

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
им. Г.И. Будкера СО РАН
(ИЯФ СО РАН)

Митянина Н.В., Петров В.М.

ВЛИЯНИЕ НЕСТАБИЛЬНОСТИ ИМПУЛЬСНОГО
БАРЬЕРНОГО И УСКОРЯЮЩЕГО НАПРЯЖЕНИЙ
НА РОСТ СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОГО РАЗБРОСА
ЭНЕРГИИ ЧАСТИЦ В КОЛЛАЙДЕРЕ NICA

ИЯФ 2016-3

Новосибирск
2016

**Влияние нестабильности импульсного
барьерного и ускоряющего напряжений
на рост среднеквадратичного разброса
энергии частиц в коллайдере NICA**

Митянина Н.В., Петров В.М.

Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера
630090, Новосибирск, Россия

Аннотация

В работе получены оценки роста среднеквадратичного разброса энергии частиц при накоплении и ускорении пучка в кольце коллайдера NICA из-за нестабильности потенциальной ямы для продольного движения заряженных частиц. Использован метод гармонического разложения возмущений потенциальной ямы и движения частиц в ней [2].

Потенциальная яма формируется барьерным напряжением и ускоряющим напряжением. Барьерное напряжение – последовательность знакопеременных импульсов напряжения. Предполагается, что потенциальная яма расположена между отрицательным и положительным импульсом барьерного напряжения. Рассмотрено влияние на возмущение потенциальной ямы шумового возмущения амплитуды импульсов барьерной системы, дрожание во времени заднего фронта отрицательного импульса и переднего фронта **положительного** импульса. Влияние нестабильности ускоряющего напряжения учитывается шумовым напряжением между передним фронтом **отрицательного** импульса и задним фронтом **положительного** импульса барьерной системы. Определены диффузионные коэффициенты для указанных видов шумовых возмущений. С их помощью вычислены скорость роста среднеквадратичного разброса по энергии и максимальное приращение этого среднеквадратичного разброса в зависимости от спектра шума. Получены ограничения на допустимый уровень шума. Основные результаты приведены в разделах 9-13.

© Институт ядерной физики им Г.И. Будкера СО РАН

1. Постановка задачи

При накоплении пучка в коллайдере «Ника» используется барьерное напряжение. При ускорении накопленного пучка к барьерному напряжению добавляется ускоряющее напряжение.

В таблице 1 приведены параметры одного кольца коллайдера «Ника».

I. Параметры накопительного кольца			
Периметр кольца Π_{ring}	503 м		
β -функция в области охлаждения β_t	20 м		
Критическое значение $\gamma_{cr} = 7.1$	7.1		
Коэффициент расширения орбит $\alpha = \gamma_{cr}^{-2}$	0.02		
II. Параметры барьерного и ускоряющего напряжения.			
Амплитуда барьерного напряжения U_{b0}	5 kV		
Ширина импульса барьерного напряжения φ_b	$\pi/6$		
Расстояние между соседними импульсами барьерного напряжения, формирующими сепаратрису $\varphi_{bb} = \pi - 2\varphi_b$	$\pi \cdot 4/6$		
Амплитуда ускоряющего напряжения U_{a0}	300 В		
III. Параметры ионного пучка (ионы золота)			
Заряд на нуклон $Z_{Au} / A_A = Z$	197 / 79 = 0.4		
Поперечный эмиттанс ε_{it}	$1.1 \cdot 10^{-3}$ мм·мрад		
Кинетическая энергия E_k	1 GeV / u	3 GeV / u	4.5 GeV / u
Число ионов в пучке N_i	$2.75 \cdot 10^8$	$2.4 \cdot 10^9$	$2.2 \cdot 10^9$
Частота обращения f_0	0.522 МГц	0.579 МГц	0.587 МГц
Ток пучка I_0	0.04 А	0.386 А	0.359 А

Среднеквадратичный разброс по импульсам накопленного пучка $\langle \Delta p_{\parallel} / p \rangle_{stored}$	$0.65 \cdot 10^{-3}$	$1.25 \cdot 10^{-3}$	$1.65 \cdot 10^{-3}$
Среднеквадратичный разброс по импульсам при инжекции $\langle \Delta p_{\parallel} / p \rangle_{inj}$	10^{-4}	$2.1 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-4}$

На рис. 1а показаны импульсы барьерного напряжения и форма потенциальной ямы, формируемой барьерным напряжением во время накопления. На рис. 1б показаны импульсы барьерного и ускоряющего напряжения и потенциальная яма, формируемая ими во время ускорения.

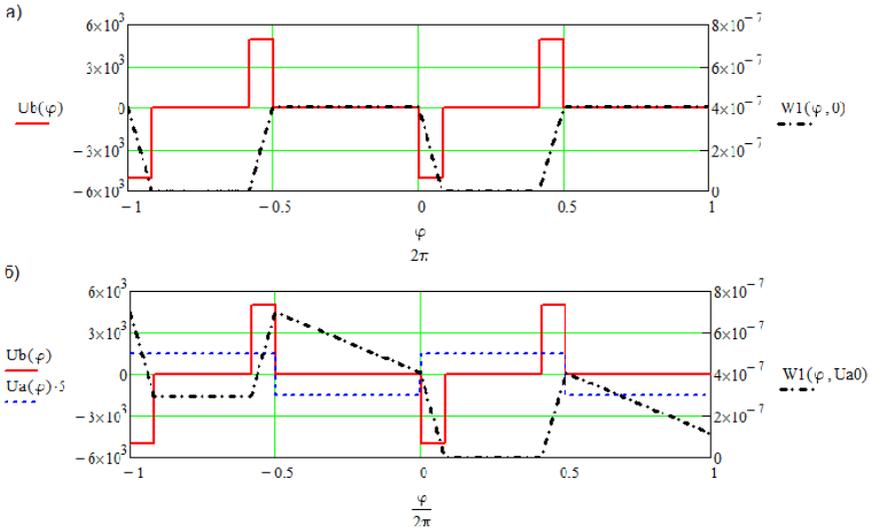


Рис.1. Барьерное напряжение $U_b(\varphi)$ (В), ускоряющее напряжение $U_a(\varphi)$ (В) и потенциальная яма, созданная ими $W_1(\varphi, U_{a0})$ (в тех же единицах, что и $(\Delta p / p)^2$), а) $U_{a0} = 0В$ (а), б) $U_{a0} = 300В$.

В данной работе приведены расчеты влияния шумов рассматриваемой ВЧ системы на увеличение энергетического разброса пучка. Рассматриваются следующие виды шумов: 1) возмущение амплитуды барьерного напряжения $U_{b0} \cdot (1 + a_b(t))$, 2) возмущение амплитуды ускоряющего напряжения $U_{a0} \cdot (1 + a_a(t))$, 3) дрожание фронтов барьерного напряжения $\Delta \varphi_{fk}(t)$, k – номера фронтов барьерного напряжения с координатами φ_{fk} . При расчетах используется метод, изложенный в [2].

Рассматривается движение частиц внутри потенциальной ямы. Для данного значения амплитуды отклонения энергии вычисляется прирост этого отклонения из-за шумов, усредненный по ансамблю случайных шумовых воздействий. Результат усредняется по распределению частиц по энергии в данной потенциальной яме. Для этого сначала надо определить зависимость частоты колебаний частицы от амплитуды и функцию распределения частиц по амплитудам.

2. Обозначения и уравнения движения

Обозначим $E_s, p_s, \gamma_s, \beta_s, \omega_s, R_s$ – энергия, продольный импульс, гамма и бета-факторы, частота обращения и средний радиус орбиты синхронной частицы ($R_s = \Pi_{ring} / (2\pi)$), ΔE – отклонение энергии частицы от равновесной энергии, $\alpha = \partial(\ln(\Pi)) / \partial(\ln(p)) = \gamma_{cr}^{-2}$ – коэффициент расширения орбит (Π – периметр орбиты частицы с импульсом p), $q_{rf} = 1$ – кратность частоты первой гармоники барьерного напряжения частоте обращения частиц.

С этими обозначениями в переменных, используемых в [2] ($\Delta\varphi, P = \frac{d\Delta\varphi}{dt}$), уравнения продольного движения между барьерами для частиц с зарядом Ze ($Z = 0.4 = Z_{Au} / A_{Au}$) имеют вид

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = - \frac{dW(\varphi_s + \Delta\varphi)}{d\varphi}, \\ \frac{d\Delta\varphi}{dt} = P, \end{cases} \quad (2.1)$$

где

$\varphi = (\omega_{rf} - q_{rf}\omega_0)t$ – фаза частицы относительно первой гармоники барьерного напряжения;

φ_s – синхронная фаза, где $U(\varphi_s) = U_{a0}$ в режиме ускорения и $U(\varphi_s) = 0$ в режиме накопления.

Для рассматриваемого напряжения (рис.1) (без возмущений) φ_s – произвольная точка в промежутке $\varphi_{f2} \leq \varphi_s \leq \varphi_{f3}$. Из соображений симметрии выберем $\varphi_s = \pi / 2$.

$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_s$ – отклонение частицы по фазе от равновесной фазы φ_s ;

$$W(\varphi) = k_0 Z e \int_{\varphi_s}^{\varphi} (U(\varphi) - U(\varphi_s)) d\varphi \quad (2.2)$$

– потенциал, в котором движутся частицы, созданный напряжением

$$U(\varphi) = U_a(\varphi) + U_b(\varphi), \quad (2.3)$$

где $U_b(\varphi)$ – барьерное напряжение:

$$U_b(\varphi) = U_{b0} \cdot \begin{cases} 1, & \varphi_{f3} \leq \varphi \leq \varphi_{f4}, \\ 0, & \varphi_{f2} \leq \varphi \leq \varphi_{f3}, \varphi > \varphi_{f4}, \varphi < \varphi_{f1}, \\ -1, & \varphi_{f1} \leq \varphi \leq \varphi_{f2}, \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\varphi_{f1} = 0, \quad \varphi_{f2} = \varphi_b, \quad \varphi_{f3} = \pi - \varphi_b, \quad \varphi_{f4} = \pi \quad (2.5)$$

– фазовые координаты фронтов импульсов напряжений; $U_a(\varphi)$ – ускоряющее напряжение:

$$U_a(\varphi) = U_{a0} \cdot \begin{cases} 1, & \varphi_{f1} = 0 \leq \varphi \leq \pi = \varphi_{f4}, \\ -1, & \varphi_{f4} \leq \varphi \leq 2\pi + \varphi_{f1}, \end{cases} \quad (2.6)$$

$$P = \frac{d\Delta\varphi}{dt} = \omega_{rf} - \omega_0 = -\Delta\omega_0 = -k_0 \cdot \frac{2\pi\Delta E}{\omega_s} = -k_0 \cdot \frac{2\pi E_s}{\omega_s} \frac{\Delta E}{E_s} = -k \cdot \frac{2\pi E_s}{\omega_s} \beta_s^2 \frac{\Delta p}{p_s}$$

– скорость перемещения частиц по фазе на фазовой плоскости, пропорциональная отклонению энергии от равновесного значения,

$$k_0 = \frac{q_{rf}}{2\pi R_s p_s} \frac{\omega_s \eta}{\omega_s} > 0, \quad \eta = \beta_s^2 \frac{E_s}{\omega_s} \left(\frac{\partial \omega}{\partial E} \right)_s = \gamma_s^{-2} - \alpha > 0. \quad (2.7)$$

В случае ускоренного движения к уравнениям движения (2.1)-(2.3) добавляется уравнение, определяющее темп ускорения синхронной частицы:

$$\frac{dE_s}{dt} = \frac{Ze \cdot \omega_s}{2\pi} U_a(\varphi_s) = \frac{Ze \cdot \omega_s}{2\pi} U_{a0} \quad (2.8)$$

и учитывается зависимость параметров k_0 и ω_s от E_s .

Интеграл движения для уравнений (2.1) имеет вид

$$H = \frac{1}{2} P^2 + W(\varphi). \quad (2.9)$$

3. Зависимость частоты колебаний частицы от амплитуды

Частицы движутся в потенциальной яме (см. рис. 1), форма которой приводит к существенной зависимости частоты колебаний от амплитуды.

Движение частиц между импульсами барьерного напряжения – равномерное, внутри области барьерного напряжения – равноускоренное с ускорением $|\ddot{\varphi}_b| = \Omega_0(E)^2 = k_0(E) Ze U_{b0}$. Введенный параметр Ω_0 зависит от энергии и имеет размерность частоты.

Обозначим амплитуду колебаний скорости P как $P_m = (\dot{\varphi})_{\max}$. Времена пролета промежутка между импульсами барьерного напряжения и время равноускоренного движения внутри барьерного напряжения зависят от амплитуды P_m и равны $T_{bb}(P_m) = \frac{\varphi_{bb}}{P_m}$, $T_b(P_m) = \frac{2P_m}{\Omega_0^2}$ – для частиц, движущихся в фазовом пространстве по замкнутым траекториям. Такие частицы влетают внутрь области барьерного напряжения на максимальное расстояние $\varphi_{b\max}(P_m) = \frac{P_m^2}{2\Omega_0^2} \leq \varphi_b$. Соответствующая амплитуда колебаний по

$$\text{фазе для такой частицы равна } \Delta\varphi_m = \frac{\varphi_{bb}}{2} + \varphi_{b\max}(P_m) = \frac{\varphi_{bb}}{2} + \frac{P_m^2}{2\Omega_0^2}.$$

Период $T_s(P_m)$ и частота $\Omega_s(P_m)$ движения равны

$$T_s(P_m) = 2(T_{bb}(P_m) + T_b(P_m)) = 2\left(\frac{\varphi_{bb}}{P_m} + 2\frac{P_m}{\Omega_0^2}\right),$$

$$\Omega_s(P_m) = \pi \frac{P_m}{2\frac{P_m^2}{\Omega_0^2} + \varphi_{bb}} = \frac{\pi \Omega_0 \sqrt{2\Delta\varphi_m - \varphi_{bb}}}{4\Delta\varphi_m - \varphi_{bb}} = \Omega_s(\Delta\varphi_m). \quad (3.1)$$

Далее будем использовать только зависимость $\Omega_s(P_m)$, а не $\Omega_s(\Delta\varphi_m)$, так как $\Omega_s(P_m)$ имеет более простой вид, чем зависимость от амплитуды фазовых колебаний $\Omega_s(\Delta\varphi_m)$.

Значение P_m , соответствующее сепаратрисе, равно $P_{mb}(\varphi_b, E) = \Omega_0(E)\sqrt{2\varphi_b}$. При этом значение синхротронной частоты

$$\Omega_s(P_{mb}, E) = \Omega_0(E) \frac{\pi\sqrt{2\varphi_b}}{4\varphi_b + \varphi_{bb}} = 0.75P_{mb}(E) \quad \text{пропорционально } P_{mb}(E).$$

Отметим, что зависимость синхротронной частоты, нормированной на P_{mb} , от P_m / P_{mb} не зависит от энергии:

$$\frac{\Omega_s(P_{mb}, E)}{P_{mb}} = \frac{\pi(P_m / P_{mb})}{4\varphi_b (P_m / P_{mb})^2 + \varphi_{bb}}.$$

На рис. 2а приведена зависимость максимальной частоты синхротронных колебаний на сепаратрисе $\Omega_s(P_{mb})$ от относительной энергии частиц E / E_0 (E_0 – энергия покоя). На графике отмечены значения $\gamma = E / E_0$, соответствующие минимальной энергии и критической энергии.

На рис. 2б приведен график зависимости частоты колебаний Ω_s от амплитуды P_m (нормированных на P_{mb}) и отмечено среднеквадратичное значение P_m для пучка, соответствующее $\langle \Delta p / p \rangle = 10^{-4}$ при $E_k = 1 \text{ GeV} / u$.

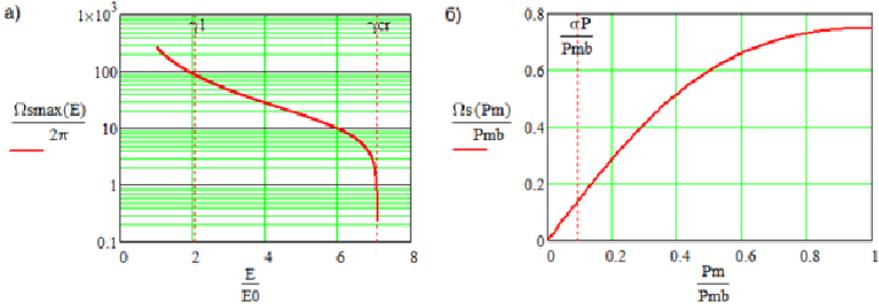


Рис.2. а) Зависимость максимального значения Ω_s на сепаратрисе (в Hz) от относительной энергии E / E_0 ; б) зависимость частоты колебаний $\Omega_s(P_m)$ в единицах P_{mb} от амплитуды колебаний скорости P_m в единицах P_{mb} .

4. Статическое распределение частиц по амплитудам

В параболической потенциальной яме распределение по P гауссовское, а по P_m – рэлеевское. В прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками распределение и по P , и по P_m – гауссовское. Для трапециевидной потенциальной ямы, как в данном случае (рис.1б), в Приложении 1 получено распределение по P_m (П1.1) с нормировочным коэффициентом (П1.2).

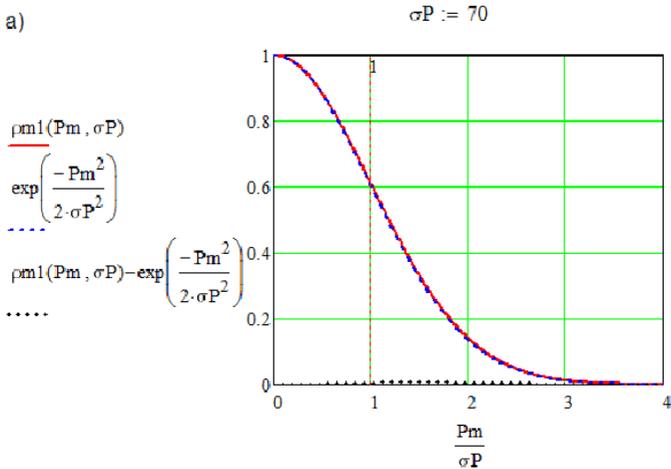
Распределение по амплитудам не рэлеевское, во-первых, за счет конечной плотности распределения частиц при малых амплитудах P_m в промежутках между импульсами барьерного напряжения и, во-вторых, за счет конечной амплитуды барьерного напряжения. Полученная функция распределения используется далее при вычислении среднего по распределению значения коэффициента диффузии, а также скорости роста σ_{P_m} – среднеквадратичной величины амплитуды P_m .

При среднеквадратичном значении скорости $\sigma_P \ll \Omega_0 \sqrt{\varphi_b}$ распределение практически не отличается от гауссовского. Этому случаю соответствует начальный разброс по импульсам $\langle \Delta p / p \rangle = 10^{-4}$ при энергии

частиц 1 ГэВ (при этих параметрах $\sigma_P = 70 \text{sec}^{-1}$, $\Omega_0 \approx 700 \text{sec}^{-1}$). Однако в конце накопления $\langle \Delta p / p \rangle$ может увеличиться в 6 раз (см. таб.1), при этом $\sigma_P / \Omega_0 \approx 0.6$, и следует использовать точное выражение (П1.1).

На рис. 3 приведены распределения частиц по амплитудам (нормированные на максимум) для этих двух случаев (рис. 3а,б) и зависимость $\sigma_{P_m}(\sigma_P)$ (рис.3в).

Как показано в Приложении 1 (П1.3), значения σ_P и σ_{P_m} при $\frac{\sigma_P^2}{\Omega_0^2 \varphi_B} \ll 1$ отличаются незначительно (рис.3а). Когда среднеквадратичное значение σ_P приближается к значению P_m , соответствующему сепаратрисе $P_{mb}(\varphi_B) = \sqrt{2\Omega_0^2 \varphi_B}$, отличие от распределения от гауссовского становится заметным (рис.3б). Тем не менее, для любых σ_P отличие $\sigma_{P_m}(\sigma_P)$ от σ_P не превышает 11% (рис.3в).



б)

$$\sigma_P := 70.6$$

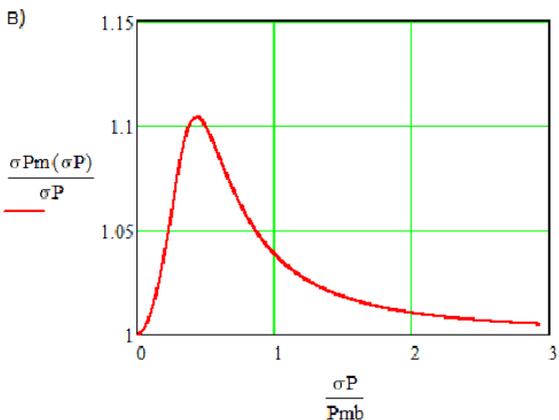
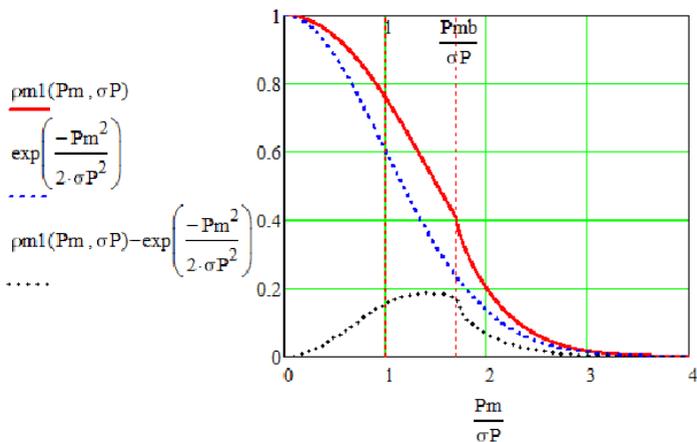


Рис.3. а) Распределение частиц по амплитудам $\rho_{m1}(P_m, \sigma_P)$ (нормированное на максимум) для $\sigma_P = 70 \text{ sec}^{-1}$, $E_k = 1 \text{ GeV} / u$; гауссовское распределение с таким же σ_P и их разность; б) те же графики для $\sigma_P = 70.6 \text{ sec}^{-1}$; в) зависимость $\sigma_{P_m}(\sigma_P)$.

5. Уравнение Фоккера-Планка и зависимость среднеквадратичного разброса от времени

Согласно [2], при учете диффузионного слагаемого одномерная функция распределения по переменной x удовлетворяет уравнению Фоккера-Планка:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho A_1) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\rho A_2), \quad (5.1)$$

$$A_1(x, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \Delta x \rangle}{\Delta t}, \quad A_2(x, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle (\Delta x)^2 \rangle}{\Delta t},$$

где $\langle \rangle$ означает усреднение по ансамблю случайных шумовых возмущений с одинаковой плотностью спектральной мощности.

В отсутствие шумов предполагается, что уравнение (5.1) описывает равновесное распределение, в котором затухание уравновешено диффузией за счет внутривибриционного рассеяния и других причин. Примем для простоты, что затухание линейно ($A_1(x, t) = -x/\tau_0$), а коэффициент диффузии в отсутствие шумов постоянен: $A_2(x, t) = A_{20}$. При этом стационарное распределение существует и является гауссовским:

$$\rho(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma_{x0}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_{x0}^2}\right), \quad \sigma_{x0}^2 = A_{20}\tau_0 / 2$$

нормировка функции распределения имеет вид $\int_0^{\infty} \rho(x) dx = 1$.

Наша задача определить, как меняется равновесный среднеквадратичный размер пучка σ_x , если на пучок дополнительно действуют шумы ВЧ системы. Примем, что допустимо 10%-ное увеличение σ_x . Следует определить максимальный уровень шума, при котором рост σ_x за время накопления или ускорения не превышает этих 10%. Для простоты предполагаем, что функция распределения пучка остается гауссовской (это выполняется при $\sigma_p \ll P_{mb}$), шумы изменяют только σ_x для этого распределения.

Для шумового возмущения, которое рассмотрено в [2] и в данной работе, $A_{1n} = \frac{1}{2} \frac{\partial A_{2n}}{\partial x}$. В этом случае для учета шума в уравнении непрерывности нет необходимости отдельно вычислять $A_{1n}(x)$, достаточно коэффициента $A_{2n}(x)$ (см. [2]). Для других видов воздействий соотношение $A_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial A_2}{\partial x}$ не обязательно выполняется, и в уравнении непрерывности необходимо

учитывать оба коэффициента A_1 и A_2 , в форме (5.1). Таким образом, наша модель описывается уравнением (5.1) с учетом затухания, диффузии из-за посторонних причин и диффузии за счет шумов:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \left(\frac{-x}{\tau_0} \right) \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\rho A_{20}) - \frac{\partial}{\partial x} (\rho A_{1n}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\rho A_{2n}) = \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \left(\frac{-x}{\tau_0} \right) \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\rho A_{20}) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A_{2n}(x)}{2} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (5.2)$$

В данной работе оказалось удобно решать одномерное уравнение (5.2) относительно переменной $x = P_m$ – амплитуды колебаний скорости.

В Приложении 1 получена равновесная функция распределения $\rho_m(P_m, t)$ именно по этой переменной, в предположении, что σ_P – среднеквадратичное значение скорости P – установилось в результате равновесия между затуханием и диффузией, без учета шумов. Используя (5.2) для $\rho_m(P_m, t)$, можно найти скорость роста σ_{Pm} – среднеквадратичного значения P_m – за счет шумов:

$$\frac{d}{dt} (\sigma_{Pm}^2) = \frac{d}{dt} \int_0^\infty P_m^2 \rho_m(P_m, t) dP_m = \int_0^\infty P_m^2 \frac{\partial \rho_m(P_m, t)}{\partial t} dP_m.$$

Подставив (5.2) и выполнив интегрирование по частям, получили

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\sigma_{Pm}^2) &= - \left(2 \frac{\sigma_{Pm}^2 - \sigma_{Pm0}^2}{\tau_0} + \int_0^\infty A_{2n}(P_m) \cdot \frac{\partial \rho(P_m, \sigma_{Pm})}{\partial P_m} P_m dP_m \right) = \\ &= - \left(2 \frac{\sigma_{Pm}^2 - \sigma_{Pm0}^2}{\tau_0} + A_{2n}(P_m) P_m \rho(P_m, \sigma_{Pm}) - \int_0^\infty \rho(P_m, \sigma_{Pm}) (A_{2n}(P_m) P_m)' dP_m \right), \end{aligned} \quad (5.3)$$

$\sigma_{Pm0}^2 = A_{20} \tau_0 / 2$ – равновесное значение σ_{Pm}^2 в отсутствие шумов.

Здесь в качестве $\rho_m(P_m, \sigma_P, t)$ используем равновесную функцию (П1.1) с нормировкой (П1.2) и начальным значением σ_{P0} без учета шумов. Далее, предполагая, что σ_{Pm} меняется медленно, так что равновесие в каждый момент времени успевает установиться, при известной зависимости $A_2(P_m)$, можно численно проинтегрировать (5.3) за все время накопления или ускорения, с учетом изменения $\sigma_{Pm}(t)$ и зависимости параметров уравнений движения от энергии.

При постоянной энергии частиц из (5.3) можно получить предельное увеличение σ_{Pm}^2 для данного спектра шума (стационарное значение):

$$\sigma_{P_m}^2 = \sigma_{P_m0}^2 - \frac{\tau_0}{2} \int_0^\infty A_{2n}(P_m) \cdot \frac{\partial \rho(P_m, \sigma_{P_m})}{\partial P_m} P_m dP_m \quad (5.4)$$

При ускорении можно численно проинтегрировать (5.3) за все время ускорения, принимая во внимание изменение с изменением энергии параметров, входящих в A_{2n} , и времени электронного затухания τ_0 , а также учесть адиабатическое изменение среднеквадратичного разброса по энергии. При отсутствии всех шумов и затухания адиабатический инвариант

$$I = \oint \frac{\Delta E}{\omega_0(E)} d\varphi \approx \frac{2\Delta E_{\max} \varphi_{bb}}{\omega_0(E)} = \frac{P_m \varphi_{bb}}{k_0(E)\pi} = const, \quad \text{то есть при ускорении } \sigma_{P_m}$$

адиабатически изменяется пропорционально $k_0(E)$, а ΔE_{av} – пропорционально частоте обращения $\omega_0(E)$. Это изменение приводит к добавочному слагаемому в уравнении (5.3), которое обеспечивает адиабатическое изменение σ_{P_m} :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\sigma_{P_m}^2) = & - \left(2 \frac{\sigma_{P_m}^2}{\tau_0(E(t))} - A_{20} + \int_0^\infty A_{2n}(P_m) \cdot \frac{\partial \rho(P_m, \sigma_{P_m})}{\partial P_m} P_m dP_m \right) + \\ & + 2\sigma_{P_m}^2 \frac{dE/dt}{k_0(E(t))} \frac{d(k_0(E(t)))}{dE}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Отметим, что в этом разделе получены результаты для линейной зависимости силы затухания от P_m . Более точно электронное затухание описывается зависимостью [5]

$$F_e(P) = \frac{-P}{\tau_0 \left(1 + (P/P_e)^2 \right)^{3/2}},$$

при $\sigma_P \ll P_{mb}$ $F_{1e}(P_m) \approx F_e(P_m)$.

При этом даже при постоянной энергии статическое решение не существует, надо решать задачу (5.2) с заданным начальным распределением, и ее решение – функцию распределения $\rho(P_m, t)$ в зависимости от времени – подставить в (5.3) для определения изменения σ_{P_m} во времени:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\sigma_{P_m}^2) = & \int_0^\infty P_m^2 \frac{\partial \rho_m(P_m, t)}{\partial t} dP_m = \\ = & -2 \frac{\sigma_{P_m}^2}{\tau_0} + A_{20} + 2 \int_0^\infty P_m \rho(P_m, t) \cdot \left(F_e(P_m) + \frac{P_m}{\tau_0} \right) dP_m - 2 \int_0^\infty P_m \frac{A_{2n}(P_m)}{2} \cdot \frac{\partial \rho(P_m, t)}{\partial P_m} dP_m. \end{aligned}$$

Это более сложный путь, в котором два эффекта – влияние шумов ВЧ и нелинейности электронного затухания – сложно разделить, поэтому при

рассмотрении влияния шумов ВЧ ограничимся линейной моделью затухания, считая $P_e \gg \sigma_p$.

6. Коэффициенты диффузии для известной плотности спектральной мощности шума

В данной работе рассматриваются 3 вида шумов ВЧ: шумовые возмущения амплитуд барьерного и ускоряющего напряжений и дрожание фронтов импульсов барьерного напряжения. При вычислении диффузионных коэффициентов использовался метод [2], где рассматривались шумовые возмущения амплитуды и фазы синусоидального напряжения. Вычисления приведены в Приложениях 2, 3. В результате получены следующие диффузионные коэффициенты:

а. Амплитудное возмущение барьерного напряжения

$$A_{2b}(P_m) = \left(\frac{\Omega_s(P_m)P_m}{\pi} \right)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin(k\alpha) - (k\alpha)\cos(k\alpha)}{(k\alpha)^2} \right|^2 (1 + s_0 \cdot (-1)^k)^2 S_b(k\Omega_s) \quad (6.1)$$

б. Амплитудное возмущение ускоряющего напряжения

$$A_{2a}^{P_m}(P_m) = \left(\frac{1}{\pi} \delta_a \frac{\Omega_0^4}{P_m \Omega_s} \right)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin(k\alpha)}{k^2} \right|^2 \cdot (1 - (-1)^k)^2 \cdot S_a(k\Omega_s). \quad (6.2)$$

в. Дрожание фронтов импульсов барьерного напряжения

$$A_{2f}^{P_m}(P_m) = \left(\frac{1}{\pi} \frac{\Omega_s \Omega_0^2}{P_m} \right)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\sin(k\alpha)|^2 \cdot (1 + s_0 \cdot (-1)^k)^2 \cdot S_f(k\Omega_s). \quad (6.3)$$

$$S_{a,b,f}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left\langle \left| a_{\omega}(\omega, T) \right|^2 \right\rangle, \quad a_{\omega}(\omega, T) = \int_0^T a(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Здесь $S_{a,b,f}(\omega)$ – плотность спектральной мощности шума, $\alpha = \frac{P_m \Omega_s (P_m)}{\Omega_0^2}$,

$s_0 = 0, \pm 1$ для учета шумов одной последовательности импульсов барьерного напряжения, например, положительной, ($s_0 = 0$) или двух, чьи шумы синфазны ($s_0 = 1$) или противофазны ($s_0 = -1$). Отметим, что в случае дрожания фронтов импульсов барьерного напряжения учитывается только влияние на движение частиц только внутренних фронтов (2-го и 3-го), которые частицы пересекают при замкнутом движении.

Величины, входящие в полученные выражения для коэффициентов диффузии, зависят от энергии ($\Omega_0, \Omega_s, \alpha$) и от P_m (Ω_s, α), что следует учитывать при вычислении установившегося σ_{P_m} при постоянной энергии и зависимости σ_{P_m} от времени при ускорении.

7. Модель: шум с постоянной плотностью спектральной мощности в пределах заданной полосы частот.

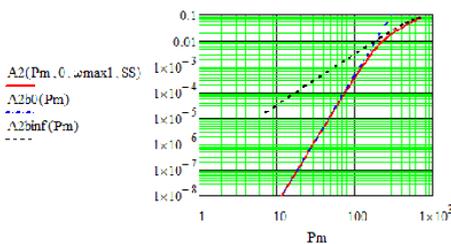
Для оценок можно получить формулы диффузионных коэффициентов, предполагая, что плотность спектральной мощности шума постоянна ($S_{a,b,f}(\omega) = S_0 = const$) в пределах полосы частот $|\omega| \leq \omega_{max} = k_{max} \Omega_0$. При этом среднеквадратичная амплитуда шума $P_{ш} = \langle a^2 \rangle = S_0 2\omega_{max} / 2\pi$, максимальный номер ненулевого члена рядов (6.1)-(6.3) равен

$$k_{max a,b}(P_m) = \frac{\omega_{max}}{\Omega_s(P_m)},$$

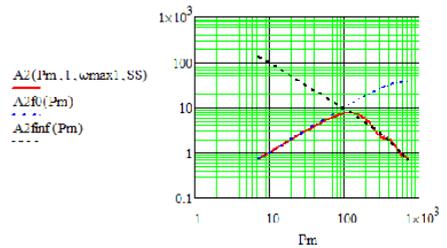
а бесконечные ряды (6.1)-(6.3) заменяются конечными суммами

$$\sum_{k=k_{max}}^{k_{max}} = 2 \sum_{k=0}^{k_{max}}$$

а)



б)



в)

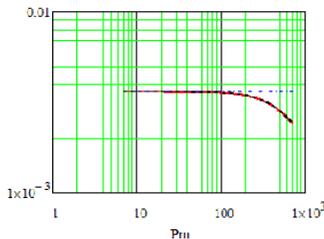


Рис.4. приведены зависимости $A_{2a}(P_m)$, $A_{2b}(P_m)$, $A_{2f}(P_m)$ от P_m / Ω_0 , нормированные на $S_0 \Omega_0^4$, вычисленные для белого шума как конечные суммы, а также их асимптоты при $ak_{max} \ll 1$ и при $ak_{max} \gg 1$ ($\Omega_{max} = 30 \Omega_0$).

Отметим, что $k_{\max}(P_m) \xrightarrow{P_m \rightarrow 0} \infty$, и при $P_m \ll P_{mb} = \Omega_0 \sqrt{2\varphi_B}$ $\alpha(P_m) \ll 1$. Для $\alpha k_{\max} \ll 1$ суммы можно заменить интегралами, а для $\alpha k_{\max} \gg 1$ конечные суммы в $A_{2a}(P_m)$, $A_{2b}(P_m)$ можно заменить бесконечными, которые вычисляются с помощью табличных выражений из [4]. На рис. 4 (а,б,в) приведены зависимости $A_{2a}(P_m)$, $A_{2b}(P_m)$, $A_{2f}(P_m)$ вычисленные для такого шума как конечные суммы, а также их асимптоты при $\alpha k_{\max} \ll 1$ и при $\alpha k_{\max} \gg 1$, для $\omega_{\max} = 30\Omega_0$. При уменьшении ω_{\max} точка излома графика (соответствующая $\alpha k_{\max} = \frac{P_m \Omega_{\max}}{\Omega_0^2} = 1$) на рис. 4(а,б) смещается вправо.

В таблице 2 приведены асимптотические выражения для коэффициентов диффузии для рассматриваемых видов шумов.

Таблица 2.

$A_2 / (\Omega_0^4 S_0)$	$\alpha k_{\max} \leq 1$	$\alpha k_{\max} \geq 1$
В	$\frac{2}{27} \frac{\omega_{\max}^3 \Omega_s}{\Omega_0^4} \left(\frac{P_m^2}{\pi \Omega_0^2} \right)^2$	$\frac{1}{3\pi} \frac{P_m \Omega_s}{\Omega_0^2}$
F	$\frac{2}{3\pi^2} \frac{\omega_{\max}^3 \Omega_s}{\Omega_0^4}$	$\frac{\omega_{\max} \Omega_s}{\pi^2 P_m^2}$
а	$\left(\frac{\delta_a}{2} \right)^2$	$\left(\frac{\delta_a}{2} \right)^2 \left(1 - \frac{4}{3\pi} \frac{\Omega_s P_m}{\Omega_0^2} \right)$

8. Гармоническое шумовое возмущение

Общие выражения для диффузионных коэффициентов (6.1) - (6.3) можно применить для гармоники шума $a(t) = a_0 \sin(\Omega_n t + \gamma)$. Плотность спектральной мощности такого шума (см. Приложение 4), действующего в течение времени T , при $T \rightarrow \infty$, равна

$$S(k\Omega_s) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} a_0^2 \{ \delta(k\Omega_s + \Omega_n) + \delta(k\Omega_s - \Omega_n) \}.$$

При этом коэффициенты диффузии имеют вид:

$$A_2(P_m) \approx 2 \frac{\pi}{2} a_0^2 \sum_{k=0}^{\infty} |k \cdot c_k(P_m)|^2 \cdot \delta(k\Omega_s(P_m) - \Omega_n).$$

9. Модель стационарного случайного возмущения для трэкинга

Для оценок и расчета изменения среднеквадратичного разброса σ_{P_m} во времени при ускорении удобно использовать выражения для коэффициентов диффузии из раздела 7, для шума с постоянной плотностью спектральной мощности в пределах заданной полосы частот. Для проверки метода следует сравнить полученные результаты (увеличение σ_{P_m} в зависимости от среднеквадратичной величины шумового возмущения) с результатом расчета изменения σ_{P_m} методом численного интегрирования уравнений движения для набора макрочастиц, с заданным начальным распределением на фазовой плоскости. При этом шумовое воздействие моделируется некоей случайной функцией от времени, для которой можно вычислить усредненный по ансамблю спектр. Рост σ_{P_m} , полученный в результате трэкинга, можно сравнить с увеличением σ_{P_m} , рассчитанным согласно (5.4), для усредненного спектра используемой случайной функции.

Для сравнения с трэкингом использовалась случайная функция в виде последовательности одинаковых по форме импульсов $a_k f(t-t_k)$ со случайной амплитудой a_k , привязанных к случайным моментам времени t_k , равномерно распределенным в интервале $t_k \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} \delta\varphi(t) &= \sum_{k=1}^N a_k f(t-t_k), \quad t \in [0, T] \\ \langle a_k^2 \rangle &= a_\sigma^2, \\ t_k &\in [0, T] - \text{равномерно}, \\ n_1 &= N/T - \text{средняя частота следования импульсов}. \end{aligned} \tag{9.1}$$

Для расчета была выбрана функция $f(t)$ в виде прямоугольного импульса постоянной длительности.

$$f(t, t_0, \Delta_0) = \Phi(t - (t_0 - \Delta_0))\Phi((t_0 + \Delta_0) - t). \tag{9.2}$$

Спектр одного импульса

$$f_\omega(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = -2\Delta_0 \frac{\sin(\omega\Delta_0)}{\omega\Delta_0} e^{-i\omega t_0}, \tag{9.3}$$

Спектр случайной суммы импульсов

$$\delta\varphi_\omega(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta\varphi(t)e^{-i\omega t} dt = f_\omega(\omega) \sum_{k=1}^N a_k e^{-i\omega t_k}.$$

Спектральная плотность для данной реализации случайной функции:

$$S_{av}(\omega) = \frac{|\delta\varphi_\omega(\omega)|^2}{T} = \left| 2\Delta_0 \frac{\sin(\omega\Delta_0)}{\omega\Delta_0} \right|^2 \left| \sum_{k=1}^N a_k e^{-i\omega t_k} \right|^2. \quad (9.4)$$

Плотность спектральной мощности, усредненная по ансамблю случайных наборов a_k, t_k

$$S_{av}(\omega) = \frac{\langle |\delta\varphi_\omega(\omega)|^2 \rangle}{T} = n_1 a_\sigma^2 \left| 2\Delta_0 \frac{\sin(\omega\Delta_0)}{\omega\Delta_0} \right|^2. \quad (9.5)$$

Нетрудно показать, что для такой случайной функции усреднение по ансамблю совпадает с усреднением по времени:

$$\begin{aligned} \langle \overline{\delta\varphi_{3\omega}(\omega)} \delta\varphi_{3\omega}(\omega') \rangle_{анс} &= |f_\omega(\omega)|^2 \sum_{\substack{k=1, \\ k'=1}}^N \langle a_k^* a_{k'} \rangle \langle e^{i(\omega t_k - \omega' t_{k'})} \rangle = \\ &= |f_\omega(\omega)|^2 \sum_{\substack{k=1, \\ k'=1}}^N \langle a_k^* a_{k'} \rangle \delta_{k,k'} \delta_{\omega,\omega'} = |f_\omega(\omega)|^2 \langle |a_k|^2 \rangle \delta_{\omega,\omega'} N = |f_\omega(\omega)|^2 \delta_{\omega,\omega'} \langle |a_k|^2 \rangle n_1 T, \\ \langle \overline{\delta\varphi_{3\omega}(\omega)} \delta\varphi_{3\omega}(\omega) \rangle_{анс} &= |f_\omega(\omega)|^2 \langle |a_k|^2 \rangle n_1 T, \\ \langle \overline{\delta\varphi_{3\omega}(\omega)} \delta\varphi_{3\omega}(\omega') e^{i(\omega' - \omega)t} \rangle_t &= |f_\omega(\omega)|^2 \sum_{\substack{k=1, \\ k'=1}}^N a_k^* a_{k'} e^{i(\omega t_k - \omega' t_{k'})} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{i(\omega' - \omega)t} dt = \\ &= |f_\omega(\omega)|^2 \sum_{\substack{k=1, \\ k'=1}}^N a_k^* a_{k'} e^{i(\omega t_k - \omega' t_{k'})} \frac{1}{T} \frac{2 \sin((\omega' - \omega)T/2)}{(\omega' - \omega)} \Big|_{T \rightarrow \infty} = \\ &= |f_\omega(\omega)|^2 \sum_{\substack{k=1, \\ k'=1}}^N a_k^* a_{k'} e^{i(\omega t_k - \omega' t_{k'})} \delta_{\omega',\omega} = \\ &= |f_\omega(\omega)|^2 \delta_{\omega',\omega} \sum_{\substack{k=1, \\ k'=1}}^N a_k^* a_{k'} e^{i\omega(t_k - t_{k'})} |f_\omega(\omega)|^2 \delta_{\omega',\omega} \langle |a_k|^2 \rangle n_1 T, \\ \langle \overline{\delta\varphi_{3\omega}(\omega)} \delta\varphi_{3\omega}(\omega) \rangle_t &= |f_\omega(\omega)|^2 \langle |a_k|^2 \rangle n_1 T. \end{aligned}$$

На рис. 5 приведены для сравнения усредненный спектр такой случайной функции и 2 варианта прямоугольного спектра, рассмотренного в разделе 7, с одинаковым среднеквадратичным значением случайной функции и рассчитанные для этих спектров коэффициенты диффузии для рассматриваемых видов возмущений.

При попытке моделировать случайный шум с прямоугольным спектром, для которого получены выражения в разделе 7, суммой гармоник со случайным распределением частот в пределах заданной полосы частот и со

случайными амплитудами возникают проблемы. В этом случае как функция распределения пучка (то есть суммы макрочастиц), так и спектр шума представляют собой суммы дельта-функций, и интеграл от их произведений, входящий в выражение для прироста среднеквадратичного разброса по энергии оказывается равен нулю. А для функции, рассмотренной в этом разделе, спектр случайной функции – непрерывная функция, с которой правильно интегрируется как функция распределения пучка в виде дельта-функций. Поэтому для трэкинга был выбран шум именно в таком виде.

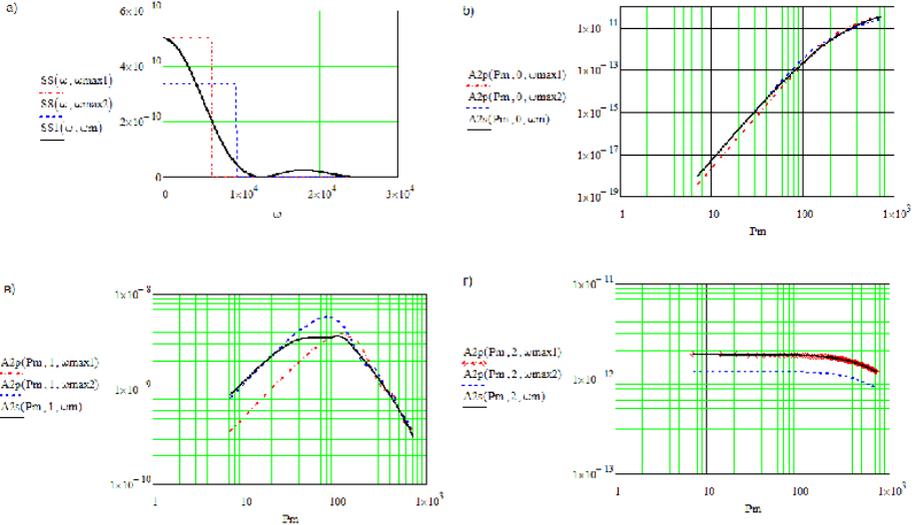


Рис. 5. Спектр (а) и диффузионные коэффициенты шумов с прямоугольным спектром с шириной $\omega_{max1} = \omega_{av} = 2\pi \cdot 10^3 c^{-1}$, $\omega_{max2} = 1.5\omega_{av}$ и шума в виде рассмотренной усредненной случайной функции с $\Delta_0 = \pi / 2\omega_{av}$, $\omega_m = 4\omega_{av}$ (для возмущения амплитуды (б) и фронта импульса (в) барьерного напряжения и амплитуды ускоряющего напряжения (г)), для одинаковых среднеквадратичных амплитуд шумов.

