быть в реджевской области, так что в этой области приближение (37) для вклада box-диаграммы грубо неправильно. Но физический смысл имеет только сумма вкладов (37) и (38); по отдельности вклады диаграмм box и xbox вообще не калибровочно инвариантны. А в сумме члены с $\ln^2(p_1 + p_2)^2$ от box-диаграммы и $-\ln^2(-(p_1 - p_4)^2)$ от xbox-диаграммы сокращаются в реджевской области, где $-(p_1 - p_4)^2 \simeq (p_1 + p_2)^2$, так что в $\delta_{2\gamma}^{MoT} = \delta_{box}^{MoT} + \delta_{xbbox}^{MoT}$ бросающиеся в глаза недостатки исчезают. Вопрос о том, насколько полно происходит сокращение, насколько близко приближение Мо и Тсея к точному ответу, требует более детального анализа.

В похожем положении находится и приближение Максимова и Тье-на. Как было сказано, оно устраняет недостаток стандартного мягкофотонного приближения (появление членов типа $\ln^2(-(p_1 + p_2)^2)$ или $\ln^2(-(p_1 - p_4)^2)$), но в нем имеется другой явный недостаток: появление лишних дважды-логарифмических сингулярностей по электронной массе во вкладах отдельных диаграмм. В сумме $\delta_{2\gamma} = \delta_{box} + \delta_{xbbox}$ они сокращаются, но опять вопрос об эффективности этого сокращения остается открытым. В следующем разделе вопрос о том, насколько хорошо описываются (x)box-амплитуды мягкофотонным приближением, исследуется для рассеяния электрона на точечном (бесструктурном) протоне, когда амплитуды двухфотонного обмена вычисляются точно.

3.4 Сравнение приближенных и точных амплитуд с двухфотонным обменом в рассеянии электрона на точечном протоне

Матричные элементы даются формулами (21), (22) с заменой $\Gamma^\mu(\frac{q}{2} \pm k) \rightarrow \gamma^\mu$. В приложении ?? приведены детали необходимых вычислений, здесь

же выпишем только результат в случае $m \rightarrow 0$ (в следующих формулах не предполагается, что M^2 мало по сравнению с инвариантами $s = (p_1 + p_2)^2$, $t = (p_1 - p_3)^2$, $u = (p_1 - p_4)^2$):

$$M_{box} = \frac{Z^2 e^4}{(4\pi)^2} \left\{ A_{vv}(s, t) (\gamma^\mu \otimes \gamma^\mu) + A_{aa}(s, t) (\gamma^\mu \gamma^5 \otimes \gamma^\mu \gamma^5) - A_{vt}(s, t) \left(\gamma^\mu \otimes \frac{\sigma^{\mu\nu} q^\nu}{2M} \right) \right\}, \quad (43)$$

где принято обозначение $a \otimes b = (\bar{u}_{p_3} a u_{p_1}) (\bar{U}_{p_4} b U_{p_2})$. Инвариантные амплитуды A имеют следующий вид

$$A_{vv}(s, t) = 2(s - M^2) D(s, t) - 2C_2(t) - 2C_4(t) + (s + M^2) \frac{\partial J(s, t)}{\partial s} - J(s, t) - 2M^2 X_4(s, t) + 2M^2 \frac{\partial J(s, t)}{\partial M^2}, \quad (44)$$

$$A_{aa}(s, t) = -(s - M^2) \frac{\partial J(s, t)}{\partial s} + J(s, t), \quad (45)$$

$$A_{vt}(s, t) = -2M^2 \frac{\partial J(s, t)}{\partial M^2} - 2M^2 X_4(s, t), \quad (46)$$

где

$$X_4(s, t) = \frac{1}{2((s - M^2)^2 + s t)} \left[t(C_2(t) - C_4(t)) + 2(s - M^2) C_2(t) + (s - M^2) (t D(s, t) - C_1(s) - C_3(s)) \right]. \quad (47)$$

Явные выражения для функций D , C_i , J приведены в приложении ??.