На рис.6 слева показаны среднеквадратичные амплитуды шумов в зависимости от получающегося прироста среднеквадратичного разброса по энергии, при ширине полосы шума $\omega_{av} = 2\pi \cdot 10^3 c^{-1}$. Справа приведены среднеквадратичные амплитуды шумов, при которых увеличение среднеквадратичного разброса по энергии не превышает 10%, в зависимости от ширины полосы шума. Сплошная и пунктирная линии соответствуют расчету со случайным спектром (9.4) и с усредненным по ансамблю спектром (9.5). Графики практически совпадают, так как при вычислении прироста среднеквадратичного разброса по энергии коэффициент диффузии, в который входит плотность спектральной мощности случайной функции (9.4), интегрируется с гладкой функцией распределения и таким образом также усредняется. На рис.6 и последующих варианты с возмущением амплитуды

(а) и фронта (б) импульса барьерного напряжения и амплитуды (в) ускоряющего напряжения обозначены индексом $kind = 0, 1, 2$ соответственно. Расчеты выполнены для $\tau_0 = 1\text{sec}$, $\sigma_{Pm0} = 70\text{sec}^{-1}$.

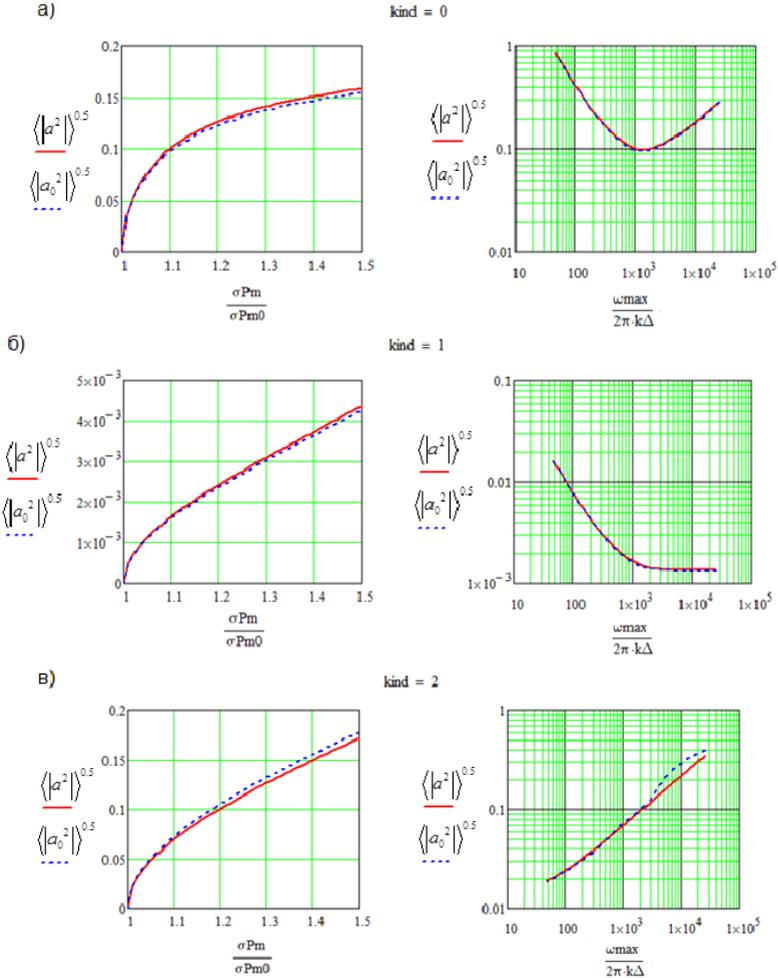


Рис.6. Зависимость относительного увеличения среднеквадратичного разброса по амплитудам $\sigma_{Pm} / \sigma_{Pm0}$ от среднеквадратичной амплитуды шума $\langle |a^2| \rangle^{0.5}$ при ширине полосы шума $\omega_{av} = 2\pi \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$ (слева); зависимость значения $\langle |a^2| \rangle^{0.5}$, при котором $\sigma_{Pm} / \sigma_{Pm0} = 1.1$, от ширины полосы шума (справа). Рассматривается возмущение амплитуды (а) и фронта (б) импульса барьерного напряжения и амплитуды ускоряющего напряжения (в).

Как видно из рис. 5, диффузионные коэффициенты для суммы случайных импульсов A_{2s} близки к диффузионным коэффициентам для прямоугольного спектра A_{2p} с $\omega_{\max 1} = \omega_m / 4$ или $\omega_{\max 2} = 1.5\omega_{\max 1}$ и одинаковых среднеквадратичных величин возмущения. Это позволит распространить выводы, сделанные для спектра A_{2s} , для которого удобнее проводить трэкинг, на случай прямоугольного спектра, для диффузионных коэффициентов которого в разделе 7 приведены формулы.

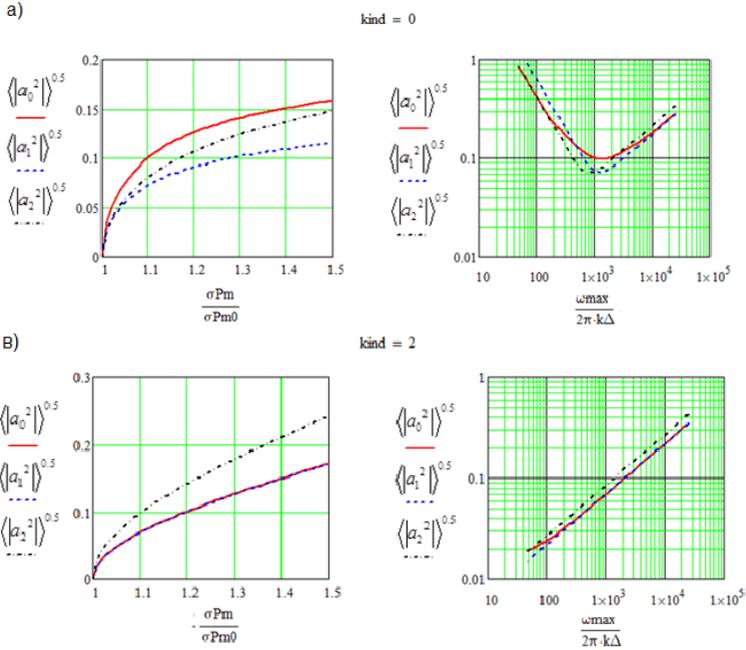


Рис. 7. Слева: зависимость относительного увеличения среднеквадратичного разброса по энергии от среднеквадратичной амплитуды шума для шумов с прямоугольным спектром с шириной $\omega_{\max 1} = \omega_{av} = 2\pi \cdot 10^3 \text{ c}^{-1}$ (штрихи), $\omega_{\max 2} = 1.5\omega_{av}$ (пунктир) и шума в виде рассмотренной усредненной случайной функции с $\Delta_0 = \pi / 2\omega_{av}$, $\omega_m = 4\omega_{av}$ (сплошная линия), для возмущения амплитуды (а) и фронта (б) импульса барьерного напряжения и амплитуды ускоряющего напряжения (в). Справа: зависимость допустимого значения шумового возмущения от ширины полосы шума (при допустимом увеличении среднеквадратичного разброса по энергии 10%), для тех же вариантов спектров и видов шума.

На рис. 7 для приведены зависимости относительного увеличения среднеквадратичного разброса по энергии от среднеквадратичной амплитуды шума для этих спектров. Вычисления проводились для $\tau_0 = 1 \text{ sec}$, $\sigma_{P_{m0}} = 70 \text{ sec}^{-1}$. Из графиков видно, что расчеты с диффузионным и коэффициентами по формулам из таб.2 для прямоугольного спектра с шириной $\omega_{\max 1} = \omega_m / 4$ дают близкую оценку допустимой среднеквадратичной амплитуды шума для возмущения фронта (б) импульса барьерного напряжения и амплитуды ускоряющего напряжения (в). Для возмущения амплитуды (а) импульса барьерного напряжения расчеты с диффузионным и коэффициентами по формулам дают более строгую оценку (примерно на $1/4$ меньше).

Можно сделать вывод, что формулы из таблицы. 2 вполне применимы для ускорения расчетов.

10. Сравнение прямого интегрирования уравнений движения по времени с результатами спектрального метода

В данном разделе проведено сравнение результатов спектрального метода вычисления шумового диффузионного коэффициента с прямым интегрированием по времени. Это сделано для определения пределов применимости методов и дальнейшего сравнения с результатами численного трэкинга.

В Приложении 5 прямым интегрированием по времени уравнений движения с учетом шумовых возмущений напряжений получены выражения для диффузионных коэффициентов:

$$A_{2b}(P_m) =$$

$$= \frac{2}{T_s} P_m^2 \int_{-\infty}^{\infty} S_b(\omega) \left| \frac{\sin(\omega T_b / 2) - (\omega T_b / 2) \cos(\omega T_b / 2)}{(\omega T_b / 2)^2} \right|^2 \left\{ \frac{1}{n\pi} \left| \frac{\sin(\omega n T_s / 2)}{\sin(\omega T_s / 2)} \right|^2 \right\} d\omega,$$

$$A_{2f}(P_m) = \frac{2}{2\pi} \left(\frac{2}{T_b} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega) 2 |\sin(\omega T_b / 2)|^2 \left\{ \frac{1}{n T_s} \left| \frac{\sin(\omega n T_s / 2)}{\sin(\omega T_s / 2)} \right|^2 \right\} d\omega,$$

$$A_{2a}(P_m) = \frac{1}{n T_s} \left(\frac{\Omega_0^2 T_s}{2\pi} / 2 \right)^2 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} S_a(\omega) \frac{\left| (1 - e^{i\omega T_s / 2}) \right|^2}{(\omega T_s / 2)^2} \left| \frac{\sin(\omega n T_s / 2)}{\sin(\omega T_s / 2)} \right|^2 \cdot$$

$$\cdot \left\{ \left(e^{i\omega(T_s/2 - T_b)} - 1 \right) + 2 e^{i\omega(T_s/2 - T_b/2)} \left(\frac{\sin(\omega T_b / 2)}{\omega T_b / 2} - \cos(\omega T_b / 2) \right) \right\}^2 d\omega,$$

$$T_b = T_b(P_m), \quad T_s = T_s(P_m).$$

Эти выражения получены в предположении, что промежуток времени T , в течение которого измеряется шумовое возмущение и его плотность спектральной мощности, достаточно велик, чтобы в подынтегральном выражении заменить $\frac{\sin((\omega - \omega')T/2)}{(\omega - \omega')T/2}$ на $\delta(\omega - \omega')$ и превратить двойной интеграл по частотам в одинарный. Это возможно, если $T \gg 1/\Delta\omega$, где $\Delta\omega$ – характерный интервал частот, на котором плотность спектральной мощности меняется мало. Далее, при $n \gg 1$, с учетом предельных выражений для дельта-функции (П4.1), эти интегралы превращаются в ряды (6.1)-(6.3). Очевидно, что методы совпадают, если за $n \gg 1$ периодов $T_s(P_m)$ изменение P_m мало.

Отметим, что в процессе численного трэкинга то же интегрирование по времени выполняется пошагово, так что результаты должны соответствовать.

11. Сравнение результатов трэкинга с результатами спектрального метода

Трэкинг проводился для $N_p = 1000$ макрочастиц, имеющих гауссовское начальное распределение по амплитудам колебаний скоростей и случайное распределение в промежутке $\theta \in [0, 2\pi]$ по синхротронным фазам, для начальной энергии $E_{k0} = 1 \text{ GeV} / u$ и начального разброса по импульсам $\sigma_p / p_s = 10^{-4}$. Затухание предполагается линейным, время затухания $\tau_0 = 1 \text{ sec}$. Для моделирования случайных процессов, не относящихся к ВЧ шумам (например, внутривидовое рассеяние), приводящих к установлению равновесия с затуханием при заданном разбросе по импульсам, использовалась модель случайных толчков заданной среднеквадратичной величины, действующих с одинаковой частотой на каждую частицу. Случайная функция, которой моделировался ВЧ шум, описана в разделе 9.

Отметим, что полученные для постоянной энергии и линейного затухания результаты могут быть пересчитаны для другого значения τ как

$$\delta_{\max}(\sigma_{\max} / \sigma_0, \tau_1) = \delta_{\max}(\sigma_{\max} / \sigma_0, \tau_0) \sqrt{\tau_{e0} / \tau_1},$$

это следует из формулы (5.4).

В результате расчетов получаем зависимость среднеквадратичного разброса амплитудам P_m (пропорциональным разбросу по энергии) от времени. На рис. 8 видно, что за счет шумов установившееся значение этой величины σ_{av} превышает начальное равновесное значение σ_{m0} . Шумовое

возмущение включилось в момент времени t_{start} . На графике отмечены значения $\sigma_{av} \pm d\sigma_{av}$, где $d\sigma_{av}$ – среднеквадратичное отклонение значений σ от σ_{av} после установления равновесия между затуханием и шумами на новом уровне.

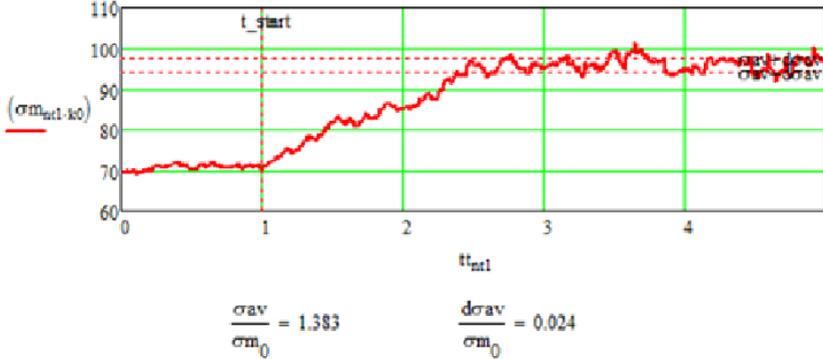


Рис.8. Изменение во времени среднеквадратичного разброса по амплитудам P_m для шумового возмущения амплитуды барьерного напряжения $\langle a_b \rangle = 0.14$, $\tau_0 = 1 \text{ sec}$, $E_k = 1 \text{ GeV} / u$, $\sigma_{P0} = 70 \text{ sec}^{-1}$ (соответствует $\langle \Delta p / p \rangle = 10^{-4}$), $\omega_{av} = 2\pi \cdot 10^3 \text{ c}^{-1}$.

Ниже (рис. 9) приведены графики зависимости относительного увеличения среднеквадратичного разброса по энергии от среднеквадратичной амплитуды шума δ_0 при ширине полосы шума $\omega_{av} = 2\pi \cdot 10^3 \text{ c}^{-1}$, аналогичные рис.6, для $\tau_0 = 1 \text{ sec}$, с нанесенными на них результатами трэкинга (значения $\sigma_{av} / \sigma_{m0}$, $(\sigma_{av} \pm d\sigma_{av}) / \sigma_{m0}$ для заданных среднеквадратичных значений для всех видов шума).

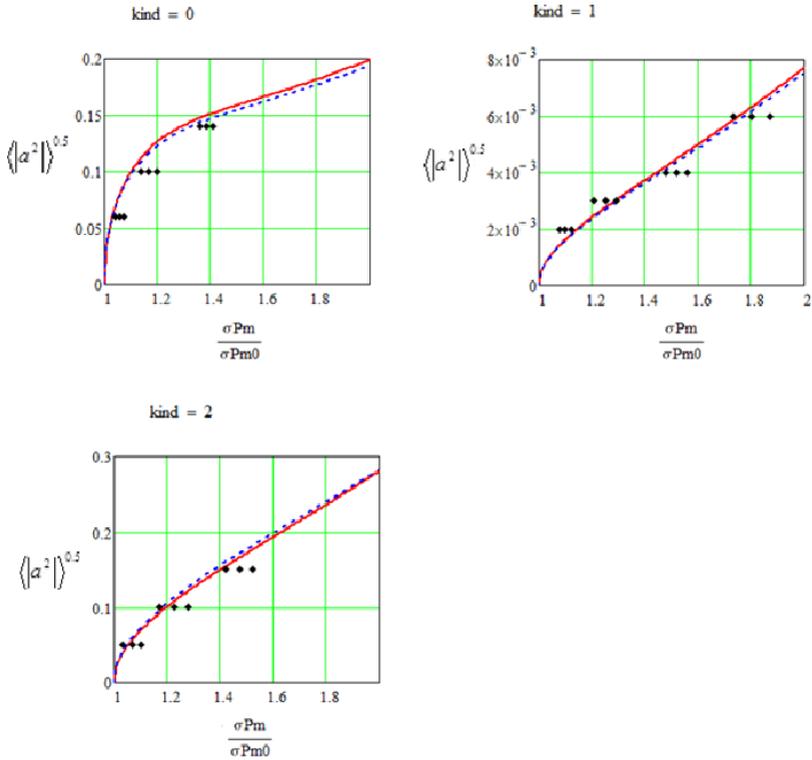


Рис. 9. Графики зависимости относительного увеличения средне-квадратичного разброса по энергии (по горизонтали) от среднеквадратичной амплитуды шума (по вертикали) при ширине полосы шума $\omega_{av} = 2\pi \cdot 10^3 \text{ c}^{-1}$, аналогичные рис.6, для $\tau_0 = 1 \text{ сек}$ с нанесенными на них результатами трекинга – установившиеся значения $\sigma_{av} / \sigma_{m0}$, $(\sigma_{av} \pm d\sigma_{av}) / \sigma_{m0}$ (ромбы).

12. Результаты расчетов

Накопление.

Заметим, что в процессе накопления тока рост среднеквадратичного разброса по энергии происходит не только из-за воздействия шумов ВЧ, но и по другим причинам, которые не входят в круг вопросов, рассматриваемых в данной работе (например, изменение среднеквадратичного разброса по энергии при перемещении импульсов барьерного напряжения). Для исключения посторонних эффектов, здесь рассматривается влияние шумов ВЧ на уже накопленный пучок при постоянной энергии. Начальный разброс

по энергии предполагается равным начальному или конечному разбросу в процессе накопления, которые отличаются в 6 раз (см. Таб. 1).

Прирост σ_{Pm} за время расчета (накопления или ускорения) связан с параметрами задачи по формулам (5.4), (5.5).

В разделе 9 вычислены диффузионные коэффициенты для шума с постоянной плотностью спектральной мощности в пределах заданной полосы частот .

$$S(\omega) = \begin{cases} S_0, & |\omega| \leq \omega_{\max}, \\ 0, & |\omega| > \omega_{\max}, \end{cases}$$

$$\langle a^2 \rangle = S_0 \cdot \frac{2\omega_{\max}}{2\pi}.$$

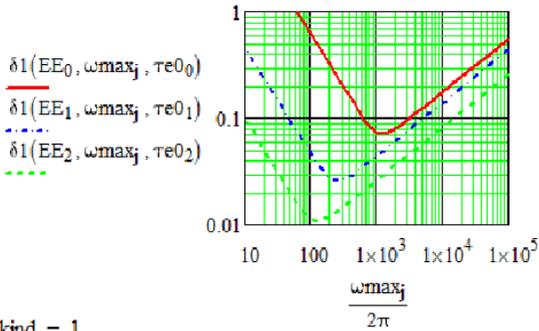
На рис. 10 приведены зависимости допустимой среднеквадратичной амплитуды такого шума $\delta_0 = \sqrt{\langle a^2 \rangle}$ от ширины спектра ω_{\max} (при допустимом увеличении среднеквадратичного разброса по энергии 10%), для $Ek = 1 \text{ GeV/u}$, $Ek = 3 \text{ GeV/u}$, $Ek = 4.5 \text{ GeV/u}$, $\sigma_{P0} = 70,28,11 \text{ sec}^{-1}$ (соответствующих $\langle \Delta p / p \rangle_{inj}$ из таб. 1) и $\tau_0 = 1,20,300 \text{ sec}$ соответственно. На рис. 11 приведены аналогичные зависимости допустимой плотности спектральной мощности шума от ширины спектра шума.

Самое строгое ограничение – на высокой энергии $Ek = 4.5 \text{ GeV/u}$ (при самом большом времени затухания).

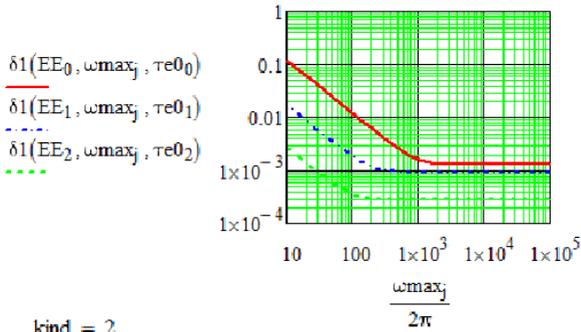
Отметим, что время накопления $T_{stor} = 440 \text{ sec}$ при $Ek = 1 \text{ GeV/u}$, $Ek = 3 \text{ GeV/u}$ много больше τ_0 для этих энергий, и за это время устанавливается стационарное значение σ_{Pm} , согласно (5.4). Однако для энергии $Ek = 4.5 \text{ GeV/u}$ $T_{stor} = 440 \text{ sec}$ лишь в 1.5 раза больше, чем $\tau_0 = 300 \text{ sec}$, за это время стационарное значение не успеет установиться, конечное значение $\sigma_{Pm}(T_{stor})$ меньше стационарного. На рис. 12 приведены зависимости $\sigma_{Pm}(t)$ для $\tau_0 = 100, 300, 1000 \text{ sec}$, для $\delta_0 = \sqrt{\langle a^2 \rangle}$, соответствующего увеличению стационарного значения σ_{Pm} на 10% и $\tau_0 = 300 \text{ sec}$.

Можно сделать вывод, что при постоянной энергии можно пользоваться результатами рис. 10, 11 и для энергии $Ek = 4.5 \text{ GeV/u}$ как оценкой снизу для амплитуды шума, при которой увеличение σ_{Pm} не превышает заданного допустимого.

kind = 0



kind = 1



kind = 2

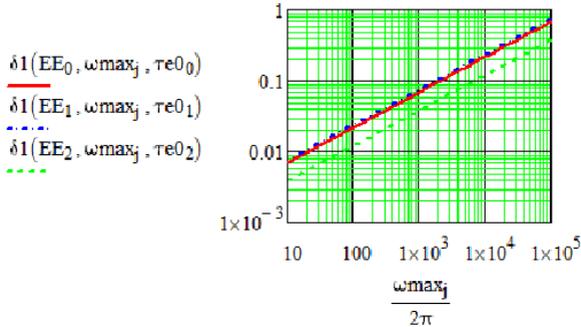


Рис. 10. Зависимость допустимой среднеквадратичной амплитуды шума δ_0 от ширины спектра ω_{\max} (при допустимом увеличении среднеквадратичного разброса по энергии 10%). Сверху вниз: возмущение амплитуды импульса барьерного напряжения, дрожание фронта импульса барьерного напряжения, возмущение амплитуды ускоряющего напряжения.

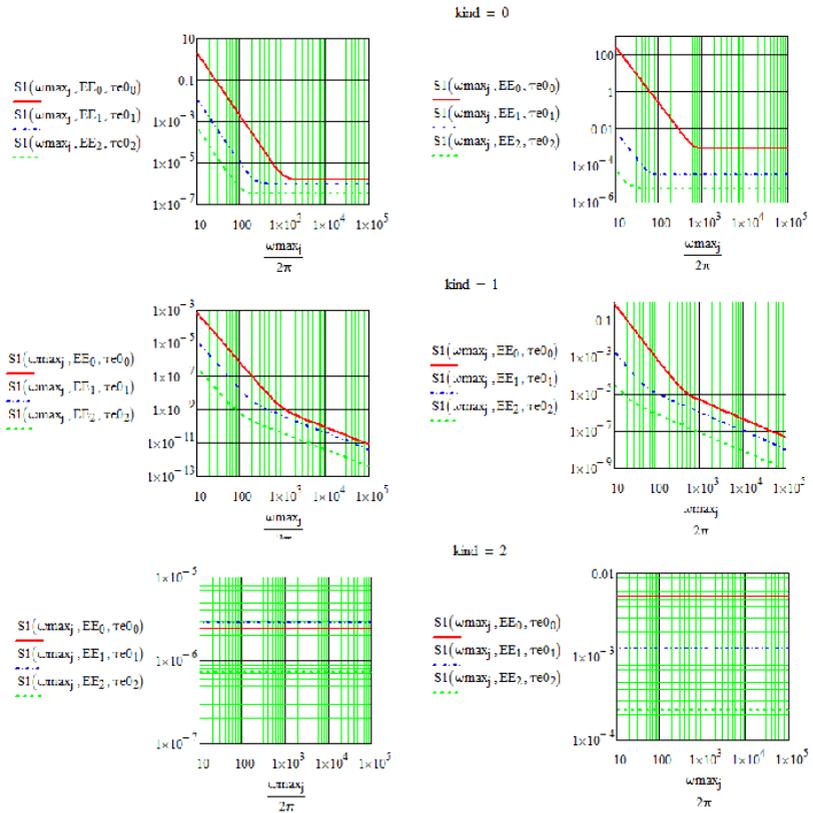


Рис. 11. Зависимость допустимой плотности спектральной мощности шума S_0 от ширины спектра ω_{\max} (при допустимом увеличении среднеквадратичного разброса по энергии 10%); для начального разброса по энергии равного разбросу при инжекции (слева) и разбросу накопленного пучка (справа).

Ускорение.

При ускорении накопленного пучка максимальное время $T_{acc} = 52$ sec начальная энергия $E_{ki} = 1 \text{ GeV}/u$, конечная энергия $E_{kf} = 4.5 \text{ GeV}/u$, все параметры, определяющие рост σ_{Pm} в каждый момент времени пересчитываются с учетом их зависимости от растущей энергии, кроме того, учитывается адиабатическое изменение σ_{Pm} при ускорении (см. (5.5)).

Сравним конечные значения σ_{Pm} с учетом шумов и без учета шумов, то есть только за счет изменения параметров с изменением энергии и адиабатического изменения σ_{Pm} .

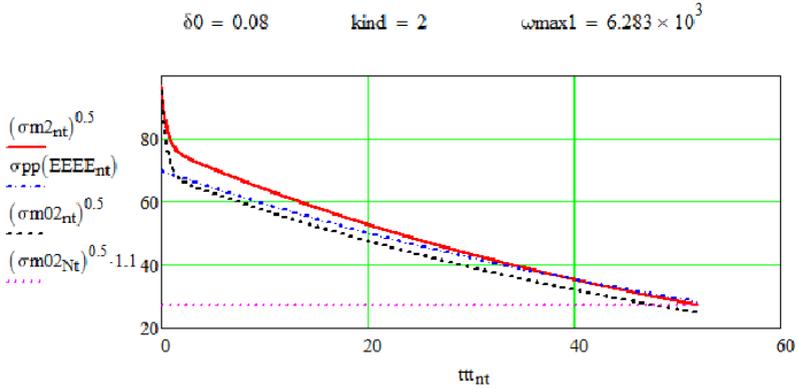


Рис. 13. Изменение σ_{Pm} со временем при ускорении: сплошная линия – с учетом шумов и адиабатического изменения σ_{Pm} ; пунктир – изменение стационарного значения σ_{Pm} при изменении параметров со временем; штрихи – с учетом адиабатического изменения σ_{Pm} без шумов; точки – уровень σ_{Pm} на 10% больше значения σ_{Pm} при максимальном значении энергии, с учетом адиабатического изменения σ_{Pm} без шумов.

Здесь $\delta_0 = 0.08$ такое, при котором σ_{Pm} в конце больше на 10% значения полученного с учетом адиабатического изменения σ_{Pm} без шумов. Отметим, что это решение не зависит от начального значения σ_{Pm} . Это можно увидеть из решения $\sigma_{Pm1}(t)$ уравнения (5.5) без шумов с начальным условием σ_{Pm10} , которое можно подставить в качестве начального приближения в правую часть (5.5) с шумами, в результате

$$\frac{d}{dt}(\sigma_{Pm1}^2) = -\left(2 \frac{\sigma_{Pm1}^2}{\tau_0(E(t))} - A_{20}\right) + 2\sigma_{Pm}^2 \frac{(dE/dt)}{k_0(E(t))} \frac{d(k_0(E(t)))}{dE},$$

$$\sigma_{Pm1}(0) = \sigma_{Pm10}$$

$$\frac{d}{dt}(\sigma_{Pm}^2) \approx \frac{d}{dt}(\sigma_{Pm1}^2) - \left(\int_0^\infty A_{2n}(P_m) \cdot \frac{\partial \rho(P_m, \sigma_{Pm1}(t))}{\partial P_m} P_m dP_m\right), \quad (12.1)$$

$$(\sigma_{Pm}(t)^2 - \sigma_{Pm1}(t)^2) \approx -\int_0^t dt \left(\int_0^\infty A_{2n}(P_m) \cdot \frac{\partial \rho(P_m, \sigma_{Pm1}(t))}{\partial P_m} P_m dP_m\right)$$

На рис. 14 приведены графики $\sigma_{Pm1}(t)$ решений уравнения (5.5) без шумов разными начальными условиями. Они отличаются только на начальном этапе при $t \leq 2\tau_0(E_{start}) \sim 2$ сек. Поэтому интегралы по времени в (12.1) отличаются только на этом промежутке времени, что дает

незначительный вклад в интеграл по всему времени ускорения. Таким образом, полное увеличение за время ускорения $\sigma_{Pm}(t)$ за счет шумов по сравнению с $\sigma_{Pm1}(t)$ не зависит от начальных условий.

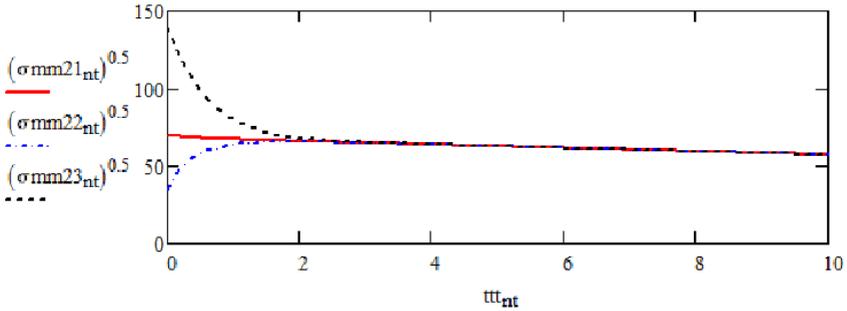


Рис.14. Графики $\sigma_{Pm1}(t)$ решений уравнения (5.5) без шумов разными начальными условиями.

Что касается ускорения до 4.5 эВ, при этом необходимо знать зависимость декремента стохастического затухания от энергии. В любом случае, результат (то есть среднеквадратичная величина шума для прироста $\sigma_{Pm}(t)$ на 10%) для стационарного решения при максимальной энергии и соответствующем этой энергии значении времени затухания $\tau_1=300$ sec будет максимальной оценкой по сравнению с ускорением до этой энергии. Если же это время затухания τ отличается от τ_1 , то допустимую среднеквадратичную величину шума надо пересчитать пропорционально $\sqrt{\tau_1 / \tau}$.

13. Измерения и расчет

Спектр ускоряющих и барьерных напряжений можно измерить анализатором спектра:

$$S_{изм}(\omega) = \frac{U(\omega)^2}{T_{изм}}$$

В отсутствие возмущений спектр состоит из амплитуд гармоник последовательности импульсов напряжения на частотах кратных частоте их следования ω_f . Если к невозмущенному напряжению добавляется шум, то в окрестности каждой гармоники появляется непрерывный спектр шумового воздействия. Измеренный шумовой спектр напряжения определяется действием всех видов шумовых возмущений. Предполагая разные виды шумовых возмущений статистически независимыми, можно записать

$$S_{изм}(\omega) = S_b(\omega) + S_f(\omega) + S_a(\omega),$$

то есть для каждого вида шума по отдельности

$$S_{b,f,a}(\omega) \leq S_{изм}(\omega).$$

Для оценки сверху можно считать

$$S_{b,f,a}(\omega) = S_{изм}(\omega)$$

В Приложении 6 приведена связь измеренной плотности спектральной мощности напряжения со плотностями спектральных мощностей рассмотренных в этой работе видов шумовых возмущений и оценка сверху для спектральных мощностей шумовых возмущений (П6.8) для $n = 1, \varphi_b = \pi / 6$

$$S_{b\max}(\Delta\omega) = \frac{2\pi}{\Delta\omega_{sp}} \frac{S_{rel}(\Delta\omega)}{S_{rel}(0)},$$

$$S_{\delta\varphi 3\max}(\Delta\omega) = 5.53 \frac{2\pi}{\Delta\omega_{sp}} \frac{S_{rel}(\Delta\omega)}{S_{rel}(0)},$$

$$S_a(\Delta\omega) = \frac{2\pi}{\Delta\omega_{sp}} \frac{S_{rel}(\Delta\omega)}{S_{rel}(0)},$$

$$S_{a'}(\Delta\omega) = 0.025 \frac{2\pi}{\Delta\omega_{sp}} \frac{S_{rel}(\Delta\omega)}{S_{rel}(0)}.$$

Здесь $S_{rel}(\Delta\omega)$ – спектр на экране спектрометра (в единицах измерения экрана спектрометра), $\Delta\omega_{sp}$ – интервал частот, по которому спектрометр усредняет мощность.

Таким образом, пересчитав измеренный спектр напряжения к плотностям спектральной мощности этих видов шумовых возмущений, можно рассчитать прирост среднеквадратичного разброса по энергии и сравнить с допустимым. Более простая оценка получится, если по измеренной плотности спектральной мощности оценить ширину полосы и максимальное значение плотности спектральной мощности полученных шумовых возмущений и воспользоваться результатами раздела 12. При этом мы получим оценку сверху на допустимые величины шумов, которые могут оказаться слишком строгими. В этом случае могут потребоваться более точные измерения спектров каждого вида шума по отдельности, более сложными методами, чем просто измерение спектра импульса напряжения.

14. Заключение

Итак, в данной работе решена задача оценки роста среднеквадратичного разброса энергии частиц из-за шумов барьерного и ускоряющего напряжения. В разделе 5 приведены выражения для расчета

среднеквадратичного разброса энергии частиц в зависимости от времени с учетом дополнительного шумового коэффициента диффузии. В разделе 6 приведены выражения для расчета дополнительных шумовых коэффициентов диффузии для известной плотности спектральной мощности шума. В разделе 11 показано сравнение результатов данных расчетов с результатами трэкинга, которое подтверждает справедливость используемого метода. В разделе 12 приведены результаты расчета роста среднеквадратичного разброса энергии частиц за счет ВЧ шумов при различных параметрах спектральной плотности мощности шума, при постоянной энергии частиц и при ускорении. Для шумов с постоянной спектральной плотностью мощности S_0 в пределах полосы частот $\pm\omega_{\max}$ определены максимальные значения спектральной плотности S_0 в зависимости от ω_{\max} , при которых увеличение среднеквадратичного разброса энергии частиц за счет ВЧ шумов не превышает допустимого значения, принятого равным 10% (см. рис.11). В разделе 13 приведен способ пересчета измеренного спектра напряжения к плотностям спектральной мощности рассмотренных в данной работе видов шумовых возмущений, используемых при расчете шумовых диффузионных коэффициентов. Это позволяет проводить расчет роста среднеквадратичного разброса энергии частиц не только для модельных, но и для реальных спектров ВЧ шумов.

Приложения

III. Статическое распределение частиц по амплитудам

В параболической потенциальной яме распределение по P – гауссовское, а по P_m – рэлеевское. В прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками распределение и по P , и по P_m – гауссовское. Определим распределение по P_m для трапециевидной потенциальной ямы, как в данном случае (рис. 2а).

Частицы движутся согласно уравнениям (2.1) в потенциале (2.2) и имеют гамильтониан (2.9). В таком потенциале функция распределения по переменным φ, P имеет вид

$$f(P, \varphi) = \frac{C}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_P} \exp\left(-\frac{P^2 + 2W(\varphi)}{2\sigma_P^2}\right) = f(0,0) \exp\left(-\frac{P^2 + 2W(\varphi)}{2\sigma_P^2}\right),$$

$$C = \left(\int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(P, \varphi) dP d\varphi\right)^{-1} = \left(\int_0^{2\pi} \exp\left(-\frac{2W(\varphi)}{2\sigma_P^2}\right) d\varphi\right)^{-1} = \sqrt{2\pi} \cdot \sigma_P \cdot f(0,0)$$

Обозначим $F(P_m)$ – число частиц с амплитудой $\leq P_m$:

$$F(P_m) = \iint_{H(P, \varphi) \leq P_m^2/2} f(t, P, \varphi) dP d\varphi = \int_0^{\infty} \rho_m(P_m) dP_m.$$

Искомая функция распределения по амплитудам равна

$$\rho_m(P_m) = \frac{dF(P_m)}{dP_m}. \text{ Нормировка дает } F(\infty) = 1. \text{ Найдем } F(P_m).$$

Будем отсчитывать φ от середины промежутка между импульсами барьерного напряжения $(\varphi_{f2} + \varphi_{f3})/2$. Разобьем $F(P_m)$ на 3 слагаемых: $F(P_m) = F_1(P_m) + F_2(P_m) + F_3(P_m)$, где $F_1(P_m)$ – число частиц, находящихся внутри промежутка между импульсами барьерного напряжения, то есть с $|\varphi| \leq \varphi_{bb}/2$, $F_2(P_m)$ – число частиц, находящихся внутри барьерного напряжения, то есть с $\varphi_{bb}/2 < |\varphi| \leq \varphi_{bb}/2 + \varphi_b$, $F_3(P_m)$ – число частиц, находящихся за областями барьерного напряжения, то есть с $\varphi_{bb}/2 + \varphi_b < |\varphi| \leq \pi$. Тогда функция распределения $\rho_m(P_m)$ также разбивается на 3 слагаемых:

$$\rho_m(P_m) = \rho_{m1}(P_m) + \rho_{m2}(P_m) + \rho_{m3}(P_m), \quad \rho_{mk}(P_m) = \frac{dF_k(P_m)}{dP_m}.$$

Вычислим $F_k(P_m)$ по отдельности.

$$F_1(P_m) = 2 \int_0^{\varphi_{bb}/2} \int_{-P_m}^{P_m} f(P, \varphi) dP d\varphi = 2\varphi_{bb} \int_0^{P_m} f(P, 0) dP,$$

$$F_3(P_m) = 2 \int_{\varphi_{bb}/2 + \varphi_b}^{\pi} \int_{-P_m}^{P_m} f(P, \varphi) dP d\varphi = 4(\pi - (\varphi_{bb}/2 + \varphi_b)) \cdot \int_0^{P_m} f(P, \varphi_{bb}/2 + \varphi_b) dP.$$

Для них

$$\rho_{m1}(P_m) + \rho_{m3}(P_m) = 2\varphi_{bb} f(P_m, 0) + 2(2\pi - (\varphi_{bb} + 2\varphi_b)) f(P_m, \varphi_{bb}/2 + \varphi_b).$$

При вычислении $F_2(P_m)$ границы и форма областей интегрирования зависят от амплитуды P_m и отличаются для $P_m^2 < P_{mb}^2$ и $P_m^2 \geq P_{mb}^2$ (см. рис.15).

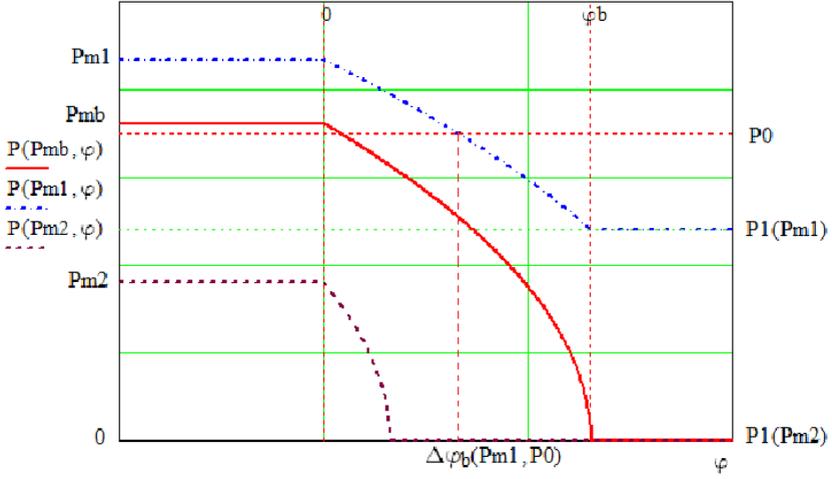


Рис. 15. Траектории частиц $P(P_m, \varphi)$ с разной амплитудой P_m внутри области барьерного напряжения. Границы областей интегрирования.

Внутри барьерного напряжения $\frac{P_m^2}{2} = \left(\frac{P^2}{2} + \Omega_0^2 \Delta\varphi \right)$, где $\Delta\varphi$ – расстояние от внутреннего (глядя изнутри сепаратрисы) фронта импульса барьерного напряжения.

Можно записать

$$F_2(P_m) = 4f(0,0) \int_0^{P_1(P_m)\varphi_b} \int_0^{\Delta\varphi_b(P_m,P)} \exp\left(-\frac{P^2}{2\sigma_P^2}\right) \exp\left(-\frac{\Omega_0^2}{\sigma_P^2} \Delta\varphi\right) d\Delta\varphi dP +$$

$$+ 4f(0,0) \int_{P_1(\varepsilon_m)}^{P_m} \int_0^{\Delta\varphi_b(P_m,P)} \exp\left(-\frac{P^2}{2\sigma_P^2}\right) \exp\left(-\frac{\Omega_0^2}{\sigma_P^2} \Delta\varphi\right) d\Delta\varphi dP,$$

где

$$P_1(P_m) = \left[\max(P_m^2 - P_{mb}^2, 0) \right]^{1/2} = \text{Re}\left(\left(P_m^2 - P_{mb}^2\right)^{1/2}\right),$$

$$P_{mb}^2 = 2\Omega_0^2\varphi_b,$$

$$\Delta\varphi_b(P_m, P) = \min\left(\left(\frac{P_m^2 - P^2}{2\Omega_0^2}\right), \varphi_b\right).$$

В результате,

$$\rho_{m2}(P_m) = \frac{d}{dP_m} F_2(P_m) = 4f(0,0) \frac{1}{\Omega_0^2} \exp\left(-\frac{P_m^2}{2\sigma_P^2}\right) P_m (P_m - \text{Re}(P_m^2 - 2\Omega_0^2\varphi_b))^{1/2},$$

$$\rho_m(P_m) = \rho_{m1}(P_m) + \rho_{m2}(P_m) + \rho_{m3}(P_m) = 2f(0,0) \exp\left(-\frac{(P_m^2)}{2\sigma_P^2}\right) \cdot \left\{ \varphi_{bb} + \varphi_{bb2} \exp\left(-\frac{P_{mb}^2}{2\sigma_P^2}\right) + \frac{2}{\Omega_0^2} P_m \left(P_m - \text{Re}(P_m^2 - P_{mb}^2)^{1/2}\right) \right\}. \quad (\text{П1.1})$$

Нормировочный коэффициент $f(0,0)$ из условия $F(\infty) = 1$:

$$f(0,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} P_{av}} \left\{ \varphi_{bb} + \varphi_{bb2} \exp\left(-\frac{P_{mb}^2}{2\sigma_P^2}\right) + 2 \frac{\sigma_P^2}{\Omega_0^2} \left(1 - \exp\left(-\frac{P_{mb}^2}{2\sigma_P^2}\right)\right) \right\}^{-1}. \quad (\text{П1.2})$$

Распределение по амплитудам не релеевское, во-первых, за счет конечного распределения частиц при малых амплитудах P_m в промежутках между импульсами барьерного напряжения, во-вторых, за счет конечной высоты импульса барьерного напряжения. Вторым и третьим слагаемыми в (П1.1) при $\frac{\sigma_P^2}{2\Omega_0^2\varphi_b} \ll 1$ можно пренебречь, однако первое нерелеевское

слагаемое остается при любом $\frac{\sigma_P^2}{2\Omega_0^2\varphi_B}$, давая результат для прямоугольной потенциальной ямы. На рис.3 показаны функции распределения по амплитудам P_m для $\sigma_P = 70$ и $\sigma_P = 70 \cdot 6$ ($E_k = 1$ GeV). Во втором случае отличие от гауссовского распределения гораздо более заметно.

Полученную функцию распределения можно использовать для вычисления скорости роста среднеквадратичного значения амплитуды P_m .

Проверим, насколько отличаются значения σ_P и σ_{P_m} .

$$\begin{aligned} \sigma_{P_m}^2 &= \int_0^{\infty} P_m^2 \rho_m(P_m) dP_m = \\ &= \sigma_P^2 \frac{\varphi_{bb} + \frac{6\sigma_P^2}{\Omega_0^2} + \exp\left(-\frac{\Omega_0^2}{\sigma_P^2} \varphi_b\right) \left(\varphi_{bb2} - 4\varphi_b \left(1 + \frac{3\sigma_P^2}{2\varphi_b \Omega_0^2}\right) \right)}{\varphi_{bb} + \frac{2\sigma_P^2}{\Omega_0^2} + \exp\left(-\frac{\Omega_0^2}{\sigma_P^2} \varphi_b\right) \left(\varphi_{bb2} + \frac{-2\sigma_P^2}{\Omega_0^2} \right)}. \end{aligned} \quad (\text{П1.3})$$

На рис.3в видно, что максимальное различие σ_{P_m} от σ_P не превышает 11%, и их отличием можно пренебречь, подставив в функции распределения σ_{P_m} вместо σ_P , особенно при $\sigma_P(t) \ll \Omega_0(E(t))$.

П2. Поправка к гамильтониану при возмущении напряжений шумом

Будем вычислять $\Delta J(t)$, используя метод [2], где рассматривались шумовые возмущения амплитуды и фазы синусоидального напряжения. В нашем случае невозмущенное напряжение – сумма прямоугольных импульсов U_b и U_a , вычисляем возмущение амплитуд этих напряжений и возмущение фронтов барьерного напряжения.

Уравнения движения имеют вид (2.1), (2.2):

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = -\Omega_0^2 \frac{1}{U_{0b}} (U(\varphi) - U(\varphi_s)) \\ \dot{\varphi} = P \end{cases}$$

Невозмущенное напряжение имеет вид

$$U_n(\varphi) = U_b(\varphi) + U_a(\varphi) = U_{0b} \left(g_b(\varphi) + \frac{U_{0a}}{U_{0b}} g_a(\varphi) \right),$$

где $g_b(\varphi)$, $g_a(\varphi)$ – ступенчатые функции единичной амплитуды, описывающие зависимости $U_b(\varphi)$ и $U_a(\varphi)$ от аргумента.

Заметим (см. рис.1), что дно потенциальной ямы плоское, любая из точек этого дна может считаться точкой синхронной фазы. Для симметрии выберем точкой синхронной фазы, а также началом координат середину промежутка между импульсами барьерного напряжения: $\varphi_s = 0$. Обозначим $U_{s0} = U_a(\varphi_s) = U_a(0)$.

С учетом возмущений

$$\begin{aligned} U_n(\varphi) &= U_n(\varphi) + \Delta U(\varphi) = U_b(\varphi) + \Delta U_b(\varphi) + U_a(\varphi) + \Delta U_a(\varphi), \\ \Delta U_b(\varphi) &= U_{0b} g_b(\varphi) a_b(t), \\ \Delta U_a(\varphi) &= U_{0b} \delta_a \cdot g_a(\varphi) a_a(t), \\ \Delta U_f(\varphi) &= U_{0b} (\delta(\varphi - \varphi_{f1}) \delta\varphi_{f1}(t) - \delta(\varphi - \varphi_{f2}) \delta\varphi_{f2}(t) - \\ &- \delta(\varphi - \varphi_{f3}) \delta\varphi_{f3}(t) + \delta(\varphi - \varphi_{f4}) \delta\varphi_{f4}(t)) = U_{0b} \sum_{k=1}^4 \delta(\varphi - \varphi'_{fk}(t)), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \delta_a &= U_{0a} / U_{0b}, \\ \varphi_1 &= \varphi_{bb} / 2 + \varphi_b, \quad \varphi_2 = \varphi_{bb} / 2, \quad \varphi_3 = -\varphi_2, \quad \varphi_4 = -\varphi_1, \\ \varphi_4 &< \varphi_3 < \varphi_2 < \varphi_1, \\ \delta(\varphi'_{f2,3}(t)) &= -\delta\varphi_{f2,3}(t), \quad \delta(\varphi'_{f1,4}(t)) = \delta\varphi_{f1,4}(t). \end{aligned}$$

Здесь $a_{b,a}(t)$ – шумовые возмущения амплитуд барьерного и ускоряющего напряжений, $\delta\varphi_{fk}(t)$ – дрожание k -го фронта барьерного напряжения, Поясним вид возмущения напряжения $\Delta U_f(\varphi)$. Невозмущенное и возмущенное напряжения вблизи k -го фронта имеют вид

$$U_n(\varphi) = U_{0k} \Phi(\pm(\varphi - \varphi_k)),$$

$$U_e(\varphi) = U_{0k} \Phi(\pm(\varphi - (\varphi_k + \delta\varphi_{fk}))).$$

Возмущение – разница $U_e(\varphi)$ и $U_n(\varphi)$ при малых возмущениях $\delta\varphi_{fk}$ в линейном по возмущению приближении записывается как

$$\begin{aligned} U_e(\varphi) - U_n(\varphi) &= U_{0k} \left[\Phi(\pm(\varphi - (\varphi_k + \delta\varphi_{fk}))) - \Phi(\pm(\varphi - \varphi_k)) \right] \approx \\ &\approx \mp U_{0k} \Phi'(\pm(\varphi - \varphi_k)) \delta\varphi_{fk} = -U_{0k} \delta(\varphi - \varphi_k) \delta\varphi_{fk}, \end{aligned}$$

что и использовано выше в выражении для $\Delta U_f(\varphi)$. Отметим также, что использование δ – функций в описании возмущения напряжения не нарушает условия малости возмущений гамильтониана, так как при его вычислении выполняется интегрирование по φ , δ –функции пропадают, и остаются слагаемые пропорциональные малым возмущениям.

Для этого напряжения потенциал принимает вид:

$$W_1(\varphi, t) = k_0 Ze \cdot \int_{\varphi_s}^{\varphi} (U(\varphi, t) - U(\varphi_s)) d\varphi = W_{10}(\varphi) + W_a(\varphi, t) + W_b(\varphi, t) + W_f(\varphi, t),$$

$$\begin{aligned} W_{10}(\varphi) &= k_0 Ze \cdot \int_{\varphi_s}^{\varphi} (U_b(\varphi) + U_a(\varphi) - U(\varphi_s)) d\varphi = \Omega_0^2 \cdot \int_0^{\varphi} (g_b(\varphi) + \delta_a(g_a(\varphi) - 1)) d\varphi = \\ &= \Omega_0^2 \cdot \int_0^{\varphi} g_b(\varphi) d\varphi = \tilde{W}_b(\varphi), \end{aligned}$$

$$W_a(\varphi, t) = k_0 Ze \cdot \int_{\varphi_s}^{\varphi} (\Delta U_a(\varphi, t)) d\varphi = a_b(t) \cdot \delta_a \cdot \Omega_0^2 \cdot \int_0^{\varphi} g_a(\varphi) d\varphi = \tilde{W}_a(\varphi) \cdot a_a(t),$$

$$W_b(\varphi, t) = k_0 Ze \cdot \int_{\varphi_s}^{\varphi} (\Delta U_b(\varphi)) d\varphi = a_b(t) \cdot \Omega_0^2 \cdot \int_0^{\varphi} g_b(\varphi) d\varphi = \Omega_0^2 \cdot a_b(t) G_b(\varphi) = \tilde{W}_b(\varphi) \cdot a_b(t),$$

$$W_f(\varphi, t) = k_0 Ze \cdot \int_{\varphi_s}^{\varphi} (\Delta U_f(\varphi)) d\varphi = \Omega_0^2 \sum_{k=1}^4 \Phi(\varphi - \varphi_{fk}) \delta\varphi'_{fk}(t) = \sum_{k=1}^4 \tilde{W}_{fk}(\varphi) \delta\varphi'_{fk}(t),$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \tilde{W}_a(\varphi) &= \delta_a \cdot \Omega_0^2 \cdot (\varphi - \varphi_s) = \delta_a \cdot \Omega_0^2 \cdot (\varphi - \varphi_{BB} / 2), \\ \tilde{W}_b(\varphi) &= \Omega_0^2 \cdot \begin{cases} |\varphi| - \varphi_{BB} / 2, & \varphi_{BB} / 2 \leq |\varphi| \leq \varphi_{BB} / 2 + \varphi_B, \\ 0, & |\varphi| < \varphi_{BB} / 2, \\ \varphi_B, & |\varphi| > \varphi_{BB} / 2 + \varphi_B, \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{П2.1})$$

$$\tilde{W}_{fk}(\varphi) = \Omega_0^2 \Phi(\varphi - \varphi_{fk}).$$

С учетом возмущений напряжения гамильтониан принимает вид:

$$H = \frac{1}{2} P^2 + W_{10}(\varphi) + \tilde{W}_a(\varphi) a_a(t) + \tilde{W}_b(\varphi) a_b(t) + \sum_{k=1}^4 \tilde{W}_{fk}(\varphi) \delta\varphi'_{fk}(t).$$

Невозмущенный гамильтониан $H_0 = \frac{1}{2}P^2 + W_{10}(\varphi) = \frac{1}{2}P_m^2$.

Далее, согласно [2], для невозмущенного движения выполним каноническое преобразование (см. [3]) от периодически меняющихся переменных φ, P к переменным действие-угол J, θ , первая из которых является медленно меняющейся на периоде изменения φ, P :

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint P d\varphi = \frac{1}{2\pi} 2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{2H_0 - 2W_{10}(\varphi)} d\varphi,$$

где $\varphi_{1,2}$ удовлетворяют условию $2H_0 - 2W_{10}(\varphi_{1,2}) = 0$.

При этом

$$\frac{dJ}{dH_0} = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{d\varphi}{P} = \frac{T_s}{2\pi} = \frac{1}{\Omega_s},$$

$$H_0 = \frac{P_m^2}{2} = \int_0^{J_0} \Omega_s(J) dJ. \quad (\text{П2.2})$$

Производящая функция для этого преобразования имеет вид

$$F_2(\varphi, J) = \int_0^\varphi d\varphi' \sqrt{2 \int_0^J \Omega_s(J') dJ' - 2W_{10}(\varphi')}.$$

Переменные P и θ определяются с помощью $F_2(\varphi, J)$ (см. [3]) функции как

$$P = \frac{\partial F_2}{\partial \varphi},$$

$$\theta = \frac{\partial F_2}{\partial J} = \Omega_s(J) \int_0^\varphi \frac{d\varphi'}{\sqrt{2 \int_0^J \Omega_s(J') dJ' - 2W_{10}(\varphi')}} = \Omega_s(J) \int_0^\varphi dt = \Omega_s(J) \cdot t.$$

– эта угловая переменная описывает набег фазы синхротронных колебаний для частицы с действием J .

В новых переменных (θ, J) невозмущенный гамильтониан имеет вид

$$\tilde{H}_0 = H_0 + \frac{\partial F_2}{\partial t} = H_0 = \int_0^{J_0} \Omega_s(J) dJ,$$

А уравнения движения превращаются в

$$\begin{cases} \frac{dJ}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta}, \\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial J}. \end{cases}$$

При равновесной невозмущенной функции распределения (см. Приложение 1) частицы должны быть равномерно распределены по углу θ .

С учетом возмущений гамильтониан записывается как

$$H = \int_0^J \Omega_s(J') dJ' + \tilde{W}_b(\varphi(\theta, J)) a_b(t) + \tilde{W}_a(\varphi(\theta, J)) a_a(t) + \sum_{k=1}^4 \tilde{W}_{fk}(\varphi(\theta, J)) \delta\varphi'_{fk}(t),$$

где вместо аргумента φ в выражения (П2.1) для функций $\tilde{W}_{a,b,f}(\varphi)$ должно быть подставлено выражение $\varphi(\theta, J)$ из канонического преобразования.

При известных зависимостях $\varphi(P_m, t)$ и $\Omega_s(P_m)$ и связи (П2.2) J и P_m

$$\varphi(J, \theta) = \varphi(P_m(J), \theta / \Omega_s(J)).$$

Для дальнейших вычислений надо разложить в ряд Фурье по θ зависимости $P(P_m(J), \theta / \Omega_s(J))$ и $\tilde{W}_{a,b,f}(\varphi(P_m(J), \theta / \Omega_s(J)))$:

$$\begin{cases} P = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k(J) e^{ik\theta}, \\ \tilde{W}_{a,b,f_j} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{a,b,f_j k}(J) e^{ik\theta}. \end{cases} \quad (\text{П2.3})$$

Коэффициенты Фурье.

Для простоты записи будем рассматривать частицу, которая в момент времени $t = 0$ проходит через середину промежутка между импульсами барьерного напряжения со скоростью $\frac{d\varphi}{dt} = P_m$. Координату φ будем также отсчитывать от этой точки.

Движение $\varphi(t)$ в промежутке между импульсами барьерного напряжения равномерное, внутри областей барьерного напряжения – равноускоренное. Функция $\varphi(t)$ – периодическая с периодом $2\pi / \Omega_s(P_m)$. На рис.16 приведены графики $P(t) = \dot{\varphi}(t)$, $\varphi(t)$, $\tilde{W}_b(t) = \tilde{W}_b(\varphi(t))$. График $\tilde{W}_a(t)$ повторяет форму $\varphi(t)$.

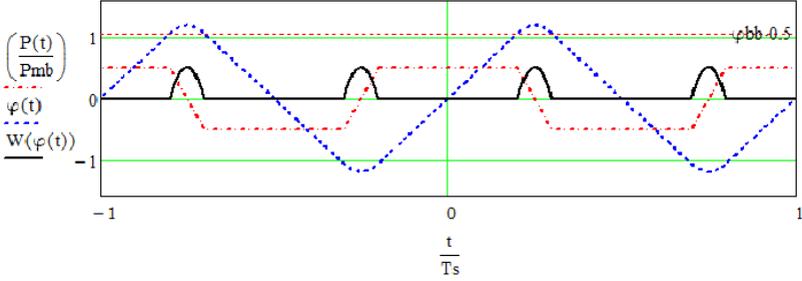


Рис. 16. Графики $P(t)$, $\varphi(t)$, $\tilde{W}_b(t)$.

Подставив $\varphi(t)$ при $t = \theta / \Omega_s(P_m)$ в (П2.1), разложим $\tilde{W}_{a,b,f}(\varphi(\theta / \Omega_s(P_m)))$ в ряд Фурье. получим (см. (П2.3)) для \tilde{W}_a :

$$|c_{ak}| = \left| -\Omega_0^2 \delta_a \frac{b_k}{ik\Omega_s} \right| = \Omega_0^2 \begin{cases} \delta_a \frac{2}{\pi} \frac{\Omega_0^2}{\Omega_s^2} \left| \frac{\sin(k\alpha)}{k^3} \right|, & k - \text{неч.}, \\ 0, & k - \text{чет.}, \end{cases}$$

$$\alpha = \Delta t_{12}(P_m)\Omega_s(P_m) / 2 = \frac{P_m\Omega_s(P_m)}{\Omega_0^2}.$$

Для $\tilde{W}_{b,fk}$ коэффициенты Фурье зависят от того, как складываются возмущения на двух последовательных импульсах барьерного напряжения. Если возмущение действует только на один (например, положительный) импульс, то

$$|c_{bk}| = \Omega_0^2 \left\{ \frac{1}{\pi} \frac{P_m^3 \Omega_s}{\Omega_0^4} \right\} \left| \frac{\sin(k\alpha) - (k\alpha)\cos(k\alpha)}{(k\alpha)^3} \right|,$$

$$|c_{fk}| = \frac{\Omega_0^2}{\pi} \left| \frac{\sin(k\alpha)}{k} \right|.$$

При подстановке полученных выражений в (П2.3) следует иметь в виду зависимость $P_m(J)$, полученную из (П2.2). Однако удобнее перейти от переменной J к переменной P_m , связанной с J выражением (П2.2), так как нам известна не зависимость $\Omega_s(J)$, а $\Omega_s(P_m)$.

Если возмущение барьерного напряжения является относительным возмущением амплитуды, то есть для положительного импульса напряжение равно $U_1(t) = U_0(1 + a_b(t))$, а для отрицательного $U_2(t) = -U_0(1 + a_b(t))$, то $|c_{bn}|$ удваивается на четных гармониках и зануляется на нечетных.

Если возмущение барьерного напряжения является дополнительным шумовым напряжением $\Delta U_b(t) = U_0 a_b(t)$ для обоих импульсов барьерного напряжения, то есть для положительного импульса напряжения $U_1(t) = U_0 + \Delta U(t) = U_0(1 + a_b(t))$, а для отрицательного $U_2(t) = -U_0 + \Delta U(t) = -U_0(1 - a_b(t))$, то наоборот, $|c_{bn}|$ удваивается на нечетных гармониках и зануляется на четных.

Аналогично меняются и коэффициенты $|c_{fn}|$, если дрожание фронтов двух импульсов барьерного напряжения имеет общее происхождение, то есть

$$|c_{bk}| = \Omega_0^2 \left\{ \frac{1}{\pi} \frac{P_m^3 \Omega_s}{\Omega_0^4} \right\} \left| \frac{\sin(k\alpha) - (k\alpha) \cos(k\alpha)}{(k\alpha)^3} \right| \cdot (1 + s_0 \cdot (-1)^k),$$

$$|c_{fk}| = \frac{\Omega_0^2}{\pi} \left| \frac{\sin(k\alpha)}{k} \right| \cdot (1 + s_0 \cdot (-1)^k), \quad (\text{П2.4})$$

$$|c_{ak}| = (1 - (-1)^k) \Omega_0^2 \delta_a \frac{1}{\pi} \frac{\Omega_0^2}{\Omega_s^2} \cdot \left| \frac{\sin(k\alpha)}{k^3} \right|,$$

где $s_0 = 0, +1, -1$ для воздействия дрожания фронта **одного** (например, положительного) импульса барьерного напряжения, **синфазного** или **противофазного** воздействия дрожания фронтов последовательных импульсов барьерного напряжения соответственно, а

$$\alpha = \Delta t_{12}(P_m) \Omega_s (P_m) / 2 = \frac{P_m \Omega_s (P_m)}{\Omega_0^2}.$$

Заметим, что $|c_{fjk}| \neq 0$ только для $j = 2, 3$, то есть только для внутренних фронтов импульсов барьерного напряжения, которые пересекают частицы, совершающие замкнутое (финитное) движение внутри потенциальной ямы. Эти частицы не долетают до внешних фронтов ($j = 1, 4$), и дрожание этих фронтов не влияет на их движение.

П3. Вычисление диффузионных коэффициентов для заданной плотности спектральной мощности шума

В [2] задача определения коэффициента диффузии $A_{2n}(x)$ решается а переменных действие – угол (θ, J) , а уравнение Фоккера-Планка (5.2) записывается для $x = J$ (при равномерном распределении частиц по фазе). При этом уравнения движения в переменных J, θ , для одного вида шумового возмущения (с использованием разложения в ряд Фурье (П2.3)) принимают вид

$$\begin{cases} \frac{dJ}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -a(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} ik \cdot c_k(J(t)) e^{ik\theta}, \\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial J} = \Omega_s(J) + a(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k'(J(t)) e^{ik\theta}. \end{cases} \quad (\text{ПЗ.1})$$

Уравнения системы (ПЗ.1) связаны между собой. При малых $a(t)$ их можно решать итерациями, выполняя следующие шаги:

0) начальное приближение: $\theta_n(t) = \theta_0 + \Omega_s(J(0))t$ и $J_n = J(0)$;

1) $\theta_n(t)$ подставим в первое уравнение (ПЗ.1), получим первое приближение $J_1(t) - J(0)$;

2) $J_1(t)$ подставим во второе уравнение (ПЗ.1), получим второе приближение $\theta_1(t)$;

3) $\theta_1(t)$ подставим в первое уравнение (ПЗ.1), получим второе приближение $J_2(t) - J(0)$,

и т.д.

Итерации более высокого порядка содержат более высокие степени $a(t)$.

Для вычисления коэффициента диффузии $A_2(J)$ для уравнения Фоккера-Планка достаточно сохранять только линейные по $a(t)$ слагаемые в выражении $J(T) - J(0)$. При этом получаем:

$$J(T) - J(0) \approx - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^T a(t) dt \cdot ik e^{ik(\theta_0 + \Omega_s t)} c_{k0}, \quad (\text{ПЗ.2})$$

$$[J(T) - J(0)]^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i(k+n)\theta_0} ik \cdot c_{k0} \cdot in \cdot c_{n0} \cdot \int_0^T a(t) dt e^{ik\Omega_s t} \cdot \int_0^T a(t) dt e^{in\Omega_s t}.$$

При усреднении по ансамблю (по всем вариантам возмущения), это выражение также надо усреднить по начальным значениям угловой переменной θ_0 , так как предполагается, что частицы распределены по θ_0 равномерно, при этом остаются только слагаемые с $k = -n$:

$$\langle [J(T) - J(0)]^2 \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |ik \cdot c_{k0}|^2 \cdot \left\langle \left| \int_0^T a(t) dt e^{ik\Omega_s t} \right|^2 \right\rangle,$$

При вычислении коэффициента диффузии $A_2(J_0) = \frac{1}{T} \langle [J(T) - J(0)]^2 \rangle$ следует брать промежутки времени T много меньше характерных времен макроскопических изменений функции распределения, однако много больше времен микроскопических воздействий, так, чтобы влияние шумов можно

было усреднить. Если этот промежуток времени достаточно велик для того, чтобы заменить $\left\langle \left| \frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt e^{ik\Omega_s t} \right|^2 \right\rangle$ на плотность спектральной мощности

шума $S(k\Omega_s(J_0)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\langle \left| \frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt e^{ik\Omega_s t} \right|^2 \right\rangle$, то получаем

$$A_2(J_0) = \frac{1}{T} \left\langle [J(T) - J(0)]^2 \right\rangle \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k \cdot c_k(J_0)|^2 \cdot S(k\Omega_s(J_0)), \quad (\text{П3.3})$$

где $S(\omega)$ - плотность спектральной мощности рассматриваемого шумового возмущения барьерного или ускоряющего напряжения:

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\langle \left| \frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt e^{i\omega t} \right|^2 \right\rangle,$$

$$S(0) = T \cdot \left\langle |a|^2 \right\rangle$$

$c_k(J_0)$ – коэффициент разложения (П2.4) невозмущенного потенциала $\tilde{W}(t)$, через который возмущение потенциала записывается как $a(t)\tilde{W}(t)$.

(П3.3) – это коэффициент диффузии для уравнения непрерывности (5.2), в зависимости от переменной J . При его использовании следует учесть зависимость $\Omega_s(J)$ и $P_m(J)$ из (П2.2). Однако удобнее перейти от переменной J к переменной P_m , так как нам известна зависимость $\Omega_s(P_m)$ (см.3.1) имеет более простой вид, чем $\Omega_s(J)$ из (П2.2). Кроме того, коэффициенты Фурье (П2.4) содержат прямую зависимость от P_m , а не от $J(P_m)$, и для них также удобна эта замена переменных. При этом уравнение непрерывности будет иметь тот же вид (5.2), а коэффициент диффузии будет пересчитываться как

$$A_2^{P_m}(P_m) =$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\left\langle [P_m(T) - P_m(0)]^2 \right\rangle}{T} = \left(\frac{\partial P_m}{\partial J} \right)^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\left\langle [J(T) - J(0)]^2 \right\rangle}{T} = \left(\frac{\partial P_m}{\partial J} \right)^2 A_2^J(J(P_m)).$$

Зависимость $J(P_m)$ и $\partial P_m / \partial J$ определяются с помощью (П2.2)

$$\frac{1}{\Omega_s} = \frac{dJ}{dH_0} = \frac{dJ / dP_m}{dH_0 / dP_m} = \frac{dJ / dP_m}{P_m} \Rightarrow \frac{dP_m}{dJ} = \frac{\Omega_s}{P_m} = \pi \left(\varphi_{BB} + \frac{2P_m^2}{\Omega_0^2} \right)^{-1},$$

Таким образом,

$$A_{2m}^{P_m}(P_m) = \left(\frac{\Omega_s}{P_m} \right)^2 A_2^J(J(P_m)) = \left(\frac{\Omega_s(P_m)}{P_m} \right)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k \cdot c_k(P_m)|^2 \cdot S(k\Omega_s(P_m)). \quad (\text{ПЗ.4})$$

Отметим, что при одновременном воздействии разных независимых возмущений коэффициенты $A_2(J)$ складываются по всем видам возмущений. Это легко показать, записав выражение (ПЗ.2) как сумму слагаемых для двух независимых видов возмущений и выполнив усреднение квадрата этого выражения, как это было сделано выше для одного вида возмущения.

Коэффициенты диффузии в зависимости от переменной P_m .

Итак, с учетом выражений для коэффициентов Фурье разложений возмущения потенциальной ямы разными видами шумов (ПЗ.4) и выражения для коэффициента диффузии $A_2(P_m)$ (ПЗ.4), получаем:

а. Амплитудное возмущение барьерного напряжения

$$A_{2b}(P_m) = \left(\frac{\Omega_s}{P_m} \right)^2 \cdot \left(\frac{\Omega_s P_m}{\pi} \right)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin(k\alpha) - (k\alpha) \cos(k\alpha)}{(k\alpha)^2} \right|^2 \cdot (1 + s_0 \cdot (-1)^k)^2 \cdot S_b(k\Omega_s). \quad (\text{ПЗ.5})$$

б. Амплитудное возмущение ускоряющего напряжения

$$A_{2a}^{P_m}(P_m) = \left(\frac{1}{\pi} \delta_a \frac{\Omega_0^4}{P_m \Omega_s} \right)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\| \frac{\sin(k\alpha)}{k^2} \right\|^2 \cdot (1 - (-1)^k)^2 \cdot S_a(k\Omega_s). \quad (\text{ПЗ.6})$$

в. Дрожание фронтов импульсов барьерного напряжения

$$A_{2f}^{P_m}(P_m) = \left(\frac{1}{\pi} \frac{\Omega_s \Omega_0^2}{P_m} \right)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\sin(k\alpha)|^2 \cdot (1 + s_0 \cdot (-1)^k)^2 \cdot S_f(k\Omega_s). \quad (\text{ПЗ.7})$$

П4. Вычисление диффузионных коэффициентов для заданного гармонического возмущения

Общие выражения для диффузионных коэффициентов (6.1) - (6.3) можно применить для гармоники шума $a(t) = a_0 \sin(\Omega_n t + \gamma)$.

Плотность спектральной мощности такого шума, действующего в течение времени T , вычисляется как

$$S(k\Omega_s(J_0)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left\langle \left[\int_0^T a(t) e^{i(k\Omega_s) t} dt \right]^2 \right\rangle_{\gamma},$$

где $\langle \rangle_\gamma$ - усреднение по случайным фазам γ :

$$\left\langle \left[\int_0^T a(t) e^{i(k\Omega_{s0})t} dt \right]^2 \right\rangle_\gamma = \frac{a_0^2}{4} \left\langle \left[\int_0^T \left(e^{i(k\Omega_{s0} + \Omega_n)t + i\gamma} + e^{i(k\Omega_{s0} - \Omega_n)t - i\gamma} \right) dt \right]^2 \right\rangle_\gamma =$$

$$= a_0^2 \left\{ \left(\frac{\sin((k\Omega_{s0} + \Omega_n)T/2)}{(k\Omega_{s0} + \Omega_n)} \right)^2 + \left(\frac{\sin((k\Omega_{s0} - \Omega_n)T/2)}{(k\Omega_{s0} - \Omega_n)} \right)^2 \right\}.$$

Здесь и далее используем следующие предельные выражения для дельта-функции:

$$\delta(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin(Tx)}{x} \right) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T\pi} \left(\frac{\sin(Tx)}{x} \right)^2, \quad (\text{П4.1})$$

Получаем:

$$S(k\Omega_s(J_0)) = \frac{\pi}{2} a_0^2 \{ \delta(k\Omega_{s0} + \Omega_n) + \delta(k\Omega_{s0} - \Omega_n) \}. \quad (\text{П4.2})$$

Для этой плотности спектральной мощности шума получаем диффузионный коэффициент

$$A_2(J_0) = 2 \frac{\pi}{2} a_0^2 \sum_{k=0}^{\infty} |k \cdot c_k(J_0)|^2 \cdot \delta(k\Omega_{s0}(J_0) - \Omega_n). \quad (\text{П4.3})$$

При конечном времени действия шума $T < \infty$ вместо дельта-функций должны быть их приближительные выражения согласно (П4.1) с конечной шириной $\sim 1/T$ и высотой $\sim T$. И если на ширине $\sim 1/T$ (по частоте) множитель к дельта-функции $|k \cdot c_k(J_0)|^2$ меняется незначительно, то есть незначительно изменение $|k \cdot c_k(J_0)|^2$ на $\Delta J \sim (1/T) \left(\Omega_{s0}'(J_k) \right)^{-1}$ (где $k\Omega_{s0}(J_k) - \Omega_n = 0$), то в интегралах, содержащих A_2 , можно подставить идеальную дельта-функцию.

Обозначим P_{mk} - значения амплитуды колебаний скорости, при которых зануляется аргумент дельта-функции: $\Omega_s(P_{mk}) = \Omega_n / k$. Тогда, пренебрегая отличием $\sigma_{P_m}^2$ и σ_P^2 можно вычислить увеличение $\sigma_{P_m}^2$ за счет гармоник шума:

$$\sigma_{P_m}^2 - \sigma_{P_{m0}}^2 = -\frac{\tau_0}{2} \int_0^{\infty} a_{2n}(P_m) \cdot \frac{\partial \rho(P_m, \sigma_{P_m})}{\partial P_m} P_m dP_m =$$

$$= -\frac{\tau_0}{2} \pi a_0^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left. \frac{\partial \rho(P_m, \sigma_{P_m})}{\partial P_m} \right|_{P_{mk}} P_{mk} \frac{|k \cdot c_k(P_{mk})|^2}{k \Omega_s'(P_{mk})}.$$

Для $P_m \ll \Omega_0$ $\Omega_s'(P_m) \approx \frac{\pi}{\varphi_{bb}}$.

Пусть $\rho_m(P_m, t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma_{Pm}(t)}} e^{-P_m^2/2\sigma_{Pm}(t)^2}$, тогда

$$\sigma_{Pm}^2 - \sigma_{Pm0}^2 = \frac{\tau_0}{2} \varphi_{bb} a_0^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2P_{mk}^2}{\sqrt{2\pi\sigma_{Pm}(t)^3}} e^{-P_{mk}^2/2\sigma_{Pm}(t)^2} k |c_k(P_{mk})|^2. \quad (\text{П4.4})$$

П5. Вычисление диффузионных коэффициентов прямым интегрированием по времени уравнений движения с возмущением

Для проверки применимости метода вычислим прямым интегрированием по времени изменение амплитуды колебаний скорости частицы P_m , вносимое шумовыми возмущениями. Предполагаем, что при вычислении диффузионного коэффициента усреднение по ансамблю равно усреднению по времени для одного случайного процесса.

Возмущение амплитуды и фазы фронта импульса барьерного напряжения.

Рассмотрим возмущение амплитуды и фазы фронта только одного импульса барьерного напряжения (положительного). Амплитуда колебаний скорости P_m изменяется при пролете через область этого барьерного напряжения и после этого не меняется до следующего влета в область этого барьерного напряжения.

Уравнения движения частицы с момента имеет вид

$$\begin{cases} P = \frac{d\varphi}{dt}, \\ \dot{\varphi} = \frac{dP}{dt} = Zek_0 U(\varphi), \end{cases}$$

$$U(\varphi) = -U_0 \cdot (1 + a_2(t)) \cdot \Phi(\varphi - \varphi_1(t)) \Phi(\varphi_2(t) - \varphi) + \\ + U_0 \cdot (1 + a_3(t)) \cdot \Phi(\varphi - \varphi_3(t)) \Phi(\varphi_4(t) - \varphi).$$

Пусть частица отражается от области второго (положительного) импульса барьерного напряжения, влетев в нее в момент времени t_1 и вылетев в момент времени t_2 . Фазовая скорость $P(t_1)$ равна амплитуде колебаний скорости в этот момент времени $P_m(t_1)$. Обозначим $\varphi_3(t) = \varphi_{30} + \delta\varphi_{f_3}(t)$ – координата пересеченного частицей фронта импульса барьерного напряжения, с учетом возмущения; $\varphi_{pk} = \varphi(t_k)$,

$P_{pk} = P(t_k)$, $P_{mpk} = P_m(t_k)$ – координата, скорость и ее амплитуда в момент времени t_k :

$$\varphi_{p1} = \varphi_{30} + \delta\varphi_{f3}(t_1),$$

$$\varphi_{p2} = \varphi_{30} + \delta\varphi_{f3}(t_2) = \varphi_{p1} + \delta\varphi_3(t_2) - \delta\varphi_{f3}(t_1),$$

$$P_{p1} = P(t_1) = P_m(t_1),$$

$$P_{p2} = P(t_2) = -P_m(t_2),$$

$$P_{p3} = P(t_1 + T_s(P_m)) = P_m(t_1 + T_s),$$

Для $t \in [t_1, t_2]$ уравнение движения имеет вид

$$\ddot{\varphi}(t) = -\Omega_0^2 \cdot (1 + a_3(t)),$$

$$\Omega_0^2 = Ze|k_0|U_0.$$

Его первый и второй интегралы вычисляются как

$$\dot{\varphi}(t_1 + \Delta t) = \dot{\varphi}_{p1} - \Omega_0^2 \cdot \left(\Delta t + \int_0^{\Delta t} a_3(t_1 + \Delta t') d\Delta t' \right),$$

$$\varphi(t_1 + \Delta t) = \varphi_{p1} + \dot{\varphi}_{p1} \Delta t - \Omega_0^2 \cdot \frac{\Delta t^2}{2} - \Omega_0^2 \int_0^{\Delta t} \left(\int_0^{\Delta t'} a_3(t_1 + \Delta t'') d\Delta t'' \right) d\Delta t'.$$

Таким образом, параметры частицы на входе и выходе из области барьерного напряжения связаны как

$$\begin{cases} \varphi_{p2} = \varphi_{p1} + P_{p1} \Delta t_{12} - \Omega_0^2 \cdot \frac{\Delta t_{12}^2}{2} - \Omega_0^2 \int_0^{\Delta t_{12}} \left(\int_0^{\Delta t'} a_3(t_1 + \Delta t'') d\Delta t'' \right) d\Delta t' = \\ \hspace{15em} = \varphi_{p1} + \delta\varphi_3(t_2) - \delta\varphi_3(t_1), \\ P_{p2} = P_{p1} - \Omega_0^2 \cdot \left(\Delta t_{12} + \int_0^{\Delta t_{12}} a_3(t_1 + \Delta t') d\Delta t' \right), \end{cases}$$

$$\Delta t_{12} = t_2 - t_1.$$

Неизвестные величины этой системы – Δt_{12} и P_{p2} . Из первого уравнения находим Δt_{12} , которое подставляем во второе уравнение и получаем $\dot{\varphi}_{p2}$. При этом в слагаемых, пропорциональных возмущениям,

можно подставить невозмущенное значение $\Delta t_{12} = \frac{2P_{mp1}}{\Omega_0^2}$, полученное при

решении системы без возмущений:

$$\left\{ \begin{aligned} P_{p2} &= -P_{p1} + 2 \frac{\Omega_0^2}{\Delta t_{12}} \int_0^{\Delta t_{12}} \left(\int_0^{\Delta t'} a_3(t_1 + \Delta t'') d\Delta t'' \right) d\Delta t' + \\ &+ 2 \frac{\delta\varphi_{f3}(t_2) - \delta\varphi_{f3}(t_1)}{\Delta t_{120}} - \Omega_0^2 \cdot \int_0^{\Delta t_{12}} a_3(t_1 + \Delta t') d\Delta t', \\ \Omega_0^2 \Delta t_{12}' &= 2P_{p1} - 2 \frac{\Omega_0^2}{\Delta t_{12}} \int_0^{\Delta t_{120}} \left(\int_0^{\Delta t'} a_3(t_1 + \Delta t'') d\Delta t'' \right) d\Delta t' - 2 \frac{\delta\varphi_{f3}(t_2) - \delta\varphi_{f3}(t_1)}{\Delta t_{12}}. \end{aligned} \right.$$

Здесь Δt_{12} – невозмущенное значение, а $\Delta t_{12}'$ – возмущенное.

После отражения от области первого (отрицательного) барьерного напряжения (без возмущения) знак скорости P меняется, таким образом, за один оборот частицы в сепаратрисе амплитуда колебаний скорости P_m меняется на

$$P_{mp3} - P_{mp1} = -2 \frac{\Omega_0^2}{\Delta t_{12}} \int_0^{\Delta t_{12}} \left(\int_0^{\Delta t'} a_3(t_1 + \Delta t'') d\Delta t'' \right) d\Delta t' + \Omega_0^2 \cdot \int_0^{\Delta t_{12}} a_3(t_1 + \Delta t') d\Delta t' - 2 \frac{\delta\varphi_{f3}(t_2) - \delta\varphi_{f3}(t_1)}{\Delta t_{12}}. \quad (\text{П5.1})$$

Функции, описывающие шумовые возмущения представим в виде интегралов Фурье:

$$\left\{ \begin{array}{l} a \\ \delta\varphi_f \end{array} \right\}_3(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} a \\ \delta\varphi \end{array} \right\}_{3\omega}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad \left\{ \begin{array}{l} a \\ \delta\varphi \end{array} \right\}_{3\omega}(\omega) = \int_0^T \left\{ \begin{array}{l} a \\ \delta\varphi \end{array} \right\}_3(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Здесь T – время, в течение которого существовало или измерялось возмущение.

Тогда интегралы, входящие в (П5.1), вычисляются как

$$\begin{aligned} \int_0^{\Delta t_{12}} a_3(t_1 + \Delta t') d\Delta t' &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a_{3\omega}(\omega) e^{i\omega t_1} \frac{e^{i\omega \Delta t_{120}} - 1}{i\omega} d\omega, \\ \int_0^{\Delta t_{12}} \left(\int_0^{\Delta t'} a_3(t_1 + \Delta t'') d\Delta t'' \right) d\Delta t' &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_{3\omega}(\omega)}{i\omega} e^{i\omega t_1} \frac{1}{i\omega} \left(e^{i\omega \Delta t_{12}} - 1 - i\omega \Delta t_{12} \right) d\omega. \end{aligned} \quad (\text{П5.2})$$

1. Возмущение фазы фронта импульса барьерного напряжения.

За один оборот частицы в сепаратрисе амплитуда колебаний скорости меняется на

$$P_{mp3} - P_{mp1} = -\frac{2}{\Delta t_{12}} \left(\delta\varphi_{f3}(t_1 + \Delta t_{12}) - \delta\varphi_{f3}(t_1) \right),$$

за n оборотов амплитуда меняется на

$$\begin{aligned}
P_{mp(2n+1)} - P_{mp1} &= -\frac{2}{\Delta t_{12}} \sum_{n_1=0}^{n-1} \left(\delta\varphi_{f3}(t_1 + n_1 T_s + \Delta t_{12}) - \delta\varphi_{f3}(t_1 + n_1 T_s) \right) = \\
&= -\frac{2}{\Delta t_{12}} \sum_{n_1=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2\pi} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \delta\varphi_{3\omega}(\omega) e^{i\omega n_1 T_s} e^{i\omega_1} \left(e^{i\omega \Delta t_{12}} - 1 \right) d\omega = \\
&= -\frac{2}{\Delta t_{12}} \left(\Phi(t_1, n, \Delta t_{12}) - \Phi(t_1, n, 0) \right)
\end{aligned}$$

где

$$\Phi(t_1, n, \Delta t_{12}) = \left(\frac{1}{2\pi} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega, n, \Delta t_{12}) e^{i\omega t_1} d\omega,$$

$$\Phi(\omega, n, \Delta t_{12}) = \delta\varphi_{3\omega}(\omega) \frac{e^{i\omega n T_s} - 1}{e^{i\omega T_s} - 1} e^{i\omega \Delta t_{12}}.$$

Далее будут использованы предельные выражения для дельта-функции (П4.1).

Усредненный квадрат приращения

$$\begin{aligned}
&\left\langle \left(P_{mp(2n+1)} - P_{mp1} \right)^2 \right\rangle = \\
&= \frac{\left\langle \left| \Phi(t_1, n, \Delta t_{12}) \right|^2 \right\rangle + \left\langle \Phi(t_1, n, 0)^2 \right\rangle - 2 \operatorname{Re} \left\langle \overline{\Phi(t_1, n, \Delta t_{12})} \Phi(t_1, n, 0) \right\rangle}{(\Delta t_{12} / 2)^2}.
\end{aligned}$$

Предполагается, что случайное возмущение таково, что усреднение по ансамблю равно усреднению по времени. Удобнее выполнить усреднение по времени, воспользовавшись (П4.1) при $T \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}
K_{\Phi}(\Delta t_{12}) &= \left\langle \overline{\Phi(t_1, n, 0)} \Phi(t_1, n, \Delta t_{12}) \right\rangle_T = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{\omega}(\omega, n, \Delta t_{12}) \overline{\Phi_{\omega'}(\omega', n, 0)} \frac{\sin\left(\frac{(\omega - \omega')T}{2}\right)}{(\omega - \omega')T/2} d\omega d\omega' \stackrel{T \rightarrow \infty}{=} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{\omega}(\omega, n, \Delta t_{12}) \overline{\Phi_{\omega'}(\omega', n, 0)} \frac{2\pi}{T} \delta(\omega - \omega') d\omega d\omega' = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{\Phi\omega}(\omega) e^{i\omega \Delta t_{12}} d\omega,
\end{aligned}$$

$$K_{\Phi\omega}(\omega) = \frac{|\delta\varphi_{3\omega}(\omega)|^2}{T} \left| \frac{e^{i\omega n T_s} - 1}{e^{i\omega T_s} - 1} \right|^2.$$

Отсюда коэффициент диффузии вычисляется как

$$\begin{aligned}
A_{2f}(P_{mp1}) &= \frac{1}{nT_s} \left\langle \left(P_{mp(2n+1)} - P_{mp1} \right)^2 \right\rangle = \\
&= 2 \frac{1}{nT_s} \left(\frac{2}{\Delta t_{12}} \right)^2 \left(K_\Phi(0) - \operatorname{Re} K_\Phi(\Delta t_{12}) \right) = \\
&= \frac{2}{2\pi} \left(\frac{2}{\Delta t_{12}} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega) (1 - \cos(\omega \Delta t_{12})) \left\{ \frac{1}{nT_0(\dot{\varphi}_{p1})} \left| \frac{\sin(\omega nT_s/2)}{\sin(\omega T_s/2)} \right|^2 \right\} d\omega, \\
S_f(\omega) &= \frac{|\delta\varphi_{3\omega}(\omega)|^2}{T}, \quad \Delta t_{12} = \Delta t_{12}(P_{mp1}) = T_b(P_{mp1}), \quad T_s = T_s(P_{mp1}).
\end{aligned} \tag{П5.3}$$

Отметим, что $T \rightarrow \infty$ - это промежуток времени, в течение которого существует этот стационарный случайный процесс и для которого вычисляли $\delta\varphi_{3\omega}(\omega)$, а $nT_s(P_{mp1}) \ll T$ - малый промежуток времени, на котором вычисляется коэффициент диффузии A_{2f} и в течение которого не меняется амплитуда P_m . Если при этом $n \gg 1$, то есть P_m мало меняется за большое число периодов, то можно воспользоваться вторым из предельных выражений (П4.1). При этом множитель в фигурных скобках под интегралом в (П5.3) при $nT_s(P_{mp1})/2 \rightarrow \infty$ превращается в $\sum_k \delta(\omega + k\pi)$ и не зависит от n . То есть можно утверждать, что, начиная с некоторого n , коэффициент диффузии не будет зависеть от n :

$$\begin{aligned}
A_{2f} &= \frac{4}{\Delta t_{12}^2 T_s} \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega) (1 - \cos(\omega \Delta t_{12})) \left\{ \frac{1}{\pi n} \left| \frac{\sin(\omega nT_s/2)}{\sin(\omega T_s/2)} \right|^2 \right\} d\omega = \\
&= \frac{4}{\Delta t_{12}^2 T_s} \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega) (1 - \cos(\omega \Delta t_{12})) \sum_k \delta(\omega T_s/2 - \pi k) d\omega = \\
&= \frac{1}{2\pi^2} \frac{\Omega_s^2 \Omega_0^4}{P_m^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 - \cos(\Omega_s k \Delta t_{12})) S_f(\Omega_s k),
\end{aligned}$$

что совпадает с полученным в Приложении 3 выражением (6.3) при $s_0 = 0$.

2. Возмущение амплитуды барьерного напряжения $a_3(t)$

За один оборот частицы в сепаратрисе амплитуда колебаний скорости меняется на

$$P_{mp3} - P_{mp1} = -2 \frac{\Omega_0^2}{\Delta t_{12}} \int_0^{\Delta t_{12}} \left(\int_0^{\Delta t'} a_3(t_1 + \Delta t'') d\Delta t'' \right) d\Delta t' + \Omega_0^2 \cdot \int_0^{\Delta t_{12}} a_3(t_1 + \Delta t') d\Delta t'$$

или, с учетом вычисления интегралов (П5.2),

$$\begin{aligned}
P_{mp3} - P_{mp1} &= \\
&= \frac{\Omega_0^2 \Delta t_{12}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a_{3\omega}(\omega) i e^{i \frac{\omega \Delta t_{12}}{2}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\omega \Delta t_{12}}{2}\right) - \left(\frac{\omega \Delta t_{12}}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega \Delta t_{12}}{2}\right)}{(\omega \Delta t_{12} / 2)^2} e^{i\omega t_1} d\omega.
\end{aligned}$$

За n оборотов, аналогично проделанному выше для $\delta\varphi_3$, получаем приращение амплитуды

$$P_{mp(2n+1)} - P_{mp1} = \sum_{n_1=1}^n P_{mp(2n_1+1)} - P_{mp(2n_1-1)} = \frac{\Omega_0^2 \Delta t_{12}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) e^{i\omega t_1} d\omega,$$

$$\begin{aligned}
B(\omega) &= \\
&= a_{3\omega}(\omega) e^{i\omega \Delta t_{12}/2} i \left(\frac{\sin(\omega \Delta t_{12} / 2) - (\omega \Delta t_{12} / 2) \cos(\omega \Delta t_{12} / 2)}{(\omega \Delta t_{12} / 2)^2} \right) \frac{e^{i\omega n T_s} - 1}{e^{i\omega T_s} - 1},
\end{aligned}$$

$$\Delta t_{12} = \Delta t_{12}(P_{mp1}) = T_b(P_{mp1}), \quad T_s = T_s(P_{mp1})$$

Средний по времени квадрат приращения

$$\begin{aligned}
&\left\langle \left| (P_{mp(2n+1)} - P_{mp1}) \right|^2 \right\rangle_T = \\
&= \left(\frac{\Omega_0^2 \Delta t_{12}}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) e^{i(\omega - \omega')t_1} B(\omega')^* d\omega d\omega' = \\
&= \left(\frac{\Omega_0^2 \Delta t_{12}}{2\pi} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) \frac{\sin((\omega - \omega')T/2)}{(\omega - \omega')T/2} B(\omega')^* d\omega d\omega' \stackrel{T \rightarrow \infty}{=} \\
&= \left(\frac{\Omega_0^2 \Delta t_{12}}{2\pi} \right)^2 \frac{2\pi}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |B(\omega)|^2 d\omega = \\
&= \frac{2}{\pi} P_m^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|a_{3\omega}(\omega)|^2}{T} \left| \frac{\sin\left(\frac{\omega \Delta t_{12}}{2}\right) - \frac{\omega \Delta t_{12}}{2} \cos\left(\frac{\omega \Delta t_{12}}{2}\right)}{(\omega \Delta t_{12} / 2)^2} \right|^2 \left| \frac{\sin\left(\frac{\omega n T_s}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega T_s}{2}\right)} \right|^2 d\omega.
\end{aligned}$$

Коэффициент диффузии при этом при $n \gg 1$ превращается в (6.1) (для возмущения амплитуды одного импульса барьерного напряжения):

$$\begin{aligned}
A_{2b} &= \frac{1}{n\Gamma_s(P_{mp1})} \left\langle (P_{mp(2n+1)} - P_{mp1})^2 \right\rangle^{n \gg 1} = \\
&= \frac{4P_m^2}{T_s^2} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \left[\frac{\sin\left(\frac{\omega\Delta t_{12}}{2}\right) - \frac{\omega\Delta t_{12}}{2} \cos\left(\frac{\omega\Delta t_{12}}{2}\right)}{(\omega\Delta t_{12}/2)^2} \right]^2 \cdot \sum_k \delta\left(\frac{\omega T_s}{2} - k\pi\right) d\left(\frac{\omega T_s}{2}\right) = \\
&= \frac{\Omega_s^2 P_m^2}{\pi^2} \sum_k S(k\Omega_s) \left[\frac{\frac{k\Omega_s\Delta t_{12}}{2} \cos\left(\frac{k\Omega_s\Delta t_{12}}{2}\right) - \sin\left(\frac{k\Omega_s\Delta t_{12}}{2}\right)}{(k\Omega_s\Delta t_{12}/2)^2} \right]^2.
\end{aligned}$$

3. Синфазное и противофазное возмущение фронтов двух последовательных импульсов барьерного напряжения.

Если возмущения амплитуд или фронтов двух последовательных импульсов барьерного напряжения синфазны или противофазны, то при вычислении изменения амплитуды скорости за один оборот надо сложить вклады дрожания фронтов двух импульсов, с учетом знака (плюс или минус) и сдвига во времени на $T_s(P_{mp1})/2$. Так, для возмущения внутренних фронтов импульсов барьерного напряжения

$$\begin{aligned}
P_{mp3} - P_{mp1} &= -\frac{2}{\Delta t_{12}} \cdot \left\{ \delta\varphi_{f3}(t_1 + \Delta t_{12}) - \delta\varphi_{f3}(t_1) + \right. \\
&\quad \left. + (\pm 1) \cdot \left[\delta\varphi_{f3}\left(t_1 + \frac{T_s}{2} + \Delta t_{12}\right) - \delta\varphi_{f3}\left(t_1 + \frac{T_s}{2}\right) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Дальнейшие вычисления, как и вычисления для возмущения амплитуд импульсов барьерного напряжения, аналогичны выполненным выше для дрожания одного фронта барьерного напряжения, и в пределе переходят в выражения (6.3), (6.1).