Амплитуда M_{xbox} получается заменой $s \leftrightarrow u$:

$$M_{xbox} = \frac{Z^2 e^4}{(4\pi)^2} \left\{ -A_{vv}(u, t) (\gamma^\mu \otimes \gamma^\mu) + A_{aa}(u, t) (\gamma^\mu \gamma^5 \otimes \gamma^\mu \gamma^5) + A_{vt}(u, t) \left(\gamma^\mu \otimes \frac{\sigma^{\mu\nu} q^\nu}{2M} \right) \right\}. \quad (48)$$

Выпишем в явном виде инвариантные амплитуды в пределе, когда обе массы стремятся к нулю ($m, M \rightarrow 0$):

$$A_{vv}^{(0)}(s, t) = 2s D^{(0)}(s, t) - 2C_2^{(0)}(t) - 2C_4^{(0)}(t) + s \frac{\partial J^{(0)}(s, t)}{\partial s} - J^{(0)}(s, t), \quad (49)$$

$$A_{aa}^{(0)}(s, t) = -s \frac{\partial J^{(0)}(s, t)}{\partial s} + J^{(0)}(s, t), \quad (50)$$

$$A_{vt}^{(0)}(s, t) = 0, \quad (51)$$

причем

$$D^{(0)}(s, t) = \frac{2}{st} \ln\left(\frac{-t}{\lambda^2}\right) \left(\ln\left(\frac{s}{mM}\right) - i\pi\right), \quad (52)$$

$$D^{(0)}(u, t) = \frac{2}{ut} \ln\left(\frac{-t}{\lambda^2}\right) \ln\left(\frac{-u}{mM}\right), \quad (53)$$

$$J^{(0)}(s, t) = \frac{1}{s+t} \left(-\frac{1}{2} \ln^2\left(\frac{s}{-t}\right) + i\pi \ln\left(\frac{s}{-t}\right)\right), \quad (54)$$

$$J^{(0)}(u, t) = \frac{1}{u+t} \left(-\frac{1}{2} \ln^2\left(\frac{u}{t}\right) - \frac{\pi^2}{2}\right). \quad (55)$$

$$C_2^{(0)}(t) = \frac{1}{t} \left(\frac{1}{2} \ln^2\left(\frac{-t}{M^2}\right) + \frac{2\pi^2}{3}\right), \quad (56)$$

$$C_4^{(0)}(t) = \frac{1}{t} \left(\frac{1}{2} \ln^2\left(\frac{-t}{m^2}\right) + \frac{2\pi^2}{3}\right). \quad (57)$$

Функции $C_2^{(0)}(t)$ и $C_4^{(0)}(t)$ сокращаются в сумме вкладов box и xbox диаграмм.

Для суммы амплитуд получаем:

$$\begin{aligned} M_{box}^{(0)} + M_{xbox}^{(0)} = & \frac{Z^2 e^4}{2(4\pi)^2 t} \times \left\{ \gamma^\mu \otimes \gamma^\mu \left(-8 \ln\left(\frac{-t}{\lambda^2}\right) \left(\ln\left(-\frac{u}{s}\right) + i\pi\right)\right) + \right. \\ & + \gamma^\mu \otimes \gamma^\mu \left(\frac{s-u}{t} \left(\frac{\ln^2\left(\frac{u}{t}\right) + \pi^2}{\left(-\frac{s}{t}\right)^2} + \frac{\ln^2\left(-\frac{s}{t}\right)}{\left(\frac{u}{t}\right)^2}\right) + 2 \left(\frac{\ln\left(\frac{u}{t}\right)}{\left(-\frac{s}{t}\right)} + \frac{\ln\left(-\frac{s}{t}\right)}{\left(\frac{u}{t}\right)}\right) - \right. \\ & - 2\pi i \left(\frac{s-u}{t} \left(\frac{\ln\left(-\frac{s}{t}\right)}{\left(\frac{u}{t}\right)^2} + \frac{t}{u}\right)\right) + \\ & + \gamma^\mu \gamma^5 \otimes \gamma^\mu \gamma^5 \left(\frac{s-u}{t} \left(\frac{\ln^2\left(\frac{u}{t}\right) + \pi^2}{\left(-\frac{s}{t}\right)^2} - \frac{\ln^2\left(-\frac{s}{t}\right)}{\left(\frac{u}{t}\right)^2}\right) + \right. \\ & \left. \left. + 2 \left(\frac{\ln\left(\frac{u}{t}\right)}{\left(-\frac{s}{t}\right)} - \frac{\ln\left(-\frac{s}{t}\right)}{\left(\frac{u}{t}\right)}\right) + 2\pi i \left(\frac{s-u}{t} \left(\frac{\ln\left(-\frac{s}{t}\right)}{\left(\frac{u}{t}\right)^2} + \frac{t}{u}\right)\right) \right\}. \quad (58) \end{aligned}$$