Итак, для синфазных или противофазных возмущений двух импульсов барьерного напряжения в полученных выражениях для возмущений одного импульса нужна замена

$$\left\{ \begin{array}{c} \delta\varphi \\ a \end{array} \right\}_{3\omega}(\omega) \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \delta\varphi \\ a \end{array} \right\}_{3\omega}(\omega) \cdot (1 + (\pm 1) \cdot e^{i\omega T_s/2}).$$

4. Возмущение амплитуды ускоряющего напряжения.

Вычисление для возмущений амплитуды ускоряющего напряжения несколько отличаются от предыдущих, так как эти возмущения действуют не

только внутри областей барьерного напряжения, но и в промежутке между ними.

Итак, пусть амплитуда ускоряющего напряжения U_{a0} имеет возмущение $\Delta U_a(t)$, тогда

$$U_a(t) = U_{a0} + \Delta U_{a0}(t) = U_{a0} + U_{b0} \cdot a(t),$$

$$a(t) = \Delta U_a(t) / U_{b0}.$$

Отметим, что возмущение ускоряющего напряжения мы нормировали не на U_{a0} , а на U_{b0} по двум причинам: 1) для того, чтобы полученные формулы работали и тогда, когда $U_{a0} = 0$; 2) для того, чтобы использовать предыдущие результаты для учета вклада промежутков внутри областей барьерного напряжения.

Уравнения движения имеют вид:

$$\begin{cases} P = \frac{d\varphi}{dt}, \\ \ddot{\varphi} = \frac{dP}{dt} = Zek_0 (U(\varphi, t) - U(\varphi_s, t)), \end{cases}$$

$$U(\varphi_s, t) = U_{a0},$$

$$\Delta U(\varphi, t) = (U(\varphi, t) - U(\varphi_s, t)) =$$

$$= -U_{b0} \cdot \Phi(\varphi - \varphi_1)\Phi(\varphi_2 - \varphi) + U_{b0} \cdot \Phi(\varphi - \varphi_3)\Phi(\varphi_4 - \varphi) + U_{b0}a(t).$$

Таким образом, уравнения движения можно переписать как

$$\ddot{\varphi} = \frac{dP}{dt} = \Omega_0^2 \begin{cases} -1 + a(t), & \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, \\ a(t), & \varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_3, \\ 1 + a(t), & \varphi_3 \leq \varphi \leq \varphi_4. \end{cases}$$

Отметим, что добавка напряжения в пределах областей барьерного напряжения дает такой же прирост амплитуды колебаний скорости P_m , что и полученный в предыдущем пункте для амплитудной вариации барьерного напряжения. Рассмотрим вклад в P_m за время пролета промежутка между областями барьерного напряжения $\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_3$.

Вычислим изменение P_m за период финитного движения частицы в потенциальной яме.

$$P_0 = P_m(t_0 = 0) = P_{m0} \tag{П5.4}$$

– в момент вылета из области первого (отрицательного) импульса барьерного напряжения;

$$P_1 = P(t_1 = T_{bb}(P_{m0})) = P_0 + \Omega_0^2 \int_{t_0}^{t_1} a(t) dt, \quad (\text{П5.5})$$

$$T_{bb}(P_{m0}) = \varphi_{bb} / P_{m0},$$

– после пролета свободного промежутка, перед влетом в область второго импульса барьерного напряжения, в момент времени $t_1 = T_{bb}(P_{m0})$;

При пролете через область второго импульса используем выражение для возмущения амплитуды барьерного напряжения, с учетом того, что в данном случае относительное возмущение равно $-a(t)$:

$$P_2 = -P_1 - 2 \frac{\Omega_0^2}{\Delta t_{12}} \int_0^{\Delta t_{12}} \left(\int_0^{\Delta t'} a(t_1 + \Delta t'') d\Delta t'' \right) d\Delta t' + \Omega_0^2 \cdot \int_0^{\Delta t_{12}} a(t_1 + \Delta t') d\Delta t' \quad (\text{П5.6})$$

– после вылета из области второго импульса барьерного напряжения;

$$P_3 = P_m(t_3 = t_2 + T_{bb}) = P_2 + \Omega_0^2 \int_{t_2}^{t_3} a(t) dt, \quad (\text{П5.7})$$

– перед влетом в область первого импульса;

$$P_{m3} = -P_3$$

При пролете через область первого импульса скорость P в момент влета и ускорение противоположного знака по сравнению с пролетом через область второго импульса, а относительное возмущение амплитуды напряжения равно $+a(t)$. В момент вылета из области первого импульса барьерного напряжения

$$P_4 = P_m(t_4 = t_3 + \Delta t_{12}) = -P_3 - 2 \frac{\Omega_0^2}{\Delta t_{12}} \int_0^{\Delta t_{12}} \left(\int_0^{\Delta t'} a(t_3 + \Delta t'') d\Delta t'' \right) d\Delta t' + \Omega_0^2 \cdot \int_{t_3}^{t_4} a(t) dt, \quad (\text{П5.8})$$

Или, с учетом (П5.4)-(П5.8):

$$\begin{aligned} P_4 &= P_m(t_4 = t_3 + T_b(P_{m3})) = P_m(t_4 = t_0 + T_s) = \\ &= P_0 + \Omega_0^2 \int_{t_0}^{t_1} a(t) dt + 2 \frac{\Omega_0^2}{\Delta t_{12}} \int_0^{\Delta t_{12}} \left(\int_0^{\Delta t'} a(t_1 + \Delta t'') d\Delta t'' \right) d\Delta t' - \Omega_0^2 \cdot \int_0^{\Delta t_{12}} a(t_1 + \Delta t') d\Delta t' \\ &- \Omega_0^2 \int_{t_2}^{t_3} a(t) dt - 2 \frac{\Omega_0^2}{\Delta t_{12}} \int_0^{\Delta t_{12}} \left(\int_0^{\Delta t'} a(t_3 + \Delta t'') d\Delta t'' \right) d\Delta t' + \Omega_0^2 \cdot \int_{t_3}^{t_4} a(t) dt. \end{aligned}$$

– амплитуда колебаний скорости частицы через период синхротронных колебаний после t_0 .

Считая, что изменение P_m за период мало, во все промежутки времени подставляем начальное значение P_{m0} :

$$\begin{aligned}
 P_{m4} = & P_{m0} + \Omega_0^2 \int_0^{T_{bb}} a(t_0 + \Delta t) d\Delta t + 2 \frac{\Omega_0^2}{\Delta t_{12}} \int_0^{\Delta t_{12}} \left(\int_0^{\Delta t'} a(t_1 + \Delta t'') d\Delta t'' \right) d\Delta t' - \\
 & - \Omega_0^2 \int_0^{\Delta t_{12}} a(t_1 + \Delta t) d\Delta t - \Omega_0^2 \int_0^{T_{bb}} a(t_0 + T_s / 2 + \Delta t) d\Delta t \\
 & - \frac{2\Omega_0^2}{\Delta t_{12}} \int_0^{\Delta t_{12}} \left(\int_0^{\Delta t'} a(t_1 + \frac{T_s}{2} + \Delta t'') d\Delta t'' \right) d\Delta t' + \Omega_0^2 \int_0^{\Delta t_{12}} a(t_1 + \frac{T_s}{2} + \Delta t) d\Delta t.
 \end{aligned}$$

Дальше выражаем интегралы через спектр $a(t)$:

$$\begin{aligned}
 a(t) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a_{\omega}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad a_{\omega}(\omega) = \int_0^T a(t) e^{-i\omega t} dt, \\
 \int_0^{\Delta t} a(t_1 + \Delta t') d\Delta t' = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a_{\omega}(\omega) e^{i\omega t_1} \frac{e^{i\omega \Delta t} - 1}{i\omega} d\omega, \\
 \int_0^{\Delta t} \left(\int_0^{\Delta t'} a(t_1 + \Delta t'') d\Delta t'' \right) d\Delta t' = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_{\omega}(\omega)}{i\omega} e^{i\omega t_1} \left(\frac{1}{i\omega} (e^{i\omega \Delta t} - 1 - i\omega \Delta t) \right) d\omega, \\
 P_{m4} - P_{m0} = & \Omega_0^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a_{\omega}(\omega) e^{i\omega t_0} \left(1 - e^{i\omega T_s / 2} \right) \cdot \\
 & \cdot \left\{ \frac{e^{i\omega T_{bb}} - 1}{i\omega} + 2 \frac{e^{i\omega T_{BB}}}{\Delta t_{12}} \left(\frac{e^{i\omega \Delta t_{12}} - 1 - i\omega \Delta t_{12}}{(i\omega)^2} \right) - e^{i\omega T_{BB}} \frac{e^{i\omega \Delta t_{12}} - 1}{i\omega} \right\} d\omega = \\
 = & \Omega_0^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_{\omega}(\omega)}{i\omega} e^{i\omega t_0} \left(1 - e^{i\omega T_s / 2} \right) \cdot \\
 & \cdot \left\{ \left(e^{i\omega \left(\frac{T_s}{2} - \Delta t_{12} \right)} - 1 \right) + 2 e^{i\omega \left(\frac{T_s}{2} - \Delta t_{12} \right)} e^{i\frac{\omega \Delta t_{12}}{2}} \left(\frac{\sin \left(\frac{\omega \Delta t_{12}}{2} \right)}{\omega \Delta t_{12} / 2} - \cos \left(\frac{\omega \Delta t_{12}}{2} \right) \right) \right\} d\omega
 \end{aligned}$$

– это приращение P_m за период синхротронных колебаний от $t = t_0$ до $t = t_0 + T_s(P_m)$.

Приращение P_m за n периодов вычисляется так же, как было сделано выше для барьерного напряжения. В результате получаем:

$$P_{m4n} - P_{m0} = \frac{\Omega_0^2 \Delta t_{12}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) e^{i\omega t_0} d\omega,$$

$$B(\omega) = a_\omega(\omega) \frac{1 - e^{i\omega T_s}}{1 - e^{i\omega T_s}} \left(1 - e^{i\omega T_s/2}\right) \left\{ \frac{e^{i\omega T_s/2} - 1}{i\omega \Delta t_{12}} - e^{i\omega T_{bb}} \frac{(e^{i\omega \Delta t_{12}} - 1 - i\omega \Delta t_{12})}{(i\omega \Delta t_{12})^2 / 2} \right\}.$$

Средний по времени квадрат приращения равен

$$\begin{aligned} \left\langle |(P_{m4n} - P_{m0})|^2 \right\rangle_T &= \left(\frac{\Omega_0^2 \Delta t_{12}}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) e^{i(\omega - \omega')t_0} B(\omega')^* d\omega d\omega' = \\ &= \left(\frac{\Omega_0^2 \Delta t_{12}}{2\pi} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) \frac{\sin((\omega - \omega')T/2)}{(\omega - \omega')T/2} B(\omega')^* d\omega d\omega' \stackrel{T \rightarrow \infty}{=} \\ &= \left(\frac{\Omega_0^2 \Delta t_{12}}{2\pi} \right)^2 \frac{2\pi}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) \delta(\omega - \omega') B(\omega')^* d\omega d\omega' = \left(\frac{\Omega_0^2 \Delta t_{12}}{2\pi} \right)^2 \frac{2\pi}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |B(\omega)|^2 d\omega, \end{aligned}$$

Так как $S_a(\omega) = \frac{1}{T} |a_\omega(\omega)|^2$, коэффициент диффузии равен

$$\begin{aligned} A_{2a} &= \frac{1}{nT_s} \left\langle |(P_{m4n} - P_{m0})|^2 \right\rangle_T = \\ &= \frac{1}{nT_s} \left(\frac{\Omega_0^2 T_s / 2}{2\pi} \right)^2 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} S_a(\omega) \frac{|(1 - e^{i\omega T_s/2})|^2}{(\omega T_s / 2)^2} \left| \frac{\sin(\omega T_s / 2)}{\sin(\omega T_s / 2)} \right|^2 \cdot \\ &\cdot \left[\left(e^{i\omega \left(\frac{T_s}{2} - \Delta t_{12} \right)} - 1 \right) + 2e^{i\omega \left(\frac{T_s - \Delta t_{12}}{2} \right)} \left(\frac{\sin\left(\frac{\omega \Delta t_{12}}{2} \right)}{\omega \Delta t_{12} / 2} - \cos\left(\frac{\omega \Delta t_{12}}{2} \right) \right) \right]^2 d\omega \stackrel{n \gg 1}{=} \\ &= \left(\frac{\Omega_0^2}{2} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} S_a(\omega) \frac{|(1 - e^{i\omega T_s/2})|^2}{(\omega T_s / 2)^2} \sum_k \delta(\omega T_0 / 2 - k\pi) \cdot \\ &\cdot \left[e^{i\omega \left(\frac{T_s}{2} - \Delta t_{12} \right)} - 1 + 2e^{i\omega \left(\frac{T_s - \Delta t_{12}}{2} \right)} \left(\frac{\sin\left(\frac{\omega \Delta t_{12}}{2} \right)}{\omega \Delta t_{12} / 2} - \cos\left(\frac{\omega \Delta t_{12}}{2} \right) \right) \right]^2 d\left(\frac{\omega T_s}{2} \right) = \\ &= \left(\frac{2\Omega_0^4}{\pi \Omega_s P_m} \right)^2 \sum_{k \text{ неч.}} S_a(k\Omega_s) \left| \frac{\sin(k\Omega_s T_b / 2)}{k^2} \right|^2, \end{aligned}$$

что совпадает с (6.2).

Пб. Пересчет плотности спектральной мощности шумового возмущения амплитуды барьерного и ускоряющего напряжения и дрожания фронта барьерного напряжения в плотность спектральной мощности напряжения

Шумовое возмущение амплитуды барьерного и ускоряющего напряжения и дрожание фронтов барьерного напряжения в этой работе описываются как

$$U_b(t) = U_{b0} + \Delta U_b(t) = U_{b0} (1 + a_b(t))$$

$$U_a(t) = U_{a0} + \Delta U_a(t) = U_{a0} (1 + a_a(t)) = U_{a0} + U_{b0} a_a'(t),$$

$$a_a'(t) = a_a(t) \frac{U_{a0}}{U_{b0}},$$

$$\varphi_k(t) = \varphi_{0k} + \delta\varphi_{fk}(t),$$

$$\varphi_{02} = \varphi_{01} + \varphi_b, \quad \varphi_{04} = \varphi_{03} + \varphi_b.$$

Суммарное напряжение без шумов равно

$$U_{\text{невозм}}(t, \varphi) = U_{b0} (-\Phi(\varphi - \varphi_{10})\Phi(\varphi_{20} - \varphi) + \Phi(\varphi - \varphi_{30})\Phi(\varphi_{40} - \varphi)) + U_{a0} (\Phi(\varphi - 0))\Phi(\pi - \varphi) - \Phi(\varphi - \pi)\Phi(2\pi - \varphi)). \quad (\text{Пб.1})$$

Суммарное напряжение с учетом всех возмущений записывается как

$$U(t, \varphi) = U_b(t) (-\Phi(\varphi - \varphi_1(t))\Phi(\varphi_2(t) - \varphi) + \Phi(\varphi - \varphi_3(t))\Phi(\varphi_4(t) - \varphi)) + U_a(t) (\Phi(\varphi - 0))\Phi(\pi - \varphi) - \Phi(\varphi - \pi)\Phi(2\pi - \varphi)). \quad (\text{Пб.2})$$

Отметим, что в зависимости $U(t, \varphi)$ выделена быстрая зависимость от времени через $\varphi = \omega_{jf}t$ и медленная через зависимость от времени $a_b(t), \delta\varphi_{fk}(t), a_a(t)$.

Определим плотность спектральной мощности этого напряжения с учетом всех шумов.

1. Амплитудное возмущение барьерного напряжения.

Напряжение (Пб.1) с шумовым возмущением амплитуды напряжения одного импульса барьерного напряжения записывается как

$$U_b(t, \varphi) = U_{b0} (-\Phi(\varphi - \varphi_{01})\Phi(\varphi_{02} - \varphi) + (1 + a_b(t))\Phi(\varphi - \varphi_{03})\Phi(\varphi_{04} - \varphi)),$$

$$\varphi = \omega_{jf}t.$$

Относительное возмущение амплитуды барьерного напряжения $a_b(t)$ выражается через его спектр $a_{b\omega}(\omega)$ как

$$a_b(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a_{b\omega}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

$U_b(t, \omega_{rf}t)$ выражается через гармоники невозмущенного барьерного напряжения и спектр шумового возмущения амплитуды как

$$\begin{aligned} U_b(t) &= U_{b0} \sum_n \left(u_{bn} e^{in\omega_{rf}t} + u_{b2n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a_{b\omega}(\omega) e^{i(n\omega_{rf} + \omega)t} d\omega \right) = \\ &= U_{b0} \sum_n u_{bn} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(2\pi\delta(\omega - n\omega_{rf}) + \frac{u_{b2n}}{u_{bn}} a_{b\omega}(\omega - n\omega_{rf}) \right) e^{i\omega t} d\omega \right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} u_{b1n} &= \frac{1}{T_{rf}} \int_{-T_{rf}/2}^{T_{rf}/2} \left(-\Phi(\omega_{rf}t - \varphi_{01}) \Phi(\omega_{rf}t - \varphi) \right) e^{-in\omega_{rf}t} dt = e^{-in(\varphi_{01} + \varphi_{02})/2} \frac{\sin(n\varphi_b/2)}{\pi n}, \\ u_{b2n} &= \frac{1}{T_{rf}} \int_{-T_{rf}/2}^{T_{rf}/2} \left(\Phi(\omega_{rf}t - \varphi_{03}) \Phi(\varphi_{04} - \omega_{rf}t) \right) e^{-in\omega_{rf}t} dt = e^{-in(\varphi_{04} + \varphi_{03})/2} \frac{\sin(n\varphi_b/2)}{\pi n}, \\ u_{bn} &= u_{b1n} + u_{b2n} \end{aligned} \tag{П6.3}$$

– амплитуды n -х гармоник спектра последовательностей отрицательных или положительных импульсов барьерного напряжения (П6.1).

Таким образом, спектр $U_{b\omega}(\omega)$ напряжения $U_b(t)$ с шумовым возмущением амплитуды одного (положительного) импульса барьерного напряжения имеет вид

$$U_{b\omega}(\omega) = U_{b0} \sum_n u_{bn} \left(2\pi\delta(\omega - n\omega_{rf}) + \frac{u_{b2n}}{u_{bn}} a_{b\omega}(\omega - n\omega_{rf}) \right),$$

А плотность спектральной мощности барьерного напряжения с шумовым возмущением амплитуды напряжения импульса барьерного напряжения записывается как

$$\begin{aligned} S_{Ub}(\omega) &= \left\langle \frac{|U_{b\omega}|^2}{T} \right\rangle = U_{b0}^2 \sum_n |u_{bn}|^2 \left\{ 2\pi\delta(\omega - n\omega_{rf}) + \left| \frac{u_{b2n}}{u_{bn}} \right|^2 \frac{|a_{b\omega}(\omega - n\omega_{rf})|^2}{T} \right\} = \\ &= U_{b0}^2 \sum_n |u_{bn}|^2 \left\{ 2\pi\delta(\omega - n\omega_{rf}) + \left| \frac{u_{b2n}}{u_{bn}} \right|^2 S_b(\omega - n\omega_{rf}) \right\}, \end{aligned}$$

где $S_b(\omega) = \left\langle \frac{1}{T} |a_{b\omega}(\omega)|^2 \right\rangle$ – плотность спектральной мощности шумового возмущения амплитуды барьерного напряжения.

Если относительные возмущения амплитуд положительного и отрицательного импульса барьерного напряжения синфазны или противофазны, то

$$U_{b\omega}(\omega) = U_{b0} \sum_n u_{bn} \left(2\pi\delta(\omega - n\omega_{rf}) + \frac{u_{b1n} \pm u_{b2n}}{u_{bn}} a_{b\omega}(\omega - n\omega_{rf}) \right),$$

$$S_{Ub}(\omega) = U_{b0}^2 \sum_n |u_{bn}|^2 \left\{ 2\pi\delta(\omega - n\omega_{rf}) + \left| \frac{u_{b1n} \pm u_{b2n}}{u_{bn}} \right|^2 S_b(\omega - n\omega_{rf}) \right\}. \quad (\text{Пб.4})$$

Если относительные возмущения амплитуд положительного и отрицательного импульса барьерного напряжения независимы (с одинаковыми $S_b(\omega - n\omega_{rf})$), то

$$S_{Ub}(\omega) = U_{b0}^2 \sum_n \left\{ |u_{bn}|^2 2\pi\delta(\omega - n\omega_{rf}) + (|u_{b1n}|^2 + |u_{b2n}|^2) S_b(\omega - n\omega_{rf}) \right\}.$$

В окрестности одной гармоники $n\omega_{rf}$ при усреднении спектра в полосе $\Delta\omega_{sp}$

$$S_{Ub}(\omega) = U_{b0}^2 \left(\frac{\sin(n\varphi_b / 2)}{\pi n} \right)^2 \left| 2 \sin(n(\varphi_{bb} + \varphi_b) / 4) \right|^2 \cdot \frac{2\pi}{\Delta\omega_{sp}}.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_n(\omega - n\omega_{rf}) + \frac{\Delta\omega_{sp}}{2\pi} S_b(\omega - n\omega_{rf}), \quad (\text{синфаз.}) \\ \Phi_n(\omega - n\omega_{rf}) + \frac{\Delta\omega_{sp}}{2\pi} \left| \text{ctg} \left(\frac{n(\pi - \varphi_b)}{4} \right) \right|^2 S_b(\omega - n\omega_{rf}), \quad (\text{противофаз.}) \end{array} \right.$$

$$\Phi_n(\Delta\omega) = \Phi(\Delta\omega + \Delta\omega_{sp} / 2) \Phi(\Delta\omega_{sp} / 2 - \Delta\omega), \quad \Delta\omega = \omega - n\omega_{rf}.$$

На дисплее спектрометра виден относительный спектр

$$S_{rel}(\Delta\omega) =$$

$$= C_0 \cdot \left\{ \begin{array}{l} \Phi_n(\Delta\omega) + \frac{\Delta\omega_{sp}}{2\pi} S_b(\Delta\omega), \quad (\text{синфаз.}), \\ \Phi_n(\Delta\omega) + \frac{\Delta\omega_{sp}}{2\pi} \left| \text{ctg} \left(\frac{n(\pi - \varphi_b)}{4} \right) \right|^2 S_b(\Delta\omega), \quad (\text{противофаз.}), \end{array} \right.$$

$$\Delta\omega = \omega - n\omega_{rf}.$$

При уменьшении $\Delta\omega_{sp}$ $S_{rel}(0) \rightarrow C_0$. При достаточно малом $\Delta\omega_{sp}$ для $|\Delta\omega| > |\Delta\omega_{sp} / 2|$

$$S_b(\Delta\omega) = \frac{2\pi}{\Delta\omega_{sp}} \frac{S_{rel}(\Delta\omega)}{S_{rel}(0)} \left\{ \frac{1}{\left| \text{tg} \left(n(\pi - \varphi_b) / 4 \right) \right|^2} \right\}.$$

Для оценки сверху берем максимальное значение по рассмотренным вариантам сочетания фаз возмущений напряжений двух импульсов:

$$S_{b\max}(\Delta\omega) = \frac{2\pi}{\Delta\omega_{sp}} \frac{S_{rel}(\Delta\omega)}{S_{rel}(0)} \max \left\{ 1, \left| \operatorname{tg} \left(n(\pi - \varphi_b) / 4 \right) \right|^2 \right\}.$$

Для $n = 1, \varphi_b = \pi / 6$

$$S_{b\max}(\Delta\omega) = \frac{2\pi}{\Delta\omega_{sp}} \frac{S_{rel}(\Delta\omega)}{S_{rel}(0)} \max \{1, 0.59\} = \frac{2\pi}{\Delta\omega_{sp}} \frac{S_{rel}(\Delta\omega)}{S_{rel}(0)}.$$

2. Дрожание фронта барьерного напряжения.

Пусть имеет место дрожание одного фронта одного импульса барьерного напряжения $\varphi_3(t) = \varphi_{30} - \delta\varphi_{f3}(t)$. Это приводит к добавке напряжения вида:

$$U(t) = U_{невозм}(t) + \Delta U_{f3}(t),$$

$$\Delta U_{f3}(t) = U_{b0} \begin{cases} \Phi(\Delta\varphi - \delta\varphi_{f3}(t))\Phi(-\Delta\varphi), & \delta\varphi_{f3}(t) < 0, \\ -\Phi(\delta\varphi_{f3}(t) - \Delta\varphi)\Phi(\Delta\varphi), & \delta\varphi_{f3}(t) > 0, \end{cases}$$

$$\Delta\varphi = \omega_f t - \varphi_{30}, \quad |\delta\varphi_{f3}(t)| < \varphi_b$$

Возмущение координаты фронта барьера $\delta\varphi_{f3}(t)$ выражается через ее спектр $\delta\varphi_{3\omega}(\omega)$ как

$$\delta\varphi_{f3}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta\varphi_{3\omega}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Отметим, что

$$\begin{aligned} U(t) &= U_{b0} (\Phi(\Delta\varphi)\Phi(\varphi_b - \Delta\varphi)) - U_{b0} \Phi(\Delta\varphi)\Phi(\delta\varphi_{f3}(t) - \Delta\varphi) = \\ &= U_{b0} \Phi(\omega_f t - \varphi_{30})\Phi(\varphi_{40} - \omega_f t) - U_{b0} \Phi(\omega_f t - \varphi_{30})\Phi(\delta\varphi_{f3}(t_m) - \omega_f t + \varphi_{30}) = \\ &= U_{b0} \left(\sum_n (u_{bn} + \delta u_{f3n}(t_m)) e^{in\omega_f t} \right). \end{aligned}$$

Здесь мы разделили медленное изменение $\delta\varphi_{f3}(t_m)$ и быстрое изменение фазы $\varphi = \omega_f t$ и провели разложение в ряд Фурье быстрых колебаний. u_{bn} вычисляется как (Пб.3), а при $n\delta\varphi_{f3}(t_m) / 2 \ll 1$

$$\begin{aligned} \delta u_{f3n}(t_m) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi_{30}}^{\varphi_{30} + \delta\varphi_{f3}(t_m)} e^{-in\varphi} d\varphi = e^{-in(\varphi_{30} + \delta\varphi_{f3}(t_m)/2)} \frac{\sin(n\delta\varphi_{f3}(t_m)/2)}{n\pi} \approx \\ &\approx e^{-in\varphi_{30}} \frac{\delta\varphi_{f3}(t_m)}{2\pi}. \end{aligned}$$

Получили:

$$\begin{aligned}
U(t) &= U_{b0} \left(\sum_n \left(u_{bn} + \frac{e^{-in\varphi_{30}}}{2\pi} \delta\varphi_{f3}(t_M) \right) e^{in\omega_{rf}t} \right) = \\
&= U_{b0} \left(\sum_n \left(u_{bn} + \frac{e^{-in\varphi_{30}}}{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta\varphi_{3\omega}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right) e^{in\omega_{rf}t} \right) = \\
&= U_{b0} \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} u_{bn} \left[2\pi\delta(\omega - n\omega_{rf}) + \frac{e^{-in\varphi_{30}} \delta\varphi_{3\omega}(\omega - n\omega_{rf})}{u_{bn}(2\pi)} \right] e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}.
\end{aligned}$$

Спектр этого напряжения равен

$$U_{b\omega} = U_{b0} \sum_n u_{bn} \left[2\pi\delta(\omega - n\omega_{rf}) + \frac{e^{-in\varphi_{30}} \delta\varphi_{3\omega}(\omega - n\omega_{rf})}{(2\pi)u_{bn}} \right],$$

С учетом вклада возмущений всех четырех фронтов в спектр напряжения, получаем:

$$U_{b\omega} = U_{b0} \sum_n u_{bn} \left[2\pi\delta(\omega - n\omega_{rf}) + \frac{\delta\varphi_{\Sigma\omega}(\omega - n\omega_{rf})}{(2\pi)u_{bn}} \right],$$

где

$$\begin{aligned}
\delta\varphi_{\Sigma\omega}(\omega - n\omega_{rf}) &= +e^{-in\varphi_{10}} \delta\varphi_{1\omega}(\omega - n\omega_{rf}) - e^{-in\varphi_{20}} \delta\varphi_{2\omega}(\omega - n\omega_{rf}) - \\
&- e^{-in\varphi_{30}} \delta\varphi_{3\omega}(\omega - n\omega_{rf}) + e^{-in\varphi_{40}} \delta\varphi_{4\omega}(\omega - n\omega_{rf}).
\end{aligned}$$

Плотность спектральной мощности равна

$$\begin{aligned}
S_{U_{\delta\varphi}}(\omega) &= \left\langle \frac{|U_{b\omega}|^2}{T} \right\rangle = U_{b0}^2 \sum_n |u_{bn}|^2 \left\{ 2\pi\delta(\omega - n\omega_{rf}) + \frac{S_{\Sigma\delta\varphi}(\omega - n\omega_{rf})}{(2\pi)^2 |u_{bn}|^2} \right\}, \quad (П6.5) \\
S_{\Sigma\delta\varphi}(\omega - n\omega_{rf}) &= \left\langle \frac{1}{T} \left| \delta\varphi_{\Sigma\omega}(\omega - n\omega_{rf}) \right|^2 \right\rangle.
\end{aligned}$$

В окрестности одной гармоники $n\omega_{rf}$ при усреднении спектра в полосе $\Delta\omega_{sp}$ относительный спектр равен

$$\begin{aligned}
|u_{bn}|^2 &= \left(\frac{\sin(n\varphi_b/2)}{\pi n} \right)^2 \left| 2\sin(n(\pi - \varphi_b)/4) \right|^2, \\
S_{rel}(\Delta\omega) &= C_0 \left\{ \Phi_n(\Delta\omega) + \frac{\Delta\omega_{sp}}{2\pi} \frac{S_{\Sigma\delta\varphi}(\omega - n\omega_{rf})}{(2\pi)^2 |u_{bn}|^2} \right\}.
\end{aligned}$$

При уменьшении $\Delta\omega_{sp}$ $S_{rel}(0) \rightarrow C_0$. При достаточно малом $\Delta\omega_{sp}$ для $|\Delta\omega| > |\Delta\omega_{sp}/2|$

$$S_{\Sigma\delta\varphi}(\Delta\omega) = (2\pi)^2 |u_{bn}|^2 \frac{2\pi}{\Delta\omega_{sp}} \frac{S_{rel}(\Delta\omega)}{S_{rel}(0)}.$$

Если возмущения всех четырех фронтов независимы и имеют одинаковую среднеквадратичную величину, то

$$S_{\Sigma\delta\varphi}(\omega - n\omega_{rf}) = 4S_{\delta\varphi 3}(\omega - n\omega_{rf}).$$

2) Если, возмущения фронтов когерентны, то

$$\begin{aligned} S_{\Sigma\delta\varphi}(\omega - n\omega_{rf}) &= S_{\delta\varphi 3}(\omega - n\omega_{rf}) \left| \left(1 + s_0 e^{in\varphi_b}\right) + s_1 (-1)^n \left(1 + s_0 e^{-in\varphi_b}\right) \right|^2 = \\ &= S_{\delta\varphi 3}(\omega - n\omega_{rf}) \left((1 + s_{11})^2 (1 + s_0 \cos(n\varphi_b))^2 + (s_0 \sin(n\varphi_b))^2 (1 - s_{11})^2 \right). \end{aligned}$$

Здесь $s_0 = \pm 1$ означает синфазное и противофазное возмущение заднего и переднего фронта каждого барьера, а $s_1 = \pm 1$ - синфазное и противофазное возмущение фронтов двух барьеров, $s_{11} = s_1 \cdot (-1)^n$.

$$s_{11} = 1:$$

$$\begin{aligned} S_{\Sigma\delta\varphi}(\omega - n\omega_{rf}) &= 4S_{\delta\varphi 3}(\omega - n\omega_{rf}) (1 + s_0 \cos(n\varphi_b))^2 = \\ &= 16S_{\delta\varphi 3}(\omega - n\omega_{rf}) \begin{cases} \cos(n\varphi_b / 2)^4, & s_0 = 1, \\ \sin(n\varphi_b / 2)^4, & s_0 = -1; \end{cases} \end{aligned}$$

$$s_{11} = -1:$$

$$\begin{aligned} S_{\Sigma\delta\varphi}(\omega - n\omega_{rf}) &= 4S_{\delta\varphi 3}(\omega - n\omega_{rf}) (\sin(n\varphi_b))^2 = \\ &= 16S_{\delta\varphi 3}(\omega - n\omega_{rf}) \cos(n\varphi_b / 2)^2 \sin(n\varphi_b / 2)^2. \end{aligned}$$

Для оценки сверху $S_{\delta\varphi 3}(\omega - n\omega_{rf})$ берем максимальное значение по рассмотренным вариантам сочетания знаков возмущений координат заднего и переднего фронтов и знаков возмущений координат фронтов двух импульсов

$$S_{\delta\varphi 3}(\omega - n\omega_{rf}) = \frac{S_{\Sigma\delta\varphi}(\omega - n\omega_{rf})}{16 \min(\cos(n\varphi_b / 2)^4, \sin(n\varphi_b / 2)^4)}$$

$$\varphi_b = \pi / 6, \quad n = 1, 2, 3$$

$$S_{\delta\varphi 3}(\omega - n\omega_{rf}) = \frac{S_{\Sigma\delta\varphi}(\omega - n\omega_{rf})}{16 \sin(n\varphi_b / 2)^4}$$

$$\begin{aligned} S_{\delta\varphi 3 \max}(\Delta\omega) &= \frac{(2\pi)^2 |u_{bn}|^2}{16 \sin(n\varphi_b / 2)^4} \frac{2\pi}{\Delta\omega_{sp}} \frac{S_{rel}(\Delta\omega)}{S_{rel}(0)} = \\ &= \frac{\sin(n(\pi - \varphi_b) / 4)^2}{n^2 \sin(n\varphi_b / 2)^2} \frac{2\pi}{\Delta\omega_{sp}} \frac{S_{rel}(\Delta\omega)}{S_{rel}(0)}. \end{aligned}$$

Для $n = 1$

$$S_{\delta\varphi_{3\max}}(\Delta\omega) = 5.53 \frac{2\pi}{\Delta\omega_{sp}} \frac{S_{rel}(\Delta\omega)}{S_{rel}(0)}.$$

3. Амплитудное возмущение ускоряющего напряжения

Ускоряющее напряжение с шумовым возмущением амплитуды записывается как

$$U(t, \varphi) = U_{a0} (1 + a_a(t)) (\Phi(\varphi - 0)) \Phi(\pi - \varphi) - \Phi(\varphi - \pi) \Phi(2\pi - \varphi).$$

Относительное возмущение амплитуды ускоряющего напряжения $a_a(t)$ выражается через его спектр $a_{a\omega}(\omega)$ как

$$a_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a_{a\omega}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Тогда

$$U(t) = U_{a0} \sum_n u_{an} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (2\pi\delta(\omega) + a_{a\omega}(\omega)) e^{i(\omega + n\omega_{rf})t} d\omega,$$

где

$$u_{an} = \frac{1}{T_{rf}} \int_{-T_{rf}/2}^{T_{rf}/2} (\Phi(\varphi - 0)) \Phi(\pi - \varphi) - \Phi(\varphi - \pi) \Phi(2\pi - \varphi) e^{-in\omega_{rf}t} dt = \frac{(1 - (-1)^n)}{\pi in}.$$

Таким образом,

$$U(t) = U_{a0} \sum_n u_{an} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (2\pi\delta(\omega - n\omega_{rf}) + a_{a\omega}(\omega - n\omega_{rf})) e^{i\omega t} d\omega,$$

спектр ускоряющего напряжения записывается как

$$U_{a\omega}(\omega) = U_{a0} \sum_n u_{a2n} (2\pi\delta(\omega - n\omega_{rf}) + a_{a\omega}(\omega - n\omega_{rf})) e^{i\omega t},$$

а плотность спектральной мощности равна

$$S_{Ua}(\omega) = U_{a0}^2 \sum_n \left| \frac{(1 - (-1)^n)}{\pi n} \right|^2 (2\pi\delta(\omega - n\omega_{rf}) + S_a(\omega - n\omega_{rf})),$$

(П6.6)

где $S_a(\omega) = \left\langle \frac{1}{T} |a_{a\omega}(\omega)|^2 \right\rangle$.

В окрестности одной гармоники $n\omega_{rf}$ при усреднении спектра в полосе $\Delta\omega_{sp}$ относительный спектр равен

$$S_{rel}(\Delta\omega) = C_0 \left\{ \Phi_n(\Delta\omega) + \frac{\Delta\omega_{sp}}{2\pi} S_a(\omega - n\omega_{rf}) \right\}.$$

При уменьшении $\Delta\omega_{sp}$ $S_{rel}(0) \rightarrow C_0$. При достаточно малом $\Delta\omega_{sp}$ для $|\Delta\omega| > |\Delta\omega_{sp} / 2|$, для нечетных n

$$S_a(\omega - n\omega_{rf}) = \frac{2\pi}{\Delta\omega_{sp}} \frac{S_{rel}(\Delta\omega)}{S_{rel}(0)}.$$

В том случае, если ускорения нет и $\Delta U_a(t) = U_{b0}a'(t)$ описывает шумы в промежутке $\varphi \in [\varphi_{f1}, \varphi_{f4}]$, спектр напряжения равен

$$S_{Ua}(\omega) = U_{b0}^2 \sum_n \left| \frac{(1 - (-1)^n)}{\pi n} \right|^2 S_{a'}(\omega - n\omega_{rf}), \quad (\text{П6.7})$$

а плотность спектральной мощности барьерного напряжения с шумовым возмущением амплитуды напряжения импульса барьерного напряжения записывается как

$$S_{Ub}(\omega) = \left\langle \frac{|U_{b\omega}|^2}{T} \right\rangle = U_{b0}^2 \sum_n \left\{ |u_{bn}|^2 2\pi\delta(\omega - n\omega_{rf}) + \left| \frac{(1 - (-1)^n)}{\pi n} \right|^2 S_{a'}(\omega - n\omega_{rf}) \right\}.$$

В окрестности одной гармоники $n\omega_{rf}$ при усреднении спектра в полосе $\Delta\omega_{sp}$ относительный спектр равен

$$S_{rel}(\Delta\omega) = C_0 \left\{ \Phi_n(\Delta\omega) + \frac{\Delta\omega_{sp}}{2\pi} \left| \frac{(1 - (-1)^n)}{\pi n} \right|^2 \frac{1}{|u_{bn}|^2} S_{a'}(\omega - n\omega_{rf}) \right\},$$

$$|u_{bn}|^2 = \left(\frac{\sin(n\varphi_b / 2)}{\pi n} \right)^2 \left| 2\sin(n(\pi - \varphi_b) / 4) \right|^2.$$

При уменьшении $\Delta\omega_{sp}$ $S_{rel}(0) \rightarrow C_0$. При достаточно малом $\Delta\omega_{sp}$ для $|\Delta\omega| > |\Delta\omega_{sp} / 2|$, для нечетных n

$$S_{a'}(\omega - n\omega_{rf}) = \frac{2\pi}{\Delta\omega_{sp}} \sin(n\varphi_b / 2)^2 \sin(n(\pi - \varphi_b) / 4)^2 \frac{S_{rel}(\Delta\omega)}{S_{rel}(0)}.$$

Для $n = 1, \varphi_b = \pi / 6$

$$S_{a'}(\omega - n\omega_{rf}) = 0.025 \frac{2\pi}{\Delta\omega_{sp}} \frac{S_{rel}(\Delta\omega)}{S_{rel}(0)}.$$

В окрестности одной гармоники $n\omega_{rf}$ при усреднении спектра в полосе $\Delta\omega_{sp}$ относительный спектр равен $S_{rel}(\Delta\omega)$. При уменьшении $\Delta\omega_{sp}$ $S_{rel}(0) \rightarrow const$.

Итак, при достаточно малом $\Delta\omega_{sp}$ для $|\Delta\omega| > |\Delta\omega_{sp} / 2|$, для $n = 1, \varphi_b = \pi / 6$

$$\begin{aligned}
 S_{b\max}(\Delta\omega) &= \frac{2\pi}{\Delta\omega_{sp}} \frac{S_{rel}(\Delta\omega)}{S_{rel}(0)}, \\
 S_{\delta\varphi 3\max}(\Delta\omega) &= 5.53 \frac{2\pi}{\Delta\omega_{sp}} \frac{S_{rel}(\Delta\omega)}{S_{rel}(0)} \\
 S_a(\Delta\omega) &= \frac{2\pi}{\Delta\omega_{sp}} \frac{S_{rel}(\Delta\omega)}{S_{rel}(0)}, \\
 S_{a'}(\Delta\omega) &= 0.025 \frac{2\pi}{\Delta\omega_{sp}} \frac{S_{rel}(\Delta\omega)}{S_{rel}(0)}. \tag{П6.8}
 \end{aligned}$$

Литература

- [1] Техническое задание для проектирования барьерной ускоряющей системы коллайдера «НИКА» и дальнейшие уточнения.
- [2] G. Dome. Diffusion due to RF noise. CAS-1985, CERN 87-03, p.370.
- [3] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Механика. М., «Наука», 1973.
- [4] А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. Интегралы и ряды. М., «Наука», 1981.
- [5] В.В. Пархомчук, А.Н. Скринский. Электронное охлаждение – 35 лет развития. УФН т.170, N5, май 2000, с. 473.

Список используемых обозначений.

$a_b(t)$ - относительное шумовое возмущение амплитуды барьерного напряжения U_{b0} ;

$a_a(t)$ - относительное шумовое возмущение амплитуды ускоряющего напряжения U_{a0} ;

A_2 - коэффициент диффузии для уравнения Фоккера-Планка;

A_{20} - коэффициент диффузии в отсутствие ВЧ шумов.

A_{2n} , $n = b, a, f_j$, то есть A_{2b}, A_{2a}, A_{2f_j} - коэффициент диффузии из-за ВЧ шумов (возмущений амплитуды барьерного и ускоряющего напряжения и дрожания j -го фронта барьерного напряжения);

$c_{nk}(J), c_{nk}(P_m)$ - коэффициенты разложения в ряд Фурье возмущений потенциала из-за ВЧ шумов, k - номер гармоники, $n = b, a, f_j$ (для возмущений амплитуды барьерного и ускоряющего напряжения и дрожания j -го фронта барьерного напряжения);

E_k - кинетическая энергия частиц;

$f(P, \varphi)$ - двумерная функция распределения частиц на фазовой плоскости переменных фаза φ и скорость $P = \frac{d\varphi}{dt}$;

J, θ - действие и угол ($\theta = \Omega_s t$), канонически сопряженные переменные, к которым было выполнено каноническое преобразование от переменных φ, P ;

$H = P^2 / 2 + W(\varphi)$ - гамильтониан движения частицы с фазой φ и скоростью P ;

$P = \frac{d\Delta\varphi}{dt}$ - скорость перемещения частиц по фазе на фазовой плоскости;

P_m - амплитуда колебаний скорости P ;

P_{mb} - значение амплитуды колебаний скорости P_m , соответствующее сепаратрисе;

$q_{rf} = 1$ - кратность частоты первой гармоники барьерного напряжения частоте обращения частиц;

$S_{a,b,f}(\omega)$ - плотность спектральной мощности **относительного** шумового возмущения амплитуды ускоряющего или барьерного напряжения $a_{a,b}(t)$ или дрожания фронта барьерного напряжения $\Delta\varphi_f(t)$;

$S_{U_a, U_b, U_{\delta\varphi}}(\omega)$ - плотность спектральной мощности ускоряющего или барьерного **напряжения** в присутствии ВЧ шумов;

$T_b(P_m)$ - время движения внутри области барьерного напряжения для частицы с $P_m \leq P_{mb}$;

$T_{bb}(P_m)$ - время движения в промежутке между импульсами барьерного напряжения для частицы с $P_m \leq P_{mb}$;

$T_s(P_m)$ - период синхротронных колебаний частицы с амплитудой колебаний скорости P_m ;

U_{b0} - амплитуда барьерного напряжения;

U_{a0} - амплитуда ускоряющего напряжения;

$W(\varphi)$ - потенциал, созданный барьерным и ускоряющим напряжением;

$\tilde{W}_n(\varphi)$ - возмущение потенциала $W(\varphi)$ из-за ВЧ шумов, $n = b, a, f_j$ для относительного шумового возмущения амплитуды ускоряющего или барьерного напряжения $a_{a,b}(t)$ или дрожания фронта барьерного напряжения

$\Delta\varphi_f(t)$;

$\varphi = (\omega_{rf} - q_{rf}\omega_0)t$ - фаза частицы относительно первой гармоники барьерного напряжения;

φ_s - фаза равновесной частицы;

$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_s$ - отклонение частицы по фазе от равновесной;

$\delta\varphi_{f_j}(t)$ - дрожание j -го фронта барьерного напряжения;

φ_b - продолжительность по фазе импульса барьерного напряжения;

$\varphi_{bb} = \pi - 2\varphi_b$ - расстояние между соседними импульсами барьерного напряжения, формирующими сепаратрисы;

$\rho_m(P_m, t)$ - функция распределения частиц по амплитудам скорости P_m для данной потенциальной ямы;

σ_P - среднееквадратичное значение скорости P : $\sigma_P^2 = \int_0^{\infty} P^2 f(P, \varphi) dP_m$;

σ_{P_m} - среднееквадратичное значение амплитуды колебаний скорости P_m :

$\sigma_{P_m}(t)^2 = \int_0^{\infty} P_m^2 \rho_m(P_m, t) dP_m$;

$\sigma_{P_m0} = \sqrt{A_{20}\tau_0/2}$ - среднееквадратичное значение амплитуды колебаний скорости в отсутствие ВЧ шумов;

τ_0 - время затухания;

ω_s - частота обращения равновесной частицы;

ω_0 - частота обращения неравновесной частицы;

$\omega_{rf} = q_{rf}\omega_s$ - частота первой гармоники барьерного напряжения;

$\Omega_s(P_m) = 2\pi / T_s(P_m)$ - частота синхротронных колебаний;

Ω_0 - параметр размерности частоты: $\Omega_0^2 = |\ddot{\varphi}_b|$ - модуль ускорения внутри области барьерного напряжения;

ω_{\max} - максимальная частота полосы спектра ВЧ шума.

Оглавление

1. Постановка задачи.....	3
2. Обозначения и уравнения движения.....	5
3. Зависимость частоты колебаний частицы от амплитуды.....	6
4. Статическое распределение частиц по амплитудам.....	8
5. Уравнение Фоккера-Планка и зависимость среднеквадратичного разброса от времени.....	11
6. Коэффициенты диффузии для известной плотности спектральной мощности шума.....	14
7. Модель: шум с постоянной плотностью спектральной мощности в пределах заданной полосы частот.....	15
8. Гармоническое шумовое возмущение.....	16
9. Модель стационарного случайного возмущения для трэкинга.....	17
10. Сравнение прямого интегрирования уравнений движения по времени с результатами спектрального метода.....	22
11. Сравнение результатов трэкинга с результатами спектрального метода.....	23
12. Результаты расчетов.....	25
13. Измерения и расчет.....	30
14. Заключение.....	31
Приложения.....	32
П1. Статическое распределение частиц по амплитудам.....	32
П2. Поправка к гамильтониану при возмущении напряжений шумом.....	36
П3. Вычисление диффузионных коэффициентов для заданной плотности спектральной мощности шума.....	41
П4. Вычисление диффузионных коэффициентов для заданного гармонического возмущения.....	44
П5. Вычисление диффузионных коэффициентов прямым интегрированием по времени уравнений движения с возмущением.....	46
П6. Пересчет плотности спектральной мощности шумового возмущения амплитуды барьерного и ускоряющего напряжения и дрожания фронта барьерного напряжения в плотность спектральной мощности напряжения..	57
Литература.....	65
Список используемых обозначений.....	66

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
им. Г.И. Будкера СО РАН
(ИЯФ СО РАН)

Митянина Н.В., Петров В.М.

ВЛИЯНИЕ НЕСТАБИЛЬНОСТИ ИМПУЛЬСНОГО
БАРЬЕРНОГО И УСКОРЯЮЩЕГО НАПРЯЖЕНИЙ
НА РОСТ СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОГО РАЗБРОСА
ЭНЕРГИИ ЧАСТИЦ В КОЛЛАЙДЕРЕ NICA

ИЯФ 2016-3

Новосибирск
2016

**Влияние нестабильности импульсного
барьерного и ускоряющего напряжений
на рост среднеквадратичного разброса
энергии частиц в коллайдере NICA**

Митянина Н.В., Петров В.М.

Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера
630090, Новосибирск, Россия

Аннотация

В работе получены оценки роста среднеквадратичного разброса энергии частиц при накоплении и ускорении пучка в кольце коллайдера NICA из-за нестабильности потенциальной ямы для продольного движения заряженных частиц. Использован метод гармонического разложения возмущений потенциальной ямы и движения частиц в ней [2].

Потенциальная яма формируется барьерным напряжением и ускоряющим напряжением. Барьерное напряжение – последовательность знакопеременных импульсов напряжения. Предполагается, что потенциальная яма расположена между отрицательным и положительным импульсом барьерного напряжения. Рассмотрено влияние на возмущение потенциальной ямы шумового возмущения амплитуды импульсов барьерной системы, дрожание во времени заднего фронта отрицательного импульса и переднего фронта **положительного** импульса. Влияние нестабильности ускоряющего напряжения учитывается шумовым напряжением между передним фронтом **отрицательного** импульса и задним фронтом **положительного** импульса барьерной системы. Определены диффузионные коэффициенты для указанных видов шумовых возмущений. С их помощью вычислены скорость роста среднеквадратичного разброса по энергии и максимальное приращение этого среднеквадратичного разброса в зависимости от спектра шума. Получены ограничения на допустимый уровень шума. Основные результаты приведены в разделах 9-13.

© Институт ядерной физики им Г.И. Будкера СО РАН

1. Постановка задачи

При накоплении пучка в коллайдере «Ника» используется барьерное напряжение. При ускорении накопленного пучка к барьерному напряжению добавляется ускоряющее напряжение.

В таблице 1 приведены параметры одного кольца коллайдера «Ника».

I. Параметры накопительного кольца			
Периметр кольца Π_{ring}	503 м		
β -функция в области охлаждения β_t	20 м		
Критическое значение $\gamma_{cr} = 7.1$	7.1		
Коэффициент расширения орбит $\alpha = \gamma_{cr}^{-2}$	0.02		
II. Параметры барьерного и ускоряющего напряжения.			
Амплитуда барьерного напряжения U_{b0}	5 kV		
Ширина импульса барьерного напряжения φ_b	$\pi/6$		
Расстояние между соседними импульсами барьерного напряжения, формирующими сепаратрису $\varphi_{bb} = \pi - 2\varphi_b$	$\pi \cdot 4/6$		
Амплитуда ускоряющего напряжения U_{a0}	300 В		
III. Параметры ионного пучка (ионы золота)			
Заряд на нуклон $Z_{Au} / A_A = Z$	197 / 79 = 0.4		
Поперечный эмиттанс ε_{it}	$1.1 \cdot 10^{-3}$ мм·мрад		
Кинетическая энергия E_k	1 GeV / u	3 GeV / u	4.5 GeV / u
Число ионов в пучке N_i	$2.75 \cdot 10^8$	$2.4 \cdot 10^9$	$2.2 \cdot 10^9$
Частота обращения f_0	0.522 МГц	0.579 МГц	0.587 МГц
Ток пучка I_0	0.04 А	0.386 А	0.359 А

Среднеквадратичный разброс по импульсам накопленного пучка $\langle \Delta p_{\parallel} / p \rangle_{stored}$	$0.65 \cdot 10^{-3}$	$1.25 \cdot 10^{-3}$	$1.65 \cdot 10^{-3}$
Среднеквадратичный разброс по импульсам при инжекции $\langle \Delta p_{\parallel} / p \rangle_{inj}$	10^{-4}	$2.1 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-4}$

На рис. 1а показаны импульсы барьерного напряжения и форма потенциальной ямы, формируемой барьерным напряжением во время накопления. На рис. 1б показаны импульсы барьерного и ускоряющего напряжения и потенциальная яма, формируемая ими во время ускорения.

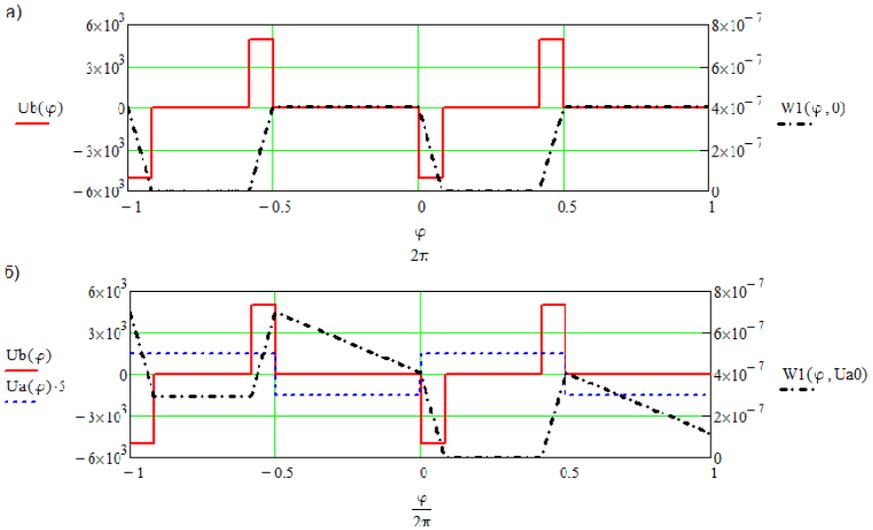


Рис.1. Барьерное напряжение $U_b(\varphi)$ (В), ускоряющее напряжение $U_a(\varphi)$ (В) и потенциальная яма, созданная ими $W_1(\varphi, U_{a0})$ (в тех же единицах, что и $(\Delta p / p)^2$), а) $U_{a0} = 0V$ (а), б) $U_{a0} = 300V$.

В данной работе приведены расчеты влияния шумов рассматриваемой ВЧ системы на увеличение энергетического разброса пучка. Рассматриваются следующие виды шумов: 1) возмущение амплитуды барьерного напряжения $U_{b0} \cdot (1 + a_b(t))$, 2) возмущение амплитуды ускоряющего напряжения $U_{a0} \cdot (1 + a_a(t))$, 3) дрожание фронтов барьерного напряжения $\Delta \varphi_{fk}(t)$, k – номера фронтов барьерного напряжения с координатами φ_{fk} . При расчетах используется метод, изложенный в [2].

Рассматривается движение частиц внутри потенциальной ямы. Для данного значения амплитуды отклонения энергии вычисляется прирост этого отклонения из-за шумов, усредненный по ансамблю случайных шумовых воздействий. Результат усредняется по распределению частиц по энергии в данной потенциальной яме. Для этого сначала надо определить зависимость частоты колебаний частицы от амплитуды и функцию распределения частиц по амплитудам.

2. Обозначения и уравнения движения

Обозначим $E_s, p_s, \gamma_s, \beta_s, \omega_s, R_s$ – энергия, продольный импульс, гамма и бета-факторы, частота обращения и средний радиус орбиты синхронной частицы ($R_s = \Pi_{ring} / (2\pi)$), ΔE – отклонение энергии частицы от равновесной энергии, $\alpha = \partial(\ln(\Pi)) / \partial(\ln(p)) = \gamma_{cr}^{-2}$ – коэффициент расширения орбит (Π – периметр орбиты частицы с импульсом p), $q_{rf} = 1$ – кратность частоты первой гармоники барьерного напряжения частоте обращения частиц.

С этими обозначениями в переменных, используемых в [2] ($\Delta\varphi, P = \frac{d\Delta\varphi}{dt}$), уравнения продольного движения между барьерами для частиц с зарядом Ze ($Z = 0.4 = Z_{Au} / A_{Au}$) имеют вид

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = - \frac{dW(\varphi_s + \Delta\varphi)}{d\varphi}, \\ \frac{d\Delta\varphi}{dt} = P, \end{cases} \quad (2.1)$$

где

$\varphi = (\omega_{rf} - q_{rf}\omega_0)t$ – фаза частицы относительно первой гармоники барьерного напряжения;

φ_s – синхронная фаза, где $U(\varphi_s) = U_{a0}$ в режиме ускорения и $U(\varphi_s) = 0$ в режиме накопления.

Для рассматриваемого напряжения (рис.1) (без возмущений) φ_s – произвольная точка в промежутке $\varphi_{f2} \leq \varphi_s \leq \varphi_{f3}$. Из соображений симметрии выберем $\varphi_s = \pi / 2$.

$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_s$ – отклонение частицы по фазе от равновесной фазы φ_s ;

$$W(\varphi) = k_0 Ze \int_{\varphi_s}^{\varphi} (U(\varphi) - U(\varphi_s)) d\varphi \quad (2.2)$$

– потенциал, в котором движутся частицы, созданный напряжением

$$U(\varphi) = U_a(\varphi) + U_b(\varphi), \quad (2.3)$$

где $U_b(\varphi)$ – барьерное напряжение:

$$U_b(\varphi) = U_{b0} \cdot \begin{cases} 1, & \varphi_{f3} \leq \varphi \leq \varphi_{f4}, \\ 0, & \varphi_{f2} \leq \varphi \leq \varphi_{f3}, \varphi > \varphi_{f4}, \varphi < \varphi_{f1}, \\ -1, & \varphi_{f1} \leq \varphi \leq \varphi_{f2}, \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\varphi_{f1} = 0, \quad \varphi_{f2} = \varphi_b, \quad \varphi_{f3} = \pi - \varphi_b, \quad \varphi_{f4} = \pi \quad (2.5)$$

– фазовые координаты фронтов импульсов напряжений; $U_a(\varphi)$ – ускоряющее напряжение:

$$U_a(\varphi) = U_{a0} \cdot \begin{cases} 1, & \varphi_{f1} = 0 \leq \varphi \leq \pi = \varphi_{f4}, \\ -1, & \varphi_{f4} \leq \varphi \leq 2\pi + \varphi_{f1}, \end{cases} \quad (2.6)$$

$$P = \frac{d\Delta\varphi}{dt} = \omega_{rf} - \omega_0 = -\Delta\omega_0 = -k_0 \cdot \frac{2\pi\Delta E}{\omega_s} = -k_0 \cdot \frac{2\pi E_s}{\omega_s} \frac{\Delta E}{E_s} = -k \cdot \frac{2\pi E_s}{\omega_s} \beta_s^2 \frac{\Delta p}{p_s}$$

– скорость перемещения частиц по фазе на фазовой плоскости, пропорциональная отклонению энергии от равновесного значения,

$$k_0 = \frac{q_{rf}}{2\pi R_s p_s} \frac{\omega_s \eta}{\omega_s} > 0, \quad \eta = \beta_s^2 \frac{E_s}{\omega_s} \left(\frac{\partial \omega}{\partial E} \right)_s = \gamma_s^{-2} - \alpha > 0. \quad (2.7)$$

В случае ускоренного движения к уравнениям движения (2.1)-(2.3) добавляется уравнение, определяющее темп ускорения синхронной частицы:

$$\frac{dE_s}{dt} = \frac{Ze \cdot \omega_s}{2\pi} U_a(\varphi_s) = \frac{Ze \cdot \omega_s}{2\pi} U_{a0} \quad (2.8)$$

и учитывается зависимость параметров k_0 и ω_s от E_s .

Интеграл движения для уравнений (2.1) имеет вид

$$H = \frac{1}{2} P^2 + W(\varphi). \quad (2.9)$$

3. Зависимость частоты колебаний частицы от амплитуды

Частицы движутся в потенциальной яме (см. рис. 1), форма которой приводит к существенной зависимости частоты колебаний от амплитуды.

Движение частиц между импульсами барьерного напряжения – равномерное, внутри области барьерного напряжения – равноускоренное с ускорением $|\ddot{\varphi}_b| = \Omega_0(E)^2 = k_0(E)ZeU_{b0}$. Введенный параметр Ω_0 зависит от энергии и имеет размерность частоты.

Обозначим амплитуду колебаний скорости P как $P_m = (\dot{\varphi})_{\max}$. Времена пролета промежутка между импульсами барьерного напряжения и время равноускоренного движения внутри барьерного напряжения зависят от амплитуды P_m и равны $T_{bb}(P_m) = \frac{\varphi_{bb}}{P_m}$, $T_b(P_m) = \frac{2P_m}{\Omega_0^2}$ – для частиц, движущихся в фазовом пространстве по замкнутым траекториям. Такие частицы влетают внутрь области барьерного напряжения на максимальное расстояние $\varphi_{b\max}(P_m) = \frac{P_m^2}{2\Omega_0^2} \leq \varphi_b$. Соответствующая амплитуда колебаний по

$$\text{фазе для такой частицы равна } \Delta\varphi_m = \frac{\varphi_{bb}}{2} + \varphi_{b\max}(P_m) = \frac{\varphi_{bb}}{2} + \frac{P_m^2}{2\Omega_0^2}.$$

Период $T_s(P_m)$ и частота $\Omega_s(P_m)$ движения равны

$$T_s(P_m) = 2(T_{bb}(P_m) + T_b(P_m)) = 2\left(\frac{\varphi_{bb}}{P_m} + 2\frac{P_m}{\Omega_0^2}\right),$$

$$\Omega_s(P_m) = \pi \frac{P_m}{2\frac{P_m^2}{\Omega_0^2} + \varphi_{bb}} = \frac{\pi \Omega_0 \sqrt{2\Delta\varphi_m - \varphi_{bb}}}{4\Delta\varphi_m - \varphi_{bb}} = \Omega_s(\Delta\varphi_m). \quad (3.1)$$

Далее будем использовать только зависимость $\Omega_s(P_m)$, а не $\Omega_s(\Delta\varphi_m)$, так как $\Omega_s(P_m)$ имеет более простой вид, чем зависимость от амплитуды фазовых колебаний $\Omega_s(\Delta\varphi_m)$.

Значение P_m , соответствующее сепаратрисе, равно $P_{mb}(\varphi_b, E) = \Omega_0(E)\sqrt{2\varphi_b}$. При этом значение синхротронной частоты

$$\Omega_s(P_{mb}, E) = \Omega_0(E) \frac{\pi\sqrt{2\varphi_b}}{4\varphi_b + \varphi_{bb}} = 0.75P_{mb}(E) \quad \text{пропорционально } P_{mb}(E).$$

Отметим, что зависимость синхротронной частоты, нормированной на P_{mb} , от P_m / P_{mb} не зависит от энергии:

$$\frac{\Omega_s(P_{mb}, E)}{P_{mb}} = \frac{\pi(P_m / P_{mb})}{4\varphi_b (P_m / P_{mb})^2 + \varphi_{bb}}.$$

На рис. 2а приведена зависимость максимальной частоты синхротронных колебаний на сепаратрисе $\Omega_s(P_{mb})$ от относительной энергии частиц E / E_0 (E_0 – энергия покоя). На графике отмечены значения $\gamma = E / E_0$, соответствующие минимальной энергии и критической энергии.

На рис. 2б приведен график зависимости частоты колебаний Ω_s от амплитуды P_m (нормированных на P_{mb}) и отмечено среднеквадратичное значение P_m для пучка, соответствующее $\langle \Delta p / p \rangle = 10^{-4}$ при $E_k = 1 \text{ GeV} / u$.

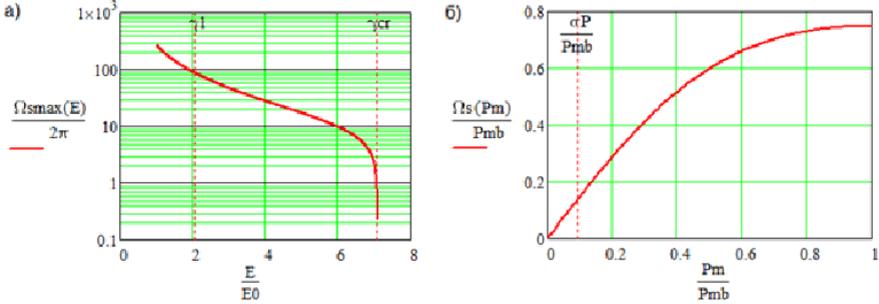


Рис.2. а) Зависимость максимального значения Ω_s на сепаратрисе (в Hz) от относительной энергии E / E_0 ; б) зависимость частоты колебаний $\Omega_s(P_m)$ в единицах P_{mb} от амплитуды колебаний скорости P_m в единицах P_{mb} .

4. Статическое распределение частиц по амплитудам

В параболической потенциальной яме распределение по P гауссовское, а по P_m – рэлеевское. В прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками распределение и по P , и по P_m – гауссовское. Для трапециевидной потенциальной ямы, как в данном случае (рис.1б), в Приложении 1 получено распределение по P_m (П1.1) с нормировочным коэффициентом (П1.2).

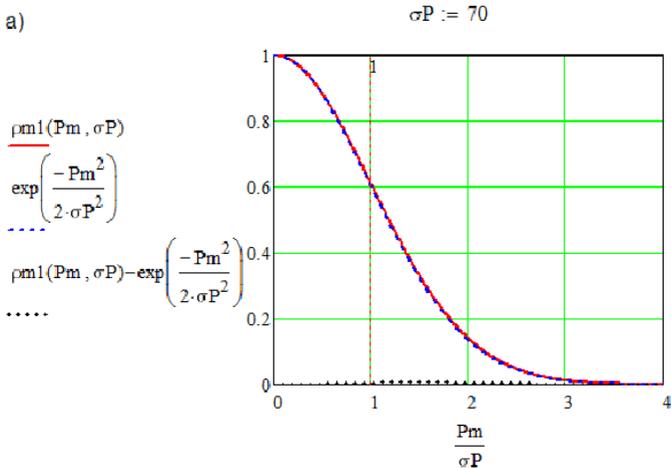
Распределение по амплитудам не рэлеевское, во-первых, за счет конечной плотности распределения частиц при малых амплитудах P_m в промежутках между импульсами барьерного напряжения и, во-вторых, за счет конечной амплитуды барьерного напряжения. Полученная функция распределения используется далее при вычислении среднего по распределению значения коэффициента диффузии, а также скорости роста σ_{P_m} – среднеквадратичной величины амплитуды P_m .

При среднеквадратичном значении скорости $\sigma_P \ll \Omega_0 \sqrt{\varphi_b}$ распределение практически не отличается от гауссовского. Этому случаю соответствует начальный разброс по импульсам $\langle \Delta p / p \rangle = 10^{-4}$ при энергии

частиц 1 ГэВ (при этих параметрах $\sigma_P = 70 \text{sec}^{-1}$, $\Omega_0 \approx 700 \text{sec}^{-1}$). Однако в конце накопления $\langle \Delta p / p \rangle$ может увеличиться в 6 раз (см. таб.1), при этом $\sigma_P / \Omega_0 \approx 0.6$, и следует использовать точное выражение (П1.1).

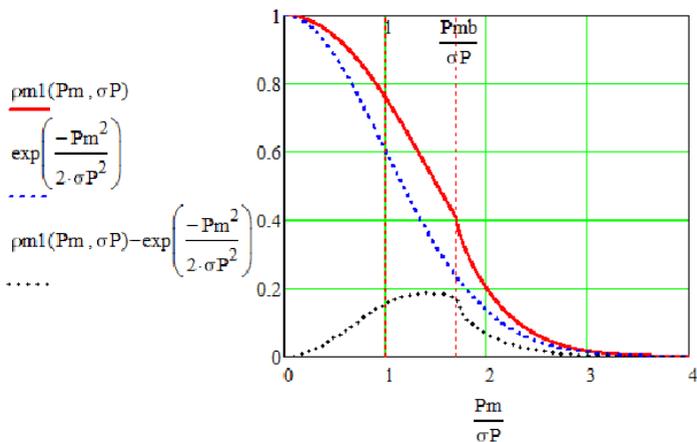
На рис. 3 приведены распределения частиц по амплитудам (нормированные на максимум) для этих двух случаев (рис. 3а,б) и зависимость $\sigma_{P_m}(\sigma_P)$ (рис.3в).

Как показано в Приложении 1 (П1.3), значения σ_P и σ_{P_m} при $\frac{\sigma_P^2}{\Omega_0^2 \varphi_B} \ll 1$ отличаются незначительно (рис.3а). Когда среднеквадратичное значение σ_P приближается к значению P_m , соответствующему сепаратрисе $P_{mb}(\varphi_B) = \sqrt{2\Omega_0^2 \varphi_B}$, отличие от распределения от гауссовского становится заметным (рис.3б). Тем не менее, для любых σ_P отличие $\sigma_{P_m}(\sigma_P)$ от σ_P не превышает 11% (рис.3в).



б)

$$\sigma_P := 70.6$$



в)

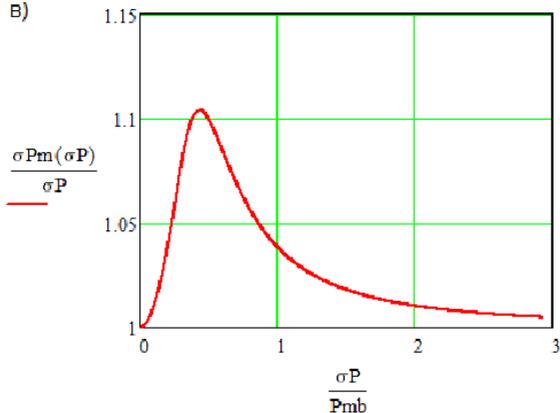


Рис.3. а) Распределение частиц по амплитудам $\rho_{m1}(P_m, \sigma_P)$ (нормированное на максимум) для $\sigma_P = 70 \text{ sec}^{-1}$, $E_k = 1 \text{ GeV} / u$; гауссовское распределение с таким же σ_P и их разность; б) те же графики для $\sigma_P = 70.6 \text{ sec}^{-1}$; в) зависимость $\sigma_{P_m}(\sigma_P)$.

5. Уравнение Фоккера-Планка и зависимость среднеквадратичного разброса от времени

Согласно [2], при учете диффузионного слагаемого одномерная функция распределения по переменной x удовлетворяет уравнению Фоккера-Планка:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho A_1) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\rho A_2), \quad (5.1)$$

$$A_1(x, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \Delta x \rangle}{\Delta t}, \quad A_2(x, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle (\Delta x)^2 \rangle}{\Delta t},$$

где $\langle \rangle$ означает усреднение по ансамблю случайных шумовых возмущений с одинаковой плотностью спектральной мощности.

В отсутствие шумов предполагается, что уравнение (5.1) описывает равновесное распределение, в котором затухание уравновешено диффузией за счет внутривибриционного рассеяния и других причин. Примем для простоты, что затухание линейно ($A_1(x, t) = -x/\tau_0$), а коэффициент диффузии в отсутствие шумов постоянен: $A_2(x, t) = A_{20}$. При этом стационарное распределение существует и является гауссовским:

$$\rho(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma_{x0}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_{x0}^2}\right), \quad \sigma_{x0}^2 = A_{20}\tau_0/2$$

нормировка функции распределения имеет вид $\int_0^{\infty} \rho(x) dx = 1$).

Наша задача определить, как меняется равновесный среднеквадратичный размер пучка σ_x , если на пучок дополнительно действуют шумы ВЧ системы. Примем, что допустимо 10%-ное увеличение σ_x . Следует определить максимальный уровень шума, при котором рост σ_x за время накопления или ускорения не превышает этих 10%. Для простоты предполагаем, что функция распределения пучка остается гауссовской (это выполняется при $\sigma_p \ll P_{mb}$), шумы изменяют только σ_x для этого распределения.

Для шумового возмущения, которое рассмотрено в [2] и в данной работе, $A_{1n} = \frac{1}{2} \frac{\partial A_{2n}}{\partial x}$. В этом случае для учета шума в уравнении непрерывности нет необходимости отдельно вычислять $A_{1n}(x)$, достаточно коэффициента $A_{2n}(x)$ (см. [2]). Для других видов воздействий соотношение $A_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial A_2}{\partial x}$ не обязательно выполняется, и в уравнении непрерывности необходимо

учитывать оба коэффициента A_1 и A_2 , в форме (5.1). Таким образом, наша модель описывается уравнением (5.1) с учетом затухания, диффузии из-за посторонних причин и диффузии за счет шумов:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \left(\frac{-x}{\tau_0} \right) \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\rho A_{20}) - \frac{\partial}{\partial x} (\rho A_{1n}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\rho A_{2n}) = \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \left(\frac{-x}{\tau_0} \right) \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\rho A_{20}) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A_{2n}(x)}{2} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (5.2)$$

В данной работе оказалось удобно решать одномерное уравнение (5.2) относительно переменной $x = P_m$ – амплитуды колебаний скорости.

В Приложении 1 получена равновесная функция распределения $\rho_m(P_m, t)$ именно по этой переменной, в предположении, что σ_P – среднеквадратичное значение скорости P – установилось в результате равновесия между затуханием и диффузией, без учета шумов. Используя (5.2) для $\rho_m(P_m, t)$, можно найти скорость роста σ_{Pm} – среднеквадратичного значения P_m – за счет шумов:

$$\frac{d}{dt} (\sigma_{Pm}^2) = \frac{d}{dt} \int_0^\infty P_m^2 \rho_m(P_m, t) dP_m = \int_0^\infty P_m^2 \frac{\partial \rho_m(P_m, t)}{\partial t} dP_m.$$

Подставив (5.2) и выполнив интегрирование по частям, получили

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\sigma_{Pm}^2) &= - \left(2 \frac{\sigma_{Pm}^2 - \sigma_{Pm0}^2}{\tau_0} + \int_0^\infty A_{2n}(P_m) \cdot \frac{\partial \rho(P_m, \sigma_{Pm})}{\partial P_m} P_m dP_m \right) = \\ &= - \left(2 \frac{\sigma_{Pm}^2 - \sigma_{Pm0}^2}{\tau_0} + A_{2n}(P_m) P_m \rho(P_m, \sigma_{Pm}) - \int_0^\infty \rho(P_m, \sigma_{Pm}) (A_{2n}(P_m) P_m)' dP_m \right), \end{aligned} \quad (5.3)$$

$\sigma_{Pm0}^2 = A_{20} \tau_0 / 2$ – равновесное значение σ_{Pm}^2 в отсутствие шумов.

Здесь в качестве $\rho_m(P_m, \sigma_P, t)$ используем равновесную функцию (П1.1) с нормировкой (П1.2) и начальным значением σ_{P0} без учета шумов. Далее, предполагая, что σ_{Pm} меняется медленно, так что равновесие в каждый момент времени успевает установиться, при известной зависимости $A_2(P_m)$, можно численно проинтегрировать (5.3) за все время накопления или ускорения, с учетом изменения $\sigma_{Pm}(t)$ и зависимости параметров уравнений движения от энергии.

При постоянной энергии частиц из (5.3) можно получить предельное увеличение σ_{Pm}^2 для данного спектра шума (стационарное значение):

$$\sigma_{P_m}^2 = \sigma_{P_m0}^2 - \frac{\tau_0}{2} \int_0^\infty A_{2n}(P_m) \cdot \frac{\partial \rho(P_m, \sigma_{P_m})}{\partial P_m} P_m dP_m \quad (5.4)$$

При ускорении можно численно проинтегрировать (5.3) за все время ускорения, принимая во внимание изменение с изменением энергии параметров, входящих в A_{2n} , и времени электронного затухания τ_0 , а также учесть адиабатическое изменение среднеквадратичного разброса по энергии. При отсутствии всех шумов и затухания адиабатический инвариант

$$I = \oint \frac{\Delta E}{\omega_0(E)} d\varphi \approx \frac{2\Delta E_{\max} \varphi_{bb}}{\omega_0(E)} = \frac{P_m \varphi_{bb}}{k_0(E)\pi} = const, \quad \text{то есть при ускорении } \sigma_{P_m}$$

адиабатически изменяется пропорционально $k_0(E)$, а ΔE_{av} – пропорционально частоте обращения $\omega_0(E)$. Это изменение приводит к добавочному слагаемому в уравнении (5.3), которое обеспечивает адиабатическое изменение σ_{P_m} :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\sigma_{P_m}^2) = & - \left(2 \frac{\sigma_{P_m}^2}{\tau_0(E(t))} - A_{20} + \int_0^\infty A_{2n}(P_m) \cdot \frac{\partial \rho(P_m, \sigma_{P_m})}{\partial P_m} P_m dP_m \right) + \\ & + 2\sigma_{P_m}^2 \frac{dE/dt}{k_0(E(t))} \frac{d(k_0(E(t)))}{dE}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Отметим, что в этом разделе получены результаты для линейной зависимости силы затухания от P_m . Более точно электронное затухание описывается зависимостью [5]

$$F_e(P) = \frac{-P}{\tau_0 \left(1 + (P/P_e)^2 \right)^{3/2}},$$

при $\sigma_P \ll P_{mb}$ $F_{1e}(P_m) \approx F_e(P_m)$.

При этом даже при постоянной энергии статическое решение не существует, надо решать задачу (5.2) с заданным начальным распределением, и ее решение – функцию распределения $\rho(P_m, t)$ в зависимости от времени – подставить в (5.3) для определения изменения σ_{P_m} во времени:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\sigma_{P_m}^2) = & \int_0^\infty P_m^2 \frac{\partial \rho_m(P_m, t)}{\partial t} dP_m = \\ = & -2 \frac{\sigma_{P_m}^2}{\tau_0} + A_{20} + 2 \int_0^\infty P_m \rho(P_m, t) \cdot \left(F_e(P_m) + \frac{P_m}{\tau_0} \right) dP_m - 2 \int_0^\infty P_m \frac{A_{2n}(P_m)}{2} \cdot \frac{\partial \rho(P_m, t)}{\partial P_m} dP_m. \end{aligned}$$

Это более сложный путь, в котором два эффекта – влияние шумов ВЧ и нелинейности электронного затухания – сложно разделить, поэтому при

рассмотрении влияния шумов ВЧ ограничимся линейной моделью затухания, считая $P_e \gg \sigma_p$.

6. Коэффициенты диффузии для известной плотности спектральной мощности шума

В данной работе рассматриваются 3 вида шумов ВЧ: шумовые возмущения амплитуд барьерного и ускоряющего напряжений и дрожание фронтов импульсов барьерного напряжения. При вычислении диффузионных коэффициентов использовался метод [2], где рассматривались шумовые возмущения амплитуды и фазы синусоидального напряжения. Вычисления приведены в Приложениях 2, 3. В результате получены следующие диффузионные коэффициенты:

а. Амплитудное возмущение барьерного напряжения

$$A_{2b}(P_m) = \left(\frac{\Omega_s(P_m)P_m}{\pi} \right)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin(k\alpha) - (k\alpha)\cos(k\alpha)}{(k\alpha)^2} \right|^2 (1 + s_0 \cdot (-1)^k)^2 S_b(k\Omega_s) \quad (6.1)$$

б. Амплитудное возмущение ускоряющего напряжения

$$A_{2a}^{P_m}(P_m) = \left(\frac{1}{\pi} \delta_a \frac{\Omega_0^4}{P_m \Omega_s} \right)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin(k\alpha)}{k^2} \right|^2 \cdot (1 - (-1)^k)^2 \cdot S_a(k\Omega_s). \quad (6.2)$$

в. Дрожание фронтов импульсов барьерного напряжения

$$A_{2f}^{P_m}(P_m) = \left(\frac{1}{\pi} \frac{\Omega_s \Omega_0^2}{P_m} \right)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\sin(k\alpha)|^2 \cdot (1 + s_0 \cdot (-1)^k)^2 \cdot S_f(k\Omega_s). \quad (6.3)$$

$$S_{a,b,f}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left\langle \left| a_\omega(\omega, T) \right|^2 \right\rangle, \quad a_\omega(\omega, T) = \int_0^T a(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Здесь $S_{a,b,f}(\omega)$ – плотность спектральной мощности шума, $\alpha = \frac{P_m \Omega_s (P_m)}{\Omega_0^2}$,

$s_0 = 0, \pm 1$ для учета шумов одной последовательности импульсов барьерного напряжения, например, положительной, ($s_0 = 0$) или двух, чьи шумы синфазны ($s_0 = 1$) или противофазны ($s_0 = -1$). Отметим, что в случае дрожания фронтов импульсов барьерного напряжения учитывается только влияние на движение частиц только внутренних фронтов (2-го и 3-го), которые частицы пересекают при замкнутом движении.

Величины, входящие в полученные выражения для коэффициентов диффузии, зависят от энергии ($\Omega_0, \Omega_s, \alpha$) и от P_m (Ω_s, α), что следует учитывать при вычислении установившегося σ_{P_m} при постоянной энергии и зависимости σ_{P_m} от времени при ускорении.

7. Модель: шум с постоянной плотностью спектральной мощности в пределах заданной полосы частот.

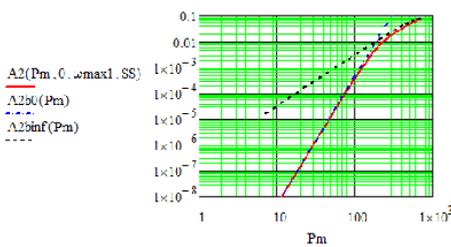
Для оценок можно получить формулы диффузионных коэффициентов, предполагая, что плотность спектральной мощности шума постоянна ($S_{a,b,f}(\omega) = S_0 = const$) в пределах полосы частот $|\omega| \leq \omega_{max} = k_{max} \Omega_0$. При этом среднеквадратичная амплитуда шума $P_{ш} = \langle a^2 \rangle = S_0 2\omega_{max} / 2\pi$, максимальный номер ненулевого члена рядов (6.1)-(6.3) равен

$$k_{max a,b}(P_m) = \frac{\omega_{max}}{\Omega_s(P_m)},$$

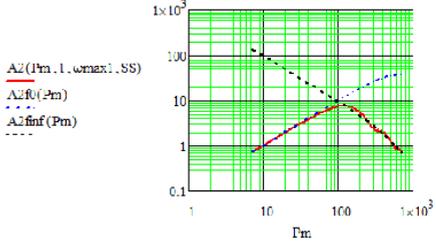
а бесконечные ряды (6.1)-(6.3) заменяются конечными суммами

$$\sum_{k=k_{max}}^{k_{max}} = 2 \sum_{k=0}^{k_{max}}$$

а)



б)



в)

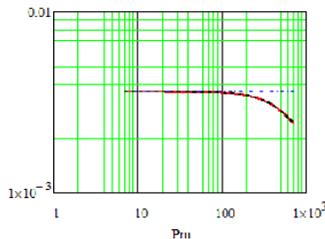


Рис.4. приведены зависимости $A_{2a}(P_m)$, $A_{2b}(P_m)$, $A_{2f}(P_m)$ от P_m / Ω_0 , нормированные на $S_0 \Omega_0^4$, вычисленные для белого шума как конечные суммы, а также их асимптоты при $ak_{max} \ll 1$ и при $ak_{max} \gg 1$ ($\Omega_{max} = 30 \Omega_0$).

Отметим, что $k_{\max}(P_m) \xrightarrow{P_m \rightarrow 0} \infty$, и при $P_m \ll P_{mb} = \Omega_0 \sqrt{2\varphi_B}$ $\alpha(P_m) \ll 1$. Для $\alpha k_{\max} \ll 1$ суммы можно заменить интегралами, а для $\alpha k_{\max} \gg 1$ конечные суммы в $A_{2a}(P_m)$, $A_{2b}(P_m)$ можно заменить бесконечными, которые вычисляются с помощью табличных выражений из [4]. На рис. 4 (а,б,в) приведены зависимости $A_{2a}(P_m)$, $A_{2b}(P_m)$, $A_{2f}(P_m)$ вычисленные для такого шума как конечные суммы, а также их асимптоты при $\alpha k_{\max} \ll 1$ и при $\alpha k_{\max} \gg 1$, для $\omega_{\max} = 30\Omega_0$. При уменьшении ω_{\max} точка излома графика (соответствующая $\alpha k_{\max} = \frac{P_m \Omega_{\max}}{\Omega_0^2} = 1$) на рис. 4(а,б) смещается вправо.

В таблице 2 приведены асимптотические выражения для коэффициентов диффузии для рассматриваемых видов шумов.

Таблица 2.

$A_2 / (\Omega_0^4 S_0)$	$\alpha k_{\max} \leq 1$	$\alpha k_{\max} \geq 1$
В	$\frac{2}{27} \frac{\omega_{\max}^3 \Omega_s}{\Omega_0^4} \left(\frac{P_m^2}{\pi \Omega_0^2} \right)^2$	$\frac{1}{3\pi} \frac{P_m \Omega_s}{\Omega_0^2}$
F	$\frac{2}{3\pi^2} \frac{\omega_{\max}^3 \Omega_s}{\Omega_0^4}$	$\frac{\omega_{\max} \Omega_s}{\pi^2 P_m^2}$
а	$\left(\frac{\delta_a}{2} \right)^2$	$\left(\frac{\delta_a}{2} \right)^2 \left(1 - \frac{4}{3\pi} \frac{\Omega_s P_m}{\Omega_0^2} \right)$

8. Гармоническое шумовое возмущение

Общие выражения для диффузионных коэффициентов (6.1) - (6.3) можно применить для гармоники шума $a(t) = a_0 \sin(\Omega_n t + \gamma)$. Плотность спектральной мощности такого шума (см. Приложение 4), действующего в течение времени T , при $T \rightarrow \infty$, равна

$$S(k\Omega_s) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} a_0^2 \{ \delta(k\Omega_s + \Omega_n) + \delta(k\Omega_s - \Omega_n) \}.$$

При этом коэффициенты диффузии имеют вид:

$$A_2(P_m) \approx 2 \frac{\pi}{2} a_0^2 \sum_{k=0}^{\infty} |k \cdot c_k(P_m)|^2 \cdot \delta(k\Omega_s(P_m) - \Omega_n).$$

9. Модель стационарного случайного возмущения для трэкинга

Для оценок и расчета изменения среднеквадратичного разброса σ_{P_m} во времени при ускорении удобно использовать выражения для коэффициентов диффузии из раздела 7, для шума с постоянной плотностью спектральной мощности в пределах заданной полосы частот. Для проверки метода следует сравнить полученные результаты (увеличение σ_{P_m} в зависимости от среднеквадратичной величины шумового возмущения) с результатом расчета изменения σ_{P_m} методом численного интегрирования уравнений движения для набора макрочастиц, с заданным начальным распределением на фазовой плоскости. При этом шумовое воздействие моделируется некоей случайной функцией от времени, для которой можно вычислить усредненный по ансамблю спектр. Рост σ_{P_m} , полученный в результате трэкинга, можно сравнить с увеличением σ_{P_m} , рассчитанным согласно (5.4), для усредненного спектра используемой случайной функции.

Для сравнения с трэкингом использовалась случайная функция в виде последовательности одинаковых по форме импульсов $a_k f(t-t_k)$ со случайной амплитудой a_k , привязанных к случайным моментам времени t_k , равномерно распределенным в интервале $t_k \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} \delta\varphi(t) &= \sum_{k=1}^N a_k f(t-t_k), \quad t \in [0, T] \\ \langle a_k^2 \rangle &= a_\sigma^2, \\ t_k &\in [0, T] - \text{равномерно}, \\ n_1 &= N/T - \text{средняя частота следования импульсов}. \end{aligned} \tag{9.1}$$

Для расчета была выбрана функция $f(t)$ в виде прямоугольного импульса постоянной длительности.

$$f(t, t_0, \Delta_0) = \Phi(t - (t_0 - \Delta_0))\Phi((t_0 + \Delta_0) - t). \tag{9.2}$$

Спектр одного импульса

$$f_\omega(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = -2\Delta_0 \frac{\sin(\omega\Delta_0)}{\omega\Delta_0} e^{-i\omega t_0}, \tag{9.3}$$

Спектр случайной суммы импульсов

$$\delta\varphi_\omega(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta\varphi(t)e^{-i\omega t} dt = f_\omega(\omega) \sum_{k=1}^N a_k e^{-i\omega t_k}.$$

Спектральная плотность для данной реализации случайной функции:

$$S_{av}(\omega) = \frac{|\delta\varphi_\omega(\omega)|^2}{T} = \left| 2\Delta_0 \frac{\sin(\omega\Delta_0)}{\omega\Delta_0} \right|^2 \left| \sum_{k=1}^N a_k e^{-i\omega t_k} \right|^2. \quad (9.4)$$

Плотность спектральной мощности, усредненная по ансамблю случайных наборов a_k, t_k

$$S_{av}(\omega) = \frac{\langle |\delta\varphi_\omega(\omega)|^2 \rangle}{T} = n_1 a_\sigma^2 \left| 2\Delta_0 \frac{\sin(\omega\Delta_0)}{\omega\Delta_0} \right|^2. \quad (9.5)$$

Нетрудно показать, что для такой случайной функции усреднение по ансамблю совпадает с усреднением по времени:

$$\begin{aligned} \langle \overline{\delta\varphi_{3\omega}(\omega)} \delta\varphi_{3\omega}(\omega') \rangle_{анс} &= |f_\omega(\omega)|^2 \sum_{\substack{k=1, \\ k'=1}}^N \langle a_k^* a_{k'} \rangle \langle e^{i(\omega t_k - \omega' t_{k'})} \rangle = \\ &= |f_\omega(\omega)|^2 \sum_{\substack{k=1, \\ k'=1}}^N \langle a_k^* a_{k'} \rangle \delta_{k,k'} \delta_{\omega,\omega'} = |f_\omega(\omega)|^2 \langle |a_k|^2 \rangle \delta_{\omega,\omega'} N = |f_\omega(\omega)|^2 \delta_{\omega,\omega'} \langle |a_k|^2 \rangle n_1 T, \\ \langle \overline{\delta\varphi_{3\omega}(\omega)} \delta\varphi_{3\omega}(\omega) \rangle_{анс} &= |f_\omega(\omega)|^2 \langle |a_k|^2 \rangle n_1 T, \\ \langle \overline{\delta\varphi_{3\omega}(\omega)} \delta\varphi_{3\omega}(\omega') e^{i(\omega' - \omega)t} \rangle_t &= |f_\omega(\omega)|^2 \sum_{\substack{k=1, \\ k'=1}}^N a_k^* a_{k'} e^{i(\omega t_k - \omega' t_{k'})} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{i(\omega' - \omega)t} dt = \\ &= |f_\omega(\omega)|^2 \sum_{\substack{k=1, \\ k'=1}}^N a_k^* a_{k'} e^{i(\omega t_k - \omega' t_{k'})} \frac{1}{T} \frac{2 \sin((\omega' - \omega)T/2)}{(\omega' - \omega)} \Big|_{T \rightarrow \infty} = \\ &= |f_\omega(\omega)|^2 \sum_{\substack{k=1, \\ k'=1}}^N a_k^* a_{k'} e^{i(\omega t_k - \omega' t_{k'})} \delta_{\omega',\omega} = \\ &= |f_\omega(\omega)|^2 \delta_{\omega',\omega} \sum_{\substack{k=1, \\ k'=1}}^N a_k^* a_{k'} e^{i\omega(t_k - t_{k'})} |f_\omega(\omega)|^2 \delta_{\omega',\omega} \langle |a_k|^2 \rangle n_1 T, \\ \langle \overline{\delta\varphi_{3\omega}(\omega)} \delta\varphi_{3\omega}(\omega) \rangle_t &= |f_\omega(\omega)|^2 \langle |a_k|^2 \rangle n_1 T. \end{aligned}$$

На рис. 5 приведены для сравнения усредненный спектр такой случайной функции и 2 варианта прямоугольного спектра, рассмотренного в разделе 7, с одинаковым среднеквадратичным значением случайной функции и рассчитанные для этих спектров коэффициенты диффузии для рассматриваемых видов возмущений.

При попытке моделировать случайный шум с прямоугольным спектром, для которого получены выражения в разделе 7, суммой гармоник со случайным распределением частот в пределах заданной полосы частот и со

случайными амплитудами возникают проблемы. В этом случае как функция распределения пучка (то есть суммы макрочастиц), так и спектр шума представляют собой суммы дельта-функций, и интеграл от их произведений, входящий в выражение для прироста среднеквадратичного разброса по энергии оказывается равен нулю. А для функции, рассмотренной в этом разделе, спектр случайной функции – непрерывная функция, с которой правильно интегрируется как функция распределения пучка в виде дельта-функций. Поэтому для трэкинга был выбран шум именно в таком виде.

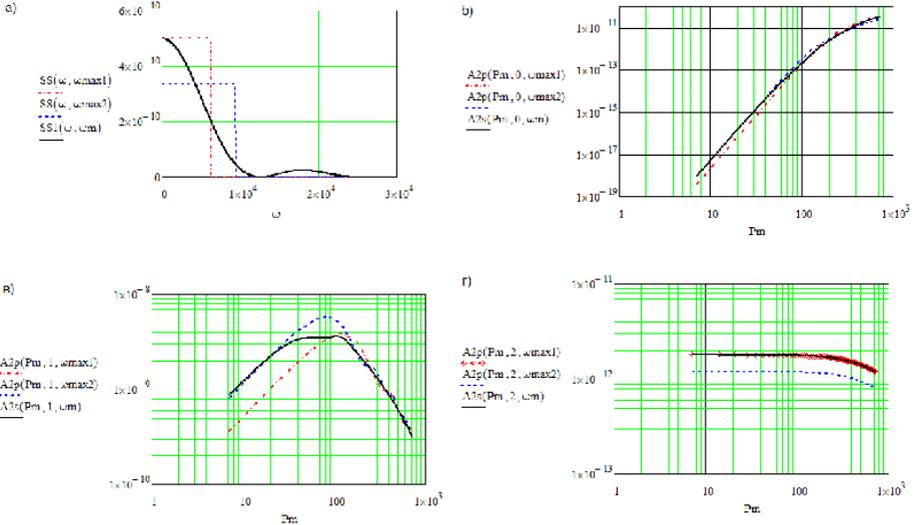


Рис. 5. Спектр (а) и диффузионные коэффициенты шумов с прямоугольным спектром с шириной $\omega_{max1} = \omega_{av} = 2\pi \cdot 10^3 c^{-1}$, $\omega_{max2} = 1.5\omega_{av}$ и шума в виде рассмотренной усредненной случайной функции с $\Delta_0 = \pi / 2\omega_{av}$, $\omega_m = 4\omega_{av}$ (для возмущения амплитуды (б) и фронта импульса (в) барьерного напряжения и амплитуды ускоряющего напряжения (г)), для одинаковых среднеквадратичных амплитуд шумов.