В работе [?] амплитуды двухфотонного обмена при $M = m = 0$ представлены в форме, содержащей $\hat{P} \otimes \hat{K}$. Поскольку уже при $m = 0$ справедливо соотношение

$$\hat{P} \otimes \hat{K} = (s - u) (\gamma^\mu \otimes \gamma^\mu) + t (\gamma^\mu \gamma^5 \otimes \gamma^\mu \gamma^5), \quad (59)$$

можно привести (58) к виду

$$\begin{aligned} M_{box}^{(0)} + M_{i\ box}^{(0)} &= \frac{Z^2 e^2}{-t} \frac{e^2}{4\pi^2} \times \left\{ \gamma^\mu \otimes \gamma^\mu \left[\ln\left(-\frac{s}{u}\right) \ln\left(\frac{\lambda^2}{\sqrt{-s}u}\right) + \frac{\pi^2}{2} \right] + \right. \\ &+ \gamma^\mu \otimes \gamma^\mu \left[\frac{1}{2} \ln\left(-\frac{s}{u}\right) + \frac{t}{4} \left(\frac{\ln^2\left(\frac{u}{t}\right)}{s} - \frac{\ln^2\left(-\frac{s}{t}\right)}{u} + \frac{\pi^2}{s} \right) - \right. \\ &- i \pi \left(\ln\left(\frac{\lambda^2}{s}\right) - \frac{t}{2u} \ln\left(-\frac{s}{t}\right) + \frac{1}{2} \right) \left. \right] + \\ &+ \frac{\hat{P} \otimes \hat{K}}{4} \left[\frac{1}{s u} \left(s \ln\left(-\frac{s}{t}\right) + u \ln\left(\frac{u}{t}\right) + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{s-u}{2} \left(\frac{s}{u} \ln^2\left(-\frac{s}{t}\right) - \frac{u}{s} \ln^2\left(\frac{u}{t}\right) - \frac{u}{s} \pi^2 \right) \right) - \right. \\ &\left. \left. - i \pi \frac{1}{u} \left(\frac{s-u}{u} \ln\left(-\frac{s}{t}\right) + 1 \right) \right] \right\}, \quad (60) \end{aligned}$$

который полностью совпадает с выражением из статьи [?].

Для вклада (x)box-диаграмм в виртуальные поправки при $m \rightarrow 0$ получаем из (43), (48):

$$\begin{aligned} \delta_{box} &= -\frac{Z\alpha}{2\pi} Re \left[t A_{vv}(s, t) - \frac{2t^2(s-u)}{t(t+4M^2) + (s-u)^2} A_{aa}(s, t) + \right. \\ &\left. + \frac{2t^3}{t(t+4M^2) + (s-u)^2} A_{vt}(s, t) \right], \quad (61) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{x\ box} &= -\frac{Z\alpha}{2\pi} Re \left[-t A_{vv}(u, t) - \frac{2t^2(s-u)}{t(t+4M^2) + (s-u)^2} A_{aa}(u, t) - \right. \\ &\left. - \frac{2t^3}{t(t+4M^2) + (s-u)^2} A_{vt}(u, t) \right]. \quad (62) \end{aligned}$$

В высокоэнергетическом пределе ($m, M \rightarrow 0$) для полного вклада в вир-

туальные поправки от двухфотонных диаграмм имеем

$$\begin{aligned} \delta_{2\gamma} = \delta_{box} + \delta_{xbox} = & \frac{Z\alpha}{\pi} \left[-2 \ln \left(-\frac{s}{u} \right) \ln \left(-\frac{t}{\lambda^2} \right) - \right. \\ & - \frac{t(s-u)}{2(s^2+u^2)} \left(\ln^2 \left(-\frac{s}{t} \right) + \ln^2 \left(\frac{u}{t} \right) + \pi^2 \right) - \\ & \left. - \frac{t^2}{s^2+u^2} \left(\frac{u}{t} \ln \left(-\frac{s}{t} \right) - \frac{s}{t} \ln \left(\frac{u}{t} \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (63)$$

В этом выражении первое слагаемое в квадратных скобках соответствует приближению Максимова-Тьена.