На рис.6 слева показаны среднеквадратичные амплитуды шумов в зависимости от получающегося прироста среднеквадратичного разброса по энергии, при ширине полосы шума $\omega_{av} = 2\pi \cdot 10^3 c^{-1}$. Справа приведены среднеквадратичные амплитуды шумов, при которых увеличение среднеквадратичного разброса по энергии не превышает 10%, в зависимости от ширины полосы шума. Сплошная и пунктирная линии соответствуют расчету со случайным спектром (9.4) и с усредненным по ансамблю спектром (9.5). Графики практически совпадают, так как при вычислении прироста среднеквадратичного разброса по энергии коэффициент диффузии, в который входит плотность спектральной мощности случайной функции (9.4), интегрируется с гладкой функцией распределения и таким образом также усредняется. На рис.6 и последующих варианты с возмущением амплитуды

(а) и фронта (б) импульса барьерного напряжения и амплитуды (в) ускоряющего напряжения обозначены индексом $kind = 0, 1, 2$ соответственно. Расчеты выполнены для $\tau_0 = 1\text{sec}$, $\sigma_{Pm0} = 70\text{sec}^{-1}$.

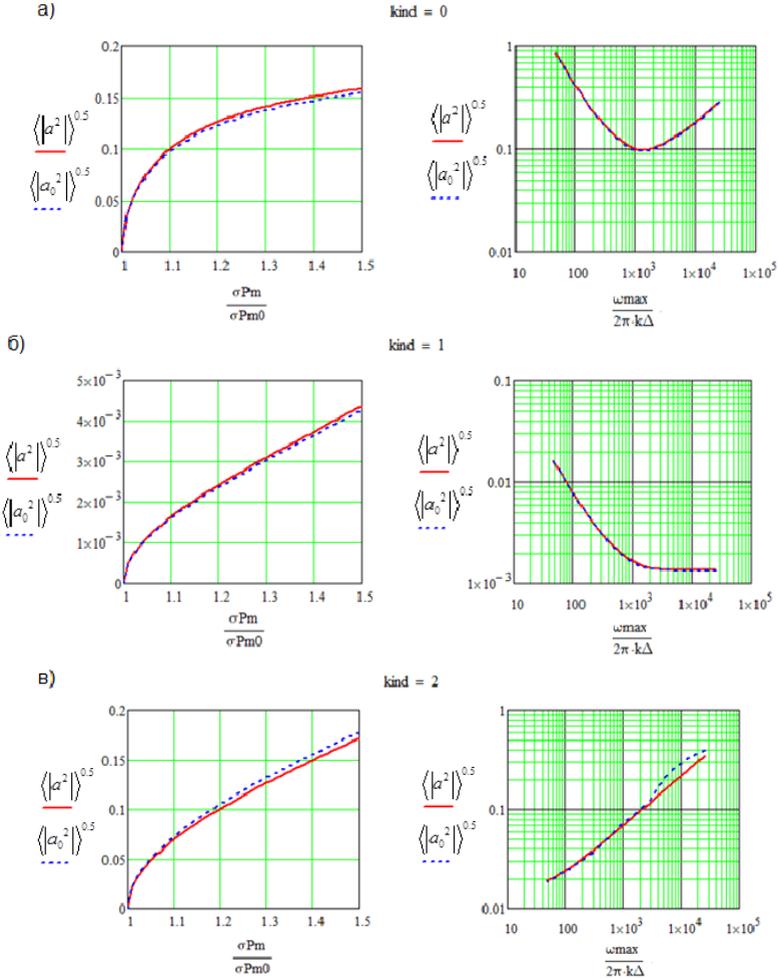


Рис.6. Зависимость относительного увеличения среднеквадратичного разброса по амплитудам $\sigma_{Pm} / \sigma_{Pm0}$ от среднеквадратичной амплитуды шума $\langle |a^2| \rangle^{0.5}$ при ширине полосы шума $\omega_{av} = 2\pi \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$ (слева); зависимость значения $\langle |a^2| \rangle^{0.5}$, при котором $\sigma_{Pm} / \sigma_{Pm0} = 1.1$, от ширины полосы шума (справа). Рассматривается возмущение амплитуды (а) и фронта (б) импульса барьерного напряжения и амплитуды ускоряющего напряжения (в).

Как видно из рис. 5, диффузионные коэффициенты для суммы случайных импульсов A_{2s} близки к диффузионным коэффициентам для прямоугольного спектра A_{2p} с $\omega_{\max 1} = \omega_m / 4$ или $\omega_{\max 2} = 1.5\omega_{\max 1}$ и одинаковых среднеквадратичных величин возмущения. Это позволит распространить выводы, сделанные для спектра A_{2s} , для которого удобнее проводить трэкинг, на случай прямоугольного спектра, для диффузионных коэффициентов которого в разделе 7 приведены формулы.

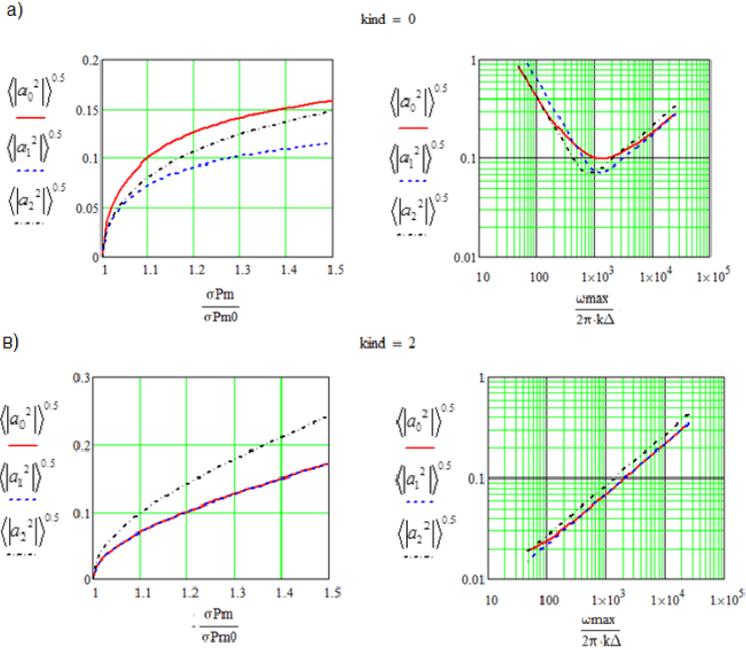


Рис. 7. Слева: зависимость относительного увеличения среднеквадратичного разброса по энергии от среднеквадратичной амплитуды шума для шумов с прямоугольным спектром с шириной $\omega_{\max 1} = \omega_{av} = 2\pi \cdot 10^3 c^{-1}$ (штрихи), $\omega_{\max 2} = 1.5\omega_{av}$ (пунктир) и шума в виде рассмотренной усредненной случайной функции с $\Delta_0 = \pi / 2\omega_{av}$, $\omega_m = 4\omega_{av}$ (сплошная линия), для возмущения амплитуды (а) и фронта (б) импульса барьерного напряжения и амплитуды ускоряющего напряжения (в). Справа: зависимость допустимого значения шумового возмущения от ширины полосы шума (при допустимом увеличении среднеквадратичного разброса по энергии 10%), для тех же вариантов спектров и видов шума.

На рис. 7 для приведены зависимости относительного увеличения среднеквадратичного разброса по энергии от среднеквадратичной амплитуды шума для этих спектров. Вычисления проводились для $\tau_0 = 1 \text{ sec}$, $\sigma_{P_{m0}} = 70 \text{ sec}^{-1}$. Из графиков видно, что расчеты с диффузионным и коэффициентами по формулам из таб.2 для прямоугольного спектра с шириной $\omega_{\max 1} = \omega_m / 4$ дают близкую оценку допустимой среднеквадратичной амплитуды шума для возмущения фронта (б) импульса барьерного напряжения и амплитуды ускоряющего напряжения (в). Для возмущения амплитуды (а) импульса барьерного напряжения расчеты с диффузионным и коэффициентами по формулам дают более строгую оценку (примерно на $1/4$ меньше).

Можно сделать вывод, что формулы из таблицы. 2 вполне применимы для ускорения расчетов.

10. Сравнение прямого интегрирования уравнений движения по времени с результатами спектрального метода

В данном разделе проведено сравнение результатов спектрального метода вычисления шумового диффузионного коэффициента с прямым интегрированием по времени. Это сделано для определения пределов применимости методов и дальнейшего сравнения с результатами численного трэкинга.

В Приложении 5 прямым интегрированием по времени уравнений движения с учетом шумовых возмущений напряжений получены выражения для диффузионных коэффициентов:

$$A_{2b}(P_m) =$$

$$= \frac{2}{T_s} P_m^2 \int_{-\infty}^{\infty} S_b(\omega) \left| \frac{\sin(\omega T_b / 2) - (\omega T_b / 2) \cos(\omega T_b / 2)}{(\omega T_b / 2)^2} \right|^2 \left\{ \frac{1}{n\pi} \left| \frac{\sin(\omega n T_s / 2)}{\sin(\omega T_s / 2)} \right|^2 \right\} d\omega,$$

$$A_{2f}(P_m) = \frac{2}{2\pi} \left(\frac{2}{T_b} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega) 2 |\sin(\omega T_b / 2)|^2 \left\{ \frac{1}{n T_s} \left| \frac{\sin(\omega n T_s / 2)}{\sin(\omega T_s / 2)} \right|^2 \right\} d\omega,$$

$$A_{2a}(P_m) = \frac{1}{n T_s} \left(\frac{\Omega_0^2 T_s}{2\pi} / 2 \right)^2 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} S_a(\omega) \frac{\left| (1 - e^{i\omega T_s / 2}) \right|^2}{(\omega T_s / 2)^2} \left| \frac{\sin(\omega n T_s / 2)}{\sin(\omega T_s / 2)} \right|^2 \cdot$$

$$\cdot \left\{ \left(e^{i\omega(T_s/2 - T_b)} - 1 \right) + 2 e^{i\omega(T_s/2 - T_b/2)} \left(\frac{\sin(\omega T_b / 2)}{\omega T_b / 2} - \cos(\omega T_b / 2) \right) \right\}^2 d\omega,$$

$$T_b = T_b(P_m), \quad T_s = T_s(P_m).$$

Эти выражения получены в предположении, что промежуток времени T , в течение которого измеряется шумовое возмущение и его плотность спектральной мощности, достаточно велик, чтобы в подынтегральном выражении заменить $\frac{\sin((\omega - \omega')T/2)}{(\omega - \omega')T/2}$ на $\delta(\omega - \omega')$ и превратить двойной интеграл по частотам в одинарный. Это возможно, если $T \gg 1/\Delta\omega$, где $\Delta\omega$ – характерный интервал частот, на котором плотность спектральной мощности меняется мало. Далее, при $n \gg 1$, с учетом предельных выражений для дельта-функции (П4.1), эти интегралы превращаются в ряды (6.1)-(6.3). Очевидно, что методы совпадают, если за $n \gg 1$ периодов $T_s(P_m)$ изменение P_m мало.

Отметим, что в процессе численного трэкинга то же интегрирование по времени выполняется пошагово, так что результаты должны соответствовать.

11. Сравнение результатов трэкинга с результатами спектрального метода

Трэкинг проводился для $N_p = 1000$ макрочастиц, имеющих гауссовское начальное распределение по амплитудам колебаний скоростей и случайное распределение в промежутке $\theta \in [0, 2\pi]$ по синхротронным фазам, для начальной энергии $E_{k0} = 1 \text{ GeV} / u$ и начального разброса по импульсам $\sigma_p / p_s = 10^{-4}$. Затухание предполагается линейным, время затухания $\tau_0 = 1 \text{ sec}$. Для моделирования случайных процессов, не относящихся к ВЧ шумам (например, внутривидовое рассеяние), приводящих к установлению равновесия с затуханием при заданном разбросе по импульсам, использовалась модель случайных толчков заданной среднеквадратичной величины, действующих с одинаковой частотой на каждую частицу. Случайная функция, которой моделировался ВЧ шум, описана в разделе 9.

Отметим, что полученные для постоянной энергии и линейного затухания результаты могут быть пересчитаны для другого значения τ как

$$\delta_{\max}(\sigma_{\max} / \sigma_0, \tau_1) = \delta_{\max}(\sigma_{\max} / \sigma_0, \tau_0) \sqrt{\tau_{e0} / \tau_1},$$

это следует из формулы (5.4).

В результате расчетов получаем зависимость среднеквадратичного разброса амплитудам P_m (пропорциональным разбросу по энергии) от времени. На рис. 8 видно, что за счет шумов установившееся значение этой величины σ_{av} превышает начальное равновесное значение σ_{m0} . Шумовое

возмущение включилось в момент времени t_{start} . На графике отмечены значения $\sigma_{av} \pm d\sigma_{av}$, где $d\sigma_{av}$ – среднеквадратичное отклонение значений σ от σ_{av} после установления равновесия между затуханием и шумами на новом уровне.

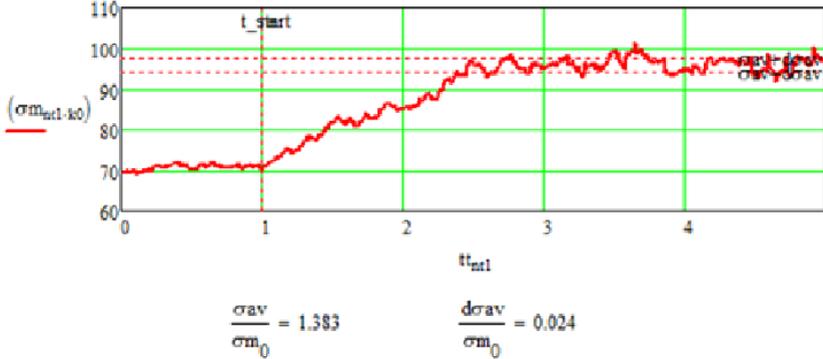


Рис.8. Изменение во времени среднеквадратичного разброса по амплитудам P_m для шумового возмущения амплитуды барьерного напряжения $\langle a_b \rangle = 0.14$, $\tau_0 = 1 \text{ sec}$, $E_k = 1 \text{ GeV} / u$, $\sigma_{P0} = 70 \text{ sec}^{-1}$ (соответствует $\langle \Delta p / p \rangle = 10^{-4}$), $\omega_{av} = 2\pi \cdot 10^3 \text{ c}^{-1}$.

Ниже (рис. 9) приведены графики зависимости относительного увеличения среднеквадратичного разброса по энергии от среднеквадратичной амплитуды шума δ_0 при ширине полосы шума $\omega_{av} = 2\pi \cdot 10^3 \text{ c}^{-1}$, аналогичные рис.6, для $\tau_0 = 1 \text{ sec}$, с нанесенными на них результатами трэкинга (значения $\sigma_{av} / \sigma_{m0}$, $(\sigma_{av} \pm d\sigma_{av}) / \sigma_{m0}$ для заданных среднеквадратичных значений для всех видов шума).

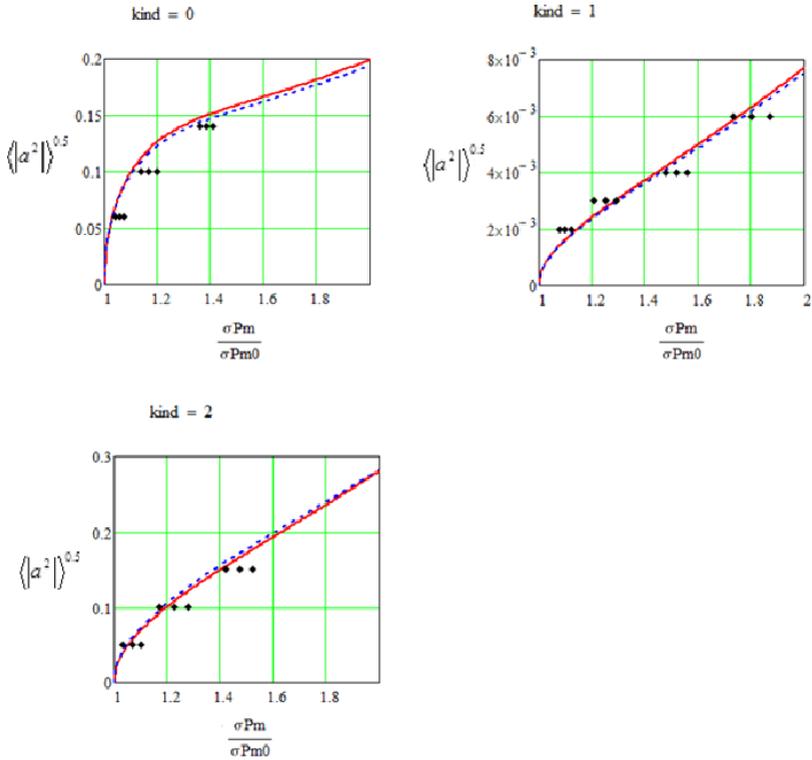


Рис. 9. Графики зависимости относительного увеличения средне-квадратичного разброса по энергии (по горизонтали) от среднеквадратичной амплитуды шума (по вертикали) при ширине полосы шума $\omega_{av} = 2\pi \cdot 10^3 \text{ c}^{-1}$, аналогичные рис.6, для $\tau_0 = 1 \text{ сек}$ с нанесенными на них результатами трекинга – установившиеся значения $\sigma_{av} / \sigma_{m0}$, $(\sigma_{av} \pm d\sigma_{av}) / \sigma_{m0}$ (ромбы).

12. Результаты расчетов

Накопление.

Заметим, что в процессе накопления тока рост среднеквадратичного разброса по энергии происходит не только из-за воздействия шумов ВЧ, но и по другим причинам, которые не входят в круг вопросов, рассматриваемых в данной работе (например, изменение среднеквадратичного разброса по энергии при перемещении импульсов барьерного напряжения). Для исключения посторонних эффектов, здесь рассматривается влияние шумов ВЧ на уже накопленный пучок при постоянной энергии. Начальный разброс

по энергии предполагается равным начальному или конечному разбросу в процессе накопления, которые отличаются в 6 раз (см. Таб. 1).

Прирост σ_{Pm} за время расчета (накопления или ускорения) связан с параметрами задачи по формулам (5.4), (5.5).

В разделе 9 вычислены диффузионные коэффициенты для шума с постоянной плотностью спектральной мощности в пределах заданной полосы частот .

$$S(\omega) = \begin{cases} S_0, & |\omega| \leq \omega_{\max}, \\ 0, & |\omega| > \omega_{\max}, \end{cases}$$

$$\langle a^2 \rangle = S_0 \cdot \frac{2\omega_{\max}}{2\pi}.$$

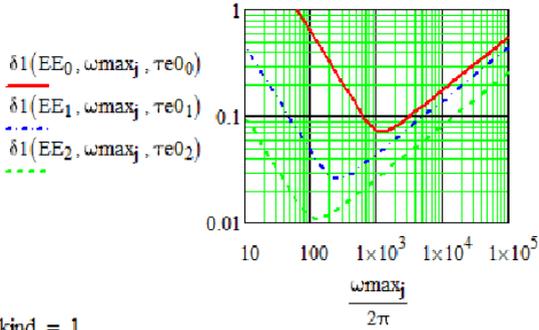
На рис. 10 приведены зависимости допустимой среднеквадратичной амплитуды такого шума $\delta_0 = \sqrt{\langle a^2 \rangle}$ от ширины спектра ω_{\max} (при допустимом увеличении среднеквадратичного разброса по энергии 10%), для $Ek = 1 \text{ GeV/u}$, $Ek = 3 \text{ GeV/u}$, $Ek = 4.5 \text{ GeV/u}$, $\sigma_{P0} = 70,28,11 \text{ sec}^{-1}$ (соответствующих $\langle \Delta p / p \rangle_{inj}$ из таб. 1) и $\tau_0 = 1,20,300 \text{ sec}$ соответственно. На рис. 11 приведены аналогичные зависимости допустимой плотности спектральной мощности шума от ширины спектра шума.

Самое строгое ограничение – на высокой энергии $Ek = 4.5 \text{ GeV/u}$ (при самом большом времени затухания).

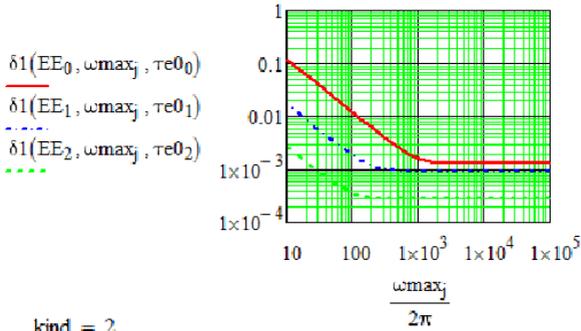
Отметим, что время накопления $T_{stor} = 440 \text{ sec}$ при $Ek = 1 \text{ GeV/u}$, $Ek = 3 \text{ GeV/u}$ много больше τ_0 для этих энергий, и за это время устанавливается стационарное значение σ_{Pm} , согласно (5.4). Однако для энергии $Ek = 4.5 \text{ GeV/u}$ $T_{stor} = 440 \text{ sec}$ лишь в 1.5 раза больше, чем $\tau_0 = 300 \text{ sec}$, за это время стационарное значение не успеет установиться, конечное значение $\sigma_{Pm}(T_{stor})$ меньше стационарного. На рис. 12 приведены зависимости $\sigma_{Pm}(t)$ для $\tau_0 = 100, 300, 1000 \text{ sec}$, для $\delta_0 = \sqrt{\langle a^2 \rangle}$, соответствующего увеличению стационарного значения σ_{Pm} на 10% и $\tau_0 = 300 \text{ sec}$.

Можно сделать вывод, что при постоянной энергии можно пользоваться результатами рис. 10, 11 и для энергии $Ek = 4.5 \text{ GeV/u}$ как оценкой снизу для амплитуды шума, при которой увеличение σ_{Pm} не превышает заданного допустимого.

kind = 0



kind = 1



kind = 2

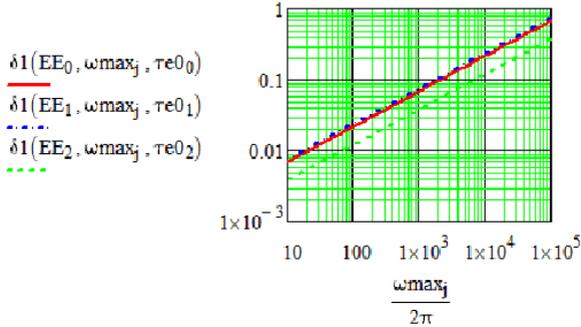


Рис. 10. Зависимость допустимой среднеквадратичной амплитуды шума δ_0 от ширины спектра ω_{\max} (при допустимом увеличении среднеквадратичного разброса по энергии 10%). Сверху вниз: возмущение амплитуды импульса барьерного напряжения, дрожание фронта импульса барьерного напряжения, возмущение амплитуды ускоряющего напряжения.

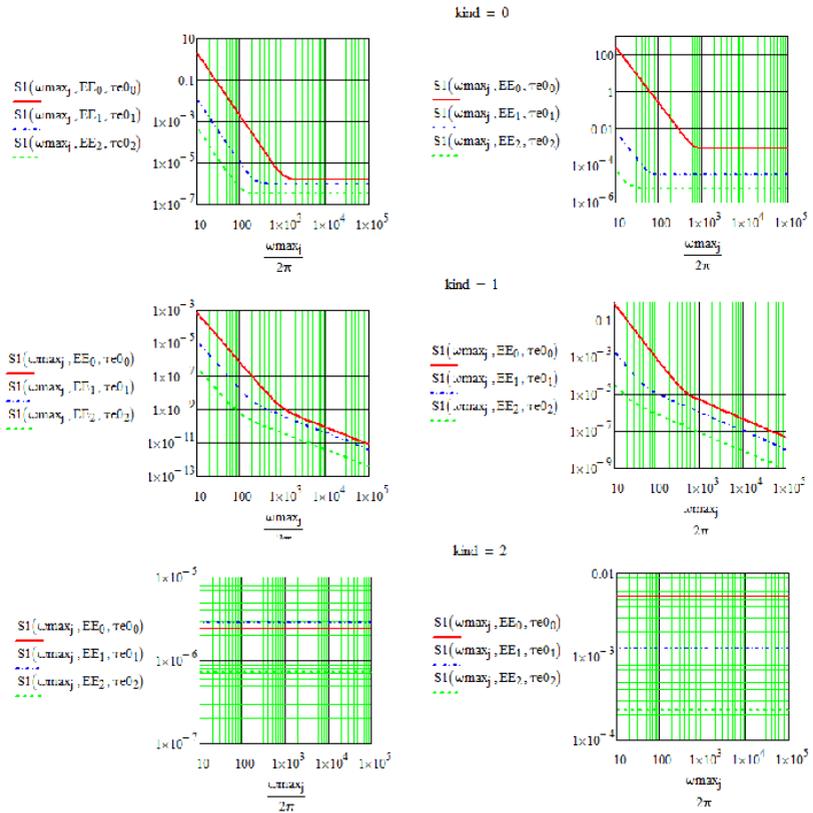


Рис. 11. Зависимость допустимой плотности спектральной мощности шума S_0 от ширины спектра ω_{\max} (при допустимом увеличении среднеквадратичного разброса по энергии 10%); для начального разброса по энергии равного разбросу при инжекции (слева) и разбросу накопленного пучка (справа).

Ускорение.

При ускорении накопленного пучка максимальное время $T_{acc} = 52$ sec начальная энергия $E_{ki} = 1 \text{ GeV}/u$, конечная энергия $E_{kf} = 4.5 \text{ GeV}/u$, все параметры, определяющие рост σ_{Pm} в каждый момент времени пересчитываются с учетом их зависимости от растущей энергии, кроме того, учитывается адиабатическое изменение σ_{Pm} при ускорении (см. (5.5)).

Сравним конечные значения σ_{Pm} с учетом шумов и без учета шумов, то есть только за счет изменения параметров с изменением энергии и адиабатического изменения σ_{Pm} .

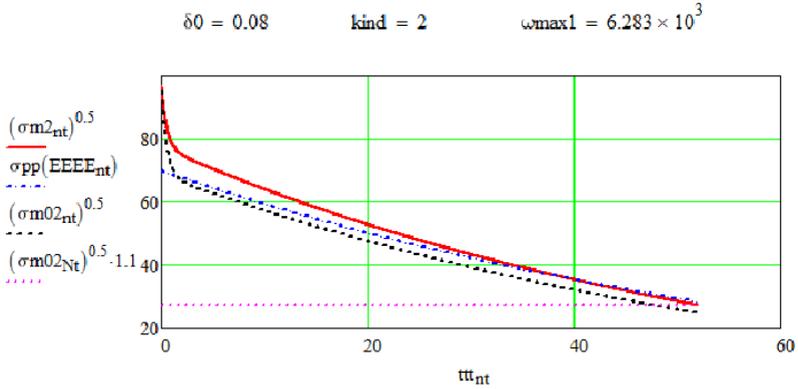


Рис. 13. Изменение σ_{Pm} со временем при ускорении: сплошная линия – с учетом шумов и адиабатического изменения σ_{Pm} ; пунктир – изменение стационарного значения σ_{Pm} при изменении параметров со временем; штрихи – с учетом адиабатического изменения σ_{Pm} без шумов; точки – уровень σ_{Pm} на 10% больше значения σ_{Pm} при максимальном значении энергии, с учетом адиабатического изменения σ_{Pm} без шумов.

Здесь $\delta_0 = 0.08$ такое, при котором σ_{Pm} в конце больше на 10% значения полученного с учетом адиабатического изменения σ_{Pm} без шумов. Отметим, что это решение не зависит от начального значения σ_{Pm} . Это можно увидеть из решения $\sigma_{Pm1}(t)$ уравнения (5.5) без шумов с начальным условием σ_{Pm10} , которое можно подставить в качестве начального приближения в правую часть (5.5) с шумами, в результате

$$\frac{d}{dt}(\sigma_{Pm1}^2) = -\left(2 \frac{\sigma_{Pm1}^2}{\tau_0(E(t))} - A_{20}\right) + 2\sigma_{Pm}^2 \frac{(dE/dt)}{k_0(E(t))} \frac{d(k_0(E(t)))}{dE},$$

$$\sigma_{Pm1}(0) = \sigma_{Pm10}$$

$$\frac{d}{dt}(\sigma_{Pm}^2) \approx \frac{d}{dt}(\sigma_{Pm1}^2) - \left(\int_0^\infty A_{2n}(P_m) \cdot \frac{\partial \rho(P_m, \sigma_{Pm1}(t))}{\partial P_m} P_m dP_m\right), \quad (12.1)$$

$$(\sigma_{Pm}(t)^2 - \sigma_{Pm1}(t)^2) \approx -\int_0^t dt \left(\int_0^\infty A_{2n}(P_m) \cdot \frac{\partial \rho(P_m, \sigma_{Pm1}(t))}{\partial P_m} P_m dP_m\right)$$

На рис. 14 приведены графики $\sigma_{Pm1}(t)$ решений уравнения (5.5) без шумов разными начальными условиями. Они отличаются только на начальном этапе при $t \leq 2\tau_0(E_{start}) \sim 2$ сек. Поэтому интегралы по времени в (12.1) отличаются только на этом промежутке времени, что дает

незначительный вклад в интеграл по всему времени ускорения. Таким образом, полное увеличение за время ускорения $\sigma_{Pm}(t)$ за счет шумов по сравнению с $\sigma_{Pm1}(t)$ не зависит от начальных условий.

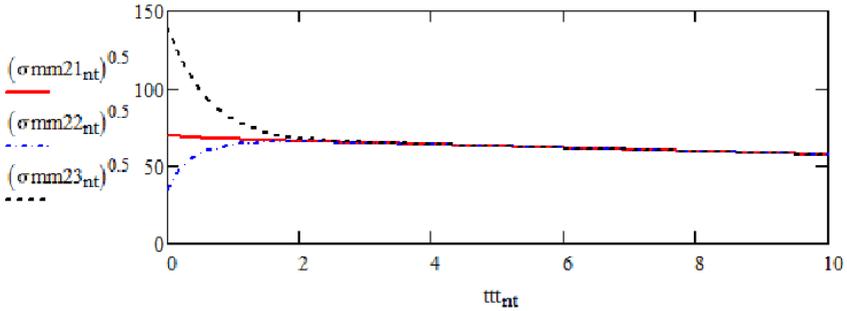


Рис.14. Графики $\sigma_{Pm1}(t)$ решений уравнения (5.5) без шумов разными начальными условиями.

Что касается ускорения до 4.5 эВ, при этом необходимо знать зависимость декремента стохастического затухания от энергии. В любом случае, результат (то есть среднеквадратичная величина шума для прироста $\sigma_{Pm}(t)$ на 10%) для стационарного решения при максимальной энергии и соответствующем этой энергии значении времени затухания $\tau_1=300$ sec будет максимальной оценкой по сравнению с ускорением до этой энергии. Если же это время затухания τ отличается от τ_1 , то допустимую среднеквадратичную величину шума надо пересчитать пропорционально $\sqrt{\tau_1 / \tau}$.

13. Измерения и расчет

Спектр ускоряющих и барьерных напряжений можно измерить анализатором спектра:

$$S_{изм}(\omega) = \frac{U(\omega)^2}{T_{изм}}$$

В отсутствие возмущений спектр состоит из амплитуд гармоник последовательности импульсов напряжения на частотах кратных частоте их следования ω_f . Если к невозмущенному напряжению добавляется шум, то в окрестности каждой гармоники появляется непрерывный спектр шумового воздействия. Измеренный шумовой спектр напряжения определяется действием всех видов шумовых возмущений. Предполагая разные виды шумовых возмущений статистически независимыми, можно записать

$$S_{изм}(\omega) = S_b(\omega) + S_f(\omega) + S_a(\omega),$$

то есть для каждого вида шума по отдельности

$$S_{b,f,a}(\omega) \leq S_{изм}(\omega).$$

Для оценки сверху можно считать

$$S_{b,f,a}(\omega) = S_{изм}(\omega)$$

В Приложении 6 приведена связь измеренной плотности спектральной мощности напряжения со плотностями спектральных мощностей рассмотренных в этой работе видов шумовых возмущений и оценка сверху для спектральных мощностей шумовых возмущений (П6.8) для $n = 1, \varphi_b = \pi / 6$

$$S_{b\max}(\Delta\omega) = \frac{2\pi}{\Delta\omega_{sp}} \frac{S_{rel}(\Delta\omega)}{S_{rel}(0)},$$

$$S_{\delta\varphi 3\max}(\Delta\omega) = 5.53 \frac{2\pi}{\Delta\omega_{sp}} \frac{S_{rel}(\Delta\omega)}{S_{rel}(0)},$$

$$S_a(\Delta\omega) = \frac{2\pi}{\Delta\omega_{sp}} \frac{S_{rel}(\Delta\omega)}{S_{rel}(0)},$$

$$S_{a'}(\Delta\omega) = 0.025 \frac{2\pi}{\Delta\omega_{sp}} \frac{S_{rel}(\Delta\omega)}{S_{rel}(0)}.$$

Здесь $S_{rel}(\Delta\omega)$ – спектр на экране спектрометра (в единицах измерения экрана спектрометра), $\Delta\omega_{sp}$ – интервал частот, по которому спектрометр усредняет мощность.

Таким образом, пересчитав измеренный спектр напряжения к плотностям спектральной мощности этих видов шумовых возмущений, можно рассчитать прирост среднеквадратичного разброса по энергии и сравнить с допустимым. Более простая оценка получится, если по измеренной плотности спектральной мощности оценить ширину полосы и максимальное значение плотности спектральной мощности полученных шумовых возмущений и воспользоваться результатами раздела 12. При этом мы получим оценку сверху на допустимые величины шумов, которые могут оказаться слишком строгими. В этом случае могут потребоваться более точные измерения спектров каждого вида шума по отдельности, более сложными методами, чем просто измерение спектра импульса напряжения.

14. Заключение

Итак, в данной работе решена задача оценки роста среднеквадратичного разброса энергии частиц из-за шумов барьерного и ускоряющего напряжения. В разделе 5 приведены выражения для расчета

среднеквадратичного разброса энергии частиц в зависимости от времени с учетом дополнительного шумового коэффициента диффузии. В разделе 6 приведены выражения для расчета дополнительных шумовых коэффициентов диффузии для известной плотности спектральной мощности шума. В разделе 11 показано сравнение результатов данных расчетов с результатами трэкинга, которое подтверждает справедливость используемого метода. В разделе 12 приведены результаты расчета роста среднеквадратичного разброса энергии частиц за счет ВЧ шумов при различных параметрах спектральной плотности мощности шума, при постоянной энергии частиц и при ускорении. Для шумов с постоянной спектральной плотностью мощности S_0 в пределах полосы частот $\pm\omega_{\max}$ определены максимальные значения спектральной плотности S_0 в зависимости от ω_{\max} , при которых увеличение среднеквадратичного разброса энергии частиц за счет ВЧ шумов не превышает допустимого значения, принятого равным 10% (см. рис.11). В разделе 13 приведен способ пересчета измеренного спектра напряжения к плотностям спектральной мощности рассмотренных в данной работе видов шумовых возмущений, используемых при расчете шумовых диффузионных коэффициентов. Это позволяет проводить расчет роста среднеквадратичного разброса энергии частиц не только для модельных, но и для реальных спектров ВЧ шумов.

Приложения

III. Статическое распределение частиц по амплитудам

В параболической потенциальной яме распределение по P – гауссовское, а по P_m – рэлеевское. В прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками распределение и по P , и по P_m – гауссовское. Определим распределение по P_m для трапециевидной потенциальной ямы, как в данном случае (рис. 2а).

Частицы движутся согласно уравнениям (2.1) в потенциале (2.2) и имеют гамильтониан (2.9). В таком потенциале функция распределения по переменным φ, P имеет вид

$$f(P, \varphi) = \frac{C}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_P} \exp\left(-\frac{P^2 + 2W(\varphi)}{2\sigma_P^2}\right) = f(0,0) \exp\left(-\frac{P^2 + 2W(\varphi)}{2\sigma_P^2}\right),$$

$$C = \left(\int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(P, \varphi) dP d\varphi\right)^{-1} = \left(\int_0^{2\pi} \exp\left(-\frac{2W(\varphi)}{2\sigma_P^2}\right) d\varphi\right)^{-1} = \sqrt{2\pi} \cdot \sigma_P \cdot f(0,0)$$

Обозначим $F(P_m)$ – число частиц с амплитудой $\leq P_m$:

$$F(P_m) = \iint_{H(P, \varphi) \leq P_m^2/2} f(t, P, \varphi) dP d\varphi = \int_0^{\infty} \rho_m(P_m) dP_m.$$

Искомая функция распределения по амплитудам равна

$$\rho_m(P_m) = \frac{dF(P_m)}{dP_m}. \text{ Нормировка дает } F(\infty) = 1. \text{ Найдем } F(P_m).$$

Будем отсчитывать φ от середины промежутка между импульсами барьерного напряжения $(\varphi_{f2} + \varphi_{f3})/2$. Разобьем $F(P_m)$ на 3 слагаемых: $F(P_m) = F_1(P_m) + F_2(P_m) + F_3(P_m)$, где $F_1(P_m)$ – число частиц, находящихся внутри промежутка между импульсами барьерного напряжения, то есть с $|\varphi| \leq \varphi_{bb}/2$, $F_2(P_m)$ – число частиц, находящихся внутри барьерного напряжения, то есть с $\varphi_{bb}/2 < |\varphi| \leq \varphi_{bb}/2 + \varphi_b$, $F_3(P_m)$ – число частиц, находящихся за областями барьерного напряжения, то есть с $\varphi_{bb}/2 + \varphi_b < |\varphi| \leq \pi$. Тогда функция распределения $\rho_m(P_m)$ также разбивается на 3 слагаемых:

$$\rho_m(P_m) = \rho_{m1}(P_m) + \rho_{m2}(P_m) + \rho_{m3}(P_m), \quad \rho_{mk}(P_m) = \frac{dF_k(P_m)}{dP_m}.$$

Вычислим $F_k(P_m)$ по отдельности.

$$F_1(P_m) = 2 \int_0^{\varphi_{bb}/2} \int_{-P_m}^{P_m} f(P, \varphi) dP d\varphi = 2\varphi_{bb} \int_0^{P_m} f(P, 0) dP,$$

$$F_3(P_m) = 2 \int_{\varphi_{bb}/2 + \varphi_b}^{\pi} \int_{-P_m}^{P_m} f(P, \varphi) dP d\varphi = 4(\pi - (\varphi_{bb}/2 + \varphi_b)) \cdot \int_0^{P_m} f(P, \varphi_{bb}/2 + \varphi_b) dP.$$

Для них

$$\rho_{m1}(P_m) + \rho_{m3}(P_m) = 2\varphi_{bb} f(P_m, 0) + 2(2\pi - (\varphi_{bb} + 2\varphi_b)) f(P_m, \varphi_{bb}/2 + \varphi_b).$$

При вычислении $F_2(P_m)$ границы и форма областей интегрирования зависят от амплитуды P_m и отличаются для $P_m^2 < P_{mb}^2$ и $P_m^2 \geq P_{mb}^2$ (см. рис.15).

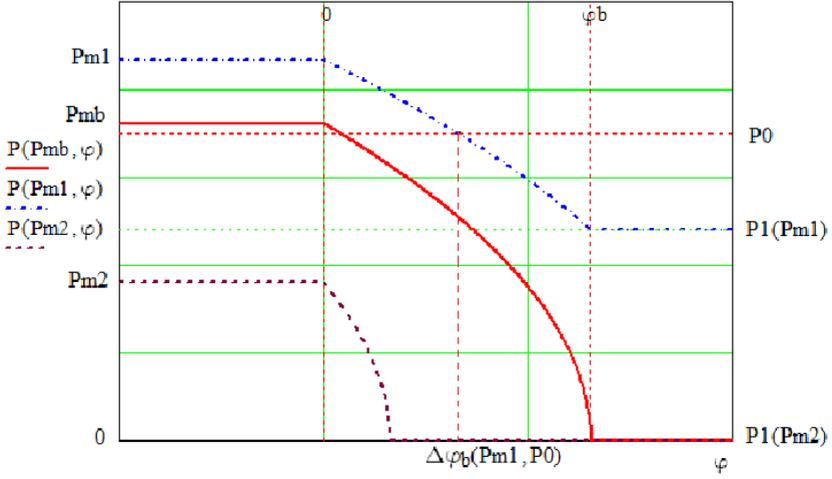


Рис. 15. Траектории частиц $P(P_m, \varphi)$ с разной амплитудой P_m внутри области барьерного напряжения. Границы областей интегрирования.

Внутри барьерного напряжения $\frac{P_m^2}{2} = \left(\frac{P^2}{2} + \Omega_0^2 \Delta\varphi \right)$, где $\Delta\varphi$ – расстояние от внутреннего (глядя изнутри сепаратрисы) фронта импульса барьерного напряжения.

Можно записать

$$F_2(P_m) = 4f(0,0) \int_0^{P_1(P_m)\varphi_b} \int_0^{\Delta\varphi_b(P_m,P)} \exp\left(-\frac{P^2}{2\sigma_P^2}\right) \exp\left(-\frac{\Omega_0^2}{\sigma_P^2} \Delta\varphi\right) d\Delta\varphi dP +$$

$$+ 4f(0,0) \int_{P_1(\varepsilon_m)}^{P_m} \int_0^{\Delta\varphi_b(P_m,P)} \exp\left(-\frac{P^2}{2\sigma_P^2}\right) \exp\left(-\frac{\Omega_0^2}{\sigma_P^2} \Delta\varphi\right) d\Delta\varphi dP,$$

где

$$P_1(P_m) = \left[\max(P_m^2 - P_{mb}^2, 0) \right]^{1/2} = \text{Re}\left(\left(P_m^2 - P_{mb}^2\right)^{1/2}\right),$$

$$P_{mb}^2 = 2\Omega_0^2\varphi_b,$$

$$\Delta\varphi_b(P_m, P) = \min\left(\left(\frac{P_m^2 - P^2}{2\Omega_0^2}\right), \varphi_b\right).$$

В результате,

$$\rho_{m2}(P_m) = \frac{d}{dP_m} F_2(P_m) = 4f(0,0) \frac{1}{\Omega_0^2} \exp\left(-\frac{P_m^2}{2\sigma_P^2}\right) P_m (P_m - \text{Re}(P_m^2 - 2\Omega_0^2\varphi_b))^{1/2},$$

$$\rho_m(P_m) = \rho_{m1}(P_m) + \rho_{m2}(P_m) + \rho_{m3}(P_m) = 2f(0,0) \exp\left(-\frac{(P_m^2)}{2\sigma_P^2}\right) \cdot \left\{ \varphi_{bb} + \varphi_{bb2} \exp\left(-\frac{P_{mb}^2}{2\sigma_P^2}\right) + \frac{2}{\Omega_0^2} P_m \left(P_m - \text{Re}(P_m^2 - P_{mb}^2)^{1/2}\right) \right\}. \quad (\text{П1.1})$$

Нормировочный коэффициент $f(0,0)$ из условия $F(\infty) = 1$:

$$f(0,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} P_{av}} \left\{ \varphi_{bb} + \varphi_{bb2} \exp\left(-\frac{P_{mb}^2}{2\sigma_P^2}\right) + 2 \frac{\sigma_P^2}{\Omega_0^2} \left(1 - \exp\left(-\frac{P_{mb}^2}{2\sigma_P^2}\right)\right) \right\}^{-1}. \quad (\text{П1.2})$$

Распределение по амплитудам не релеевское, во-первых, за счет конечного распределения частиц при малых амплитудах P_m в промежутках между импульсами барьерного напряжения, во-вторых, за счет конечной высоты импульса барьерного напряжения. Вторым и третьим слагаемыми в (П1.1) при $\frac{\sigma_P^2}{2\Omega_0^2\varphi_b} \ll 1$ можно пренебречь, однако первое нерелеевское

слагаемое остается при любом $\frac{\sigma_P^2}{2\Omega_0^2\varphi_B}$, давая результат для прямоугольной потенциальной ямы. На рис.3 показаны функции распределения по амплитудам P_m для $\sigma_P = 70$ и $\sigma_P = 70 \cdot 6$ ($E_k = 1$ GeV). Во втором случае отличие от гауссовского распределения гораздо более заметно.

Полученную функцию распределения можно использовать для вычисления скорости роста среднеквадратичного значения амплитуды P_m .

Проверим, насколько отличаются значения σ_P и σ_{P_m} .

$$\begin{aligned} \sigma_{P_m}^2 &= \int_0^{\infty} P_m^2 \rho_m(P_m) dP_m = \\ &= \sigma_P^2 \frac{\varphi_{bb} + \frac{6\sigma_P^2}{\Omega_0^2} + \exp\left(-\frac{\Omega_0^2}{\sigma_P^2} \varphi_b\right) \left(\varphi_{bb2} - 4\varphi_b \left(1 + \frac{3\sigma_P^2}{2\varphi_b \Omega_0^2}\right) \right)}{\varphi_{bb} + \frac{2\sigma_P^2}{\Omega_0^2} + \exp\left(-\frac{\Omega_0^2}{\sigma_P^2} \varphi_b\right) \left(\varphi_{bb2} + \frac{-2\sigma_P^2}{\Omega_0^2} \right)}. \end{aligned} \quad (\text{П1.3})$$

На рис.3в видно, что максимальное различие σ_{P_m} от σ_P не превышает 11%, и их отличием можно пренебречь, подставив в функции распределения σ_{P_m} вместо σ_P , особенно при $\sigma_P(t) \ll \Omega_0(E(t))$.

П2. Поправка к гамильтониану при возмущении напряжений шумом

Будем вычислять $\Delta J(t)$, используя метод [2], где рассматривались шумовые возмущения амплитуды и фазы синусоидального напряжения. В нашем случае невозмущенное напряжение – сумма прямоугольных импульсов U_b и U_a , вычисляем возмущение амплитуд этих напряжений и возмущение фронтов барьерного напряжения.

Уравнения движения имеют вид (2.1), (2.2):

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = -\Omega_0^2 \frac{1}{U_{0b}} (U(\varphi) - U(\varphi_s)) \\ \dot{\varphi} = P \end{cases}$$

Невозмущенное напряжение имеет вид

$$U_n(\varphi) = U_b(\varphi) + U_a(\varphi) = U_{0b} \left(g_b(\varphi) + \frac{U_{0a}}{U_{0b}} g_a(\varphi) \right),$$

где $g_b(\varphi)$, $g_a(\varphi)$ – ступенчатые функции единичной амплитуды, описывающие зависимости $U_b(\varphi)$ и $U_a(\varphi)$ от аргумента.

Заметим (см. рис.1), что дно потенциальной ямы плоское, любая из точек этого дна может считаться точкой синхронной фазы. Для симметрии выберем точкой синхронной фазы, а также началом координат середину промежутка между импульсами барьерного напряжения: $\varphi_s = 0$. Обозначим $U_{s0} = U_a(\varphi_s) = U_a(0)$.

С учетом возмущений

$$\begin{aligned} U_n(\varphi) &= U_n(\varphi) + \Delta U(\varphi) = U_b(\varphi) + \Delta U_b(\varphi) + U_a(\varphi) + \Delta U_a(\varphi), \\ \Delta U_b(\varphi) &= U_{0b} g_b(\varphi) a_b(t), \\ \Delta U_a(\varphi) &= U_{0b} \delta_a \cdot g_a(\varphi) a_a(t), \\ \Delta U_f(\varphi) &= U_{0b} (\delta(\varphi - \varphi_{f1}) \delta\varphi_{f1}(t) - \delta(\varphi - \varphi_{f2}) \delta\varphi_{f2}(t) - \\ &- \delta(\varphi - \varphi_{f3}) \delta\varphi_{f3}(t) + \delta(\varphi - \varphi_{f4}) \delta\varphi_{f4}(t)) = U_{0b} \sum_{k=1}^4 \delta(\varphi - \varphi'_{fk}(t)), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \delta_a &= U_{0a} / U_{0b}, \\ \varphi_1 &= \varphi_{bb} / 2 + \varphi_b, \quad \varphi_2 = \varphi_{bb} / 2, \quad \varphi_3 = -\varphi_2, \quad \varphi_4 = -\varphi_1, \\ \varphi_4 &< \varphi_3 < \varphi_2 < \varphi_1, \\ \delta(\varphi'_{f2,3}(t)) &= -\delta\varphi_{f2,3}(t), \quad \delta(\varphi'_{f1,4}(t)) = \delta\varphi_{f1,4}(t). \end{aligned}$$

Здесь $a_{b,a}(t)$ – шумовые возмущения амплитуд барьерного и ускоряющего напряжений, $\delta\varphi_{fk}(t)$ – дрожание k -го фронта барьерного напряжения, Поясним вид возмущения напряжения $\Delta U_f(\varphi)$. Невозмущенное и возмущенное напряжения вблизи k -го фронта имеют вид

$$U_n(\varphi) = U_{0k} \Phi(\pm(\varphi - \varphi_k)),$$

$$U_e(\varphi) = U_{0k} \Phi(\pm(\varphi - (\varphi_k + \delta\varphi_{fk}))).$$

Возмущение – разница $U_e(\varphi)$ и $U_n(\varphi)$ при малых возмущениях $\delta\varphi_{fk}$ в линейном по возмущению приближении записывается как

$$\begin{aligned} U_e(\varphi) - U_n(\varphi) &= U_{0k} \left[\Phi(\pm(\varphi - (\varphi_k + \delta\varphi_{fk}))) - \Phi(\pm(\varphi - \varphi_k)) \right] \approx \\ &\approx \mp U_{0k} \Phi'(\pm(\varphi - \varphi_k)) \delta\varphi_{fk} = -U_{0k} \delta(\varphi - \varphi_k) \delta\varphi_{fk}, \end{aligned}$$

что и использовано выше в выражении для $\Delta U_f(\varphi)$. Отметим также, что использование δ – функций в описании возмущения напряжения не нарушает условия малости возмущений гамильтониана, так как при его вычислении выполняется интегрирование по φ , δ –функции пропадают, и остаются слагаемые пропорциональные малым возмущениям.

Для этого напряжения потенциал принимает вид:

$$W_1(\varphi, t) = k_0 Ze \cdot \int_{\varphi_s}^{\varphi} (U(\varphi, t) - U(\varphi_s)) d\varphi = W_{10}(\varphi) + W_a(\varphi, t) + W_b(\varphi, t) + W_f(\varphi, t),$$

$$\begin{aligned} W_{10}(\varphi) &= k_0 Ze \cdot \int_{\varphi_s}^{\varphi} (U_b(\varphi) + U_a(\varphi) - U(\varphi_s)) d\varphi = \Omega_0^2 \cdot \int_0^{\varphi} (g_b(\varphi) + \delta_a(g_a(\varphi) - 1)) d\varphi = \\ &= \Omega_0^2 \cdot \int_0^{\varphi} g_b(\varphi) d\varphi = \tilde{W}_b(\varphi), \end{aligned}$$

$$W_a(\varphi, t) = k_0 Ze \cdot \int_{\varphi_s}^{\varphi} (\Delta U_a(\varphi, t)) d\varphi = a_b(t) \cdot \delta_a \cdot \Omega_0^2 \cdot \int_0^{\varphi} g_a(\varphi) d\varphi = \tilde{W}_a(\varphi) \cdot a_a(t),$$

$$W_b(\varphi, t) = k_0 Ze \cdot \int_{\varphi_s}^{\varphi} (\Delta U_b(\varphi)) d\varphi = a_b(t) \cdot \Omega_0^2 \cdot \int_0^{\varphi} g_b(\varphi) d\varphi = \Omega_0^2 \cdot a_b(t) G_b(\varphi) = \tilde{W}_b(\varphi) \cdot a_b(t),$$

$$W_f(\varphi, t) = k_0 Ze \cdot \int_{\varphi_s}^{\varphi} (\Delta U_f(\varphi)) d\varphi = \Omega_0^2 \sum_{k=1}^4 \Phi(\varphi - \varphi_{fk}) \delta\varphi'_{fk}(t) = \sum_{k=1}^4 \tilde{W}_{fk}(\varphi) \delta\varphi'_{fk}(t),$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \tilde{W}_a(\varphi) &= \delta_a \cdot \Omega_0^2 \cdot (\varphi - \varphi_s) = \delta_a \cdot \Omega_0^2 \cdot (\varphi - \varphi_{BB} / 2), \\ \tilde{W}_b(\varphi) &= \Omega_0^2 \cdot \begin{cases} |\varphi| - \varphi_{BB} / 2, & \varphi_{BB} / 2 \leq |\varphi| \leq \varphi_{BB} / 2 + \varphi_B, \\ 0, & |\varphi| < \varphi_{BB} / 2, \\ \varphi_B, & |\varphi| > \varphi_{BB} / 2 + \varphi_B, \end{cases} \quad (\text{П2.1}) \end{aligned}$$

$$\tilde{W}_{fk}(\varphi) = \Omega_0^2 \Phi(\varphi - \varphi_{fk}).$$

С учетом возмущений напряжения гамильтониан принимает вид:

$$H = \frac{1}{2} P^2 + W_{10}(\varphi) + \tilde{W}_a(\varphi) a_a(t) + \tilde{W}_b(\varphi) a_b(t) + \sum_{k=1}^4 \tilde{W}_{fk}(\varphi) \delta\varphi'_{fk}(t).$$

Невозмущенный гамильтониан $H_0 = \frac{1}{2}P^2 + W_{10}(\varphi) = \frac{1}{2}P_m^2$.

Далее, согласно [2], для невозмущенного движения выполним каноническое преобразование (см. [3]) от периодически меняющихся переменных φ, P к переменным действие-угол J, θ , первая из которых является медленно меняющейся на периоде изменения φ, P :

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint P d\varphi = \frac{1}{2\pi} 2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{2H_0 - 2W_{10}(\varphi)} d\varphi,$$

где $\varphi_{1,2}$ удовлетворяют условию $2H_0 - 2W_{10}(\varphi_{1,2}) = 0$.

При этом

$$\frac{dJ}{dH_0} = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{d\varphi}{P} = \frac{T_s}{2\pi} = \frac{1}{\Omega_s},$$

$$H_0 = \frac{P_m^2}{2} = \int_0^{J_0} \Omega_s(J) dJ. \quad (\text{П.2.2})$$

Производящая функция для этого преобразования имеет вид

$$F_2(\varphi, J) = \int_0^\varphi d\varphi' \sqrt{2 \int_0^J \Omega_s(J') dJ' - 2W_{10}(\varphi')}.$$

Переменные P и θ определяются с помощью $F_2(\varphi, J)$ (см. [3]) функции как

$$P = \frac{\partial F_2}{\partial \varphi},$$

$$\theta = \frac{\partial F_2}{\partial J} = \Omega_s(J) \int_0^\varphi \frac{d\varphi'}{\sqrt{2 \int_0^J \Omega_s(J') dJ' - 2W_{10}(\varphi')}} = \Omega_s(J) \int_0^\varphi dt = \Omega_s(J) \cdot t.$$

– эта угловая переменная описывает набег фазы синхротронных колебаний для частицы с действием J .

В новых переменных (θ, J) невозмущенный гамильтониан имеет вид

$$\tilde{H}_0 = H_0 + \frac{\partial F_2}{\partial t} = H_0 = \int_0^{J_0} \Omega_s(J) dJ,$$

А уравнения движения превращаются в

$$\begin{cases} \frac{dJ}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta}, \\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial J}. \end{cases}$$

При равновесной невозмущенной функции распределения (см. Приложение 1) частицы должны быть равномерно распределены по углу θ .

С учетом возмущений гамильтониан записывается как

$$H = \int_0^J \Omega_s(J') dJ' + \\ + \tilde{W}_b(\varphi(\theta, J)) a_b(t) + \tilde{W}_a(\varphi(\theta, J)) a_a(t) + \sum_{k=1}^4 \tilde{W}_{fk}(\varphi(\theta, J)) \delta \varphi'_{fk}(t),$$

где вместо аргумента φ в выражения (П2.1) для функций $\tilde{W}_{a,b,f}(\varphi)$ должно быть подставлено выражение $\varphi(\theta, J)$ из канонического преобразования.

При известных зависимостях $\varphi(P_m, t)$ и $\Omega_s(P_m)$ и связи (П2.2) J и P_m $\varphi(J, \theta) = \varphi(P_m(J), \theta / \Omega_s(J))$.

Для дальнейших вычислений надо разложить в ряд Фурье по θ зависимости $P(P_m(J), \theta / \Omega_s(J))$ и $\tilde{W}_{a,b,f}(\varphi(P_m(J), \theta / \Omega_s(J)))$:

$$\begin{cases} P = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k(J) e^{ik\theta}, \\ \tilde{W}_{a,b,f_j} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{a,b,f_j k}(J) e^{ik\theta}. \end{cases} \quad (\text{П2.3})$$

Коэффициенты Фурье.

Для простоты записи будем рассматривать частицу, которая в момент времени $t = 0$ проходит через середину промежутка между импульсами барьерного напряжения со скоростью $\frac{d\varphi}{dt} = P_m$. Координату φ будем также отсчитывать от этой точки.

Движение $\varphi(t)$ в промежутке между импульсами барьерного напряжения равномерное, внутри областей барьерного напряжения – равноускоренное. Функция $\varphi(t)$ – периодическая с периодом $2\pi / \Omega_s(P_m)$. На рис.16 приведены графики $P(t) = \dot{\varphi}(t)$, $\varphi(t)$, $\tilde{W}_b(t) = \tilde{W}_b(\varphi(t))$. График $\tilde{W}_a(t)$ повторяет форму $\varphi(t)$.

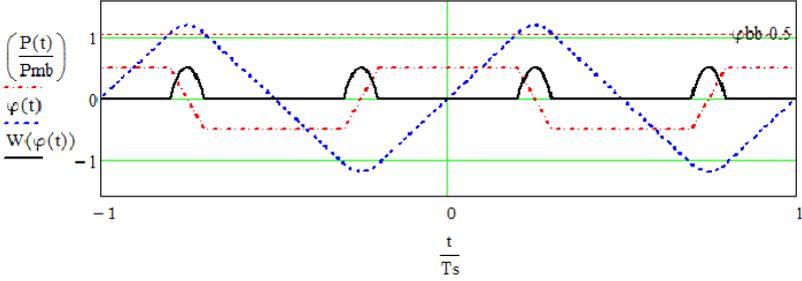


Рис. 16. Графики $P(t)$, $\varphi(t)$, $\tilde{W}_b(t)$.

Подставив $\varphi(t)$ при $t = \theta / \Omega_s(P_m)$ в (П2.1), разложим $\tilde{W}_{a,b,f}(\varphi(\theta / \Omega_s(P_m)))$ в ряд Фурье. получим (см. (П2.3)) для \tilde{W}_a :

$$|c_{ak}| = \left| -\Omega_0^2 \delta_a \frac{b_k}{ik\Omega_s} \right| = \Omega_0^2 \begin{cases} \delta_a \frac{2}{\pi} \frac{\Omega_0^2}{\Omega_s^2} \left| \frac{\sin(k\alpha)}{k^3} \right|, & k - \text{неч.}, \\ 0, & k - \text{чет.}, \end{cases}$$

$$\alpha = \Delta t_{12}(P_m) \Omega_s(P_m) / 2 = \frac{P_m \Omega_s(P_m)}{\Omega_0^2}.$$

Для $\tilde{W}_{b,fk}$ коэффициенты Фурье зависят от того, как складываются возмущения на двух последовательных импульсах барьерного напряжения. Если возмущение действует только на один (например, положительный) импульс, то

$$|c_{bk}| = \Omega_0^2 \left\{ \frac{1}{\pi} \frac{P_m^3 \Omega_s}{\Omega_0^4} \right\} \left| \frac{\sin(k\alpha) - (k\alpha) \cos(k\alpha)}{(k\alpha)^3} \right|,$$

$$|c_{fk}| = \frac{\Omega_0^2}{\pi} \left| \frac{\sin(k\alpha)}{k} \right|.$$

При подстановке полученных выражений в (П2.3) следует иметь в виду зависимость $P_m(J)$, полученную из (П2.2). Однако удобнее перейти от переменной J к переменной P_m , связанной с J выражением (П2.2), так как нам известна не зависимость $\Omega_s(J)$, а $\Omega_s(P_m)$.

Если возмущение барьерного напряжения является относительным возмущением амплитуды, то есть для положительного импульса напряжение равно $U_1(t) = U_0(1 + a_b(t))$, а для отрицательного $U_2(t) = -U_0(1 + a_b(t))$, то $|c_{bn}|$ удваивается на четных гармониках и зануляется на нечетных.

Если возмущение барьерного напряжения является дополнительным шумовым напряжением $\Delta U_b(t) = U_0 a_b(t)$ для обоих импульсов барьерного напряжения, то есть для положительного импульса напряжения $U_1(t) = U_0 + \Delta U(t) = U_0(1 + a_b(t))$, а для отрицательного — $U_2(t) = -U_0 + \Delta U(t) = -U_0(1 - a_b(t))$, то наоборот, $|c_{bn}|$ удваивается на нечетных гармониках и зануляется на четных.

Аналогично меняются и коэффициенты $|c_{fn}|$, если дрожание фронтов двух импульсов барьерного напряжения имеет общее происхождение, то есть

$$|c_{bk}| = \Omega_0^2 \left\{ \frac{1}{\pi} \frac{P_m^3 \Omega_s}{\Omega_0^4} \right\} \left| \frac{\sin(k\alpha) - (k\alpha) \cos(k\alpha)}{(k\alpha)^3} \right| \cdot (1 + s_0 \cdot (-1)^k),$$

$$|c_{fk}| = \frac{\Omega_0^2}{\pi} \left| \frac{\sin(k\alpha)}{k} \right| \cdot (1 + s_0 \cdot (-1)^k), \quad (\text{П2.4})$$

$$|c_{ak}| = (1 - (-1)^k) \Omega_0^2 \delta_a \frac{1}{\pi} \frac{\Omega_0^2}{\Omega_s^2} \cdot \left| \frac{\sin(k\alpha)}{k^3} \right|,$$

где $s_0 = 0, +1, -1$ для воздействия дрожания фронта **одного** (например, положительного) импульса барьерного напряжения, **синфазного** или **противофазного** воздействия дрожания фронтов последовательных импульсов барьерного напряжения соответственно, а

$$\alpha = \Delta t_{12}(P_m) \Omega_s (P_m) / 2 = \frac{P_m \Omega_s (P_m)}{\Omega_0^2}.$$

Заметим, что $|c_{fjk}| \neq 0$ только для $j = 2, 3$, то есть только для внутренних фронтов импульсов барьерного напряжения, которые пересекают частицы, совершающие замкнутое (финитное) движение внутри потенциальной ямы. Эти частицы не долетают до внешних фронтов ($j = 1, 4$), и дрожание этих фронтов не влияет на их движение.

П3. Вычисление диффузионных коэффициентов для заданной плотности спектральной мощности шума

В [2] задача определения коэффициента диффузии $A_{2n}(x)$ решается а переменных действие — угол (θ, J) , а уравнение Фоккера-Планка (5.2) записывается для $x = J$ (при равномерном распределении частиц по фазе). При этом уравнения движения в переменных J, θ , для одного вида шумового возмущения (с использованием разложения в ряд Фурье (П2.3)) принимают вид

$$\begin{cases} \frac{dJ}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -a(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} ik \cdot c_k(J(t)) e^{ik\theta}, \\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial J} = \Omega_s(J) + a(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k'(J(t)) e^{ik\theta}. \end{cases} \quad (\text{ПЗ.1})$$

Уравнения системы (ПЗ.1) связаны между собой. При малых $a(t)$ их можно решать итерациями, выполняя следующие шаги:

0) начальное приближение: $\theta_n(t) = \theta_0 + \Omega_s(J(0))t$ и $J_n = J(0)$;

1) $\theta_n(t)$ подставим в первое уравнение (ПЗ.1), получим первое приближение $J_1(t) - J(0)$;

2) $J_1(t)$ подставим во второе уравнение (ПЗ.1), получим второе приближение $\theta_1(t)$;

3) $\theta_1(t)$ подставим в первое уравнение (ПЗ.1), получим второе приближение $J_2(t) - J(0)$,

и т.д.

Итерации более высокого порядка содержат более высокие степени $a(t)$.

Для вычисления коэффициента диффузии $A_2(J)$ для уравнения Фоккера-Планка достаточно сохранять только линейные по $a(t)$ слагаемые в выражении $J(T) - J(0)$. При этом получаем:

$$J(T) - J(0) \approx - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^T a(t) dt \cdot ik e^{ik(\theta_0 + \Omega_s 0t)} c_{k0}, \quad (\text{ПЗ.2})$$

$$[J(T) - J(0)]^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i(k+n)\theta_0} ik \cdot c_{k0} \cdot in \cdot c_{n0} \cdot \int_0^T a(t) dt e^{ik\Omega_s 0t} \cdot \int_0^T a(t) dt e^{in\Omega_s 0t}.$$

При усреднении по ансамблю (по всем вариантам возмущения), это выражение также надо усреднить по начальным значениям угловой переменной θ_0 , так как предполагается, что частицы распределены по θ_0 равномерно, при этом остаются только слагаемые с $k = -n$:

$$\langle [J(T) - J(0)]^2 \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |ik \cdot c_{k0}|^2 \cdot \left\langle \left| \int_0^T a(t) dt e^{ik\Omega_s 0t} \right|^2 \right\rangle,$$

При вычислении коэффициента диффузии $A_2(J_0) = \frac{1}{T} \langle [J(T) - J(0)]^2 \rangle$ следует брать промежутки времени T много меньше характерных времен макроскопических изменений функции распределения, однако много больше времен микроскопических воздействий, так, чтобы влияние шумов можно

было усреднить. Если этот промежуток времени достаточно велик для того, чтобы заменить $\left\langle \left| \frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt e^{ik\Omega_s t} \right|^2 \right\rangle$ на плотность спектральной мощности

шума $S(k\Omega_s(J_0)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\langle \left| \frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt e^{ik\Omega_s t} \right|^2 \right\rangle$, то получаем

$$A_2(J_0) = \frac{1}{T} \left\langle [J(T) - J(0)]^2 \right\rangle \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k \cdot c_k(J_0)|^2 \cdot S(k\Omega_s(J_0)), \quad (\text{П3.3})$$

где $S(\omega)$ - плотность спектральной мощности рассматриваемого шумового возмущения барьерного или ускоряющего напряжения:

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\langle \left| \frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt e^{i\omega t} \right|^2 \right\rangle,$$

$$S(0) = T \cdot \langle |a|^2 \rangle$$

$c_k(J_0)$ – коэффициент разложения (П2.4) невозмущенного потенциала $\tilde{W}(t)$, через который возмущение потенциала записывается как $a(t)\tilde{W}(t)$.

(П3.3) – это коэффициент диффузии для уравнения непрерывности (5.2), в зависимости от переменной J . При его использовании следует учесть зависимость $\Omega_s(J)$ и $P_m(J)$ из (П2.2). Однако удобнее перейти от переменной J к переменной P_m , так как нам зависимость $\Omega_s(P_m)$ (см.3.1) имеет более простой вид, чем $\Omega_s(J)$ из (П2.2). Кроме того, коэффициенты Фурье (П2.4) содержат прямую зависимость от P_m , а не от $J(P_m)$, и для них также удобна эта замена переменных. При этом уравнение непрерывности будет иметь тот же вид (5.2), а коэффициент диффузии будет пересчитываться как

$$A_2^{P_m}(P_m) =$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\langle [P_m(T) - P_m(0)]^2 \rangle}{T} = \left(\frac{\partial P_m}{\partial J} \right)^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\langle [J(T) - J(0)]^2 \rangle}{T} = \left(\frac{\partial P_m}{\partial J} \right)^2 A_2^J(J(P_m)).$$

Зависимость $J(P_m)$ и $\partial P_m / \partial J$ определяются с помощью (П2.2)

$$\frac{1}{\Omega_s} = \frac{dJ}{dH_0} = \frac{dJ / dP_m}{dH_0 / dP_m} = \frac{dJ / dP_m}{P_m} \Rightarrow \frac{dP_m}{dJ} = \frac{\Omega_s}{P_m} = \pi \left(\varphi_{BB} + \frac{2P_m^2}{\Omega_0^2} \right)^{-1},$$

Таким образом,

$$A_{2m}^{P_m}(P_m) = \left(\frac{\Omega_s}{P_m} \right)^2 A_2^J(J(P_m)) = \left(\frac{\Omega_s(P_m)}{P_m} \right)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k \cdot c_k(P_m)|^2 \cdot S(k\Omega_s(P_m)). \quad (\text{ПЗ.4})$$

Отметим, что при одновременном воздействии разных независимых возмущений коэффициенты $A_2(J)$ складываются по всем видам возмущений. Это легко показать, записав выражение (ПЗ.2) как сумму слагаемых для двух независимых видов возмущений и выполнив усреднение квадрата этого выражения, как это было сделано выше для одного вида возмущения.

Коэффициенты диффузии в зависимости от переменной P_m .

Итак, с учетом выражений для коэффициентов Фурье разложений возмущения потенциальной ямы разными видами шумов (ПЗ.4) и выражения для коэффициента диффузии $A_2(P_m)$ (ПЗ.4), получаем:

а. Амплитудное возмущение барьерного напряжения

$$A_{2b}(P_m) = \left(\frac{\Omega_s}{P_m} \right)^2 \cdot \left(\frac{\Omega_s P_m}{\pi} \right)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin(k\alpha) - (k\alpha) \cos(k\alpha)}{(k\alpha)^2} \right|^2 \cdot (1 + s_0 \cdot (-1)^k)^2 \cdot S_b(k\Omega_s). \quad (\text{ПЗ.5})$$

б. Амплитудное возмущение ускоряющего напряжения

$$A_{2a}^{P_m}(P_m) = \left(\frac{1}{\pi} \delta_a \frac{\Omega_0^4}{P_m \Omega_s} \right)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\| \frac{\sin(k\alpha)}{k^2} \right\|^2 \cdot (1 - (-1)^k)^2 \cdot S_a(k\Omega_s). \quad (\text{ПЗ.6})$$

в. Дрожание фронтов импульсов барьерного напряжения

$$A_{2f}^{P_m}(P_m) = \left(\frac{1}{\pi} \frac{\Omega_s \Omega_0^2}{P_m} \right)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\sin(k\alpha)|^2 \cdot (1 + s_0 \cdot (-1)^k)^2 \cdot S_f(k\Omega_s). \quad (\text{ПЗ.7})$$

П4. Вычисление диффузионных коэффициентов для заданного гармонического возмущения

Общие выражения для диффузионных коэффициентов (6.1) - (6.3) можно применить для гармоника шума $a(t) = a_0 \sin(\Omega_n t + \gamma)$.

Плотность спектральной мощности такого шума, действующего в течение времени T , вычисляется как

$$S(k\Omega_s(J_0)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left\langle \left[\int_0^T a(t) e^{i(k\Omega_s) t} dt \right]^2 \right\rangle_{\gamma},$$

где $\langle \rangle_\gamma$ - усреднение по случайным фазам γ :

$$\left\langle \left[\int_0^T a(t) e^{i(k\Omega_{s0})t} dt \right]^2 \right\rangle_\gamma = \frac{a_0^2}{4} \left\langle \left[\int_0^T \left(e^{i(k\Omega_{s0} + \Omega_n)t + i\gamma} + e^{i(k\Omega_{s0} - \Omega_n)t - i\gamma} \right) dt \right]^2 \right\rangle_\gamma =$$

$$= a_0^2 \left\{ \left(\frac{\sin((k\Omega_{s0} + \Omega_n)T/2)}{(k\Omega_{s0} + \Omega_n)} \right)^2 + \left(\frac{\sin((k\Omega_{s0} - \Omega_n)T/2)}{(k\Omega_{s0} - \Omega_n)} \right)^2 \right\}.$$

Здесь и далее используем следующие предельные выражения для дельта-функции:

$$\delta(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin(Tx)}{x} \right) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T\pi} \left(\frac{\sin(Tx)}{x} \right)^2, \quad (\text{П4.1})$$

Получаем:

$$S(k\Omega_s(J_0)) = \frac{\pi}{2} a_0^2 \{ \delta(k\Omega_{s0} + \Omega_n) + \delta(k\Omega_{s0} - \Omega_n) \}. \quad (\text{П4.2})$$

Для этой плотности спектральной мощности шума получаем диффузионный коэффициент

$$A_2(J_0) = 2 \frac{\pi}{2} a_0^2 \sum_{k=0}^{\infty} |k \cdot c_k(J_0)|^2 \cdot \delta(k\Omega_{s0}(J_0) - \Omega_n). \quad (\text{П4.3})$$

При конечном времени действия шума $T < \infty$ вместо дельта-функций должны быть их приближительные выражения согласно (П4.1) с конечной шириной $\sim 1/T$ и высотой $\sim T$. И если на ширине $\sim 1/T$ (по частоте) множитель к дельта-функции $|k \cdot c_k(J_0)|^2$ меняется незначительно, то есть незначительно изменение $|k \cdot c_k(J_0)|^2$ на $\Delta J \sim (1/T) \left(\Omega_{s0}'(J_k) \right)^{-1}$ (где $k\Omega_{s0}(J_k) - \Omega_n = 0$), то в интегралах, содержащих A_2 , можно подставить идеальную дельта-функцию.

Обозначим P_{mk} - значения амплитуды колебаний скорости, при которых зануляется аргумент дельта-функции: $\Omega_s(P_{mk}) = \Omega_n / k$. Тогда, пренебрегая отличием $\sigma_{P_m}^2$ и σ_P^2 можно вычислить увеличение $\sigma_{P_m}^2$ за счет гармоник шума:

$$\sigma_{P_m}^2 - \sigma_{P_{m0}}^2 = -\frac{\tau_0}{2} \int_0^{\infty} a_{2n}(P_m) \cdot \frac{\partial \rho(P_m, \sigma_{P_m})}{\partial P_m} P_m dP_m =$$

$$= -\frac{\tau_0}{2} \pi a_0^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left. \frac{\partial \rho(P_m, \sigma_{P_m})}{\partial P_m} \right|_{P_{mk}} P_{mk} \frac{|k \cdot c_k(P_{mk})|^2}{k \Omega_s'(P_{mk})}.$$

Для $P_m \ll \Omega_0$ $\Omega_s'(P_m) \approx \frac{\pi}{\varphi_{bb}}$.

Пусть $\rho_m(P_m, t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma_{Pm}(t)}} e^{-P_m^2/2\sigma_{Pm}(t)^2}$, тогда

$$\sigma_{Pm}^2 - \sigma_{Pm0}^2 = \frac{\tau_0}{2} \varphi_{bb} a_0^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2P_{mk}^2}{\sqrt{2\pi\sigma_{Pm}(t)^3}} e^{-P_{mk}^2/2\sigma_{Pm}(t)^2} k |c_k(P_{mk})|^2. \quad (\text{П4.4})$$

П5. Вычисление диффузионных коэффициентов прямым интегрированием по времени уравнений движения с возмущением

Для проверки применимости метода вычислим прямым интегрированием по времени изменение амплитуды колебаний скорости частицы P_m , вносимое шумовыми возмущениями. Предполагаем, что при вычислении диффузионного коэффициента усреднение по ансамблю равно усреднению по времени для одного случайного процесса.

Возмущение амплитуды и фазы фронта импульса барьерного напряжения.

Рассмотрим возмущение амплитуды и фазы фронта только одного импульса барьерного напряжения (положительного). Амплитуда колебаний скорости P_m изменяется при пролете через область этого барьерного напряжения и после этого не меняется до следующего влета в область этого барьерного напряжения.

Уравнения движения частицы с момента имеет вид

$$\begin{cases} P = \frac{d\varphi}{dt}, \\ \ddot{\varphi} = \frac{dP}{dt} = Zek_0 U(\varphi), \end{cases}$$

$$U(\varphi) = -U_0 \cdot (1 + a_2(t)) \cdot \Phi(\varphi - \varphi_1(t)) \Phi(\varphi_2(t) - \varphi) + \\ + U_0 \cdot (1 + a_3(t)) \cdot \Phi(\varphi - \varphi_3(t)) \Phi(\varphi_4(t) - \varphi).$$

Пусть частица отражается от области второго (положительного) импульса барьерного напряжения, влетев в нее в момент времени t_1 и вылетев в момент времени t_2 . Фазовая скорость $P(t_1)$ равна амплитуде колебаний скорости в этот момент времени $P_m(t_1)$. Обозначим $\varphi_3(t) = \varphi_{30} + \delta\varphi_{f_3}(t)$ – координата пересеченного частицей фронта импульса барьерного напряжения, с учетом возмущения; $\varphi_{pk} = \varphi(t_k)$,

$$\left\{ \begin{aligned} P_{p2} &= -P_{p1} + 2 \frac{\Omega_0^2}{\Delta t_{12}} \int_0^{\Delta t_{12}} \left(\int_0^{\Delta t'} a_3(t_1 + \Delta t'') d\Delta t'' \right) d\Delta t' + \\ &+ 2 \frac{\delta\varphi_{f3}(t_2) - \delta\varphi_{f3}(t_1)}{\Delta t_{120}} - \Omega_0^2 \cdot \int_0^{\Delta t_{12}} a_3(t_1 + \Delta t') d\Delta t', \\ \Omega_0^2 \Delta t_{12}' &= 2P_{p1} - 2 \frac{\Omega_0^2}{\Delta t_{12}} \int_0^{\Delta t_{120}} \left(\int_0^{\Delta t'} a_3(t_1 + \Delta t'') d\Delta t'' \right) d\Delta t' - 2 \frac{\delta\varphi_{f3}(t_2) - \delta\varphi_{f3}(t_1)}{\Delta t_{12}}. \end{aligned} \right.$$

Здесь Δt_{12} – невозмущенное значение, а $\Delta t_{12}'$ – возмущенное.

После отражения от области первого (отрицательного) барьерного напряжения (без возмущения) знак скорости P меняется, таким образом, за один оборот частицы в сепаратрисе амплитуда колебаний скорости P_m меняется на

$$P_{mp3} - P_{mp1} = -2 \frac{\Omega_0^2}{\Delta t_{12}} \int_0^{\Delta t_{12}} \left(\int_0^{\Delta t'} a_3(t_1 + \Delta t'') d\Delta t'' \right) d\Delta t' + \Omega_0^2 \cdot \int_0^{\Delta t_{12}} a_3(t_1 + \Delta t') d\Delta t' - 2 \frac{\delta\varphi_{f3}(t_2) - \delta\varphi_{f3}(t_1)}{\Delta t_{12}}. \quad (\text{П5.1})$$

Функции, описывающие шумовые возмущения представим в виде интегралов Фурье:

$$\left\{ \begin{array}{l} a \\ \delta\varphi_f \end{array} \right\}_3(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} a \\ \delta\varphi \end{array} \right\}_{3\omega}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad \left\{ \begin{array}{l} a \\ \delta\varphi \end{array} \right\}_{3\omega}(\omega) = \int_0^T \left\{ \begin{array}{l} a \\ \delta\varphi \end{array} \right\}_3(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Здесь T – время, в течение которого существовало или измерялось возмущение.

Тогда интегралы, входящие в (П5.1), вычисляются как

$$\begin{aligned} \int_0^{\Delta t_{12}} a_3(t_1 + \Delta t') d\Delta t' &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a_{3\omega}(\omega) e^{i\omega t_1} \frac{e^{i\omega \Delta t_{120}} - 1}{i\omega} d\omega, \\ \int_0^{\Delta t_{12}} \left(\int_0^{\Delta t'} a_3(t_1 + \Delta t'') d\Delta t'' \right) d\Delta t' &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_{3\omega}(\omega)}{i\omega} e^{i\omega t_1} \frac{1}{i\omega} \left(e^{i\omega \Delta t_{12}} - 1 - i\omega \Delta t_{12} \right) d\omega. \end{aligned} \quad (\text{П5.2})$$

1. Возмущение фазы фронта импульса барьерного напряжения.

За один оборот частицы в сепаратрисе амплитуда колебаний скорости меняется на

$$P_{mp3} - P_{mp1} = -\frac{2}{\Delta t_{12}} \left(\delta\varphi_{f3}(t_1 + \Delta t_{12}) - \delta\varphi_{f3}(t_1) \right),$$

за n оборотов амплитуда меняется на

$$\begin{aligned}
P_{mp(2n+1)} - P_{mp1} &= -\frac{2}{\Delta t_{12}} \sum_{n_1=0}^{n-1} \left(\delta\varphi_{f3}(t_1 + n_1 T_s + \Delta t_{12}) - \delta\varphi_{f3}(t_1 + n_1 T_s) \right) = \\
&= -\frac{2}{\Delta t_{12}} \sum_{n_1=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2\pi} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \delta\varphi_{3\omega}(\omega) e^{i\omega n_1 T_s} e^{i\omega_1} \left(e^{i\omega \Delta t_{12}} - 1 \right) d\omega = \\
&= -\frac{2}{\Delta t_{12}} \left(\Phi(t_1, n, \Delta t_{12}) - \Phi(t_1, n, 0) \right)
\end{aligned}$$

где

$$\Phi(t_1, n, \Delta t_{12}) = \left(\frac{1}{2\pi} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega, n, \Delta t_{12}) e^{i\omega t_1} d\omega,$$

$$\Phi(\omega, n, \Delta t_{12}) = \delta\varphi_{3\omega}(\omega) \frac{e^{i\omega n T_s} - 1}{e^{i\omega T_s} - 1} e^{i\omega \Delta t_{12}}.$$

Далее будут использованы предельные выражения для дельта-функции (П4.1).

Усредненный квадрат приращения

$$\begin{aligned}
&\left\langle \left(P_{mp(2n+1)} - P_{mp1} \right)^2 \right\rangle = \\
&= \frac{\left\langle \left| \Phi(t_1, n, \Delta t_{12}) \right|^2 \right\rangle + \left\langle \Phi(t_1, n, 0)^2 \right\rangle - 2 \operatorname{Re} \left\langle \overline{\Phi(t_1, n, \Delta t_{12})} \Phi(t_1, n, 0) \right\rangle}{(\Delta t_{12} / 2)^2}.
\end{aligned}$$

Предполагается, что случайное возмущение таково, что усреднение по ансамблю равно усреднению по времени. Удобнее выполнить усреднение по времени, воспользовавшись (П4.1) при $T \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}
K_{\Phi}(\Delta t_{12}) &= \left\langle \overline{\Phi(t_1, n, 0)} \Phi(t_1, n, \Delta t_{12}) \right\rangle_T = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{\omega}(\omega, n, \Delta t_{12}) \overline{\Phi_{\omega'}(\omega', n, 0)} \frac{\sin\left(\frac{(\omega - \omega')T}{2}\right)}{(\omega - \omega')T/2} d\omega d\omega' \stackrel{T \rightarrow \infty}{=} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{\omega}(\omega, n, \Delta t_{12}) \overline{\Phi_{\omega'}(\omega', n, 0)} \frac{2\pi}{T} \delta(\omega - \omega') d\omega d\omega' = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{\Phi\omega}(\omega) e^{i\omega \Delta t_{12}} d\omega,
\end{aligned}$$

$$K_{\Phi\omega}(\omega) = \frac{|\delta\varphi_{3\omega}(\omega)|^2}{T} \left| \frac{e^{i\omega n T_s} - 1}{e^{i\omega T_s} - 1} \right|^2.$$

Отсюда коэффициент диффузии вычисляется как

$$\begin{aligned}
A_{2f}(P_{mp1}) &= \frac{1}{nT_s} \left\langle \left(P_{mp(2n+1)} - P_{mp1} \right)^2 \right\rangle = \\
&= 2 \frac{1}{nT_s} \left(\frac{2}{\Delta t_{12}} \right)^2 \left(K_{\Phi}(0) - \operatorname{Re} K_{\Phi}(\Delta t_{12}) \right) = \\
&= \frac{2}{2\pi} \left(\frac{2}{\Delta t_{12}} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega) (1 - \cos(\omega \Delta t_{12})) \left\{ \frac{1}{nT_0(\dot{\varphi}_{p1})} \left| \frac{\sin(\omega nT_s/2)}{\sin(\omega T_s/2)} \right|^2 \right\} d\omega, \\
S_f(\omega) &= \frac{|\delta\varphi_{3\omega}(\omega)|^2}{T}, \quad \Delta t_{12} = \Delta t_{12}(P_{mp1}) = T_b(P_{mp1}), \quad T_s = T_s(P_{mp1}).
\end{aligned} \tag{П5.3}$$

Отметим, что $T \rightarrow \infty$ - это промежуток времени, в течение которого существует этот стационарный случайный процесс и для которого вычисляли $\delta\varphi_{3\omega}(\omega)$, а $nT_s(P_{mp1}) \ll T$ - малый промежуток времени, на котором вычисляется коэффициент диффузии A_{2f} и в течение которого не меняется амплитуда P_m . Если при этом $n \gg 1$, то есть P_m мало меняется за большое число периодов, то можно воспользоваться вторым из предельных выражений (П4.1). При этом множитель в фигурных скобках под интегралом в (П5.3) при $nT_s(P_{mp1})/2 \rightarrow \infty$ превращается в $\sum_k \delta(\omega + k\pi)$ и не зависит от n . То есть можно утверждать, что, начиная с некоторого n , коэффициент диффузии не будет зависеть от n :

$$\begin{aligned}
A_{2f} &= \frac{4}{\Delta t_{12}^2 T_s} \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega) (1 - \cos(\omega \Delta t_{12})) \left\{ \frac{1}{\pi n} \left| \frac{\sin(\omega nT_s/2)}{\sin(\omega T_s/2)} \right|^2 \right\} d\omega = \\
&= \frac{4}{\Delta t_{12}^2 T_s} \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega) (1 - \cos(\omega \Delta t_{12})) \sum_k \delta(\omega T_s/2 - \pi k) d\omega = \\
&= \frac{1}{2\pi^2} \frac{\Omega_s^2 \Omega_0^4}{P_m^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 - \cos(\Omega_s k \Delta t_{12})) S_f(\Omega_s k),
\end{aligned}$$

что совпадает с полученным в Приложении 3 выражением (6.3) при $s_0 = 0$.

2. Возмущение амплитуды барьерного напряжения $a_3(t)$

За один оборот частицы в сепаратрисе амплитуда колебаний скорости меняется на

$$P_{mp3} - P_{mp1} = -2 \frac{\Omega_0^2}{\Delta t_{12}} \int_0^{\Delta t_{12}} \left(\int_0^{\Delta t'} a_3(t_1 + \Delta t'') d\Delta t'' \right) d\Delta t' + \Omega_0^2 \cdot \int_0^{\Delta t_{12}} a_3(t_1 + \Delta t') d\Delta t'$$

или, с учетом вычисления интегралов (П5.2),

$$\begin{aligned}
P_{mp3} - P_{mp1} &= \\
&= \frac{\Omega_0^2 \Delta t_{12}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a_{3\omega}(\omega) i e^{i \frac{\omega \Delta t_{12}}{2}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\omega \Delta t_{12}}{2}\right) - \left(\frac{\omega \Delta t_{12}}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega \Delta t_{12}}{2}\right)}{(\omega \Delta t_{12} / 2)^2} e^{i\omega t_1} d\omega.
\end{aligned}$$

За n оборотов, аналогично проделанному выше для $\delta\varphi_3$, получаем приращение амплитуды

$$P_{mp(2n+1)} - P_{mp1} = \sum_{n_1=1}^n P_{mp(2n_1+1)} - P_{mp(2n_1-1)} = \frac{\Omega_0^2 \Delta t_{12}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) e^{i\omega t_1} d\omega,$$

$$\begin{aligned}
B(\omega) &= \\
&= a_{3\omega}(\omega) e^{i\omega \Delta t_{12}/2} i \left(\frac{\sin(\omega \Delta t_{12} / 2) - (\omega \Delta t_{12} / 2) \cos(\omega \Delta t_{12} / 2)}{(\omega \Delta t_{12} / 2)^2} \right) \frac{e^{i\omega n T_s} - 1}{e^{i\omega T_s} - 1},
\end{aligned}$$

$$\Delta t_{12} = \Delta t_{12}(P_{mp1}) = T_b(P_{mp1}), \quad T_s = T_s(P_{mp1})$$

Средний по времени квадрат приращения

$$\begin{aligned}
&\left\langle \left| (P_{mp(2n+1)} - P_{mp1}) \right|^2 \right\rangle_T = \\
&= \left(\frac{\Omega_0^2 \Delta t_{12}}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) e^{i(\omega - \omega')t_1} B(\omega')^* d\omega d\omega' = \\
&= \left(\frac{\Omega_0^2 \Delta t_{12}}{2\pi} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) \frac{\sin((\omega - \omega')T/2)}{(\omega - \omega')T/2} B(\omega')^* d\omega d\omega' \stackrel{T \rightarrow \infty}{=} \\
&= \left(\frac{\Omega_0^2 \Delta t_{12}}{2\pi} \right)^2 \frac{2\pi}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |B(\omega)|^2 d\omega = \\
&= \frac{2}{\pi} P_m^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|a_{3\omega}(\omega)|^2}{T} \left| \frac{\sin\left(\frac{\omega \Delta t_{12}}{2}\right) - \frac{\omega \Delta t_{12}}{2} \cos\left(\frac{\omega \Delta t_{12}}{2}\right)}{(\omega \Delta t_{12} / 2)^2} \right|^2 \left| \frac{\sin\left(\frac{\omega n T_s}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega T_s}{2}\right)} \right|^2 d\omega.
\end{aligned}$$

Коэффициент диффузии при этом при $n \gg 1$ превращается в (6.1) (для возмущения амплитуды одного импульса барьерного напряжения):

$$\begin{aligned}
A_{2b} &= \frac{1}{n\Gamma_s(P_{mp1})} \left\langle (P_{mp(2n+1)} - P_{mp1})^2 \right\rangle^{n \gg 1} = \\
&= \frac{4P_m^2}{T_s^2} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \left[\frac{\sin\left(\frac{\omega\Delta t_{12}}{2}\right) - \frac{\omega\Delta t_{12}}{2} \cos\left(\frac{\omega\Delta t_{12}}{2}\right)}{(\omega\Delta t_{12}/2)^2} \right]^2 \cdot \sum_k \delta\left(\frac{\omega T_s}{2} - k\pi\right) d\left(\frac{\omega T_s}{2}\right) = \\
&= \frac{\Omega_s^2 P_m^2}{\pi^2} \sum_k S(k\Omega_s) \left[\frac{\frac{k\Omega_s\Delta t_{12}}{2} \cos\left(\frac{k\Omega_s\Delta t_{12}}{2}\right) - \sin\left(\frac{k\Omega_s\Delta t_{12}}{2}\right)}{(k\Omega_s\Delta t_{12}/2)^2} \right]^2.
\end{aligned}$$

3. Синфазное и противофазное возмущение фронтов двух последовательных импульсов барьерного напряжения.

Если возмущения амплитуд или фронтов двух последовательных импульсов барьерного напряжения синфазны или противофазны, то при вычислении изменения амплитуды скорости за один оборот надо сложить вклады дрожания фронтов двух импульсов, с учетом знака (плюс или минус) и сдвига во времени на $T_s(P_{mp1})/2$. Так, для возмущения внутренних фронтов импульсов барьерного напряжения

$$\begin{aligned}
P_{mp3} - P_{mp1} &= -\frac{2}{\Delta t_{12}} \cdot \left\{ \delta\varphi_{f3}(t_1 + \Delta t_{12}) - \delta\varphi_{f3}(t_1) + \right. \\
&\quad \left. + (\pm 1) \cdot \left[\delta\varphi_{f3}\left(t_1 + \frac{T_s}{2} + \Delta t_{12}\right) - \delta\varphi_{f3}\left(t_1 + \frac{T_s}{2}\right) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Дальнейшие вычисления, как и вычисления для возмущения амплитуд импульсов барьерного напряжения, аналогичны выполненным выше для дрожания одного фронта барьерного напряжения, и в пределе переходят в выражения (6.3), (6.1).

Итак, для синфазных или противофазных возмущений двух импульсов барьерного напряжения в полученных выражениях для возмущений одного импульса нужна замена

$$\left\{ \begin{array}{c} \delta\varphi \\ a \end{array} \right\}_{3\omega}(\omega) \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \delta\varphi \\ a \end{array} \right\}_{3\omega}(\omega) \cdot (1 + (\pm 1) \cdot e^{i\omega T_s/2}).$$

4. Возмущение амплитуды ускоряющего напряжения.

Вычисление для возмущений амплитуды ускоряющего напряжения несколько отличаются от предыдущих, так как эти возмущения действуют не

только внутри областей барьерного напряжения, но и в промежутке между ними.

Итак, пусть амплитуда ускоряющего напряжения U_{a0} имеет возмущение $\Delta U_a(t)$, тогда

$$U_a(t) = U_{a0} + \Delta U_{a0}(t) = U_{a0} + U_{b0} \cdot a(t),$$

$$a(t) = \Delta U_a(t) / U_{b0}.$$

Отметим, что возмущение ускоряющего напряжения мы нормировали не на U_{a0} , а на U_{b0} по двум причинам: 1) для того, чтобы полученные формулы работали и тогда, когда $U_{a0} = 0$; 2) для того, чтобы использовать предыдущие результаты для учета вклада промежутков внутри областей барьерного напряжения.

Уравнения движения имеют вид:

$$\begin{cases} P = \frac{d\varphi}{dt}, \\ \ddot{\varphi} = \frac{dP}{dt} = Zek_0 (U(\varphi, t) - U(\varphi_s, t)), \end{cases}$$

$$U(\varphi_s, t) = U_{a0},$$

$$\Delta U(\varphi, t) = (U(\varphi, t) - U(\varphi_s, t)) =$$

$$= -U_{b0} \cdot \Phi(\varphi - \varphi_1)\Phi(\varphi_2 - \varphi) + U_{b0} \cdot \Phi(\varphi - \varphi_3)\Phi(\varphi_4 - \varphi) + U_{b0}a(t).$$

Таким образом, уравнения движения можно переписать как

$$\ddot{\varphi} = \frac{dP}{dt} = \Omega_0^2 \begin{cases} -1 + a(t), & \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, \\ a(t), & \varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_3, \\ 1 + a(t), & \varphi_3 \leq \varphi \leq \varphi_4. \end{cases}$$

Отметим, что добавка напряжения в пределах областей барьерного напряжения дает такой же прирост амплитуды колебаний скорости P_m , что и полученный в предыдущем пункте для амплитудной вариации барьерного напряжения. Рассмотрим вклад в P_m за время пролета промежутка между областями барьерного напряжения $\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_3$.