Рассмотрим вклад каждой из диаграмм в виртуальные поправки в пределе высоких энергий и сравним эти результаты с тем, что дают различные приближения. Сопоставляя формулы (44) и (39), мы видим, что приближение Максимова и Тьена соответствует тому, что в инвариантных амплитудах A_{vv} для (x)box-диаграмм удержан только самый первый член, а все остальные слагаемые в A_{vv} и вклады A_{aa} , A_{vt} отброшены. Для разницы между точным ответом для рассеяния электрона на точечном протоне и приближениями Максимова-Тьена и Мо-Тсяя получаем следующие формулы:

$$\begin{aligned} \delta_{box} - \delta_{box}^{MTj} = & \frac{Z\alpha}{\pi} \left[-\frac{t(s-u)}{2(s^2+u^2)} \ln^2 \left(-\frac{s}{t} \right) - \frac{tu}{s^2+u^2} \ln \left(-\frac{s}{t} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{-t}{m^2} \right) + \frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{-t}{M^2} \right) + \frac{4\pi^2}{3} \right], \end{aligned} \quad (64)$$

$$\begin{aligned} \delta_{xbox} - \delta_{xbox}^{MTj} = & \frac{Z\alpha}{\pi} \left[-\frac{t(s-u)}{2(s^2+u^2)} \left(\ln^2 \left(\frac{u}{t} \right) + \pi^2 \right) + \frac{ts}{s^2+u^2} \ln \left(\frac{u}{t} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{-t}{m^2} \right) - \frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{-t}{M^2} \right) - \frac{4\pi^2}{3} \right], \end{aligned} \quad (65)$$

$$\begin{aligned} \delta_{box} - \delta_{box}^{MoT} = & \frac{Z\alpha}{\pi} \left[-\frac{t(s-u)}{2(s^2+u^2)} \ln^2 \left(-\frac{s}{t} \right) - \frac{tu}{s^2+u^2} \ln \left(-\frac{s}{t} \right) + \right. \\ & \left. + \ln^2 \left(-\frac{s}{t} \right) + \pi^2 \right], \end{aligned} \quad (66)$$

$$\begin{aligned} \delta_{xbox} - \delta_{xbox}^{MoT} = & \frac{Z\alpha}{2\pi} \left[-\frac{t(s-u)}{2(s^2+u^2)} \left(\ln^2 \left(\frac{u}{t} \right) + \pi^2 \right) + \frac{ts}{s^2+u^2} \ln \left(\frac{u}{t} \right) - \right. \\ & \left. - \ln^2 \left(\frac{u}{t} \right) - \pi^2 \right]. \end{aligned} \quad (67)$$

Мы видим, что в разнице с приближением Максимова и Тьена возникают квадраты больших логарифмов $\ln^2(-t/m^2)$ и $\ln^2(-t/M^2)$. Этот результат следует пояснить. Рассмотрим интеграл $D(s, t)$, через который выражается приближение Максимова-Тьена:

$$D(s, t) = \frac{(4\pi)^2}{i} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{d_1 d_2 d_3 d_4}. \quad (68)$$

Заметим, что этот интеграл соответствует бокс-диаграмме без числителей. Рассмотрим его при $s, |t| \gg m^2, M^2$. Стандартное мягкофотонное приближение позволяет найти вклад в интеграл от кинематических областей, в которых один из фотонов мягкий, а импульс второго близок к q . В этом приближении бокс-диаграмма заменяется на сумму двух треугольных s -канальных диаграмм с множителем $1/t$. Подчеркнем, что область мягких фотонов дает большой вклад не только потому, что он содержит инфракрасно расходящийся логарифм $\ln \lambda^2$. Этот вклад велик и тогда, когда все массы одного порядка, $\sim \mu$, благодаря так называемым судаковским дважды-логарифмам $\ln^2(s/\mu^2)$.