Вычислим изменение P_m за период финитного движения частицы в потенциальной яме.

$$P_0 = P_m(t_0 = 0) = P_{m0} \tag{П5.4}$$

– в момент вылета из области первого (отрицательного) импульса барьерного напряжения;

$$P_1 = P(t_1 = T_{bb}(P_{m0})) = P_0 + \Omega_0^2 \int_{t_0}^{t_1} a(t) dt, \quad (\text{П5.5})$$

$$T_{bb}(P_{m0}) = \varphi_{bb} / P_{m0},$$

– после пролета свободного промежутка, перед влетом в область второго импульса барьерного напряжения, в момент времени $t_1 = T_{bb}(P_{m0})$;

При пролете через область второго импульса используем выражение для возмущения амплитуды барьерного напряжения, с учетом того, что в данном случае относительное возмущение равно $-a(t)$:

$$P_2 = -P_1 - 2 \frac{\Omega_0^2}{\Delta t_{12}} \int_0^{\Delta t_{12}} \left(\int_0^{\Delta t'} a(t_1 + \Delta t'') d\Delta t'' \right) d\Delta t' + \Omega_0^2 \cdot \int_0^{\Delta t_{12}} a(t_1 + \Delta t') d\Delta t' \quad (\text{П5.6})$$

– после вылета из области второго импульса барьерного напряжения;

$$P_3 = P_m(t_3 = t_2 + T_{bb}) = P_2 + \Omega_0^2 \int_{t_2}^{t_3} a(t) dt, \quad (\text{П5.7})$$

– перед влетом в область первого импульса;

$$P_{m3} = -P_3$$

При пролете через область первого импульса скорость P в момент влета и ускорение противоположного знака по сравнению с пролетом через область второго импульса, а относительное возмущение амплитуды напряжения равно $+a(t)$. В момент вылета из области первого импульса барьерного напряжения

$$P_4 = P_m(t_4 = t_3 + \Delta t_{12}) = -P_3 - 2 \frac{\Omega_0^2}{\Delta t_{12}} \int_0^{\Delta t_{12}} \left(\int_0^{\Delta t'} a(t_3 + \Delta t'') d\Delta t'' \right) d\Delta t' + \Omega_0^2 \cdot \int_{t_3}^{t_4} a(t) dt, \quad (\text{П5.8})$$

Или, с учетом (П5.4)-(П5.8):

$$\begin{aligned} P_4 &= P_m(t_4 = t_3 + T_b(P_{m3})) = P_m(t_4 = t_0 + T_s) = \\ &= P_0 + \Omega_0^2 \int_{t_0}^{t_1} a(t) dt + 2 \frac{\Omega_0^2}{\Delta t_{12}} \int_0^{\Delta t_{12}} \left(\int_0^{\Delta t'} a(t_1 + \Delta t'') d\Delta t'' \right) d\Delta t' - \Omega_0^2 \cdot \int_0^{\Delta t_{12}} a(t_1 + \Delta t') d\Delta t' \\ &- \Omega_0^2 \int_{t_2}^{t_3} a(t) dt - 2 \frac{\Omega_0^2}{\Delta t_{12}} \int_0^{\Delta t_{12}} \left(\int_0^{\Delta t'} a(t_3 + \Delta t'') d\Delta t'' \right) d\Delta t' + \Omega_0^2 \cdot \int_{t_3}^{t_4} a(t) dt. \end{aligned}$$

– амплитуда колебаний скорости частицы через период синхротронных колебаний после t_0 .

Считая, что изменение P_m за период мало, во все промежутки времени подставляем начальное значение P_{m0} :

$$\begin{aligned}
 P_{m4} = & P_{m0} + \Omega_0^2 \int_0^{T_{bb}} a(t_0 + \Delta t) d\Delta t + 2 \frac{\Omega_0^2}{\Delta t_{12}} \int_0^{\Delta t_{12}} \left(\int_0^{\Delta t'} a(t_1 + \Delta t'') d\Delta t'' \right) d\Delta t' - \\
 & - \Omega_0^2 \int_0^{\Delta t_{12}} a(t_1 + \Delta t) d\Delta t - \Omega_0^2 \int_0^{T_{bb}} a(t_0 + T_s / 2 + \Delta t) d\Delta t \\
 & - \frac{2\Omega_0^2}{\Delta t_{12}} \int_0^{\Delta t_{12}} \left(\int_0^{\Delta t'} a(t_1 + \frac{T_s}{2} + \Delta t'') d\Delta t'' \right) d\Delta t' + \Omega_0^2 \int_0^{\Delta t_{12}} a(t_1 + \frac{T_s}{2} + \Delta t) d\Delta t.
 \end{aligned}$$

Дальше выражаем интегралы через спектр $a(t)$:

$$\begin{aligned}
 a(t) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a_{\omega}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad a_{\omega}(\omega) = \int_0^T a(t) e^{-i\omega t} dt, \\
 \int_0^{\Delta t} a(t_1 + \Delta t') d\Delta t' = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a_{\omega}(\omega) e^{i\omega t_1} \frac{e^{i\omega \Delta t} - 1}{i\omega} d\omega, \\
 \int_0^{\Delta t} \left(\int_0^{\Delta t'} a(t_1 + \Delta t'') d\Delta t'' \right) d\Delta t' = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_{\omega}(\omega)}{i\omega} e^{i\omega t_1} \left(\frac{1}{i\omega} (e^{i\omega \Delta t} - 1 - i\omega \Delta t) \right) d\omega, \\
 P_{m4} - P_{m0} = & \Omega_0^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a_{\omega}(\omega) e^{i\omega t_0} \left(1 - e^{i\omega T_s / 2} \right) \cdot \\
 & \cdot \left\{ \frac{e^{i\omega T_{bb}} - 1}{i\omega} + 2 \frac{e^{i\omega T_{BB}}}{\Delta t_{12}} \left(\frac{e^{i\omega \Delta t_{12}} - 1 - i\omega \Delta t_{12}}{(i\omega)^2} \right) - e^{i\omega T_{BB}} \frac{e^{i\omega \Delta t_{12}} - 1}{i\omega} \right\} d\omega = \\
 = & \Omega_0^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_{\omega}(\omega)}{i\omega} e^{i\omega t_0} \left(1 - e^{i\omega T_s / 2} \right) \cdot \\
 & \cdot \left\{ \left(e^{i\omega \left(\frac{T_s}{2} - \Delta t_{12} \right)} - 1 \right) + 2 e^{i\omega \left(\frac{T_s}{2} - \Delta t_{12} \right)} e^{i\frac{\omega \Delta t_{12}}{2}} \left(\frac{\sin \left(\frac{\omega \Delta t_{12}}{2} \right)}{\omega \Delta t_{12} / 2} - \cos \left(\frac{\omega \Delta t_{12}}{2} \right) \right) \right\} d\omega
 \end{aligned}$$

– это приращение P_m за период синхротронных колебаний от $t = t_0$ до $t = t_0 + T_s(P_m)$.

Приращение P_m за n периодов вычисляется так же, как было сделано выше для барьерного напряжения. В результате получаем:

$$P_{m4n} - P_{m0} = \frac{\Omega_0^2 \Delta t_{12}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) e^{i\omega t_0} d\omega,$$

$$B(\omega) = a_\omega(\omega) \frac{1 - e^{i\omega T_s}}{1 - e^{i\omega T_s}} \left(1 - e^{i\omega T_s/2}\right) \left\{ \frac{e^{i\omega T_s/2} - 1}{i\omega \Delta t_{12}} - e^{i\omega T_{bb}} \frac{(e^{i\omega \Delta t_{12}} - 1 - i\omega \Delta t_{12})}{(i\omega \Delta t_{12})^2 / 2} \right\}.$$

Средний по времени квадрат приращения равен

$$\begin{aligned} \left\langle |(P_{m4n} - P_{m0})|^2 \right\rangle_T &= \left(\frac{\Omega_0^2 \Delta t_{12}}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) e^{i(\omega - \omega')t_0} B(\omega')^* d\omega d\omega' = \\ &= \left(\frac{\Omega_0^2 \Delta t_{12}}{2\pi} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) \frac{\sin((\omega - \omega')T/2)}{(\omega - \omega')T/2} B(\omega')^* d\omega d\omega' \stackrel{T \rightarrow \infty}{=} \\ &= \left(\frac{\Omega_0^2 \Delta t_{12}}{2\pi} \right)^2 \frac{2\pi}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) \delta(\omega - \omega') B(\omega')^* d\omega d\omega' = \left(\frac{\Omega_0^2 \Delta t_{12}}{2\pi} \right)^2 \frac{2\pi}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |B(\omega)|^2 d\omega, \end{aligned}$$

Так как $S_a(\omega) = \frac{1}{T} |a_\omega(\omega)|^2$, коэффициент диффузии равен

$$\begin{aligned} A_{2a} &= \frac{1}{nT_s} \left\langle |(P_{m4n} - P_{m0})|^2 \right\rangle_T = \\ &= \frac{1}{nT_s} \left(\frac{\Omega_0^2 T_s / 2}{2\pi} \right)^2 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} S_a(\omega) \frac{|(1 - e^{i\omega T_s/2})|^2}{(\omega T_s / 2)^2} \left| \frac{\sin(\omega T_s / 2)}{\sin(\omega T_s / 2)} \right|^2 \cdot \\ &\cdot \left[\left(e^{i\omega \left(\frac{T_s}{2} - \Delta t_{12} \right)} - 1 \right) + 2e^{i\omega \left(\frac{T_s - \Delta t_{12}}{2} \right)} \left(\frac{\sin\left(\frac{\omega \Delta t_{12}}{2} \right)}{\omega \Delta t_{12} / 2} - \cos\left(\frac{\omega \Delta t_{12}}{2} \right) \right) \right]^2 d\omega \stackrel{n \gg 1}{=} \\ &= \left(\frac{\Omega_0^2}{2} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} S_a(\omega) \frac{|(1 - e^{i\omega T_s/2})|^2}{(\omega T_s / 2)^2} \sum_k \delta(\omega T_0 / 2 - k\pi) \cdot \\ &\cdot \left[e^{i\omega \left(\frac{T_s}{2} - \Delta t_{12} \right)} - 1 + 2e^{i\omega \left(\frac{T_s - \Delta t_{12}}{2} \right)} \left(\frac{\sin\left(\frac{\omega \Delta t_{12}}{2} \right)}{\omega \Delta t_{12} / 2} - \cos\left(\frac{\omega \Delta t_{12}}{2} \right) \right) \right]^2 d\left(\frac{\omega T_s}{2} \right) = \\ &= \left(\frac{2\Omega_0^4}{\pi \Omega_s P_m} \right)^2 \sum_{k \neq \text{ев.}} S_a(k\Omega_s) \left| \frac{\sin(k\Omega_s T_b / 2)}{k^2} \right|^2, \end{aligned}$$

что совпадает с (6.2).

Пб. Пересчет плотности спектральной мощности шумового возмущения амплитуды барьерного и ускоряющего напряжения и дрожания фронта барьерного напряжения в плотность спектральной мощности напряжения

Шумовое возмущение амплитуды барьерного и ускоряющего напряжения и дрожание фронтов барьерного напряжения в этой работе описываются как

$$U_b(t) = U_{b0} + \Delta U_b(t) = U_{b0}(1 + a_b(t))$$

$$U_a(t) = U_{a0} + \Delta U_a(t) = U_{a0}(1 + a_a(t)) = U_{a0} + U_{b0}a_a'(t),$$

$$a_a'(t) = a_a(t) \frac{U_{a0}}{U_{b0}},$$

$$\varphi_k(t) = \varphi_{0k} + \delta\varphi_{fk}(t),$$

$$\varphi_{02} = \varphi_{01} + \varphi_b, \quad \varphi_{04} = \varphi_{03} + \varphi_b.$$

Суммарное напряжение без шумов равно

$$U_{\text{невозм}}(t, \varphi) = U_{b0}(-\Phi(\varphi - \varphi_{10})\Phi(\varphi_{20} - \varphi) + \Phi(\varphi - \varphi_{30})\Phi(\varphi_{40} - \varphi)) + U_{a0}(\Phi(\varphi - 0))\Phi(\pi - \varphi) - \Phi(\varphi - \pi)\Phi(2\pi - \varphi)). \quad (\text{Пб.1})$$

Суммарное напряжение с учетом всех возмущений записывается как

$$U(t, \varphi) = U_b(t)(-\Phi(\varphi - \varphi_1(t))\Phi(\varphi_2(t) - \varphi) + \Phi(\varphi - \varphi_3(t))\Phi(\varphi_4(t) - \varphi)) + U_a(t)(\Phi(\varphi - 0))\Phi(\pi - \varphi) - \Phi(\varphi - \pi)\Phi(2\pi - \varphi)). \quad (\text{Пб.2})$$

Отметим, что в зависимости $U(t, \varphi)$ выделена быстрая зависимость от времени через $\varphi = \omega_{jf}t$ и медленная через зависимость от времени $a_b(t), \delta\varphi_{fk}(t), a_a(t)$.

Определим плотность спектральной мощности этого напряжения с учетом всех шумов.

1. Амплитудное возмущение барьерного напряжения.

Напряжение (Пб.1) с шумовым возмущением амплитуды напряжения одного импульса барьерного напряжения записывается как

$$U_b(t, \varphi) = U_{b0}(-\Phi(\varphi - \varphi_{01})\Phi(\varphi_{02} - \varphi) + (1 + a_b(t))\Phi(\varphi - \varphi_{03})\Phi(\varphi_{04} - \varphi)),$$

$$\varphi = \omega_{jf}t.$$

Относительное возмущение амплитуды барьерного напряжения $a_b(t)$ выражается через его спектр $a_{b\omega}(\omega)$ как

$$a_b(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a_{b\omega}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

$U_b(t, \omega_{rf}t)$ выражается через гармоники невозмущенного барьерного напряжения и спектр шумового возмущения амплитуды как

$$\begin{aligned} U_b(t) &= U_{b0} \sum_n \left(u_{bn} e^{in\omega_{rf}t} + u_{b2n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a_{b\omega}(\omega) e^{i(n\omega_{rf} + \omega)t} d\omega \right) = \\ &= U_{b0} \sum_n u_{bn} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(2\pi\delta(\omega - n\omega_{rf}) + \frac{u_{b2n}}{u_{bn}} a_{b\omega}(\omega - n\omega_{rf}) \right) e^{i\omega t} d\omega \right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} u_{b1n} &= \frac{1}{T_{rf}} \int_{-T_{rf}/2}^{T_{rf}/2} \left(-\Phi(\omega_{rf}t - \varphi_{01}) \Phi(\omega_{rf}t - \varphi) \right) e^{-in\omega_{rf}t} dt = e^{-in(\varphi_{01} + \varphi_{02})/2} \frac{\sin(n\varphi_b/2)}{\pi n}, \\ u_{b2n} &= \frac{1}{T_{rf}} \int_{-T_{rf}/2}^{T_{rf}/2} \left(\Phi(\omega_{rf}t - \varphi_{03}) \Phi(\varphi_{04} - \omega_{rf}t) \right) e^{-in\omega_{rf}t} dt = e^{-in(\varphi_{04} + \varphi_{03})/2} \frac{\sin(n\varphi_b/2)}{\pi n}, \\ u_{bn} &= u_{b1n} + u_{b2n} \end{aligned} \tag{П6.3}$$

– амплитуды n -х гармоник спектра последовательностей отрицательных или положительных импульсов барьерного напряжения (П6.1).

Таким образом, спектр $U_{b\omega}(\omega)$ напряжения $U_b(t)$ с шумовым возмущением амплитуды одного (положительного) импульса барьерного напряжения имеет вид

$$U_{b\omega}(\omega) = U_{b0} \sum_n u_{bn} \left(2\pi\delta(\omega - n\omega_{rf}) + \frac{u_{b2n}}{u_{bn}} a_{b\omega}(\omega - n\omega_{rf}) \right),$$

А плотность спектральной мощности барьерного напряжения с шумовым возмущением амплитуды напряжения импульса барьерного напряжения записывается как

$$\begin{aligned} S_{U_b}(\omega) &= \left\langle \frac{|U_{b\omega}|^2}{T} \right\rangle = U_{b0}^2 \sum_n |u_{bn}|^2 \left\{ 2\pi\delta(\omega - n\omega_{rf}) + \left| \frac{u_{b2n}}{u_{bn}} \right|^2 \frac{|a_{b\omega}(\omega - n\omega_{rf})|^2}{T} \right\} = \\ &= U_{b0}^2 \sum_n |u_{bn}|^2 \left\{ 2\pi\delta(\omega - n\omega_{rf}) + \left| \frac{u_{b2n}}{u_{bn}} \right|^2 S_b(\omega - n\omega_{rf}) \right\}, \end{aligned}$$

где $S_b(\omega) = \left\langle \frac{1}{T} |a_{b\omega}(\omega)|^2 \right\rangle$ – плотность спектральной мощности шумового возмущения амплитуды барьерного напряжения.

Если относительные возмущения амплитуд положительного и отрицательного импульса барьерного напряжения синфазны или противофазны, то

$$U_{b\omega}(\omega) = U_{b0} \sum_n u_{bn} \left(2\pi\delta(\omega - n\omega_{rf}) + \frac{u_{b1n} \pm u_{b2n}}{u_{bn}} a_{b\omega}(\omega - n\omega_{rf}) \right),$$

$$S_{Ub}(\omega) = U_{b0}^2 \sum_n |u_{bn}|^2 \left\{ 2\pi\delta(\omega - n\omega_{rf}) + \left| \frac{u_{b1n} \pm u_{b2n}}{u_{bn}} \right|^2 S_b(\omega - n\omega_{rf}) \right\}. \quad (\text{Пб.4})$$

Если относительные возмущения амплитуд положительного и отрицательного импульса барьерного напряжения независимы (с одинаковыми $S_b(\omega - n\omega_{rf})$), то

$$S_{Ub}(\omega) = U_{b0}^2 \sum_n \left\{ |u_{bn}|^2 2\pi\delta(\omega - n\omega_{rf}) + (|u_{b1n}|^2 + |u_{b2n}|^2) S_b(\omega - n\omega_{rf}) \right\}.$$

В окрестности одной гармоники $n\omega_{rf}$ при усреднении спектра в полосе $\Delta\omega_{sp}$

$$S_{Ub}(\omega) = U_{b0}^2 \left(\frac{\sin(n\varphi_b / 2)}{\pi n} \right)^2 \left| 2 \sin(n(\varphi_{bb} + \varphi_b) / 4) \right|^2 \cdot \frac{2\pi}{\Delta\omega_{sp}} \cdot$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_n(\omega - n\omega_{rf}) + \frac{\Delta\omega_{sp}}{2\pi} S_b(\omega - n\omega_{rf}), \quad (\text{синфаз.}) \\ \Phi_n(\omega - n\omega_{rf}) + \frac{\Delta\omega_{sp}}{2\pi} \left| \text{ctg} \left(\frac{n(\pi - \varphi_b)}{4} \right) \right|^2 S_b(\omega - n\omega_{rf}), \quad (\text{противофаз.}) \end{array} \right.$$

$$\Phi_n(\Delta\omega) = \Phi(\Delta\omega + \Delta\omega_{sp} / 2) \Phi(\Delta\omega_{sp} / 2 - \Delta\omega), \quad \Delta\omega = \omega - n\omega_{rf}.$$

На дисплее спектрометра виден относительный спектр

$$S_{rel}(\Delta\omega) =$$

$$= C_0 \cdot \left\{ \begin{array}{l} \Phi_n(\Delta\omega) + \frac{\Delta\omega_{sp}}{2\pi} S_b(\Delta\omega), \quad (\text{синфаз.}), \\ \Phi_n(\Delta\omega) + \frac{\Delta\omega_{sp}}{2\pi} \left| \text{ctg} \left(\frac{n(\pi - \varphi_b)}{4} \right) \right|^2 S_b(\Delta\omega), \quad (\text{противофаз.}), \end{array} \right.$$

$$\Delta\omega = \omega - n\omega_{rf}.$$

При уменьшении $\Delta\omega_{sp}$ $S_{rel}(0) \rightarrow C_0$. При достаточно малом $\Delta\omega_{sp}$ для $|\Delta\omega| > |\Delta\omega_{sp} / 2|$

$$S_b(\Delta\omega) = \frac{2\pi}{\Delta\omega_{sp}} \frac{S_{rel}(\Delta\omega)}{S_{rel}(0)} \left\{ \frac{1}{\left| \text{tg} \left(n(\pi - \varphi_b) / 4 \right) \right|^2} \right\}.$$

Для оценки сверху берем максимальное значение по рассмотренным вариантам сочетания фаз возмущений напряжений двух импульсов:

$$S_{b\max}(\Delta\omega) = \frac{2\pi}{\Delta\omega_{sp}} \frac{S_{rel}(\Delta\omega)}{S_{rel}(0)} \max \left\{ 1, \left| \operatorname{tg} \left(n(\pi - \varphi_b) / 4 \right) \right|^2 \right\}.$$

Для $n = 1, \varphi_b = \pi / 6$

$$S_{b\max}(\Delta\omega) = \frac{2\pi}{\Delta\omega_{sp}} \frac{S_{rel}(\Delta\omega)}{S_{rel}(0)} \max \{1, 0.59\} = \frac{2\pi}{\Delta\omega_{sp}} \frac{S_{rel}(\Delta\omega)}{S_{rel}(0)}.$$

2. Дрожание фронта барьерного напряжения.

Пусть имеет место дрожание одного фронта одного импульса барьерного напряжения $\varphi_3(t) = \varphi_{30} - \delta\varphi_{f3}(t)$. Это приводит к добавке напряжения вида:

$$U(t) = U_{невозм}(t) + \Delta U_{f3}(t),$$

$$\Delta U_{f3}(t) = U_{b0} \begin{cases} \Phi(\Delta\varphi - \delta\varphi_{f3}(t))\Phi(-\Delta\varphi), & \delta\varphi_{f3}(t) < 0, \\ -\Phi(\delta\varphi_{f3}(t) - \Delta\varphi)\Phi(\Delta\varphi), & \delta\varphi_{f3}(t) > 0, \end{cases}$$

$$\Delta\varphi = \omega_f t - \varphi_{30}, \quad |\delta\varphi_{f3}(t)| < \varphi_b$$

Возмущение координаты фронта барьера $\delta\varphi_{f3}(t)$ выражается через ее спектр $\delta\varphi_{3\omega}(\omega)$ как

$$\delta\varphi_{f3}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta\varphi_{3\omega}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Отметим, что

$$\begin{aligned} U(t) &= U_{b0} (\Phi(\Delta\varphi)\Phi(\varphi_b - \Delta\varphi)) - U_{b0} \Phi(\Delta\varphi)\Phi(\delta\varphi_{f3}(t) - \Delta\varphi) = \\ &= U_{b0} \Phi(\omega_f t - \varphi_{30})\Phi(\varphi_{40} - \omega_f t) - U_{b0} \Phi(\omega_f t - \varphi_{30})\Phi(\delta\varphi_{f3}(t_m) - \omega_f t + \varphi_{30}) = \\ &= U_{b0} \left(\sum_n (u_{bn} + \delta u_{f3n}(t_m)) e^{in\omega_f t} \right). \end{aligned}$$

Здесь мы разделили медленное изменение $\delta\varphi_{f3}(t_m)$ и быстрое изменение фазы $\varphi = \omega_f t$ и провели разложение в ряд Фурье быстрых колебаний. u_{bn} вычисляется как (Пб.3), а при $n\delta\varphi_{f3}(t_m) / 2 \ll 1$

$$\begin{aligned} \delta u_{f3n}(t_m) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi_{30}}^{\varphi_{30} + \delta\varphi_{f3}(t_m)} e^{-in\varphi} d\varphi = e^{-in(\varphi_{30} + \delta\varphi_{f3}(t_m)/2)} \frac{\sin(n\delta\varphi_{f3}(t_m)/2)}{n\pi} \approx \\ &\approx e^{-in\varphi_{30}} \frac{\delta\varphi_{f3}(t_m)}{2\pi}. \end{aligned}$$

Получили:

$$\begin{aligned}
U(t) &= U_{b0} \left(\sum_n \left(u_{bn} + \frac{e^{-in\varphi_{30}}}{2\pi} \delta\varphi_{f3}(t_M) \right) e^{in\omega_{rf}t} \right) = \\
&= U_{b0} \left(\sum_n \left(u_{bn} + \frac{e^{-in\varphi_{30}}}{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta\varphi_{3\omega}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right) e^{in\omega_{rf}t} \right) = \\
&= U_{b0} \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} u_{bn} \left[2\pi\delta(\omega - n\omega_{rf}) + \frac{e^{-in\varphi_{30}} \delta\varphi_{3\omega}(\omega - n\omega_{rf})}{u_{bn}(2\pi)} \right] e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}.
\end{aligned}$$

Спектр этого напряжения равен

$$U_{b\omega} = U_{b0} \sum_n u_{bn} \left[2\pi\delta(\omega - n\omega_{rf}) + \frac{e^{-in\varphi_{30}} \delta\varphi_{3\omega}(\omega - n\omega_{rf})}{(2\pi)u_{bn}} \right],$$

С учетом вклада возмущений всех четырех фронтов в спектр напряжения, получаем:

$$U_{b\omega} = U_{b0} \sum_n u_{bn} \left[2\pi\delta(\omega - n\omega_{rf}) + \frac{\delta\varphi_{\Sigma\omega}(\omega - n\omega_{rf})}{(2\pi)u_{bn}} \right],$$

где

$$\begin{aligned}
\delta\varphi_{\Sigma\omega}(\omega - n\omega_{rf}) &= +e^{-in\varphi_{10}} \delta\varphi_{1\omega}(\omega - n\omega_{rf}) - e^{-in\varphi_{20}} \delta\varphi_{2\omega}(\omega - n\omega_{rf}) - \\
&- e^{-in\varphi_{30}} \delta\varphi_{3\omega}(\omega - n\omega_{rf}) + e^{-in\varphi_{40}} \delta\varphi_{4\omega}(\omega - n\omega_{rf}).
\end{aligned}$$

Плотность спектральной мощности равна

$$\begin{aligned}
S_{U_{\delta\varphi}}(\omega) &= \left\langle \frac{|U_{b\omega}|^2}{T} \right\rangle = U_{b0}^2 \sum_n |u_{bn}|^2 \left\{ 2\pi\delta(\omega - n\omega_{rf}) + \frac{S_{\Sigma\delta\varphi}(\omega - n\omega_{rf})}{(2\pi)^2 |u_{bn}|^2} \right\}, \quad (П6.5) \\
S_{\Sigma\delta\varphi}(\omega - n\omega_{rf}) &= \left\langle \frac{1}{T} \left| \delta\varphi_{\Sigma\omega}(\omega - n\omega_{rf}) \right|^2 \right\rangle.
\end{aligned}$$

В окрестности одной гармоники $n\omega_{rf}$ при усреднении спектра в полосе $\Delta\omega_{sp}$ относительный спектр равен

$$\begin{aligned}
|u_{bn}|^2 &= \left(\frac{\sin(n\varphi_b/2)}{\pi n} \right)^2 \left| 2\sin(n(\pi - \varphi_b)/4) \right|^2, \\
S_{rel}(\Delta\omega) &= C_0 \left\{ \Phi_n(\Delta\omega) + \frac{\Delta\omega_{sp}}{2\pi} \frac{S_{\Sigma\delta\varphi}(\omega - n\omega_{rf})}{(2\pi)^2 |u_{bn}|^2} \right\}.
\end{aligned}$$

При уменьшении $\Delta\omega_{sp}$ $S_{rel}(0) \rightarrow C_0$. При достаточно малом $\Delta\omega_{sp}$ для $|\Delta\omega| > |\Delta\omega_{sp}/2|$

$$S_{\Sigma\delta\varphi}(\Delta\omega) = (2\pi)^2 |u_{bn}|^2 \frac{2\pi}{\Delta\omega_{sp}} \frac{S_{rel}(\Delta\omega)}{S_{rel}(0)}.$$

Если возмущения всех четырех фронтов независимы и имеют одинаковую среднеквадратичную величину, то

$$S_{\Sigma\delta\varphi}(\omega - n\omega_{rf}) = 4S_{\delta\varphi 3}(\omega - n\omega_{rf}).$$

2) Если, возмущения фронтов когерентны, то

$$\begin{aligned} S_{\Sigma\delta\varphi}(\omega - n\omega_{rf}) &= S_{\delta\varphi 3}(\omega - n\omega_{rf}) \left| \left(1 + s_0 e^{in\varphi_b}\right) + s_1 (-1)^n \left(1 + s_0 e^{-in\varphi_b}\right) \right|^2 = \\ &= S_{\delta\varphi 3}(\omega - n\omega_{rf}) \left((1 + s_{11})^2 (1 + s_0 \cos(n\varphi_b))^2 + (s_0 \sin(n\varphi_b))^2 (1 - s_{11})^2 \right). \end{aligned}$$

Здесь $s_0 = \pm 1$ означает синфазное и противофазное возмущение заднего и переднего фронта каждого барьера, а $s_1 = \pm 1$ - синфазное и противофазное возмущение фронтов двух барьеров, $s_{11} = s_1 \cdot (-1)^n$.

$$s_{11} = 1:$$

$$\begin{aligned} S_{\Sigma\delta\varphi}(\omega - n\omega_{rf}) &= 4S_{\delta\varphi 3}(\omega - n\omega_{rf}) (1 + s_0 \cos(n\varphi_b))^2 = \\ &= 16S_{\delta\varphi 3}(\omega - n\omega_{rf}) \begin{cases} \cos(n\varphi_b / 2)^4, & s_0 = 1, \\ \sin(n\varphi_b / 2)^4, & s_0 = -1; \end{cases} \end{aligned}$$

$$s_{11} = -1:$$

$$\begin{aligned} S_{\Sigma\delta\varphi}(\omega - n\omega_{rf}) &= 4S_{\delta\varphi 3}(\omega - n\omega_{rf}) (\sin(n\varphi_b))^2 = \\ &= 16S_{\delta\varphi 3}(\omega - n\omega_{rf}) \cos(n\varphi_b / 2)^2 \sin(n\varphi_b / 2)^2. \end{aligned}$$

Для оценки сверху $S_{\delta\varphi 3}(\omega - n\omega_{rf})$ берем максимальное значение по рассмотренным вариантам сочетания знаков возмущений координат заднего и переднего фронтов и знаков возмущений координат фронтов двух импульсов

$$S_{\delta\varphi 3}(\omega - n\omega_{rf}) = \frac{S_{\Sigma\delta\varphi}(\omega - n\omega_{rf})}{16 \min(\cos(n\varphi_b / 2)^4, \sin(n\varphi_b / 2)^4)}$$

$$\varphi_b = \pi / 6, \quad n = 1, 2, 3$$

$$S_{\delta\varphi 3}(\omega - n\omega_{rf}) = \frac{S_{\Sigma\delta\varphi}(\omega - n\omega_{rf})}{16 \sin(n\varphi_b / 2)^4}$$

$$\begin{aligned} S_{\delta\varphi 3 \max}(\Delta\omega) &= \frac{(2\pi)^2 |u_{bn}|^2}{16 \sin(n\varphi_b / 2)^4} \frac{2\pi}{\Delta\omega_{sp}} \frac{S_{rel}(\Delta\omega)}{S_{rel}(0)} = \\ &= \frac{\sin(n(\pi - \varphi_b) / 4)^2}{n^2 \sin(n\varphi_b / 2)^2} \frac{2\pi}{\Delta\omega_{sp}} \frac{S_{rel}(\Delta\omega)}{S_{rel}(0)}. \end{aligned}$$

Для $n = 1$

$$S_{\delta\varphi_{3\max}}(\Delta\omega) = 5.53 \frac{2\pi}{\Delta\omega_{sp}} \frac{S_{rel}(\Delta\omega)}{S_{rel}(0)}.$$

3. Амплитудное возмущение ускоряющего напряжения

Ускоряющее напряжение с шумовым возмущением амплитуды записывается как

$$U(t, \varphi) = U_{a0} (1 + a_a(t)) (\Phi(\varphi - 0)) \Phi(\pi - \varphi) - \Phi(\varphi - \pi) \Phi(2\pi - \varphi).$$

Относительное возмущение амплитуды ускоряющего напряжения $a_a(t)$ выражается через его спектр $a_{a\omega}(\omega)$ как

$$a_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a_{a\omega}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Тогда

$$U(t) = U_{a0} \sum_n u_{an} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (2\pi\delta(\omega) + a_{a\omega}(\omega)) e^{i(\omega + n\omega_{rf})t} d\omega,$$

где

$$u_{an} = \frac{1}{T_{rf}} \int_{-T_{rf}/2}^{T_{rf}/2} (\Phi(\varphi - 0)) \Phi(\pi - \varphi) - \Phi(\varphi - \pi) \Phi(2\pi - \varphi) e^{-in\omega_{rf}t} dt = \frac{(1 - (-1)^n)}{\pi in}.$$

Таким образом,

$$U(t) = U_{a0} \sum_n u_{an} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (2\pi\delta(\omega - n\omega_{rf}) + a_{a\omega}(\omega - n\omega_{rf})) e^{i\omega t} d\omega,$$

спектр ускоряющего напряжения записывается как

$$U_{a\omega}(\omega) = U_{a0} \sum_n u_{a2n} (2\pi\delta(\omega - n\omega_{rf}) + a_{a\omega}(\omega - n\omega_{rf})) e^{i\omega t},$$

а плотность спектральной мощности равна

$$S_{Ua}(\omega) = U_{a0}^2 \sum_n \left| \frac{(1 - (-1)^n)}{\pi n} \right|^2 (2\pi\delta(\omega - n\omega_{rf}) + S_a(\omega - n\omega_{rf})),$$

(П6.6)

где $S_a(\omega) = \left\langle \frac{1}{T} |a_{a\omega}(\omega)|^2 \right\rangle$.

В окрестности одной гармоники $n\omega_{rf}$ при усреднении спектра в полосе $\Delta\omega_{sp}$ относительный спектр равен

$$S_{rel}(\Delta\omega) = C_0 \left\{ \Phi_n(\Delta\omega) + \frac{\Delta\omega_{sp}}{2\pi} S_a(\omega - n\omega_{rf}) \right\}.$$

При уменьшении $\Delta\omega_{sp}$ $S_{rel}(0) \rightarrow C_0$. При достаточно малом $\Delta\omega_{sp}$ для $|\Delta\omega| > |\Delta\omega_{sp} / 2|$, для нечетных n

$$S_a(\omega - n\omega_{rf}) = \frac{2\pi}{\Delta\omega_{sp}} \frac{S_{rel}(\Delta\omega)}{S_{rel}(0)}.$$

В том случае, если ускорения нет и $\Delta U_a(t) = U_{b0}a'(t)$ описывает шумы в промежутке $\varphi \in [\varphi_{f1}, \varphi_{f4}]$, спектр напряжения равен

$$S_{Ua}(\omega) = U_{b0}^2 \sum_n \left| \frac{(1 - (-1)^n)}{\pi n} \right|^2 S_{a'}(\omega - n\omega_{rf}), \quad (\text{П6.7})$$

а плотность спектральной мощности барьерного напряжения с шумовым возмущением амплитуды напряжения импульса барьерного напряжения записывается как

$$S_{Ub}(\omega) = \left\langle \frac{|U_{b\omega}|^2}{T} \right\rangle = U_{b0}^2 \sum_n \left\{ |u_{bn}|^2 2\pi\delta(\omega - n\omega_{rf}) + \left| \frac{(1 - (-1)^n)}{\pi n} \right|^2 S_{a'}(\omega - n\omega_{rf}) \right\}.$$

В окрестности одной гармоники $n\omega_{rf}$ при усреднении спектра в полосе $\Delta\omega_{sp}$ относительный спектр равен

$$S_{rel}(\Delta\omega) = C_0 \left\{ \Phi_n(\Delta\omega) + \frac{\Delta\omega_{sp}}{2\pi} \left| \frac{(1 - (-1)^n)}{\pi n} \right|^2 \frac{1}{|u_{bn}|^2} S_{a'}(\omega - n\omega_{rf}) \right\},$$

$$|u_{bn}|^2 = \left(\frac{\sin(n\varphi_b / 2)}{\pi n} \right)^2 \left| 2\sin(n(\pi - \varphi_b) / 4) \right|^2.$$

При уменьшении $\Delta\omega_{sp}$ $S_{rel}(0) \rightarrow C_0$. При достаточно малом $\Delta\omega_{sp}$ для $|\Delta\omega| > |\Delta\omega_{sp} / 2|$, для нечетных n

$$S_{a'}(\omega - n\omega_{rf}) = \frac{2\pi}{\Delta\omega_{sp}} \sin(n\varphi_b / 2)^2 \sin(n(\pi - \varphi_b) / 4)^2 \frac{S_{rel}(\Delta\omega)}{S_{rel}(0)}.$$

Для $n = 1, \varphi_b = \pi / 6$

$$S_{a'}(\omega - n\omega_{rf}) = 0.025 \frac{2\pi}{\Delta\omega_{sp}} \frac{S_{rel}(\Delta\omega)}{S_{rel}(0)}.$$

В окрестности одной гармоники $n\omega_{rf}$ при усреднении спектра в полосе $\Delta\omega_{sp}$ относительный спектр равен $S_{rel}(\Delta\omega)$. При уменьшении $\Delta\omega_{sp}$ $S_{rel}(0) \rightarrow const$.

Итак, при достаточно малом $\Delta\omega_{sp}$ для $|\Delta\omega| > |\Delta\omega_{sp} / 2|$, для $n = 1, \varphi_b = \pi / 6$

$$\begin{aligned}
 S_{b\max}(\Delta\omega) &= \frac{2\pi}{\Delta\omega_{sp}} \frac{S_{rel}(\Delta\omega)}{S_{rel}(0)}, \\
 S_{\delta\varphi 3\max}(\Delta\omega) &= 5.53 \frac{2\pi}{\Delta\omega_{sp}} \frac{S_{rel}(\Delta\omega)}{S_{rel}(0)} \\
 S_a(\Delta\omega) &= \frac{2\pi}{\Delta\omega_{sp}} \frac{S_{rel}(\Delta\omega)}{S_{rel}(0)}, \\
 S_{a'}(\Delta\omega) &= 0.025 \frac{2\pi}{\Delta\omega_{sp}} \frac{S_{rel}(\Delta\omega)}{S_{rel}(0)}. \tag{П6.8}
 \end{aligned}$$

Литература

- [1] Техническое задание для проектирования барьерной ускоряющей системы коллайдера «НИКА» и дальнейшие уточнения.
- [2] G. Dome. Diffusion due to RF noise. CAS-1985, CERN 87-03, p.370.
- [3] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Механика. М., «Наука», 1973.
- [4] А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. Интегралы и ряды. М., «Наука», 1981.
- [5] В.В. Пархомчук, А.Н. Скринский. Электронное охлаждение – 35 лет развития. УФН т.170, N5, май 2000, с. 473.

Список используемых обозначений.

$a_b(t)$ - относительное шумовое возмущение амплитуды барьерного напряжения U_{b0} ;

$a_a(t)$ - относительное шумовое возмущение амплитуды ускоряющего напряжения U_{a0} ;

A_2 - коэффициент диффузии для уравнения Фоккера-Планка;

A_{20} - коэффициент диффузии в отсутствие ВЧ шумов.

A_{2n} , $n = b, a, f_j$, то есть A_{2b}, A_{2a}, A_{2f_j} - коэффициент диффузии из-за ВЧ шумов (возмущений амплитуды барьерного и ускоряющего напряжения и дрожания j -го фронта барьерного напряжения);

$c_{nk}(J), c_{nk}(P_m)$ - коэффициенты разложения в ряд Фурье возмущений потенциала из-за ВЧ шумов, k - номер гармоники, $n = b, a, f_j$ (для возмущений амплитуды барьерного и ускоряющего напряжения и дрожания j -го фронта барьерного напряжения);

E_k - кинетическая энергия частиц;

$f(P, \varphi)$ - двумерная функция распределения частиц на фазовой плоскости переменных фаза φ и скорость $P = \frac{d\varphi}{dt}$;

J, θ - действие и угол ($\theta = \Omega_s t$), канонически сопряженные переменные, к которым было выполнено каноническое преобразование от переменных φ, P ;

$H = P^2 / 2 + W(\varphi)$ - гамильтониан движения частицы с фазой φ и скоростью P ;

$P = \frac{d\Delta\varphi}{dt}$ - скорость перемещения частиц по фазе на фазовой плоскости;

P_m - амплитуда колебаний скорости P ;

P_{mb} - значение амплитуды колебаний скорости P_m , соответствующее сепаратрисе;

$q_{rf} = 1$ - кратность частоты первой гармоники барьерного напряжения частоте обращения частиц;

$S_{a,b,f}(\omega)$ - плотность спектральной мощности **относительного** шумового возмущения амплитуды ускоряющего или барьерного напряжения $a_{a,b}(t)$ или дрожания фронта барьерного напряжения $\Delta\varphi_f(t)$;

$S_{U_a, U_b, U_{\delta\varphi}}(\omega)$ - плотность спектральной мощности ускоряющего или барьерного **напряжения** в присутствии ВЧ шумов;

$T_b(P_m)$ - время движения внутри области барьерного напряжения для частицы с $P_m \leq P_{mb}$;

$T_{bb}(P_m)$ - время движения в промежутке между импульсами барьерного напряжения для частицы с $P_m \leq P_{mb}$;

$T_s(P_m)$ - период синхротронных колебаний частицы с амплитудой колебаний скорости P_m ;

U_{b0} - амплитуда барьерного напряжения;

U_{a0} - амплитуда ускоряющего напряжения;

$W(\varphi)$ - потенциал, созданный барьерным и ускоряющим напряжением;

$\tilde{W}_n(\varphi)$ - возмущение потенциала $W(\varphi)$ из-за ВЧ шумов, $n = b, a, f_j$ для относительного шумового возмущения амплитуды ускоряющего или барьерного напряжения $a_{a,b}(t)$ или дрожания фронта барьерного напряжения

$\Delta\varphi_f(t)$;

$\varphi = (\omega_{rf} - q_{rf}\omega_0)t$ - фаза частицы относительно первой гармоники барьерного напряжения;

φ_s - фаза равновесной частицы;

$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_s$ - отклонение частицы по фазе от равновесной;

$\delta\varphi_{f_j}(t)$ - дрожание j -го фронта барьерного напряжения;

φ_b - продолжительность по фазе импульса барьерного напряжения;

$\varphi_{bb} = \pi - 2\varphi_b$ - расстояние между соседними импульсами барьерного напряжения, формирующими сепаратрисы;

$\rho_m(P_m, t)$ - функция распределения частиц по амплитудам скорости P_m для данной потенциальной ямы;

σ_P - среднееквадратичное значение скорости P : $\sigma_P^2 = \int_0^{\infty} P^2 f(P, \varphi) dP_m$;

σ_{P_m} - среднееквадратичное значение амплитуды колебаний скорости P_m :

$\sigma_{P_m}(t)^2 = \int_0^{\infty} P_m^2 \rho_m(P_m, t) dP_m$;

$\sigma_{P_m0} = \sqrt{A_{20}\tau_0/2}$ - среднееквадратичное значение амплитуды колебаний скорости в отсутствие ВЧ шумов;

τ_0 - время затухания;

ω_s - частота обращения равновесной частицы;

ω_0 - частота обращения неравновесной частицы;

$\omega_{rf} = q_{rf}\omega_s$ - частота первой гармоники барьерного напряжения;

$\Omega_s(P_m) = 2\pi / T_s(P_m)$ - частота синхротронных колебаний;

Ω_0 - параметр размерности частоты: $\Omega_0^2 = |\ddot{\varphi}_b|$ - модуль ускорения внутри области барьерного напряжения;

ω_{\max} - максимальная частота полосы спектра ВЧ шума.

Оглавление

1. Постановка задачи.....	3
2. Обозначения и уравнения движения	5
3. Зависимость частоты колебаний частицы от амплитуды	6
4. Статическое распределение частиц по амплитудам	8
5. Уравнение Фоккера-Планка и зависимость среднеквадратичного разброса от времени.....	11
6. Коэффициенты диффузии для известной плотности спектральной мощности шума	14
7. Модель: шум с постоянной плотностью спектральной мощности в пределах заданной полосы частот.....	15
8. Гармоническое шумовое возмущение.....	16
9. Модель стационарного случайного возмущения для трэкинга.....	17
10. Сравнение прямого интегрирования уравнений движения по времени с результатами спектрального метода.....	22
11. Сравнение результатов трэкинга с результатами спектрального метода.....	23
12. Результаты расчетов.....	25
13. Измерения и расчет	30
14. Заключение	31
Приложения	32
П1. Статическое распределение частиц по амплитудам.....	32
П2. Поправка к гамильтониану при возмущении напряжений шумом	36
П3. Вычисление диффузионных коэффициентов для заданной плотности спектральной мощности шума	41
П4. Вычисление диффузионных коэффициентов для заданного гармонического возмущения.....	44
П5. Вычисление диффузионных коэффициентов прямым интегрированием по времени уравнений движения с возмущением	46
П6. Пересчет плотности спектральной мощности шумового возмущения амплитуды барьерного и ускоряющего напряжения и дрожания фронта барьерного напряжения в плотность спектральной мощности напряжения..	57
Литература	65
Список используемых обозначений	66

Н.В. Митянина, В.М. Петров

**Влияние нестабильности импульсного
барьерного и ускоряющего напряжений
на рост среднеквадратичного разброса
энергии частиц в коллайдере NICA**

N.V. Mityanina, V.M. Petrov

**Influence of RF noises of impulse barrier
and accelerating voltage on the growth
of particles energy dispersion in the collider NICA**

ИЯФ 2016-3

Ответственный за выпуск Я.В. Ракшун

Работа поступила 15.03. 2016 г.

Подписано в печать 16.03. 2016 г.

Сдано в набор 17.03. 2016 г.

Формат 60x90 1/16 Объем 0,7 печ.л., 0,6 уч.-изд.л.

Тираж 100 экз. Бесплатно. Заказ № 3

Обработано на РС и отпечатано
на ротапринтере «ИЯФ им. Г.И. Будкера» СО РАН,
Новосибирск, 630090, пр. Академика Лаврентьева, 11

Н.В. Митянина, В.М. Петров

**Влияние нестабильности импульсного
барьерного и ускоряющего напряжений
на рост среднеквадратичного разброса
энергии частиц в коллайдере NICA**

N.V. Mityanina, V.M. Petrov

**Influence of RF noises of impulse barrier
and accelerating voltage on the growth
of particles energy dispersion in the collider NICA**

ИЯФ 2016-3

Ответственный за выпуск Я.В. Ракшун

Работа поступила 15.03. 2016 г.

Подписано в печать 16.03. 2016 г.

Сдано в набор 17.03. 2016 г.

Формат 60x90 1/16 Объем 0,7 печ.л., 0,6 уч.-изд.л.

Тираж 100 экз. Бесплатно. Заказ № 3

Обработано на РС и отпечатано
на ротапринтере «ИЯФ им. Г.И. Будкера» СО РАН,
Новосибирск, 630090, пр. Академика Лаврентьева, 11