Поскольку интеграл (68) не содержит числителей фермионных пропагаторов, аналогичным образом мы можем вычислить “мягкофермионный” вклад, то есть вклад от области малых импульсов фермионов. Этот вклад дается суммой двух треугольных t -канальных диаграмм с множителем $1/s$. И он тоже содержит судаковские дважды-логарифмы, теперь $\ln^2(-t/m^2)$ и $\ln^2(-t/M^2)$. Но правильный ответ не должен их содержать, потому что область мягких фермионов подавлена числителями фермионных пропагаторов, имеющимися в точном матричном элементе. Вот эти-то “лишние” дважды-логарифмы и проявляются в разностях (64) и (65). С другой стороны, отсутствие вклада от мягких фермионов при использовании точного матричного элемента означает, что вклад от области мягких фотонов должен давать хорошее приближение к точному ответу в этом случае, если эта область правильно выделена.

Посмотрим, насколько хорошо работает описанная выше процедура выделения кинематических областей “мягких” частиц для $D(s, t)$ (68). Пользуясь ею, получаем следующее приближение:

$$\begin{aligned} \text{Re} \left[D^{(0)}(s, t) \right] &\approx \text{Re} \left[\frac{1}{t} \left(C_1^{(0)}(s) + C_3^{(0)}(s) \right) + \frac{1}{s} \left(C_2^{(0)}(t) + C_4^{(0)}(t) \right) \right] = \\ &= \frac{2}{ts} \left(\ln \frac{Mm}{\lambda^2} \ln \frac{s}{Mm} + \frac{1}{2} \ln \frac{s}{M^2} \ln \frac{s}{m^2} \right) + \frac{1}{ts} \left(\frac{1}{2} \ln^2 \frac{(-t)}{M^2} + \frac{1}{2} \ln^2 \frac{(-t)}{m^2} \right) = \\ &= \frac{1}{ts} \left(2 \ln \frac{(-t)}{\lambda^2} \ln \frac{s}{Mm} + \ln^2 \frac{s}{(-t)} \right) \end{aligned} \quad (69)$$

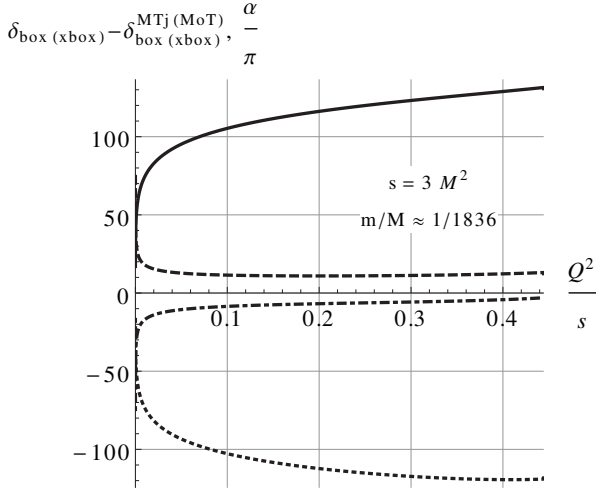


Рис. 5. Разница между точными значениями вкладов диаграмм двух-фотонного обмена δ_{box} и δ_{xbox} в виртуальные радиационные поправки к сечению упругого рассеяния электрона на точечном протоне и приближения Максимона-Тъена (сплошная — отличие во вкладе box-диаграммы, штриховая линия — во вкладе xbox-диаграммы) и Мо-Тсяя (пунктирная линия — для box-диаграммы, штрих-пунктирная — для xbox-диаграммы).

Сравнивая с точным ответом для $D^{(0)}(s, t)$, мы видим, что это приближение неплохо работает при $s \sim |t|$, но неприменимо в реджевской области $s \gg |t|$ (и в не достижимой при ep -рассеянии области $|t| \gg |s|$). Ясно, почему в этих областях процедура перестает работать. В box-диаграмме есть s -канальные и t -канальные ограничения на область применимости мягкочастичного приближения. Заменяя box-диаграмму на сумму треугольных, мы отбрасываем одно из них. Это можно делать, когда оба инварианта одного порядка, но заведомо неправильно, когда один из них много больше другого и мы оставляем только наиболее слабое ограничение.

Таким образом, мы приходим к заключению, что применимость приближения Мо Тсяя к вычислению δ_{box} и δ_{xbox} нарушается только в реджевской области. Что же касается приближения Максимона и Тъена, то его применимость к вычислению δ_{box} и δ_{xbox} нарушается уже при $|t| \gg m^2$, то есть оно неприменимо во всей представляющий интерес области. Эти заключения подтверждаются графиками на рис. 5.